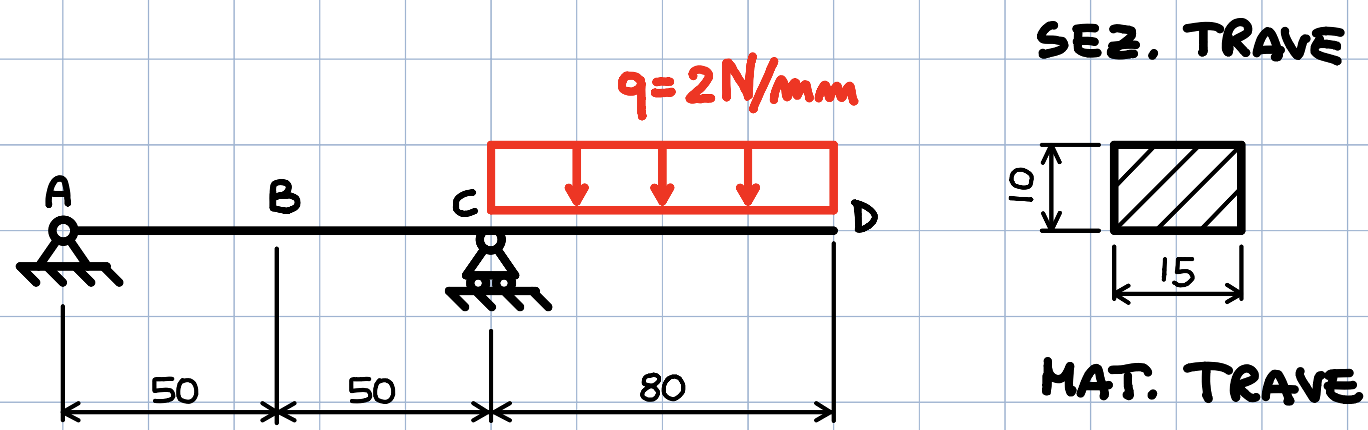
2020/06/08
A cura di P. M. Santucci



MAT. TRAVE
Alluminio
E = 72 GPa

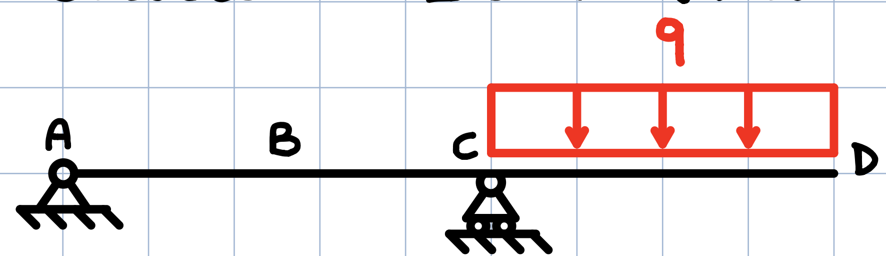
- Data la trave in figura è richiesto:

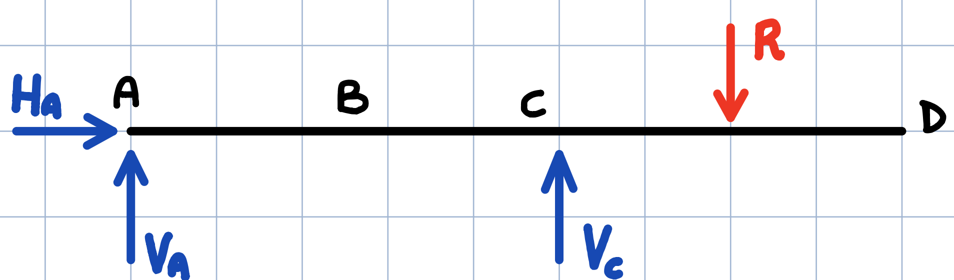
  - Il calcolo delle funzioni di spostamento e rotazione tramite linea elastica lungo tutta la trave.
  - Il calcolo di spostamento e rotazione del punto B.

