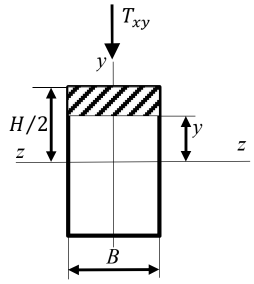
Fattore di Taglio

Sia data una trave il cui asse coincida con l'asse x; si supponga che la sezione trasversale della trave sia simmetrica rispetto al piano xy e che sia caricata da una forza agente sullo stesso piano. L'azione di taglio, variabile in generale con la coordinata x, sia $T_{xy}(x)$: essa agisce sulle superfici di normale x in direzione y. In generale anche il momento principale d'inerzia calcolato rispetto all'asse neutro $z-z$ può essere variabile con la coordinata x.

Il lavoro per unità di volume prodotto dalla tensione tangenziale τ_{xy} per la deformazione di scorrimento γ_{xy} vale:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}$$



dove lo sforzo τ_{xy}, in base alla formula di Jourawski, vale:

$$\tau_{xy} = \frac{T_{xy}(x) \cdot S_z(x,y)}{b(x,y) \cdot I_z(x)}$$

dove $S_z(x,y)$ indica il momento statico calcolato rispetto all'asse neutro dell'area trasversale disposta al di sopra della corda larga $b(x,y)$ posta a distanza y dall'asse neutro. In generale $S_z(x,y)$ e $b(x,y)$ sono funzione sia della coordinata x lungo l'asse della trave, che della coordinata y.

In base alla legge di Hooke, abbiamo:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

da cui

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\frac{T_{xy}(x) \cdot S_z(x,y)}{b(x,y) \cdot I_z(x)} \times \frac{T_{xy}(x) \cdot S_z(x,y)}{G(x) \cdot b(x,y) \cdot I_z(x)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_{xy}^2(x)}{G(x) \cdot I_z^2(x)} \cdot \frac{S_z^2(x,y)}{b^2(x,y)}$$

dove si è supposto che anche il modulo di elasticità tangenziale $G(x)$ sia funzione di x, e dove sono stati raggruppati i termini che dipendono solo dalla coordinata x e quelli che dipendono sia da x che da y.

Il lavoro elastico totale immagazzinato nella trave vale:

$$L = \int_{vol} \mathcal{L} \cdot dVol = \int_{vol} \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} \cdot dVol = \int_x \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{T_{xy}^2(x)}{G(x) \cdot I_z^2(x)} \cdot \int_A \frac{S_z^2(x,y)}{b^2(x,y)} dA\right] dx$$

Il termine:

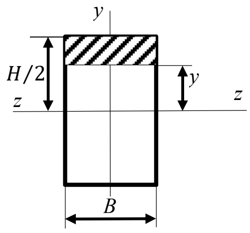
$$\frac{1}{I_z^2(x)} \cdot \int_A \frac{S_z^2(x,y)}{b^2(x,y)} dA = \frac{\chi}{A(x)}$$

dipende solo dalla forma dell'area trasversale della trave: il coefficiente χ prende il nome di **Fattore di Taglio** ed il suo valore è stato tabellato per le sezioni usate più spesso. In conclusione l'energia elastica accumulata nella trave vale:

$$L = \int_x \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\chi \cdot T_{xy}^2(x)}{G(x) \cdot A(x)}\right] dx$$

Vediamo di calcolare il valore del **Fattore di Taglio** per la sezione rettangolare, per quella circolare piena e per quella circolare di piccolo spessore.

Sezione rettangolare



Il momento statico vale:

$$S_z(x,y) = A(x,y) \cdot y_G = \left[B \cdot \left(\frac{H}{2} - y\right)\right] \cdot \frac{\left(\frac{H}{2} + y\right)}{2}$$

dove $A(x,y)$ indica una porzione dell'area trasversale, calcolata in corrispondenza della coordinata assiale x, e al di sopra della coordinata y, come indica la zona tratteggiata nella figura a lato ed y_G è la distanza del suo baricentro dall'asse neutro.

