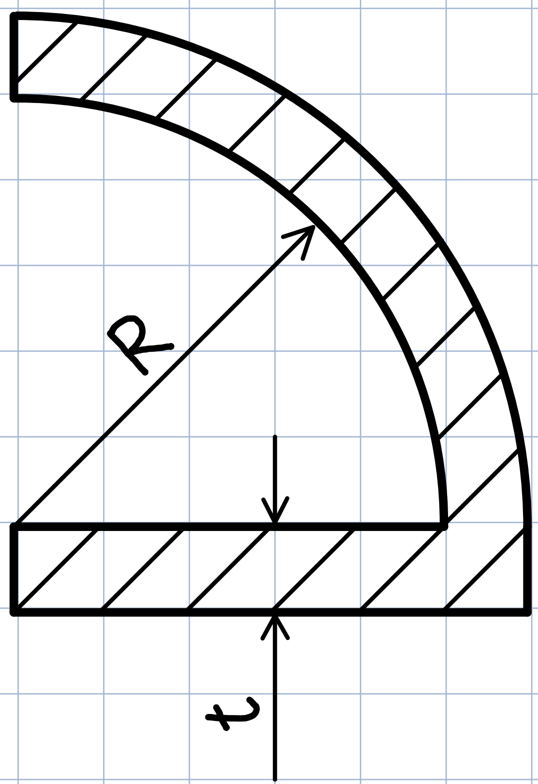
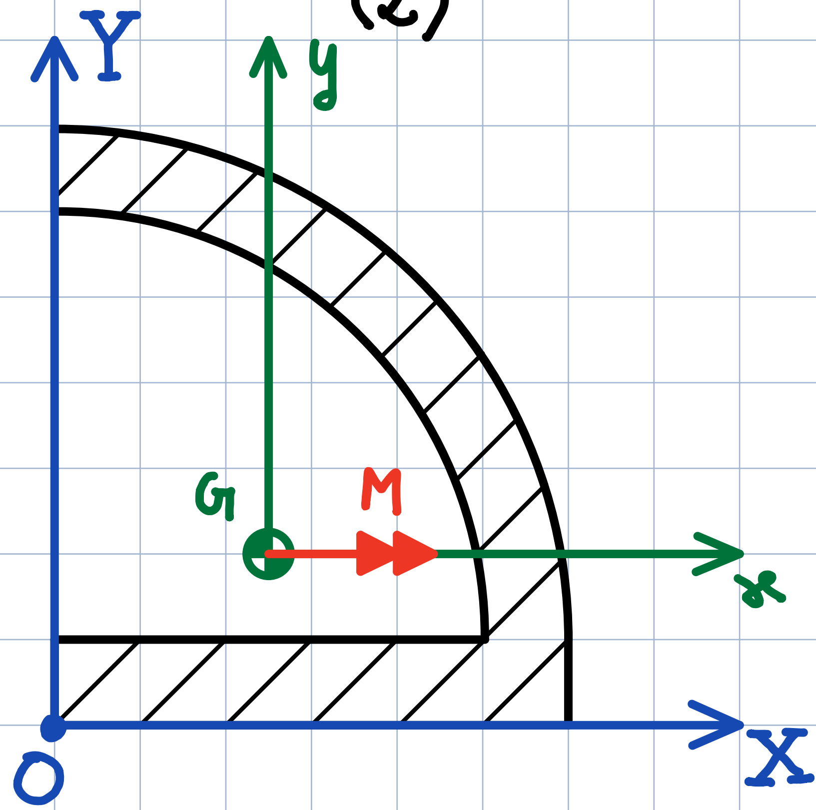
2020/05/29
A cura di P. M. Santucci

(1)



(2)