- Analisi cinematica

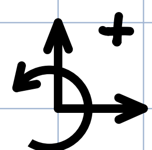
La struttura è isostatica, poiché è composta da una sola trave (3GDL) e vincolata tramite cerniera a terra (2GDV) e carrello (1GDV).
Inoltre i CIR di carrello e cerniera hanno intersezione vuota.

- Calcolo reazioni vincolari





$$R = q L_{CD} = 2(80) = 160\,N$$



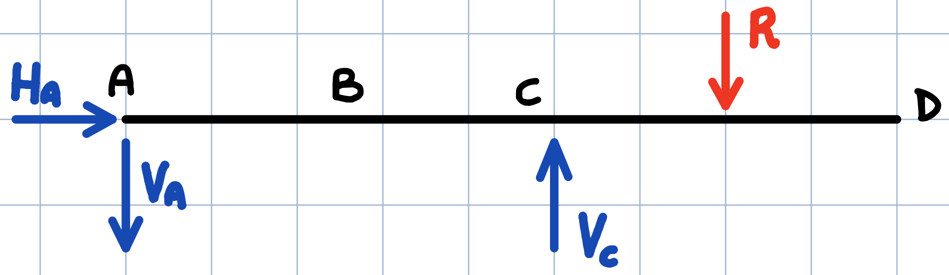
$\rightarrow \quad H_A = 0$

$\uparrow \quad V_A + V_C = R$

$(A) \quad V_C(L_{AB} + L_{BC}) - R\left(L_{AB} + L_{BC} + \frac{L_{CD}}{2}\right) = 0$

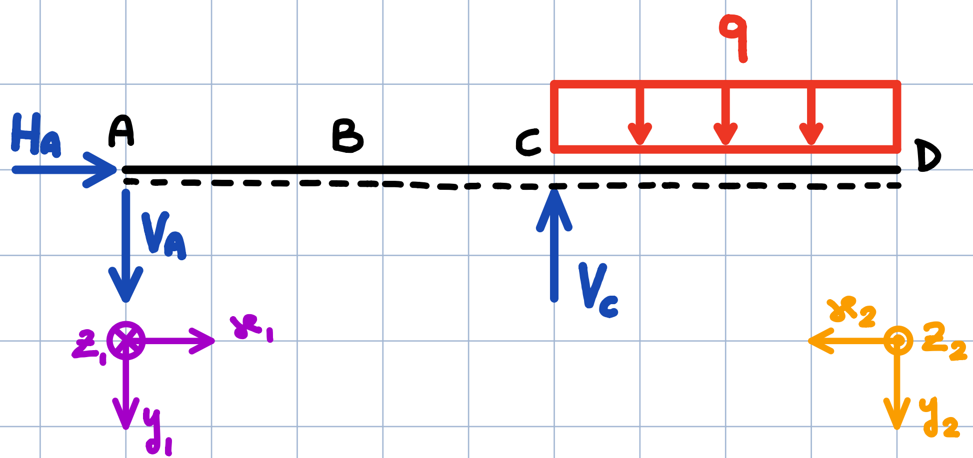
$$V_C = \frac{R\left(L_{AB} + L_{BC} + \frac{L_{CD}}{2}\right)}{(L_{AB} + L_{BC})} = \frac{160(100+40)}{(100)} = 224\,N$$

$V_A = R - V_C = -64N$ È necessario cambiare di segno V_A e invertire il verso del suo vettore nello schema statico.



