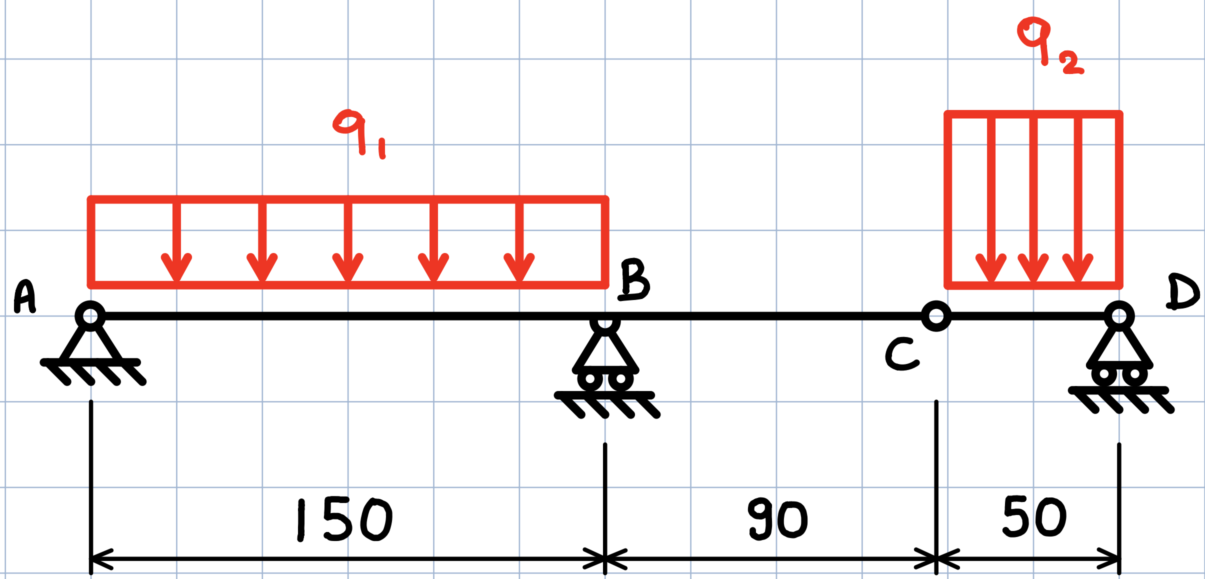
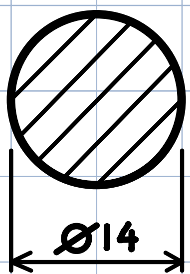
2020/06/05

A cura di P. M. Santucci



SEZIONE



MATERIALE

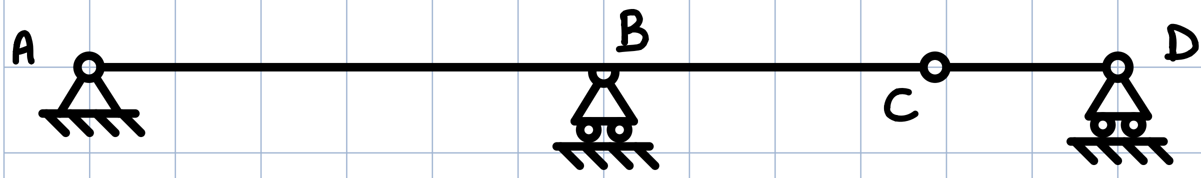
ACCIAIO $\begin{cases} E = 210 \text{ GPa} \\ \nu = 0.3 \end{cases}$

CARICO

$\begin{cases} q_1 = 1 \text{ N/mm} \\ q_2 = 2 \text{ N/mm} \end{cases}$

Si richiede il calcolo dello spostamento verticale del punto C, utilizzando il principio dei lavori virtuali.