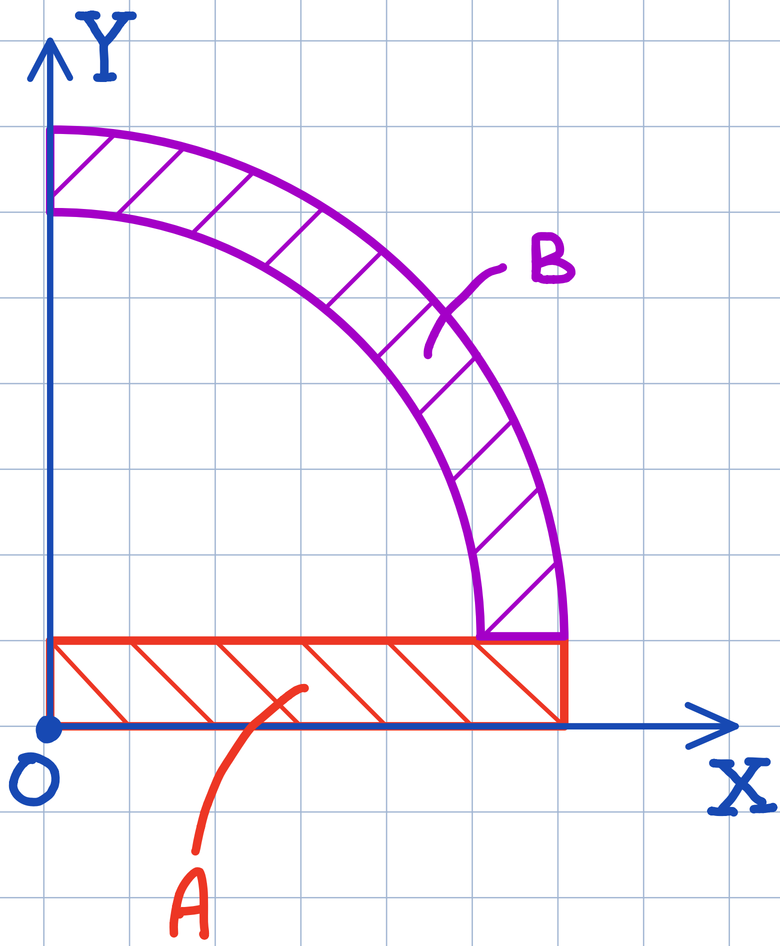


La sezione riportata in figura (1) è caratterizzata da uno spessore costante t pari a 10 mm e un raggio R pari a 50 mm. Si chiede di:

1) Caratterizzare la sezione attraverso il calcolo del baricentro e dei momenti d'inerzia baricentrici.

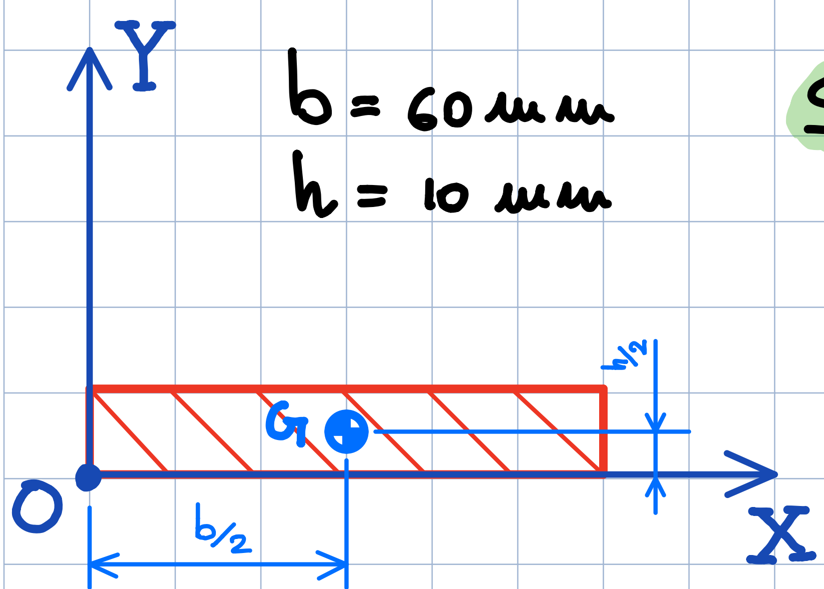
2) Analizzare lo stato di sforzo indotto dal momento M di intensità pari a 6500 Nm.

- Calcolo del baricentro



Per il calcolo del baricentro sfruttiamo i momenti statici.

Il primo passo consiste nel suddividere la sezione in due parti: un rettangolo A, con la base che giace sull'asse delle ascisse X del sistema di riferimento globale OXY, e un quarto di corona circolare B.