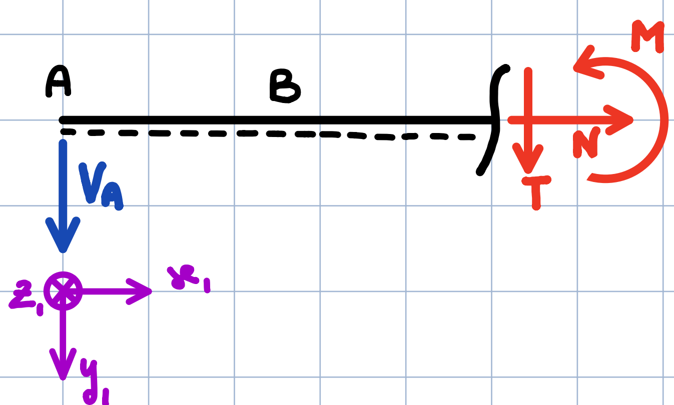
$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = 64N \\ V_C = 224N \end{cases}$$

- Calcolo delle azioni interne



Andiamo a tagliare da A verso C e da D verso C, in modo da semplificare il lavoro.

TRATTO AC $\varnothing < x_1 < L_{AB} + L_{AC}$



$N_{AC} = \varnothing$

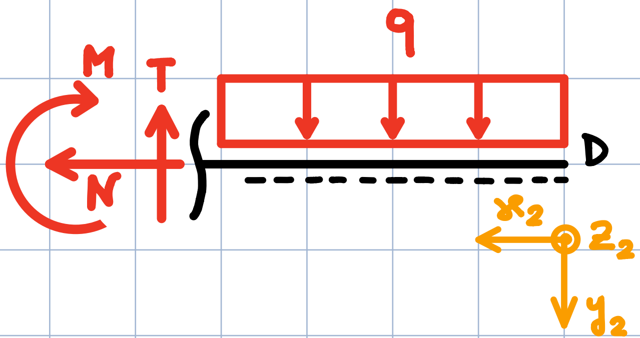
$T_{AC} = -V_A = -64N$

$M_{AC} = -V_A x_1$

$M_{AC}(\varnothing) = \varnothing$

$M_{AC}(L_{AB} + L_{BC}) = -6400\ Nmm$

TRATTO CD $\quad 0 < x_2 < L_{CD}$



$N_{CD} = 0$

$T_{CD} = q\,x_2$

$T_{CD}(0) = 0$

$T_{CD}(L_{CD}) = 160\,N$

$T_{CD} = 0$ in $x_2 = 0$

$$M_{CD} = -q\,x_2\left(\frac{x_2}{2}\right) = -q\,\frac{x_2^2}{2}$$

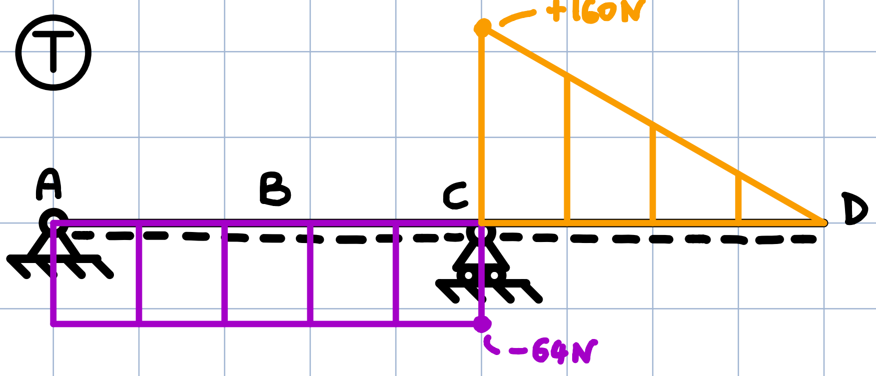
$M_{CD}(0) = 0 \qquad M_{CD}(L_{CD}) = -6400\ Nmm$