- Analisi cinematica



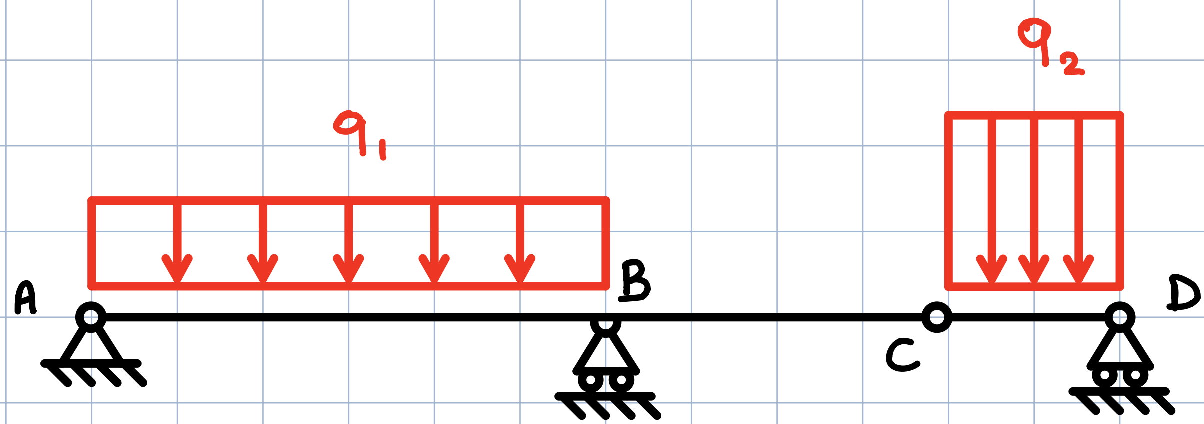
N° ASTE: 2 GDL = 3·n = 6

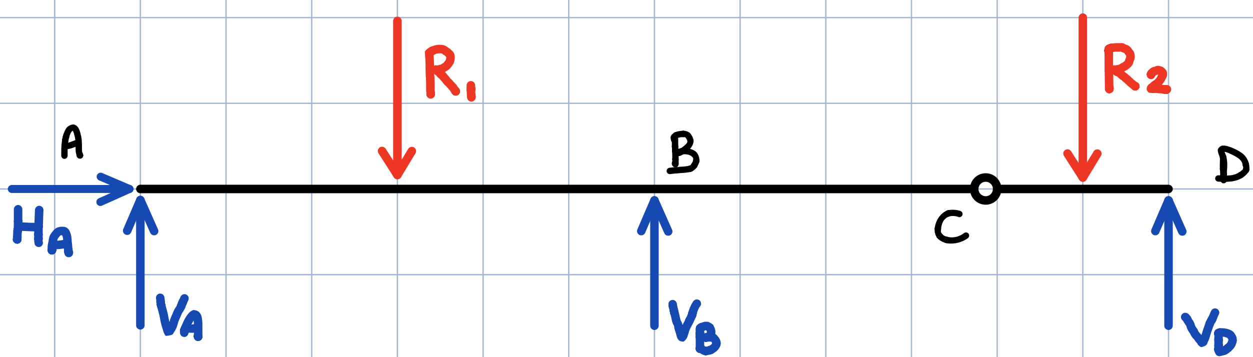
PUNTO	GDV
A	2
B	1
C	2(n−1) = 2
D	1
TOT	6

STRUTTURA ISOSTATICA

La struttura risulta essere anche non labile, in quanto il tratto $\overline{AC}$ è sicuramente non labile (l'intersezione tra i CIR della cerniera A e del carrello B è VUOTA): quindi possiamo considerare la cerniera interna C alla stregua di una cerniera a terra. In ultima analisi il tratto CD risulta allora non labile, così come la struttura nella sua interezza.

- Reazioni vincolari

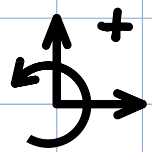


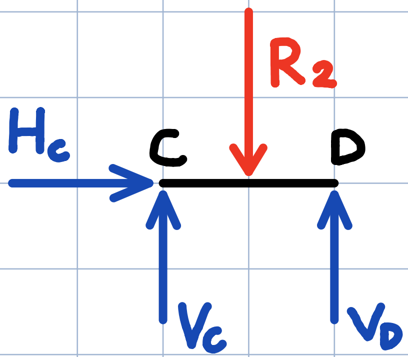


$$\begin{cases} R_1 = q_1 L_{AB} = 1\,(150) = 150\,N \\ R_2 = q_2 L_{CD} = 2\,(50) = 100\,N \end{cases}$$

Risulta evidente che il numero di incognite non permette di risolvere il problema posto in questi termini, poiché abbiamo a disposizione solo 3 equazioni di equilibrio.

È quindi necessario procedere con gli equilibri parziali delle aste. Il tratto più semplice da analizzare risulta il tratto $\overline{CD}$.





$\rightarrow \quad H_C = 0$

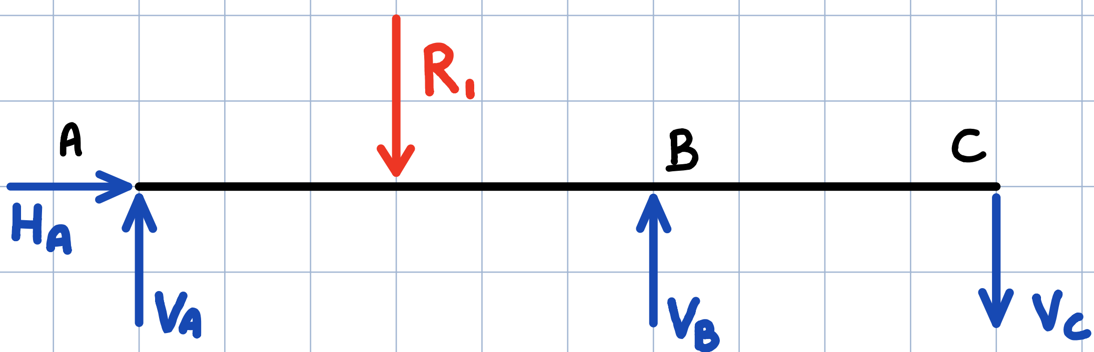
$\uparrow \quad V_C + V_D = R_2$

$\circlearrowleft C \quad V_D L_{CD} - R_2 \dfrac{L_{CD}}{2} = 0$

$$V_D = \frac{R_2}{2} = 50\,N$$

$$V_C = R_2 - V_D = \frac{R_2}{2} = 50\,N$$

A questo punto il calcolo delle reazioni sul tratto $\overline{AC}$ è immediato.



