PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (C.L. Fisica) 17 Gennaio 2017

La prova orale deve essere sostenuta entro il 17 Febbraio 2017

A Sia

$$A_k = \begin{pmatrix} 1+k & -1-k & -k-1 \\ -1-k & 1-3k & 5k+1 \\ -k-1 & 5k+1 & -8k-3 \end{pmatrix}$$

a) **[1 punti]** Si scriva l'equazione della conica C_k, avente A_k come matrice associata

b) **[3 punti]** Si classifichi C_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$

c) **[4 punti]** Si studi la conica C_1 ottenuta scegliendo il valore $k = 1$ (si determini il centro, gli assi e gli eventuali asintoti).

d) **[2 punti]** Si determini la forma canonica e la si disegni.

B a) **[2 punti]** Trovare le equazioni parametriche e le equazioni cartesiane della retta r di $\mathbb{R}^3$ passante per $P = (1, 2, 1)$ e perpendicolare al piano di equazione $x - 2y + 2z = 4034$.

b) **[3 punti]** Sia s la retta di equazioni cartesiane $x + y - 3 = 2x - 2y + 2z - 3 = 0$. Si calcoli la distanza tra le rette r e s e si stabilisca se r e s sono sghembe (rispettivamente incidenti, parallele, ortogonali).

C Sia $T : V \longrightarrow V$, dove $V = \mathbb{R}^4$, l'endomorfismo dato da $T(x, y, z, t) = (x+8t, y+8z, 2x+16t, 2y+16z)$

a) **[2 punti]** Si scriva la matrice $C \in M^4(\mathbb{R})$ associata all'endomorfismo rispetto alla base canonica.

b) **[2 punti]** Si trovino gli elementi $\mathbf{v} \in V$ tali che $T(\mathbf{v}) = (1, 1, 2, 2)$.

c) **[4 punti]** Determinare la dimensione e una base per i sottospazi $U = \mathbf{Ker}T$ e $W = \mathbf{Im}T$.

d) **[4 punti]** Calcolare le dimensioni di $U + W$ e di $U \cap W$.

e) **[4 punti]** Determinare gli autovettori di T e la dimensione degli autospazi.

f) **[2 punti]** Determinare una base di autovettori per V.

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (C.L. Fisica) 12 Settembre 2016

La prova orale deve essere sostenuta entro il 30 Settembre 2016

1 Dati i vettori

$$\mathbf{v_1} = (1,0,0,0), \qquad \mathbf{v_2} = (0,1,1,0), \qquad \mathbf{v_3} = (0,-1,0,-2), \qquad \mathbf{v_4} = (1,0,-1,0)$$

a) **[2 punti]** Provare che $B = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4})$ è una base di $\mathbb{R}^4$

b) **[3 punti]** Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$f(\mathbf{v_1}) = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_4} \quad f(\mathbf{v_2}) = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_4} \quad f(\mathbf{v_3}) = 2\mathbf{v_1} + 2\mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} + 2\mathbf{v_4} \quad f(\mathbf{v_4}) = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_4}$$

si dica se f è iniettiva e/o suriettiva, e si determini una base di $Ker f$ e una base di $Im f$;

c) **[3 punti]** Stabilire se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f.

d) **[2 punti]** Si trovi una base di $f(W)$, dove W è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ dato da

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0\}.$$

2 Fissato un sistema di riferimento cartesiano nel piano si consideri il fascio di coniche Q_k

$$x^2 - y^2 + 4kx - 4ky + 2k = 0, \qquad k \in \mathbb{R}$$

a **[2 punti]** Calcolare, al variare di $k \neq 0$, centro, assi ed asintoti. Disegnare la conica al variare di $k \neq 0$.

b **[3 punti]** Determinare k in modo che la polare del punto $P = (k/2, 1)$ formi con gli assi coordinati un triangolo isoscele.

c **[2 punti]** Determinare un movimento del piano che mandi il centro di Q_k nell'origine e viceversa.