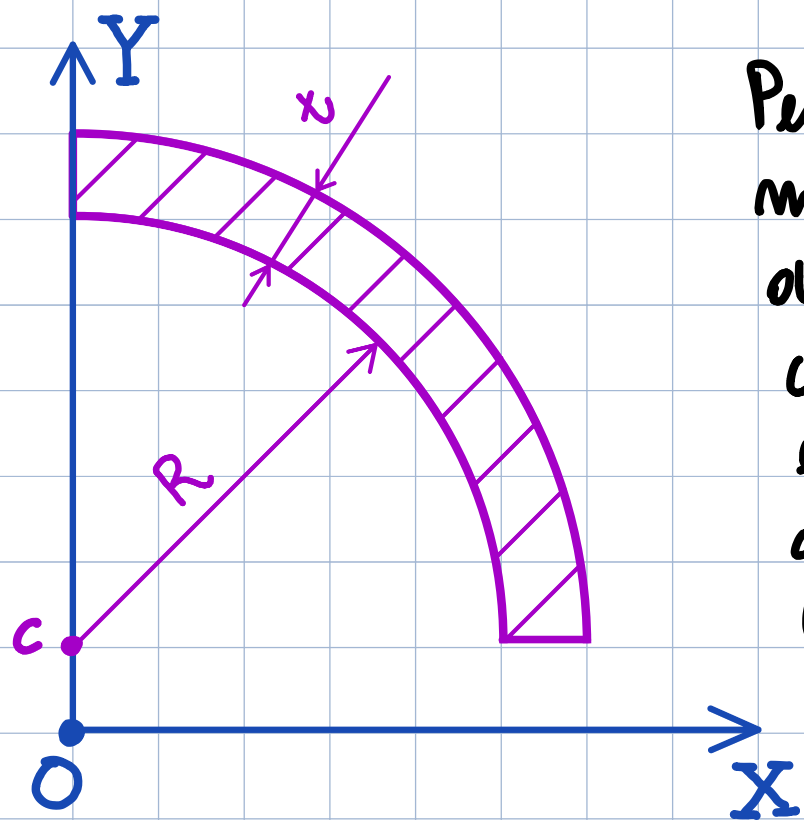


$b = 60\ mm$

$h = 10\ mm$

$$S_{x,\square} = A_\square \, y^G_\square = (b \cdot h)\left(h/2\right) = \frac{bh^2}{2} = \frac{(60)(10)^2}{2} = 3000\ mm^3$$

$$S_{y,\square} = A_{\square} x_{\square}^{G} = (b \cdot h) \frac{b}{2} = \frac{b^2 h}{2} = \frac{(60)^2 (10)}{2} = 18000 \text{ mm}^3$$

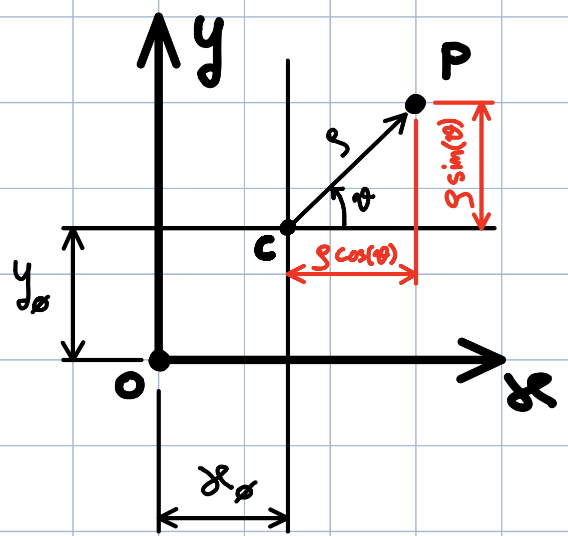


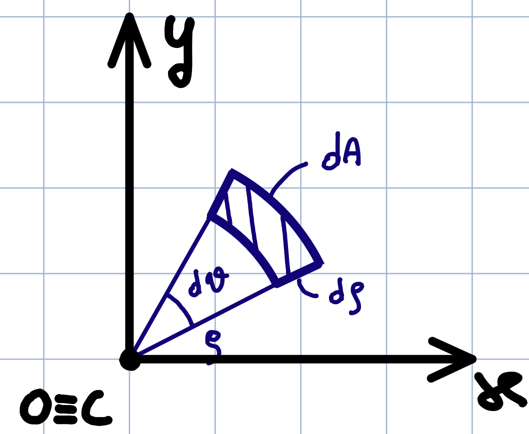
Per il calcolo di momenti statici della sezione di corona circolare è necessario compiere dei ragionamenti leggermente differenti.