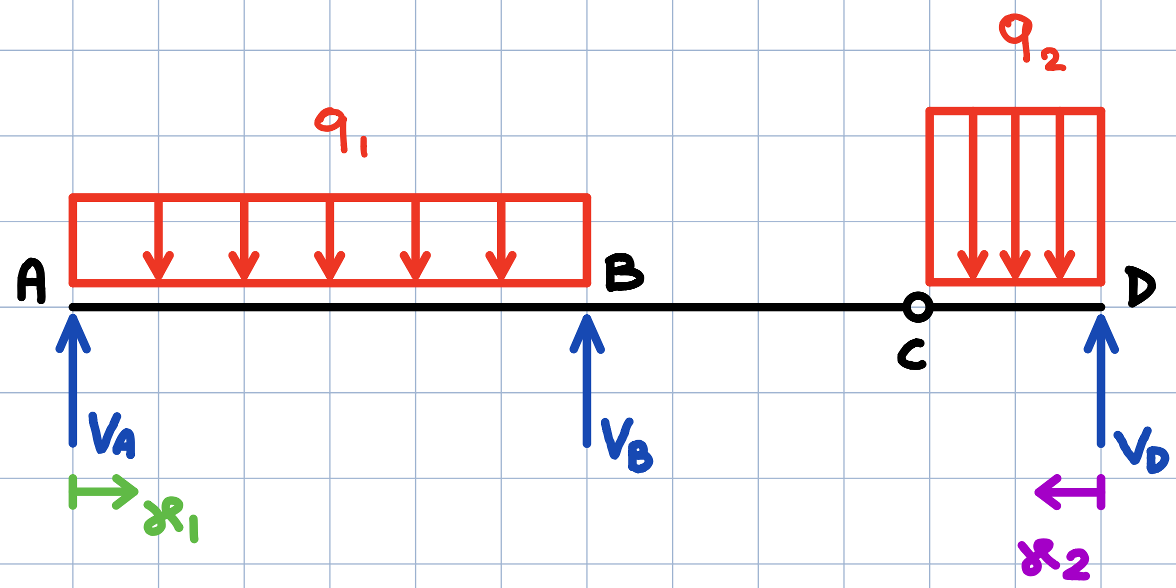
$\rightarrow \quad H_A = 0$

$\uparrow \quad V_A + V_B = R_1 + V_C \qquad V_A = (R_1 + V_C) - V_B = 45\,N$

$\circlearrowleft C \quad -R_1 \dfrac{L_{AB}}{2} + V_B L_{AB} - V_C (L_{AB} + L_{BC}) = 0$

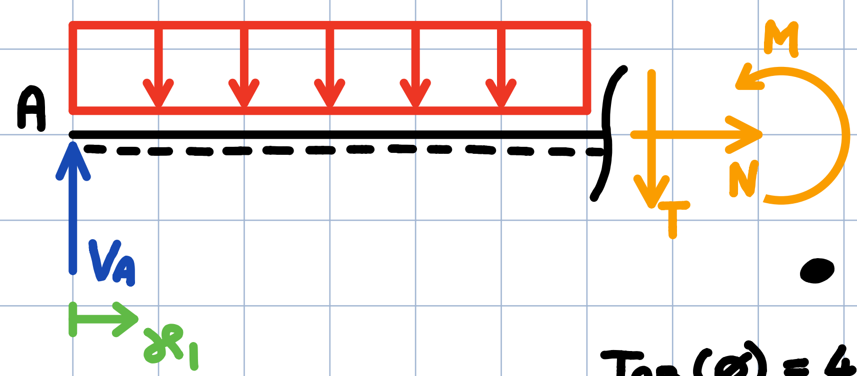
$$V_B = \frac{R_1 \frac{L_{AB}}{2} + V_C (L_{AB} + L_{BC})}{L_{AB}} = 155\,N$$

- Calcolo delle azioni interne



L'idea migliore in questo caso è studiare la travatura attaccandola dai suoi estremi per poi convergere verso il nodo C.