Da cui:

$$S_z(x,y) = \frac{B}{8}[H^2 - 4y^2]$$

La corda $b(x,y)$, nel caso della sezione rettangolare, non dipende dalla coordinata y e vale B. L'area infinitesima dA vale: $dA = B \cdot dy$, da cui:

$$\int_A \frac{S_z^2(x,y)}{b^2(x,y)} dA = \int_{-H/2}^{H/2} \frac{\frac{B^2}{64}[H^2 - 4y^2]^2}{B^2} B \cdot dy = \int_{-H/2}^{H/2} \frac{B[H^4 - 8H^2y^2 + 16y^4]}{64} \cdot dy$$

Sviluppando l'integrale abbiamo:

$$\frac{B}{64}\left[H^4 y - 8H^2\frac{y^3}{3} + 16\frac{y^5}{5}\right]_{-H/2}^{H/2} = \frac{B}{64}\left(H^5 - \frac{8}{3}H^2\frac{H^3}{4} + \frac{16}{5}\frac{H^5}{16}\right) = \frac{BH^5}{64}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{BH^5}{8 \cdot 15}$$

Il momento d'inerzia $I_z(x)$ non dipende dalla coordinata y e vale:

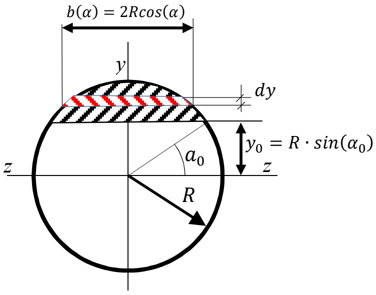
$$I_z(x) = \frac{BH^3}{12}$$

da cui:

$$\frac{1}{I_z^2(x)} \cdot \int_A \frac{S_z^2(x,y)}{b^2(x,y)} dA = \frac{\frac{BH^5}{8 \cdot 15}}{\left(\frac{BH^3}{12}\right)^2} = \frac{144}{120} \cdot \frac{1}{BH} = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{BH} = \frac{\chi}{A(x)}$$

da cui risulta che per la sezione rettangolare il fattore di taglio vale: $\chi = \frac{6}{5}$.

Sezione circolare piena



Il momento statico del settore circolare indicato in figura vale:

$$S_z(x,y) = \int_A y \cdot dA$$

Scrivendo l'equazione della circonferenza in forma parametrica, in funzione del parametro α abbiamo:

$$\begin{cases} x = R \cdot cos(\alpha) \\ y = R \cdot sin(\alpha) \end{cases}$$

Il momento statico può essere espresso in funzione dell'angolo α_0:

$$S_z(x,\alpha_0) = \int_{\alpha_0}^{\pi/2} R \cdot sin(\alpha) \cdot dA$$

dove l'area infinitesima vale: $dA = b(\alpha) \cdot dy$, in cui la corda alla coordinata angolare α (con $\alpha_0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$) vale $b(\alpha) = 2 \cdot R \cdot cos(\alpha)$ e lo spessore infinitesimo vale: $dy = R \cdot cos(\alpha) \cdot d\alpha$ da cui:

$$dA = b(\alpha) \cdot dy = 2 \cdot R \cdot cos(\alpha) \cdot R \cdot cos(\alpha) \cdot d\alpha = 2 \cdot R^2 cos^2(\alpha) \cdot d\alpha$$

Il momento statico vale quindi:

$$S_z(x,\alpha_0) = \int_{\alpha_0}^{\pi/2} 2 \cdot R^3 \cdot sin(\alpha) \cdot cos^2(\alpha) \cdot d\alpha = \frac{2}{3} \cdot R^3 [-cos^3(\alpha)]_{\alpha_0}^{\pi/2} = \frac{2}{3} \cdot R^3 \, cos^3(\alpha_0)$$