Ricordiamo la definizione formale di momento statico di un'area A rispetto a un asse (e.g. asse x).

$$S_x = \int_A y \, dA \qquad S_y = \int_A x \, dA$$

È evidente che lavorare in coordinate cartesiane non è indicato per gli archi: passiamo alle coordinate POLARI.





Le coordinate di un punto P possono essere espresse in termini di coordinate polari come:

$$\begin{cases} x = x_\emptyset + \rho\cos(\vartheta) \\ y = y_\emptyset + \rho\sin(\vartheta) \end{cases}$$

dove $x_\emptyset$ e $y_\emptyset$ sono le coordinate cartesiane dell'origine C del sistema di coordinate polari. Inoltre $\rho \in \mathbb{R}$ e $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

L'espressione di un'area infinitesima dA, passando dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari prevede l'uso dello Jacobiano.

$$dx = \cos(\vartheta)\, d\rho - \rho \sin(\vartheta)\, d\vartheta$$
$$dy = \sin(\vartheta)\, d\rho + \rho \cos(\vartheta)\, d\vartheta$$

che può essere espresso in termini matriciali

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & -\rho \sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \rho \cos(\vartheta) \end{bmatrix}}_{\text{Matrice Jacobiana : } [J]} \begin{Bmatrix} d\rho \\ d\vartheta \end{Bmatrix}$$

$$\det[J] = \rho \cos^2(\vartheta) + \rho \sin^2(\vartheta) = \rho$$

Per esprimere quindi il passaggio da un sistema di coordinate ad un altro si sfrutta la regola di sostituzione per gli integrali multipli:

$$dA = dx\, dy = |\det(J)|\, d\rho\, d\vartheta = \rho\, d\rho\, d\vartheta$$

Siamo ora in condizione di calcolare efficacemente i momenti statici e i momenti d'inerzia.

Il centro della corona circolare si trova, rispetto al sistema OXY in coordinate $C(\emptyset, 10)$.

$$S_{x,O} = \int_A y \, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_R^{R+t} [y_\emptyset + \rho \sin(\vartheta)] \rho \, d\rho \, d\vartheta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_R^{R+t} \rho \, y_\emptyset \, d\rho \, d\vartheta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_R^{R+t} \rho^2 \sin(\vartheta) \, d\rho \, d\vartheta =$$

$$= y_\emptyset \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_R^{R+t} \left. \vartheta \right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_R^{R+t} \left. \cos(\vartheta) \right|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= (10) \frac{[(R+t)^2 - R^2]}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \emptyset\right) +$$

$$- \frac{[(R+t)^3 - R^3]}{3} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(\emptyset)\right] =$$

$$= 38972.7 \text{ mm}^3$$

$$S_{y,O} = \int_A x \, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_R^{R+t} \rho \cos(\vartheta) \rho \, d\rho \, d\vartheta =$$

$$= \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_R^{R+t} \left. \sin(\vartheta) \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 30333.33 \text{ mm}^3$$

L'utilizzo delle coordinate polari ci ha semplificato la vita notevolmente.

$$S_{x,TOT} = S_{x,\square} + S_{x,\circ} = 41972.7 \text{ mm}^3$$

$$S_{y,TOT} = S_{y,\square} + S_{y,\circ} = 48333.3 \text{ mm}^3$$

$$A_{\square} = bh = (60)(10) = 600 \text{ mm}^2$$

$$A_{\circ} = \int_A dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_R^{R+t} \rho \, d\rho \, d\vartheta = \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_R^{R+t} \left.\vartheta\right|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 863.938 \text{ mm}^2$$