TRATTO AB $\quad 0 < x_1 < L_{AB}$



- $N_{AB} = \emptyset$

- $T_{AB}(x_1) = V_A - q_1 x_1$

$T_{AB}(\emptyset) = 45N \quad T_{AB}(L_{AB}) = -105N$

$T_{AB} = \emptyset \qquad 45 - x_1 = \emptyset \qquad x_1 = 45\text{ mm}$

indicativo del punto di stazionarietà del momento

- $M_{AB}(x_1) = V_A x_1 - q_1 \dfrac{x_1^2}{2}$

$M_{AB}(\emptyset) = \emptyset$

$M_{AB}(L_{AB}) = -4500\text{ Nmm}$

$M_{AB} = \emptyset$ in $x_1 = \emptyset$ o $x_1 = 90\text{ mm}$

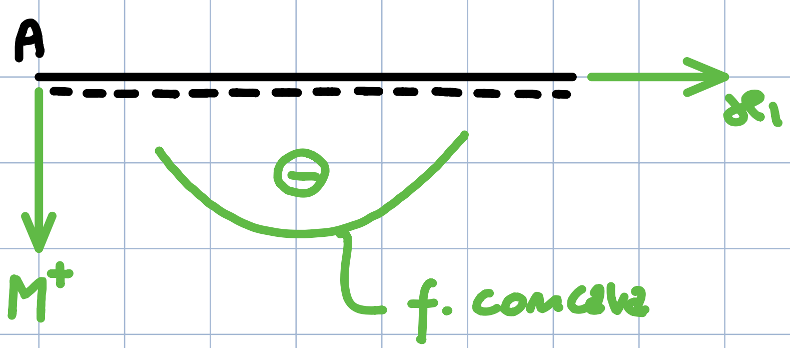
$$\frac{dM_{AB}}{dx_1} = V_A - q_1 x_1 \longrightarrow$$

$\bar{x}_1 = 45\ mm$ è il punto in cui il momento M_{AB} è stazionario. Per capire se in questo punto il momento sia massimo o minimo è necessario calcolare la derivata seconda.

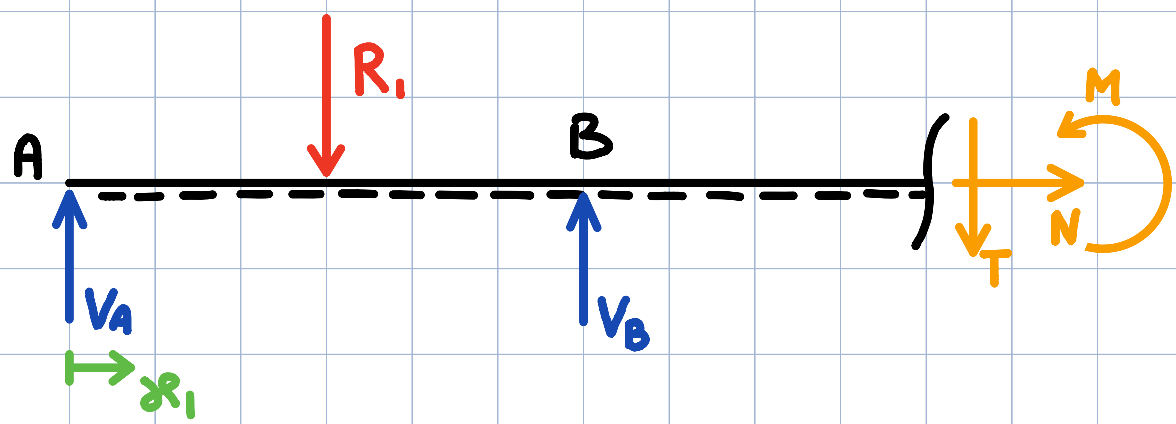
$$\frac{d^2 M_{AB}}{dx_1^2} = -q_1 < 0 \quad \forall x_1 \in [0, L_{AB}]$$

Quindi nel punto $\bar{x}_1 = 45\ mm$ il momento assume il suo valore massimo (M_{AB} è una funzione concava).

$$M_{AB}^{max} = M_{AB}(45) = 1012.5\ Nmm$$



TRATTO BC $\quad L_{AB} < x_1 < L_{AB} + L_{BC}$



- $N_{BC} = \emptyset$

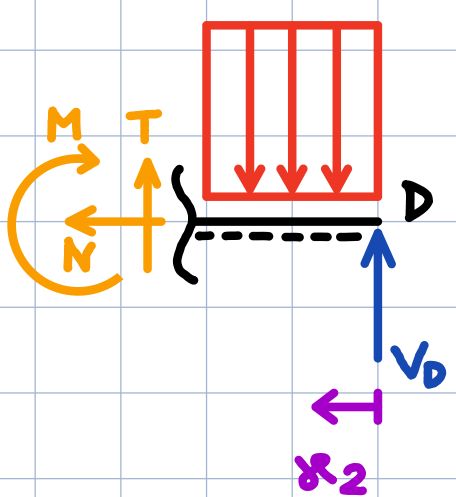
- $T_{BC} = V_A - \overbrace{q_1 L_{AB}}^{R_1} + V_B = 50N$

- $M_{BC} = V_A x_1 - \overbrace{q_1 L_{AB}}^{R_1} \left(x_1 - \frac{L_{AB}}{2}\right) + V_B (x_1 - L_{AB})$

$$= V_A x_1 - R_1 (x_1 - 75) + V_B (x_1 - 150)$$

$M_{BC}(L_{AB}) = -4500 \text{ Nmm} \qquad M_{BC}(L_{AB} + L_{BC}) = \emptyset$

TRATTO CD $\quad 0 < x_2 < L_{CD}$



- $N_{CD} = \emptyset \qquad$ • $T_{CD} = q_2 x_2 - V_D$

$T_{CD}(\emptyset) = -V_D = -50N \qquad T_{CD}(L_{CD}) = 50N$

$T_{CD} = \emptyset$ in $\bar{x}_2 = 25 \text{ mm}$

- $M_{CD} = V_D x_2 - q_2 \frac{x_2^2}{2}$

$M_{CD}(\emptyset) = \emptyset \quad M_{CD}(L_{CD}) = \emptyset$

Il momento è nullo agli estremi, che è esattamente quello che ci aspettiamo.