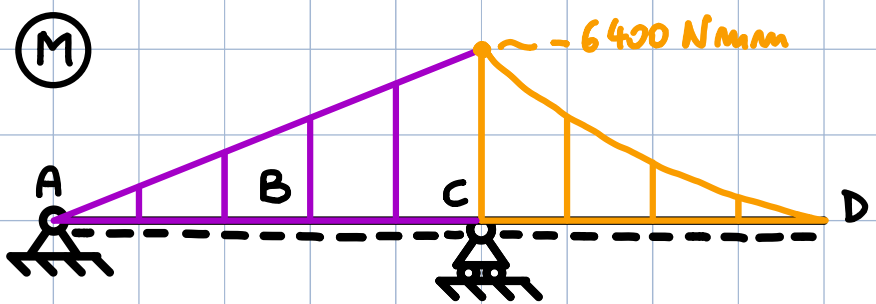
Vado a cercare i punti stazionari del momento:

$$\frac{dM_{CD}}{dx_2} = -q\,x_2 \qquad \frac{dM_{CD}}{dx_2} = 0 \qquad \tilde{x}_2 = 0$$

Il punto stazionario del momento si trova in $\tilde{x}_2 = 0$. Vediamo se è un massimo o un minimo con lo studio della concavità.

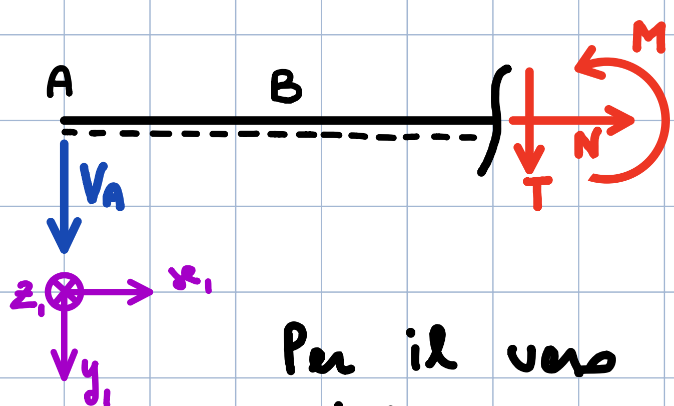
$$\frac{d^2M_{CD}}{dx_2^2} = -q < 0$$ funzione concava
(il momento in 0 assume il suo valore MASSIMO)



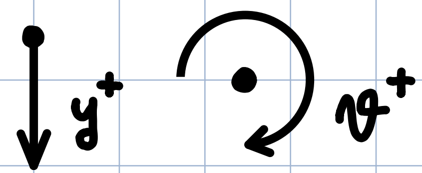


- Calcolo della linea elastica

TRATTO AC



CONVENZIONI



Per il verso positivo delle rotazioni utilizziamo come al solito la regola della mano destra applicata alla terna di riferimento.

$$M_{AC}(x_1) = -64\, x_1 \qquad\qquad y''(x_1)\, EI = -M(x_1)$$

Integrando una prima volta si ottiene:

$$y'(x_1)\,EI = \vartheta(x_1)\,EI = -\int M(x_1)\,dx_1 =$$

$$= -\int -64x_1\,dx_1 = 32x_1^2 + C_1$$

Integrando una seconda volta si arriva alla funzione di spostamento

$$y(x_1)\,EI = \int y'(x_1)\,dx_1 = \int (32x_1 + C_1)\,dx_1 =$$

$$= \frac{32}{3}x_1^3 + C_1x + C_2$$

Abbiamo quindi definito le funzioni di rotazione e spostamento a meno di due costanti: per determinarle dobbiamo applicare le condizioni al contorno.

- $x_1 = \emptyset$ $\quad y(\emptyset) = \emptyset$ $\quad$ CERNIERA A

$$y(\emptyset) = \emptyset \longrightarrow C_2 = \emptyset$$

- $x_1 = L_{AB} + L_{BC}$ $\quad y(L_{AB} + L_{BC}) = \emptyset$ $\quad$ CARRELLO C

$$\frac{32}{3}(L_{AB}+L_{AC})^3 + C_1(L_{AB}+L_{BC}) = \emptyset \qquad C_1 = -\frac{320000}{3} =$$