3 Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, si considerino le due rette r e r' di equazioni

$$r = \begin{cases} (h-2)x - y - z + 2 = 0 \\ (5h-2)x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \qquad r' = \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x + (2k-3)y - z + 2 - 2k = 0 \end{cases}$$

a **[2 punti]** Al variare di h (rispettivamente di k) la retta r (risp. r') descrive un fascio di rette che giace sul piano π (risp. π'). Si determini il tipo di fascio e le equazioni di π e π'.

b **[2 punti]** Si discuta la mutua posizione (complanarità o meno, e, nel primo caso, incidenza, parallelismo, coincidenza) di r e r' al variare di h e k.

c **[3 punti]** Si studi il luogo (del piano) descritto da un punto P di coordinate (h,k) legate da un vincolo che esprima la perpendicolarità di r e r' .

4 Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ che soddisfa le seguenti condizioni:

- $ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + y - 3z = 0\}$;
- il vettore $v = (1,1,1)$ è un autovettore di f relativo all'autovalore 3.

a) **[3 punti]** Si dica se f è diagonalizzabile e si trovi una base rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

b) **[2 punti]** Si trovi la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

c) **[1 punti]** Si determini una base dell'immagine di f.

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (C.L. Fisica) 15 Luglio 2016

La prova orale deve essere sostenuta entro il 4 Settembre 2016

(1) Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ munito della base canonica B. Sia f un endomorfismo la cui matrice associata rispetto a B é data da $A = P^{-1}DP$, dove si ha

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

a) Si verifichi che P è una matrice ortogonale.
b) Si determini $f(x, y, z)$.
c) Si trovino gli autovalori di A e si dica se f è diagonalizzabile.
d) Trovare, se esiste, una terna $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$.

(2) Si considerino gli spazi vettoriali $\mathbb{R}_1[x]$ e $\mathbb{R}_3[x]$ dei polinomi di grado inferiore o uguale a 1 e a 3 rispettivamente. Sia $f : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ l'applicazione definita da $f(P(x)) = (x^2 + 1)P(x)$.
a) Si dimostri che f è lineare e dette $B = (1, x)$ e $B' = (1, x, x^2, x^3)$ le basi canoniche ordinate di $\mathbb{R}_1[x]$ e $\mathbb{R}_3[x]$ rispettivamente, si scriva la matrice di f rispetto a B e B'.
b) Dopo aver verificato che la coppia ordinata $C = (2, 2x+1)$ è una base di $\mathbb{R}_1[x]$, si trovi la matrice di passaggio da C a B e la matrice di f rispetto a C e B'.
c) Si determinino nucleo e immagine di f e loro rispettive basi.

(3) Date le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 & 1+h \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & h & 1+h \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix}$$

si consideri il sistema lineare $AX = B$.
a) Si discuta, al variare di $h, k \in \mathbb{R}$, il sistema lineare avente come matrice dei coefficienti e dei termini noti A e B rispettivamente.
b) Si trovino le soluzioni del sistema per $(h, k) = (-1, 0)$.

(4) Fissato un sistema di riferimento cartesiano nel piano si consideri il fascio di coniche Q_k

$$x^2 - y^2 + 2kx - 2ky + k = 0, \qquad k \in \mathbb{R}$$

a) Calcolare, al variare di $k \neq 0$, centro, assi ed asintoti. Disegnare la conica al variare di $k \neq 0$.
b) Determinare k in modo che la polare del punto $P = (k, 1)$ formi con gli assi coordinati un triangolo isoscele.
c) Determinare un movimento del piano che mandi il centro di Q_k nell'origine e viceversa.

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (C.L. Fisica) 16 Giugno 2016

La prova orale deve essere sostenuta entro il 16 Luglio 2016

1 Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo definito da

$$f(x, y, z, t) = (3y + t, 3x + z, 9y + 3t, 9x + 3z).$$

Determinare:

a) **[1 punti]** la matrice associata a f rispetto alla base canonica;

b) **[1 punti]** dopo aver stabilito se f è iniettiva e/o suriettiva, determinare una base di $Kerf$ e una base di Imf;

c) **[2 punti]** verificare che $\lambda = -6$ è un autovalore di f;

d) **[3 punti]** una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f.

2 **[7 punti]** Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, siano r e s le rette di equazione $2x - y + 1 = 0$ e $x + y - 2 = 0$ rispettivamente.
Si studi l'iperbole avente centro in O, asintoti paralleli ad r ed s e passante per $P(0, 1)$

3 Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino le rette

$$r = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases} \qquad s = \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

a) **[2 punti]** Verificare che r ed s sono sghembe.

b) **[2 punti]** Calcolare l'angolo ϑ che esse formano.

c) **[2 punti]** Calcolare la distanza fra di loro.

d) **[2 punti]** Determinare la retta di minima distanza.