Andiamo a cercare i punti stazionari del momento nel tratto M_{CD}.

$$\frac{dM_{CD}}{dx_2} = V_D - q_2 x_2 \qquad \frac{dM_{CD}}{dx_2} = \emptyset \longrightarrow \tilde{x}_2 = 25\,mm$$

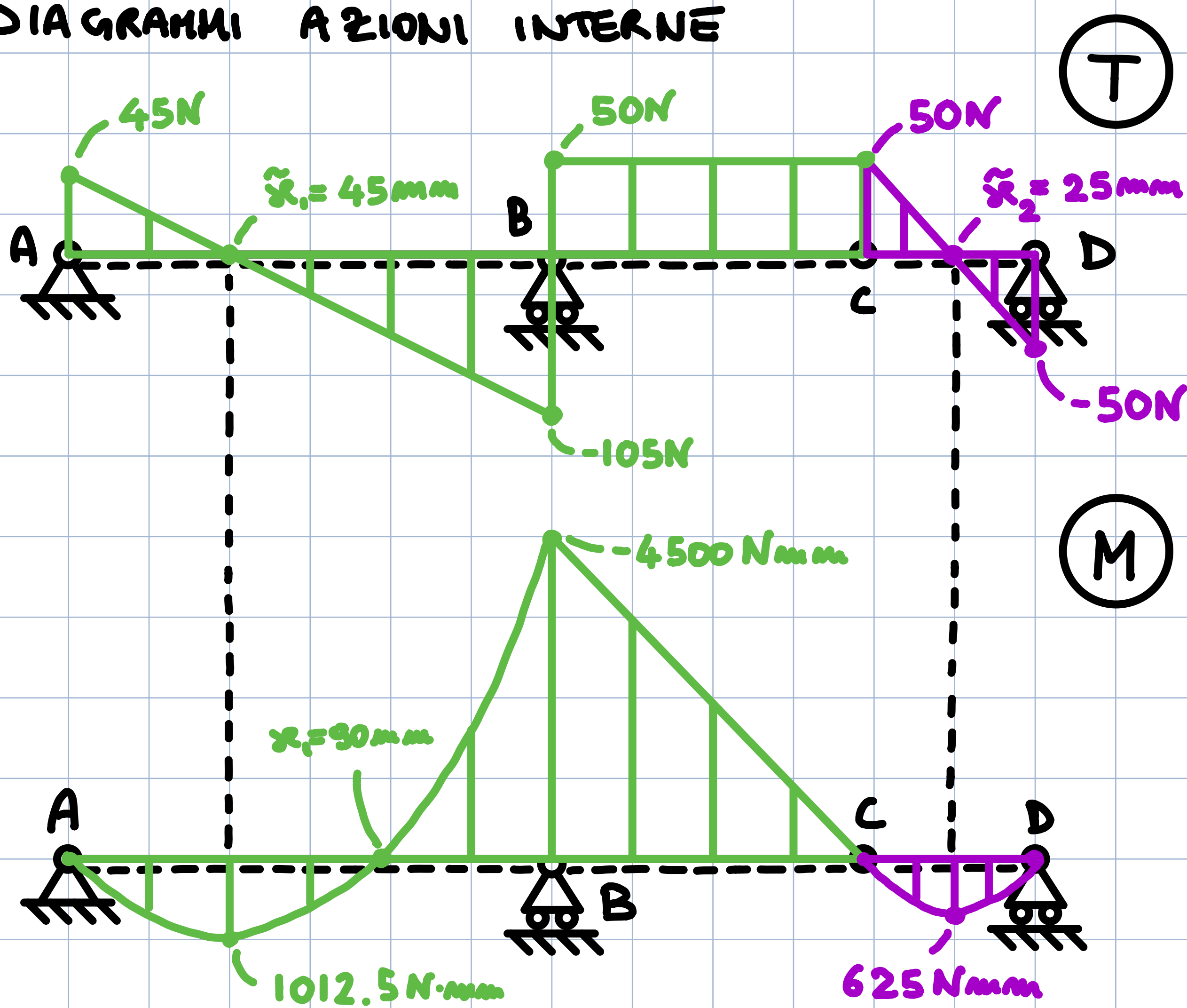
Esiste un punto stazionario in $\tilde{x} = 25\,mm$, andiamo a vedere la derivata seconda per capire se si tratta di un massimo o un minimo.

$$\frac{d^2M_{CD}}{dx_2^2} = -q_2 < \emptyset$$

la funzione M_{CD} è concava, quindi nel punto $\tilde{x}_2 = 25\,mm$ il momento è massimo.