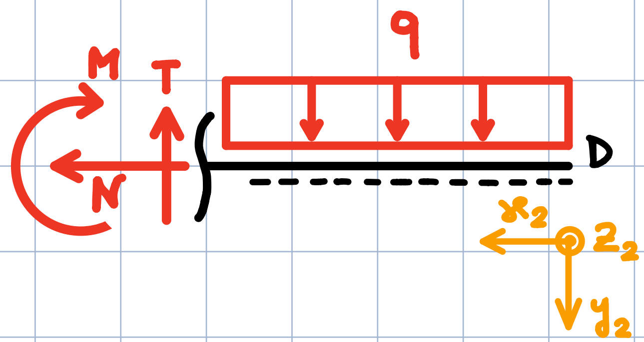
$$= -106667$$

In definitiva nel tratto AC avremo :

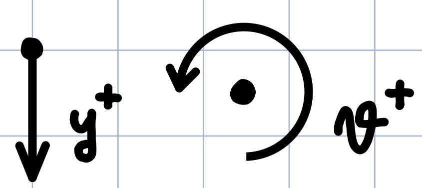
$$\vartheta^{AC}(x_1) = \frac{1}{EJ}\left[32\, x_1^2 - \frac{320'000}{3}\right]$$

$$y^{AC}(x_1) = \frac{1}{EJ}\left[\frac{32}{3}\, x_1^3 - \frac{320'000}{3}\, x_1\right]$$

TRATTO CD



CONVENZIONI



$$M(x_2) = -q\,\frac{x_2^2}{2} = -x_2^2$$

$$(EI)\, y''(x_2) = -M(x_2)$$

$$(EI)\, y'(x_2) = -\int M(x_2)\, dx_2 = -\int -x_2^2\, dx_2 = \frac{x_2^3}{3} + C_3$$

$$(EI)\, y(x_2) = \int y'\, dx_2 = \int\left[\frac{x_2^3}{3} + C_3\right] dx_2 =$$

$$= \frac{x_2^4}{12} + C_3 x_2 + C_4$$

Anche in questo caso dovremo imporre le condizioni al contorno per definire univocamente le equazioni di rotazione e spostamento.

1) $x_2 = 80$ $\quad y_2(80) = \emptyset$ CARRELLO C

2) $x_2 = 80$ $\quad y'_2(80) = -y'_1(100)$ continuità delle rotazioni in C

Dalla 2 ottengo:

$$y'_1(100) = \frac{640000}{3} \rightarrow y'_2(80) = -\frac{640000}{3}$$

$$\frac{(80)^3}{3} + C_3 = -\frac{640000}{3} \qquad C_3 = -384000$$

Adesso sostituisco nella 1:

$$\frac{(80)^4}{12} - 384000(80) + C_4 = \emptyset \qquad C_4 = \frac{81280000}{3} = $$

$$= 2.7093 \times 10^7$$

In definitiva abbiamo per il tratto CD:

$$\vartheta^{DC}(x_2) = \frac{1}{EI}\left[\frac{x_2^3}{3} - 384000\right]$$

$$y^{DC}(x_2) = \frac{1}{EI}\left[\frac{x_2^3}{3} - 384000\,x_2 + 2.7093 \times 10^7\right]$$

Il punto B appartiene al tratto AC, quindi per calcolare spostamenti e rotazioni è sufficiente utilizzare le equazioni derivate per il tratto AC e sostituire $x_1 = 50$ (punto B).

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(15)(10)^3}{12} = 1250 \text{ mm}^4$$

$$E = 72000 \text{ MPa}$$

$$\vartheta^B(50) = \frac{1}{EJ}\left[32(50)^2 - \frac{320'000}{3}\right] = -2.962 \times 10^{-4} \text{ rad}$$
$$= -1.698 \times 10^{-2} \text{ Deg}$$

$$y^B(50) = \frac{1}{EJ}\left[\frac{32}{3}(50)^3 - \frac{320'000}{3}(50)\right] = -4.44 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

Il punto B subisce quindi uno spostamento verso l'alto e una rotazione antioraria, secondo le convenzioni fissate.