$$A_{TOT} = A_{\square} + A_{\circ} = 1463.94 \text{ mm}^2$$

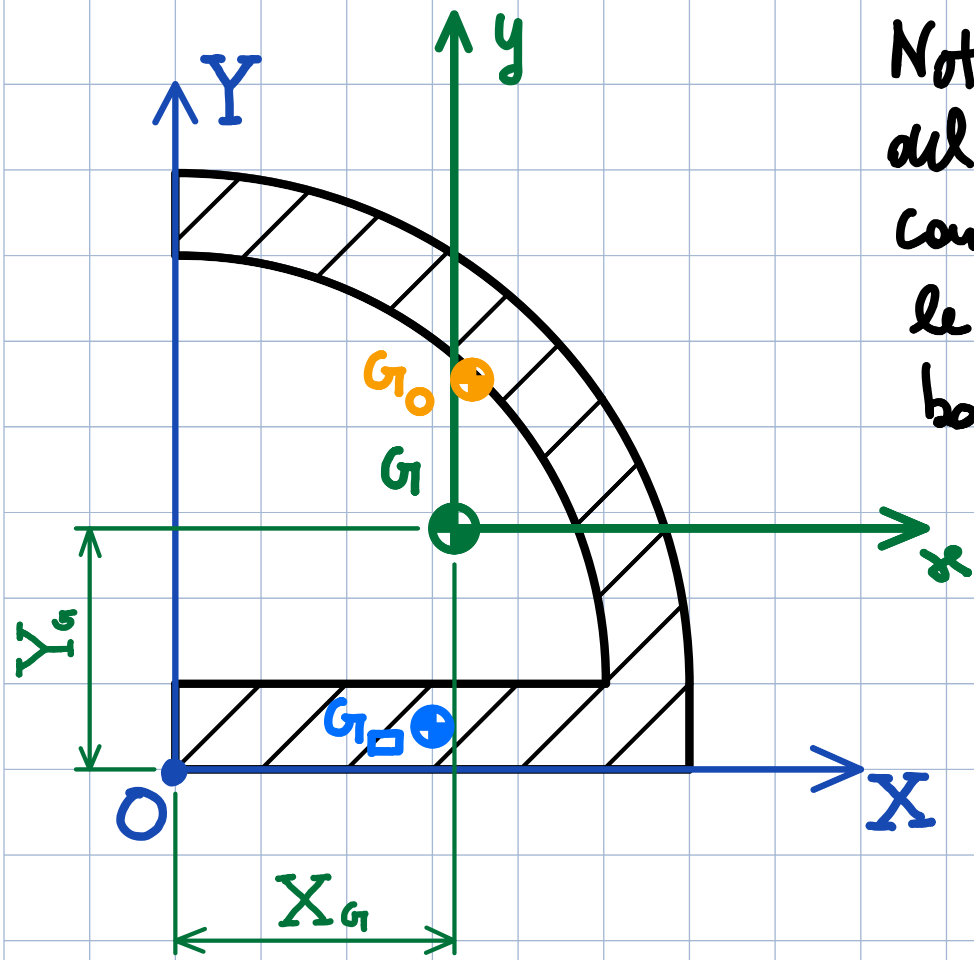
$$\begin{cases} X_G = \dfrac{S_{y,TOT}}{A_{TOT}} = 33.016 \text{ mm} \\ Y_G = \dfrac{S_{x,TOT}}{A_{TOT}} = 28.671 \text{ mm} \end{cases}$$

Coordinate del baricentro G rispetto al sistema OXY.

COORDINATE BARICENTRICHE LOCALI

$$\begin{cases} X_{G_\square} = 30 \text{ mm} \\ Y_{G_\square} = 5 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{G_\circ} = \dfrac{S_{y,\circ}}{A_\circ} = 35.111 \text{ mm} \\ Y_{G_\circ} = \dfrac{S_{x,\circ}}{A_\circ} = 45.111 \text{ mm} \end{cases}$$