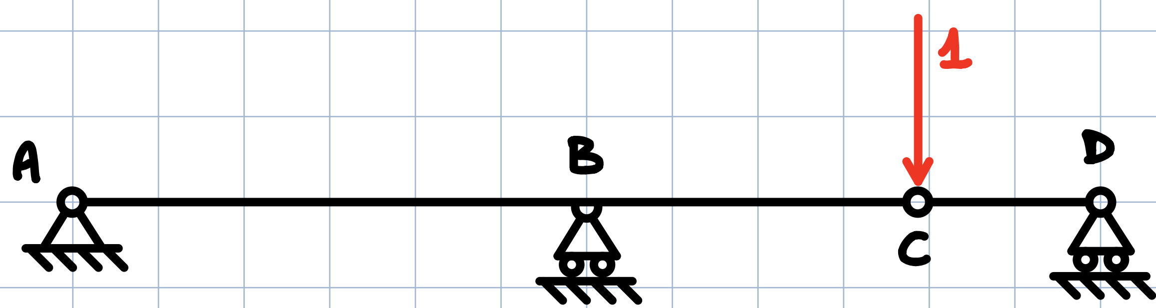
$$M_{CD}^{MAX} = M_{CD}(x_2 = 25) = 625\,Nmm$$

DIAGRAMMI AZIONI INTERNE

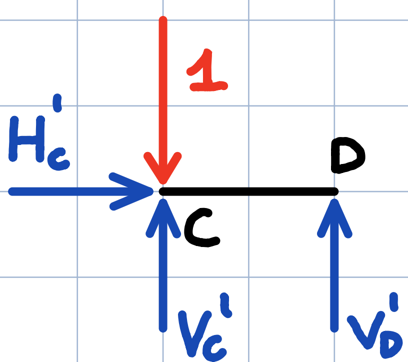


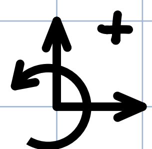
- Calcolo dello spostamento con il PLV

Per calcolare lo spostamento in C dobbiamo scegliere un sistema virtuale opportuno.



Calcolo le reazioni vincolari, so che non riuscirò a risolvere l'equilibrio globale, quindi è necessario utilizzare gli equilibri parziali.





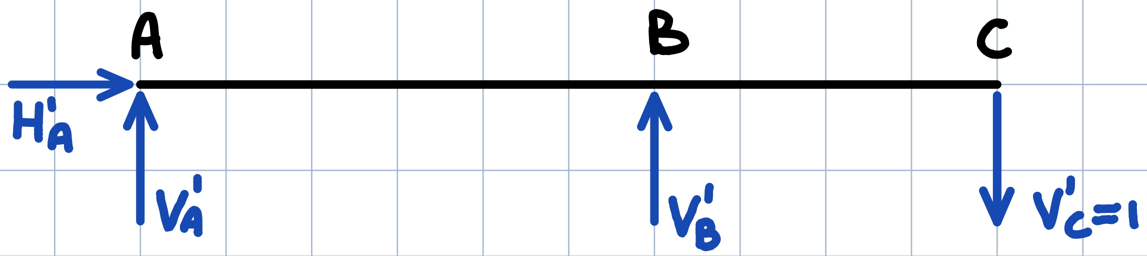
$\rightarrow \quad H'_C = 0$

$\uparrow \quad V'_C + V'_D = 1$

$\circlearrowleft C \quad V'_D L_{CD} = 0 \qquad V'_D = 0$

$V'_C + \underbrace{\cancel{V'_D}}_{0} = 1 \qquad V'_C = 1$

Avendo tenuto conto del carico unitario nel tratto $\overline{CD}$, nel tratto $\overline{AC}$ dovrò tener conto della sola reazione V_C.



$$\rightarrow \quad H'_A = \emptyset$$

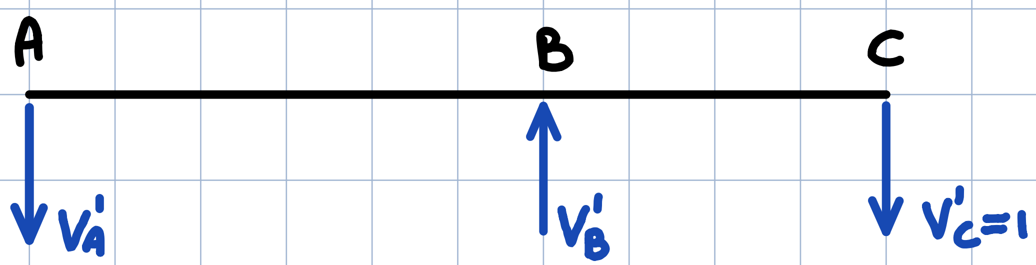
$$\uparrow \quad V'_A + V'_B = V'_C = 1$$

$$\circlearrowleft A \quad V'_B(L_{AB}) - V'_C(L_{AB} + L_{BC}) = \emptyset$$

$$V'_B = \frac{V_C(L_{AB} + L_{BC})}{L_{AB}} = 1.6N$$

$$V'_A = V'_C - V'_B = 1 - 1.6 = -0.6N$$

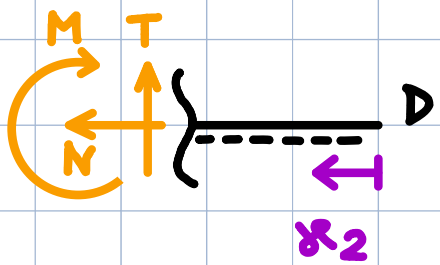
V'_A è negativo, quindi sarà necessario cambiare il suo verso e il suo segno.