Abbiamo quindi:

$$\int_A \frac{S_z^2(x,y)}{b^2(x,y)} dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\left[\frac{2}{3} \cdot R^3 cos^3(\alpha_0)\right]^2}{\left(2 \cdot R \cdot cos(\alpha_0)\right)^2} \cdot 2 \cdot R^2 cos^2(\alpha_0) \cdot d\alpha = \frac{2R^6}{9} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^6(\alpha_0) \cdot d\alpha$$

Poiché:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^6(\alpha_0) \cdot d\alpha = \frac{5}{16}\pi$$

abbiamo:

$$\int_A \frac{S_z^2(x,y)}{b^2(x,y)} dA = \frac{5}{72}\pi R^6$$

Il momento d'inerzia $I_z(x)$ non dipende dalla coordinata y e vale:

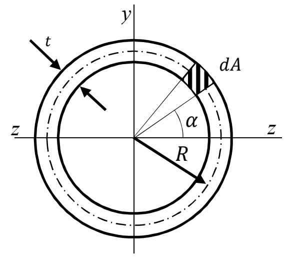
$$I_z(x) = \frac{\pi R^4}{4}$$

da cui:

$$\frac{1}{I_z^2(x)} \cdot \int_A \frac{S_z^2(x,y)}{b^2(x,y)} dA = \frac{\frac{5}{72}\pi R^6}{\left(\frac{\pi R^4}{4}\right)^2} = \frac{80}{72} \cdot \frac{1}{\pi R^2} = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{\pi R^2} = \frac{\chi}{A(x)}$$

da cui risulta che per la sezione circolare piena il fattore di taglio vale: $\chi = \frac{10}{9}$.

Sezione circolare cava di piccolo spessore



Il momento statico della corona circolare al di sopra dell'angolo α_0 vale:

$$S_z(x,y) = \int_A y \cdot dA = \int_{\alpha_0}^{\pi-\alpha_0} R \cdot sin(\alpha) \cdot t \cdot R \cdot d\alpha$$

dove l'area infinitesima (mostrata in figura) vale: $dA = t \cdot R \cdot d\alpha$.

Integrando abbiamo:

$$S_z(x,\alpha_0) = R^2 t \int_{\alpha_0}^{\pi-\alpha_0} sin(\alpha) \cdot d\alpha = 2R^2 t \cdot cos(\alpha_0)$$

Poiché la corda $b(\alpha)$ in questo caso è costante e vale $2t$ abbiamo:

$$\int_A \frac{S_z^2(x,y)}{b^2(x,y)} dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{[2R^2 t \cdot cos(\alpha_0)]^2}{(2 \cdot t)^2} \cdot t \cdot R \cdot d\alpha = R^5 t \int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^2(\alpha_0) d\alpha$$

Poiché:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^2(\alpha_0) \cdot d\alpha = \pi$$

abbiamo:

$$\int_A \frac{S_z^2(x,y)}{b^2(x,y)} dA = R^5 t\pi$$

Il momento d'inerzia $I_z(x)$ di una sezione circolare cava di piccolo spessore vale:

$$I_z(x) = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-\pi/2}^{-\pi/2} R^2 \cdot sin^2(\alpha) \cdot t \cdot R \cdot d\alpha = R^3 t\pi$$

Poiché l'area della sezione circolare cava di piccolo spessore vale $A(x) = 2\pi Rt$ abbiamo:

$$\frac{1}{I_z^2(x)} \cdot \int_A \frac{S_z^2(x,y)}{b^2(x,y)} dA = \frac{R^5 t\pi}{(R^3 t\pi)^2} = \frac{1}{\pi t R} = \frac{\chi}{A(x)}$$

da cui risulta che per la sezione circolare cava di piccolo spessore il fattore di taglio vale: $\chi = 2$.