4 Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ che soddisfa le seguenti condizioni:

- $kerf = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y = 0, x + y - z = 0\}$;
- il vettore $v = (1, 1, 1)$ è un autovettore di f relativo all'autovalore 3.

a) **[3 punti]** Si dica se f è diagonalizzabile e si trovi una base rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

b) **[3 punti]** Si trovi la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

c) **[2 punti]** Si determini una base dell'immagine di f.

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (C.L. Fisica) 28 Aprile 2016

La prova orale deve essere sostenuta entro il 31 Maggio 2016

1 Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo definito da

$$f(x, y, z, t) = (3x + z, 3y + t, 6x + 2z, 9y + 3t).$$

Determinare:

a) **[1 punti]** la matrice associata a f rispetto alla base canonica;

b) **[1 punti]** dire se f è iniettiva e/o suriettiva, e determinare una base di $Kerf$ e una base di Imf;

c) **[2 punti]** verificare che $\lambda = 6$ è un autovalore di f;

d) **[3 punti]** una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f.

2 **[7 punti]** Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, si studi la conica γ tangente agli assi coordinati nei punti in cui vengono intersecati dalla retta r di equazione $4x+2y+1 = 0$ e passante per $P(-1, 1)$.

3 Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino le rette

$$r = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases} \qquad s = \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

a) **[2 punti]** Verificare che r ed s sono sghembe.

b) **[2 punti]** Calcolare l'angolo ϑ che esse formano.

c) **[2 punti]** Calcolare la distanza fra di loro.

d) **[2 punti]** Determinare la retta di minima distanza.

4 Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ che soddisfa le seguenti condizioni:

- $kerf = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$;
- il vettore $v = (1, 1)$ è un autovettore di f relativo all'autovalore 3.

a) **[3 punti]** Si dica se f è diagonalizzabile e si trovi una base rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

b) **[3 punti]** Si trovi la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

c) **[2 punti]** Si determini una base dell'immagine di f.

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (C.L. Fisica) 22 Febbraio 2016

La prova orale deve essere sostenuta entro il 27 Febbraio 2016

(1) Dati i vettori

$$\mathbf{v_1} = (1,0,0,0), \qquad \mathbf{v_2} = (0,1,1,0), \qquad \mathbf{v_3} = (0,-1,0,-2), \qquad \mathbf{v_4} = (1,0,-1,0)$$

a) **[3 punti]** Provare che $B = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4})$ è una base di $\mathbb{R}^4$

b) **[5 punti]** Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$f(\mathbf{v_1}) = -\mathbf{v_1} + \mathbf{v_4} f(\mathbf{v_2}) = -\mathbf{v_1} + \mathbf{v_4} f(\mathbf{v_3} = 5\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} + 3\mathbf{v_4} f(\mathbf{v_4}) = 2\mathbf{v_1} + 2\mathbf{v_4}$$

si dica se f è iniettiva e/o suriettiva, e si determini una base di $Kerf$ e una base di Imf;

c) **[4 punti]** Stabilire se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f.

d) **[3 punti]** Si trovi una base di $f(W)$, dove W è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ dato da

$$W = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0.$$

2 **[3 punti]** Si discuta al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} x - y + \gamma t = 1 \\ z - t = -1 \\ x - y + 2z + (\gamma - 2)t = \gamma \end{cases}$$

(2) **[7 punti]** Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, si scriva l'equazione dell'iperbole tale che la retta $x = y$ sia un asintoto, il punto $P(0,3)$ sia un vertice e la tangente in esso abbia equazione $x - 2y + 6 = 0$.
Della conica trovata si determinino gli assi il centro e l'ulteriore asintoto.

4 a) **[2 punti]** Trovare delle equazioni parametriche e delle equazioni cartesiane della retta r di $\mathbb{R}^3$ passante per $P = (1,1,0)$ e perpendicolare al piano di equazione $4x - y + z = 35245$.

b) **[4 punti]** Sia s la retta di equazioni cartesiane $2x + y - z - 2 = -x + y + z - 1 = 0$. Si calcoli la distanza tra le rette e si stabilisca se r e s sono sghembe (rispettivamente incidenti, parallele, ortogonali).

