PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (C.L. Fisica) 11 Settembre 2015

La prova orale deve essere sostenuta entro il 1 Ottobre 2015

1 Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo definito da

$$f(x, y, z, t) = (3x + z, 3y + t, 6x + 2z, 9y + 3t).$$

Determinare:

a) **[1 punti]** la matrice associata a f rispetto alla base canonica;

b) **[1 punti]** dire se f è iniettiva e/o suriettiva, e determinare una base di $Kerf$ e una base di Imf;

c) **[2 punti]** verificare che $\lambda = 6$ è un autovalore di f;

d) **[3 punti]** una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f.

2 **[7 punti]** Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, si studi la conica γ tangente agli assi coordinati nei punti in cui vengono intersecati dalla retta r di equazione $x-2y+1 = 0$ e passante per $P(-1, 1)$.

3 Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino le rette

$$r = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases} \qquad s = \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

a) **[2 punti]** Verificare che r ed s sono sghembe.

b) **[2 punti]** Calcolare l'angolo ϑ che esse formano.

c) **[2 punti]** Calcolare la distanza fra di loro.

c) **[2 punti]** Determinare la retta di minima distanza.

4 Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ che soddisfa le seguenti condizioni:

- $kerf = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0\}$;
- il vettore $v = (1, 1)$ è un autovettore di f relativo all'autovalore 3.

a) **[3 punti]** Si dica se f è diagonalizzabile e si trovi una base rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

b) **[3 punti]** Si trovi la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

c) **[2 punti]** Si determini una base dell'immagine di f.

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (C.L. Fisica) 20 Luglio 2015

La prova orale deve essere sostenuta entro il 10 Settembre 2015

1 Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo definito da

$$f(x, y, z, t) = (x + 2z, y + 2t, 2x + 4z, 2y + 4t).$$

Determinare:

a) **[1 punti]** la matrice associata a f rispetto alla base canonica;

b) **[1 punti]** dire se f è iniettiva e/o suriettiva, e determinare una base di $Ker f$ e una base di $Im f$;

c) **[2 punti]** verificare che $\lambda = 5$ è un autovalore di f;

d) **[3 punti]** una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f.

2 **[7 punti]** Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, si studi la conica γ tangente agli assi coordinati nei punti in cui vengono intersecati dalla retta r di equazione $x+2y+1 = 0$ e passante per $P(-1, 1)$.

3 Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino le rette

$$r = \begin{cases} x - ky + z + 2k = 0 \\ x + z + (2 - k) = 0 \end{cases} \qquad s = \begin{cases} 2x - ky + z = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

a) **[3 punti]** Determinare, al variare del parametro reale k, la posizione reciproca delle rette.

b) **[5 punti]** Posto $k = 2$ determinare la retta di minima distanza e la distanza tra r e s.

4 Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ che soddisfa le seguenti condizioni:

- $ker f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$;
- il vettore $v = (1, 1$ è un autovettore di f relativo all'autovalore 3.

a) **[3 punti]** Si dica se f è diagonalizzabile e si trovi una base rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

b) **[3 punti]** Si trovi la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

c) **[2 punti]** Si determini una base dell'immagine di f.

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (C.L. Fisica) 22 Giugno 2015

La prova orale deve essere sostenuta entro il 22 Luglio 2015

1 Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo definito da

$$f(x, y, z, t) = (x + 2z, y + 2t, 2y + 4t, 2x + 4z).$$

Determinare:

a) **[2 punti]** la matrice associata a f rispetto alla base canonica;

b) **[2 punti]** dire se f è iniettiva e/o suriettiva, e determinare una base di $Kerf$ e una base di Imf;

c) **[3 punti]** verificare che $\lambda = 3$ è un autovalore di f;

d) **[3 punti]** una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f.

2 Date le rette r e s rispettivamente di equazioni

$$\begin{cases} x + ky - 2z = 0 \\ x + y + z - k = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -x + ky - 2 = 0 \end{cases}$$

a) **[3 punti]** Determinare, al variare del parametro reale k, la posizione reciproca delle rette.

b) **[5 punti]** Posto $k = 0$ determinare la retta di minima distanza e la distanza tra r e s.

3 **[6 punti]** Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, si scriva l'equazione dell'iperbole equilatera avente come asintoto la retta $x + y = 0$ e tangente all'asse delle y nel punto $P(0, 1)$.

Si determinino il centro, gli asintoti, gli assi ed i vertici dell'iperbole trovata.

4 a) **[2 punti]** Trovare delle equazioni parametriche e delle equazioni cartesiane della retta r di $\mathbb{R}^3$ passante per $P = (1, 2, 3)$ e perpendicolare al piano di equazione $2x - 2y + 2z = 2015$.

b) **[4 punti]** Sia s la retta di equazioni cartesiane $x + y - 3 = x - y + z - 6 = 0$. Si calcoli la distanza tra le rette e si stabilisca se r e s sono sghembe (rispettivamente incidenti, parallele, ortogonali).

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (C.L. Fisica) 17 Febbraio 2015

La prova orale deve essere sostenuta entro il 27 Febbraio 2015

1 Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo definito da

$$f(x, y, z, t) = (x + 2z, y + 2t, 2y + 4t, 2x + 4z).$$

Determinare:

a) **[2 punti]** la matrice associata a f rispetto alla base canonica;

b) **[3 punti]** dire se f è iniettiva e/o suriettiva, e determinare una base di $Kerf$ e una base di Imf;

c) **[3 punti]** verificare che $\lambda = -3$ è un autovalore di f;

d) **[3 punti]** una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f.