$$\begin{cases} V'_A = 0.6N \\ V'_B = 1.6N \\ V'_C = 1N \end{cases}$$

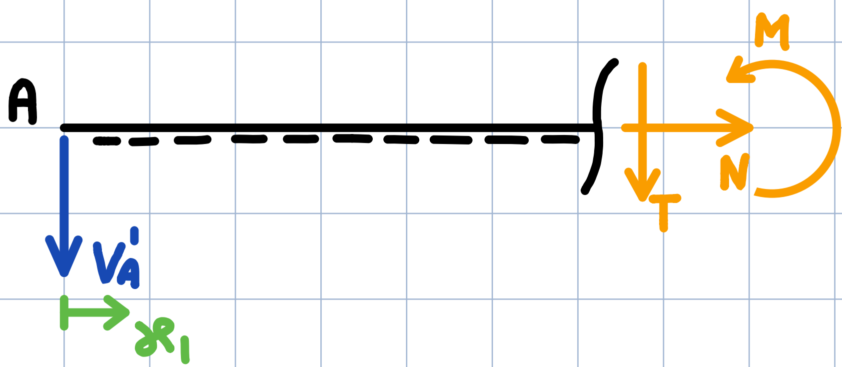
È evidente che il tratto CD sarà scarico, quindi le sue azioni interne saranno identicamente nulle.

TRATTO CD $0 < x_2 < L_{CD}$



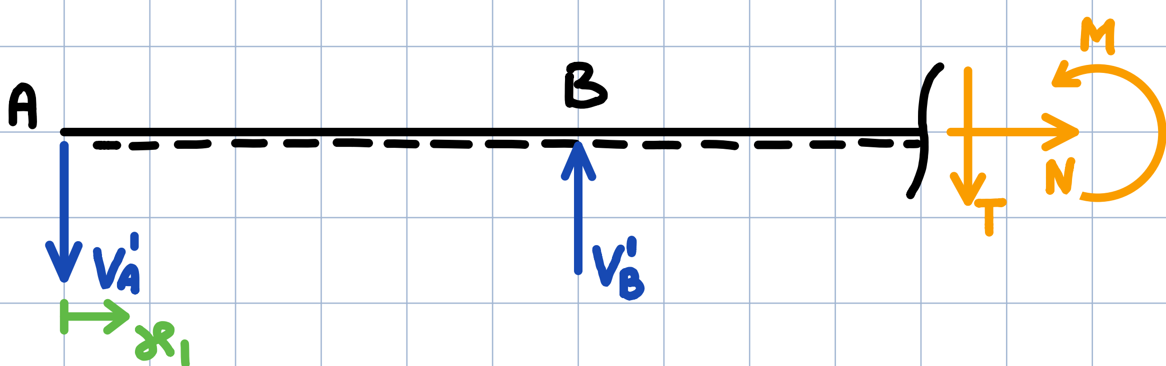
$N'_{CD} = T'_{CD} = M'_{CD} = \emptyset$

TRATTO AB $0 < x_1 < L_{AB}$



- $N'_{AB} = \emptyset$
- $T'_{AB} = -V'_A = -0.6N$
- $M_{AB} = -V'_A x_1$ $M'_{AB}(\emptyset) = \emptyset$ $M'_{AB}(L_{AB}) = -90\,Nmm$

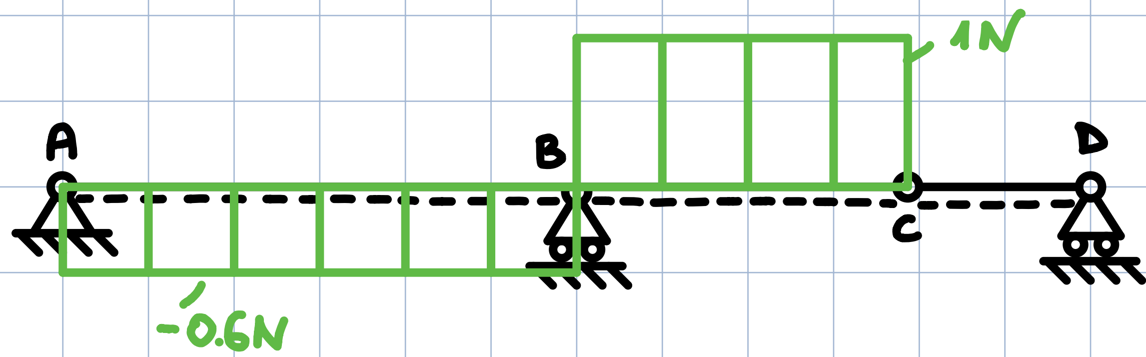
TRATTO BC $L_{AB} < x_1 < L_{AB} + L_{BC}$