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (C.L. Fisica) 5 Febbraio 2016

La prova orale deve essere sostenuta entro il 27 Febbraio 2016

1 Siano $\mathbf{u} = (1, 2, 0, -1), \mathbf{v}_\gamma = (1, 8, \gamma, -1), \mathbf{w} = (1, 0, 12, -1)$ tre vettori di $\mathbb{R}^4$.

a) **[3 punti]** Si calcoli al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$ la dimansione di $U_\gamma = L(\mathbf{u}, \mathbf{v}_\gamma, \mathbf{w})$

b) **[3 punti]** Posto $\gamma = 0$ si determini una base ortonormale di U_0.

c) **[2 punti]** Posto $\gamma = 0$ si determini la matrice associata ad una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $ImT = U_0$

2 a) **[3 punti]** Si discuta al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} 8x + (2-\gamma)z = 3\gamma + 4 \\ x + (\gamma - 2)y = \gamma \\ x + 8y - z = 3\gamma \end{cases}$$

b) **[2 punti]** Detta r_γ la retta rappresentata dalle prime due equazioni e detto π_γ il piano rappresentato dalla terza equazione, si dica per quali valori di γ la retta è incidente, parallela o contenuta nel piano.

3 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$f(x, y, z) = (2x + y + (\gamma - 3)z, 2x + (\gamma - 2)y, 2x + (3 - \gamma)y + (3 - \gamma)z).$$

a) **[2 punti]** Discutere, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$, il sistema $f(x, y, z) = (2, 0, 2)$

b) **[3 punti]** Fissato $\gamma = 3$, si dica se f è iniettiva e/o suriettiva, e si determini una base di $Kerf$ e una base di Imf;

c) **[2 punti]** Fissato $\gamma = 3$, verificare che $\lambda = 3$ è un autovalore di f;

d) **[3 punti]** Fissato $\gamma = 3$, determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

4 a) **[4 punti]** Si scriva l'equazione della conica avente centro nell'origine, tangente alla retta di equazione $2x - 2y - 3 = 0$ nel vertice $V = (3, 3)$.

b) **[3 punti]** Si studi la conica e se ne determini la forma canonica.

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (C.L. Fisica) 18 Gennaio 2016

La prova orale deve essere sostenuta entro il 27 Febbraio 2016

1 a) **[3 punti]** Si discuta al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} x + 8y + z = 0 \\ x + (7-\gamma)y + (\gamma-1)z = \gamma - 1 \\ -x + (\gamma-7)y - z = -\gamma \end{cases}$$

b) **[2 punti]** Detta r_γ la retta rappresentata dalle prime due equazioni e detto π_γ il piano rappresentato dalla terza equazione, si dica per quali valori di γ la retta è incidente, parallela o contenuta nel piano.

c) **[3 punti]** Determinare una base per lo spazio vettoriale

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - 8y + 2z = 0\,, x - 8y + t = 0\}$$

2 Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo definito da

$$f(x, y, z, t) = (3x + z, 3y + t, 6x + 2z, 9y + 3t).$$

Determinare:

a) **[1 punti]** la matrice associata a f rispetto alla base canonica;

b) **[3 punti]** dire se f è iniettiva e/o suriettiva, e determinare una base di $Ker f$ e una base di $Im f$;

c) **[2 punti]** verificare che $\lambda = 6$ è un autovalore di f;

d) **[3 punti]** una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f.

3 a) **[2 punti]** Trovare delle equazioni parametriche e delle equazioni cartesiane della retta r di $\mathbb{R}^3$ passante per $P = (1, 2, 3)$ e perpendicolare al piano di equazione $2x + 2y + 4z = 35245$.

b) **[4 punti]** Sia s la retta di equazioni cartesiane $x + y - 3 = x - y + z - 6 = 0$. Si calcoli la distanza tra le rette e si stabilisca se r e s sono sghembe (rispettivamente incidenti, parallele, ortogonali).

4 a) **[4 punti]** Si scriva l'equazione della conica avente centro nell'origine, tangente alla retta di equazione $x + y - 6 = 0$ nel vertice $V = (3, 3)$.

b) **[3 punti]** Si studi la conica e se ne determini la forma canonica.