2 Date le rette r e s rispettivamente di equazioni

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{k} = -\frac{z}{2} \qquad \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x + y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

a) **[3 punti]** Determinare per quali valori di k le rette sono sghembe.

b) **[5 punti]** Posto $k = 1$ determinare la retta di minima distanza e la distanza tra r e s.

3 Si considerino gli spazi vettoriali $\mathbb{R}_2[x]$ e $\mathbb{R}_3[x]$ dei polinomi di grado inferiore o uguale a 2 e 3 rispettivamente. Sia $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ l?applicazione lineare definita da $f(P(x)) = (x - 1)P(x)$.

a **[3 punti]** Dette B e B' le basi canoniche di $\mathbb{R}_2[x]$ e $\mathbb{R}_3[x]$ rispettivamente (quelle formate dai monomi con coefficiente 1), si scriva la matrice di f rispetto a B e B'.

b **[4 punti]** Si determinino nucleo e immagine di f e loro rispettive basi.

c **[4 punti]** Dopo aver verificato che la terna ordinata $C = (2, 2x, 1 + x^2)$ è una base di $\mathbb{R}_2[x]$, si trovi la matrice di f rispetto a C e B'.

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (C.L. Fisica) 3 Febbraio 2015

La prova orale deve essere sostenuta entro il 27 Febbraio 2015

A Consideriamo i vettori $\mathbf{u} = (0, 1, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{w} = (1, 1, 0)$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare per la quale il vettore $\mathbf{u}$ è un autovettore relativo all'autovalore -6, $f(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ e $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Determinare:

a) **[3 punti]** la matrice associata a f rispetto alla base canonica;

b) **[3 punti]** Dire se f è iniettiva e/o suriettiva, determinare la dimensione e una base per i sottospazi $U = \mathbf{Ker} f$ e $W = \mathbf{Im} f$.

c) **[4 punti]** Determinare gli autovettori di f.

C Nello spazio, rispetto ad un fissato sistema di riferimento R(O, x, y, z), siano π il piano di equazione $x + z = 0$ ed r_λ la retta di equazioni

$$r_\lambda = \begin{cases} x + y + (\lambda + 1)z = -4 \\ \lambda y + z = 4 \end{cases}$$

a) **[4 punti]** Si dica per quali eventuali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ l'intersezione di π con r_λ è costituita da uno, nessuno o infiniti punti.

b) **[3 punti]** Fissato $\lambda = 0$, si trovi il piano π' contenente r_0 e parallelo alla retta s di equazioni $2y = x + 3z = 0$

c) **[3 punti]** Ancora per $\lambda = 0$, si trovi il piano π'' parallelo ad r_0, parallelo ad s e passante per $P(-2, 2, 1)$.

C Data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 27 & k & k-18 \\ k & 1 & 0 \\ k-18 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) **[2 punto]** Si scriva l'equazione della conica Γ_k avente A_k come discriminante

b) **[4 punti]** Si classifichino le coniche Γ_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

c) **[4 punti]** Si trovino gli autovalori di A_0, ottenuta ponendo $k = 0$,

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (C.L. Fisica) 20 Gennaio 2015

La prova orale deve essere sostenuta entro il 27 Febbraio 2015

A Con $V = \mathbb{R}^4$ sia $T : V \longrightarrow V$ l'endomorfismo dato da $T(x, y, z, t) = (x+8z, y+8t, 2x+16z, 2y+16t)$

a) **[1 punti]** Si scriva la matrice $C \in M^4(\mathbb{R})$;

b) **[2 punti]** Si trovino gli elementi $x \in V$ tali che $T(x) = (1, -1, 3, -3)$;

c) **[2 punti]** dire se T è iniettiva e/o suriettiva, determinare la dimensione e una base per i sottospazi $U = \mathbf{Ker}T$ e $W = \mathbf{Im}T$.

d) **[3 punti]** Calcolare le dimensioni di $U + W$ e di $U \cap W$.

e) **[3 punti]** Determinare gli autovettori di T.

B a) **[4 punti]** Si scriva l'equazione della conica avente centro nell'origine, la retta di equazione $2x + 3y = 0$ come asintoto e vertice nel punto $V = (3, 3)$.

b) **[3 punti]** Si studi la conica e se ne determini la forma canonica.

C a) **[2 punti]** Trovare delle equazioni parametriche e delle equazioni cartesiane della retta r di $\mathbb{R}^3$ passante per $P = (1, 2, 3)$ e perpendicolare al piano di equazione $x - 2y + 2z = 2015$.

b) **[4 punti]** Sia s la retta di equazioni cartesiane $x + y - 3 = x - y + z - 6 = 0$. Si calcoli la distanza tra le rette e si stabilisca se r e s sono sghembe (rispettivamente incidenti, parallele, ortogonali).

D Sia $V = \mathbb{R}^3$ ed f l'endomorfismo di V tale che, rispetto alla base naturale di V, risulti

$$M(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ -7 & k & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

1) **[2 punti]** $Ker\ f$ ed una base di Imf (tenendo conto del variare di k);

2) **[2 punti]** i valori di k per cui esiste un vettore $v \in V$ tale che $f(v) = (1, 4, 1)$;

3) **[2 punti]** i vettori $x \in V$ tali che $f(x) = (0, 2, 2)$, nell'ipotesi che $k = 4$.