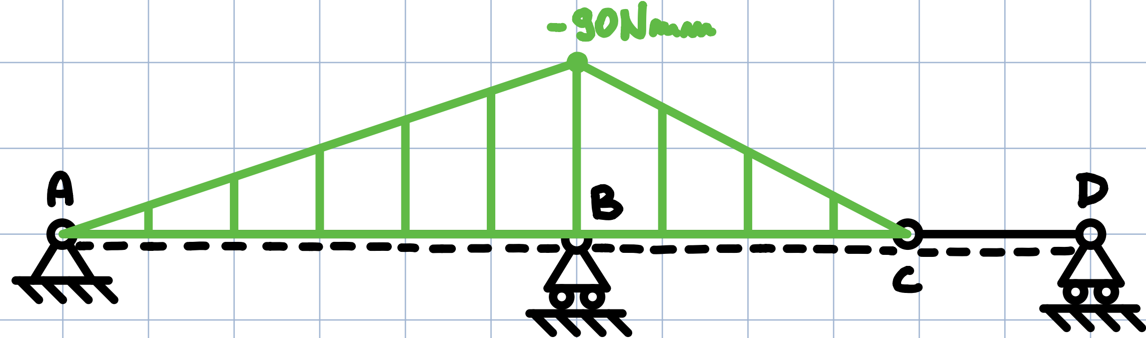


- $N'_{BC} = \emptyset$
- $T'_{BC} = -V'_A + V'_B = 1N$
- $M'_{BC} = -V'_A x_1 + V'_B (x_1 - L_{AB})$ $M'_{BC}(L_{AB}) = -90N$

$M'_{BC}(L_{AB} + L_{BC}) \cong \emptyset$

DIAGRAMMI AZIONI INTERNE SISTEMA VIRTUALE (O DELLE FORZE)





$\mathcal{L}_{ve} = 1 \cdot \delta$: Lavoro compiuto dalle forze esterne del sistema virtuale sugli spostamenti del sistema reale

$\mathcal{L}_{vi} = \int_0^l N' du + T' dt + M' d\varphi$: lavoro compiuto delle sollecitazioni interne del sistema virtuale sulle deformazioni del sistema reale.

$du = \frac{N}{EA} ds \qquad dt = \chi \frac{T}{GA} ds \qquad d\varphi = \frac{M}{EI} ds$

In cui s è una generica coordinata curvilinea che descrive l'asse della trave.

χ : fattore di taglio (per la sezione circolare piena vale 10/9)

E : modulo di Young

G : modulo di elasticità trasversale (per materiali isotropi vale la relazione $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$)

A : area della sezione

I : momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse perpendicolare al piano di sollecitazione

$$\mathcal{L}_{ve} = 1 \cdot \delta$$

$$\mathcal{L}_{vi} = \int_0^{L_{AB}} \left[\frac{\overset{\emptyset}{N'_{AB}} N_{AB}}{EA} + \chi \frac{T'_{AB} T_{AB}}{GA} + \frac{M'_{AB} M_{AB}}{EI} \right] dx_1 +$$

$$+ \int_{L_{AB}}^{L_{BC}+L_{AB}} \left[\frac{\overset{\emptyset}{N'_{BC}} N_{BC}}{EA} + \chi \frac{T'_{BC} T_{BC}}{GA} + \frac{M'_{BC} M_{BC}}{EI} \right] dx_1 +$$

$$+ \int_0^{L_{CD}} \underbrace{\left[\frac{N'_{CD} N_{CD}}{EA} + \chi \frac{T'_{CD} T_{CD}}{GA} + \frac{M'_{CD} M_{CD}}{EI} \right]}_{\emptyset} dx_2$$

$$\mathcal{L}_{vi} = \int_0^{L_{AB}} \left[\chi \frac{T'_{AB} T_{AB}}{GA} + \frac{M'_{AB} M_{AB}}{EI} \right] dx_1 \quad +$$

$$+ \int_{L_{AB}}^{L_{AB}+L_{BC}} \left[\chi \frac{T'_{AB} T_{AB}}{GA} + \frac{M'_{AB} M_{AB}}{EI} \right] dx_1 =$$

$$= \int_0^{L_{AB}} \left[\frac{10}{9} \frac{(-0.6)(45-x_1)}{GA} + \frac{(-0.6x_1)\left(45x_1 - \frac{x_1^2}{2}\right)}{EI} \right] dx_1 \; +$$

$$+ \int_{L_{AB}}^{L_{AB}+L_{BC}} \left[\frac{10}{9} \frac{(1)(50)}{GA} + \right.$$

$$\left. + \frac{(1.6(x_1-150)-0.6x_1)(45x_1-150(x_1-75)+155(x_1-150))}{EI} \right] dx_1$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 153.938 \text{ mm}^2 \qquad I = \frac{\pi d^4}{64} = 1885.74 \text{ mm}^4$$

$$\chi = \frac{10}{9} \qquad E = 210 \times 10^3 \text{ MPa} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 80769.2 \text{ MPa}$$

$$\mathcal{L}_{vi} = 0.01942 + 0.03108 = 0.0505 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

$$\parallel$$

$$\mathcal{L}_{ve} = 1 \cdot \delta \longrightarrow \delta = 0.0505 \text{ mm}$$