PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (C.L. Fisica) 14 Luglio 2017

La prova orale deve essere sostenuta entro il 10 Settembre 2017

A Sia f l'endomorfismo dello spazio reale $\mathbb{R}^4$ a cui, rispetto alla base canonica è associata la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 2 & 3 \\ c & d & 2 & 2 \\ e & f & 2 & 0 \\ g & h & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R},$$

i) **[3 punti]** Calcolare gli elementi incogniti della matrice A sapendo che: $f(e_2) = f(e_3) + f(e_4)$ e che $f^2(e_4) = f(f(e_4)) = 0$.

ii) **[4 punti]** Determinare il sottospazio vettoriale $H = Imf \cap Kerf$ e l'insieme delle controimmagini di H.

iii) **[3 punti]** Si trovi una base per gli autospazi di f.

B **[8 punti]** Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, siano γ la parabola di equazione $y - x^2 = 0$, r la retta di equazione $x - y - 1 = 0$ ed s la generica retta per O Denotata con A l'intersezione, distinta da O, di s e γ e con B l'intersezione di r e s, si determini l'equazione cartesiana del luogo Λ descritto, al variare di s nel fascio di centro O, dal punto medio M del segmento AB.

C Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$(x, y, z) \to (9x + 8z, 6y - z, -y + 6z).$$

Determinare:

a) **[1 punti]** la matrice associata a f rispetto alla base canonica;

b) **[3 punti]** dire se f è diagonalizzabile.

c) **[2 punti]** dire se f è iniettiva e/o suriettiva, e determinare una base di $Kerf$ e una base di Imf;

D a) **[4 punti]** Si determini il fascio di coniche $\mathcal{F}$ tangenti in $B(2, 2)$ alla retta di equazione $x+y-4 = 0$ e passanti per i punti $A(0, 2)$ e $O(0, 0)$

b) **[4 punti]** si determinino le parabole e le coniche degeneri di $\mathcal{F}$ e si determini, se esiste, una conica non degenere i cui asintoti siano perpendicolari.

c) **[5 punti]** Si determini e si studi la conica C luogo dei centri di simmetria delle coniche di $\mathcal{F}$.

E a) **[4 punti]** Si discuta al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} 13x + z = 0 \\ y - z = 2 - \gamma \\ x + z = \gamma - 2 \\ \gamma x + y + z = 0 \end{cases}$$

b) **[2 punti]** Si considerino ora le equazioni come rappresentative di piani dello spazio ordinario. Si interpretino i risultati del punto precedente in termini di incidenza e parallelismo.

c) **[3 punti]** Si ponga $\gamma = 0$. Dette r la retta rappresentata dalle prime 2 equazioni, s la retta rappresentata dalle ultime due equazioni, si trovi il piano π contenente r e parallelo a s.

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (C.L. Fisica) 30 Giugno 2017

La prova orale deve essere sostenuta entro il 10 Settembre 2017

A Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ munito della base canonica B. Sia f_k un endomorfismo la cui matrice associata rispetto a B é data da

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+5 \\ 0 & 3 & 0 \\ k+5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) **[4 punti]** Si trovino, al variare di $k \in \mathbb{R}$, gli autovalori di A_K e si dica se f_k è diagonalizzabile.

b) **[3 punti]** Si calcoli, al variare di $k \in \mathbb{R}$, $dim(Imf_k)$

B Data nello spazio la sfera S di equazione $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+5=0$ ed il piano α di equazione $x-2y+z-2=0$.

a) **[3 punti]** Si scriva l'equazione cartesiana del cono $\mathcal{C}$ di vertice $O = (0,0,0,)$ e direttrice l?intersezione della sfera S con il piano α.

b) **[2 punti]** Si scrivano le equazioni parametriche del cono $\mathcal{C}$

C **[7 punti]** Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, si scriva l'equazione dell'iperbole tale che la retta $x=-y$ sia un asintoto, il punto $P(0,3)$ sia un vertice e la tangente in esso abbia equazione $x-2y+6=0$. Della conica trovata si determinino gli assi il centro e l'ulteriore asintoto.

D Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$f((1,2,1)) = (4,4,6) \qquad f((0,-1,0)) = (0,9,0) \qquad f((1,3,-1)) = (5,6,11)$$

a) **[3 punti]** si dica se f è iniettiva e/o suriettiva, e si determini una base di $Kerf$ e una base di Imf;

b) **[3 punti]** Stabilire se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

E Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, si considerino la retta r e il piano π di equzioni cartesiane

$$r = \begin{cases} x+y-3z=0 \\ x+z=8 \end{cases} \qquad x+2y+z=9$$

a) **[3 punti]** Si scrivano le equazioni parametriche di r e π, e si determinino le eventuali intersezioni di r e π.

b) **[3 punti]** Si trovi il piano passante per l'origine del riferimento, parallelo a r e ortogonale a Π.

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (C.L. Fisica) 16 Giugno 2017

La prova orale deve essere sostenuta entro il 22 Luglio 2017

A a) **[4 punti]** Si determini l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ di coniche aventi centro in $C = (1, 0)$ e aventi come tangente in $P = (0, 1)$ la retta r di equazione $x - y + 1 = 0$.

b) **[3 punti]** Si classifichino le coniche di $\mathcal{F}$.

c) **[4 punti]** Si studi l'iperbole di $\mathcal{F}$ avente un asintoto parallelo all'asse x.

B Dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (0, 4, 5)$, Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ per cui

$$T(\mathbf{u}) = (9, 0, 9) \qquad T(\mathbf{v}) = (0, 9, 9) \qquad T(\mathbf{w}) = (0, 0, 0)$$

a) **[1 punti]** Si verifichi che $\mathcal{B}' = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ è una base di $\mathbb{R}^3$

b) **[1 punti]** Si determini la matrice associata a T rispetto alla base canonica;

c) **[3 punti]** dire se T è diagonalizzabile.

d) **[2 punti]** dire se T è iniettiva e/o suriettiva, e determinare una base di $KerT$ e una base di ImT;

e) **[3 punti]** si calcolino le componenti di $v(1, 2, 3)$ rispetto a $\mathcal{B}'$.

C Data nello spazio la curva $\mathcal{C}$ di equazioni

$$\begin{cases} x = z \\ x^2 + y + z^3 - 3 = 0 \end{cases}$$

a) **[2 punti]** Si scrivano le equazioni parametriche del cilindro $\mathcal{L}$ avente $\mathcal{C}$ come direttrice e generatrici parallele alla retta di equazioni $x = y = 2z$.

b) **[2 punti]** Si scriva l'equazione cartesiana del cilindro $\mathcal{L}$

D a) **[3 punti]** Si discuta al variare di $k \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} kx + 2y + z = k^2 - 1 \\ x + (k + 1)y + z = 0 \\ 3x + 2y + (4 - k)z = 0 \end{cases}$$

b) **[2 punti]** Si considerino ora le equazioni come rappresentative di una retta (le prime due) e di un piano dello spazio ordinario. Si interpretino i risultati del punto precedente in termini di incidenza e parallelismo.

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (C.L. Fisica) 14 Febbraio 2017

La prova orale deve essere sostenuta entro il 28 Febbraio 2017

A a) **[4 punti]** Si discuta al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} 13x + z = 0 \\ y - z = 2 - \gamma \\ x + z = \gamma - 2 \\ \gamma x + y + z = 0 \end{cases}$$

b) **[2 punti]** Si considerino ora le equazioni come rappresentative di piani dello spazio ordinario. Si interpretino i risultati del punto precedente in termini di incidenza e parallelismo.

c) **[3 punti]** Si ponenga $\gamma = 0$. Dette r la retta rappresentata dalle prime 2 equazioni, s la retta rappresentata dalle ultime due equazioni, si trovi il piano π contenete r e parallelo a s.

B Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$(x, y, z) \to (8x + 8y, 8x + 16y + 8z, 8y + 8z).$$

Determinare:

a) **[1 punti]** la matrice associata a f rispetto alla base canonica;

b) **[3 punti]** dire se f è diagonalizzabile.

c) **[2 punti]** dire se f è iniettiva e/o suriettiva, e determinare una base di $Ker f$ e una base di $Im f$;

d) **[2 punti]** si verifichi che $\mathcal{B}' = (f((1,1,0)), f(0,1,1)), f((1,0,1)))$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^3$ e si trovi la matrice E del cambiamento di base dalla base canonica $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$;

e) **[3 punti]** si calcolino le componenti di $v(1, 2, 3)$ rispetto a $\mathcal{B}'$.

C a) **[4 punti]** Si determini il fascio di coniche $\mathcal{F}$ tangenti in $B(2, 2)$ alla retta di equazione $x+2y-6 = 0$ e passanti per i punti $A(0, 2)$ e $O(0, 0)$

b) **[3 punti]** si determinino le parabole e le coniche degeneri di $\mathcal{F}$ e si determini, se esiste, una conica non degenere i cui asintoti sono perpendicolari.

c) **[4 punti]** Si determini e si studi la conica C luogo dei centri di simmetria delle coniche di $\mathcal{F}$.

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (C.L. Fisica) 26 Gennaio 2017

La prova orale deve essere sostenuta entro il 28 Febbraio 2017

A a) **[3 punti]** Si discuta al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 13 \\ 2x + y - 2t = 5 \\ 2x + y + z - \gamma^2 t = \gamma + 8 \end{cases}$$

b) **[3 punti]** Se possibile lo si risolva ponendo $\gamma = 0$.

B Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$(x, y, z) \to (9x + 8z, 6y - z, -y + 6z).$$

Determinare:

a) **[1 punti]** la matrice associata a f rispetto alla base canonica;

b) **[3 punti]** dire se f è diagonalizzabile.

c) **[2 punti]** dire se f è iniettiva e/o suriettiva, e determinare una base di $Kerf$ e una base di Imf;

d) **[2 punti]** si verifichi che $\mathcal{B}' = (f((1, 0, 0)), f(0, 1, 0)), f((0, 0, 1)))$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^3$ e si trovi la matrice E del cambiamento di base dalla base canonica $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$;

e) **[3 punti]** si calcolino le componenti di $v(1, 2, 3)$ rispetto a $\mathcal{B}'$.

C a) **[4 punti]** Si determini il fascio di coniche $\mathcal{F}$ tangenti in $B(2, 2)$ alla retta di equazione $x+y-4 = 0$ e passanti per i punti $A(0, 2)$ e $O(0, 0)$

b) **[4 punti]** si determinino le parabole e le coniche degeneri di $\mathcal{F}$ e si determini, se esiste, una conica non degenere i cui asintoti sono perpendicolari.

c) **[5 punti]** Si determini e si studi la conica C luogo dei centri di simmetria delle coniche di $\mathcal{F}$.