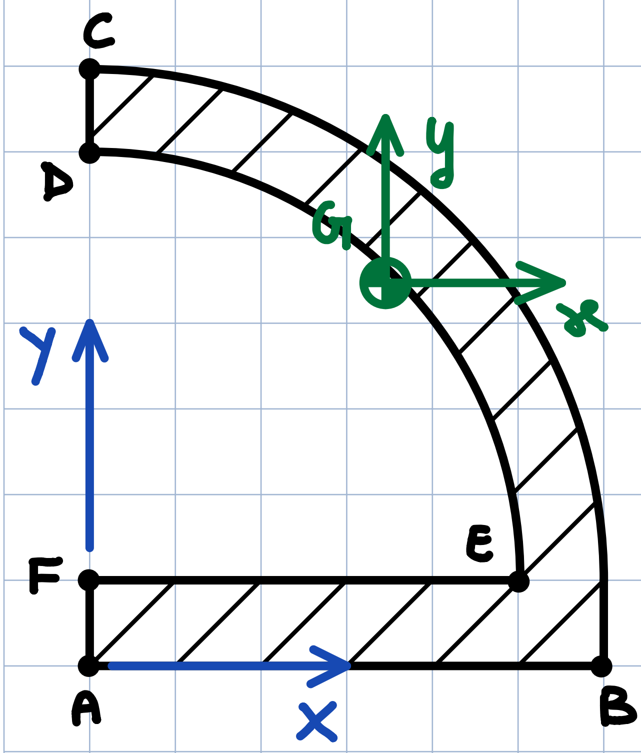


Note le coordinate del baricentro è conveniente esprimere le coordinate dei baricentri delle sezioni di corone circolare e del rettangolo rispetto al sistema baricentrico Gxy.

$$\begin{cases} x_{G_\square} = X_{G_\square} - X_G = 30 - 33.016 = -3.016 \text{ mm} \\ y_{G_\square} = Y_{G_\square} - Y_G = 5 - 28.671 = -23.671 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{G_\circ} = X_{G_\circ} - X_G = 35.111 - 33.016 = 2.095 \text{ mm} \\ y_{G_\circ} = Y_{G_\circ} - Y_G = 45.111 - 28.671 = 16.439 \text{ mm} \end{cases}$$

Successivamente sarà richiesto il calcolo degli sforzi, è quindi conveniente esprimere le coordinate di alcuni punti noti nel sistema Gxy.



SISTEMA OXY

$A \begin{cases} X = 0 \text{ mm} \\ Y = 0 \text{ mm} \end{cases}$ $D \begin{cases} X = 0 \text{ mm} \\ Y = 50 \text{ mm} \end{cases}$

$B \begin{cases} X = 60 \text{ mm} \\ Y = 0 \text{ mm} \end{cases}$ $E \begin{cases} X = 50 \text{ mm} \\ Y = 10 \text{ mm} \end{cases}$

$C \begin{cases} X = 0 \text{ mm} \\ Y = 60 \text{ mm} \end{cases}$ $F \begin{cases} X = 0 \text{ mm} \\ Y = 10 \text{ mm} \end{cases}$

SISTEMA Gxy

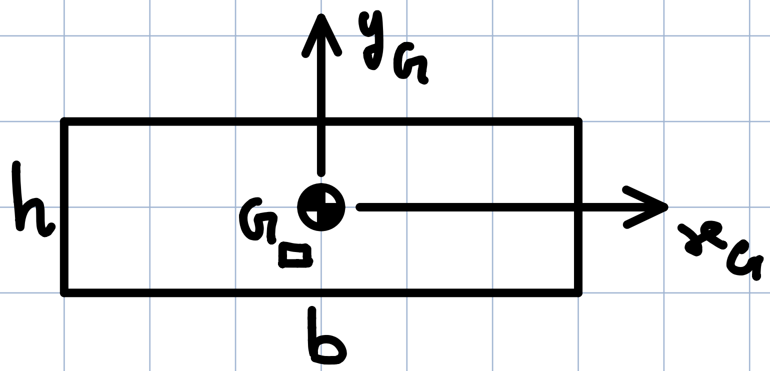
$A \begin{cases} x = -33.016 \text{ mm} \\ y = -28.671 \text{ mm} \end{cases}$ $D \begin{cases} x = -33.016 \text{ mm} \\ y = 21.329 \text{ mm} \end{cases}$

$B \begin{cases} x = 26.984 \text{ mm} \\ y = -28.671 \text{ mm} \end{cases}$ $E \begin{cases} x = 16.984 \text{ mm} \\ y = -18.671 \text{ mm} \end{cases}$

$C \begin{cases} x = -33.016 \text{ mm} \\ y = 31.329 \text{ mm} \end{cases}$ $F \begin{cases} x = -33.016 \text{ mm} \\ y = -18.671 \text{ mm} \end{cases}$

Il prossimo passo consiste nel calcolare i momenti di inerzia della sezione rispetto al sistema baricentrico.

- Calcolo dei momenti d'inerzia



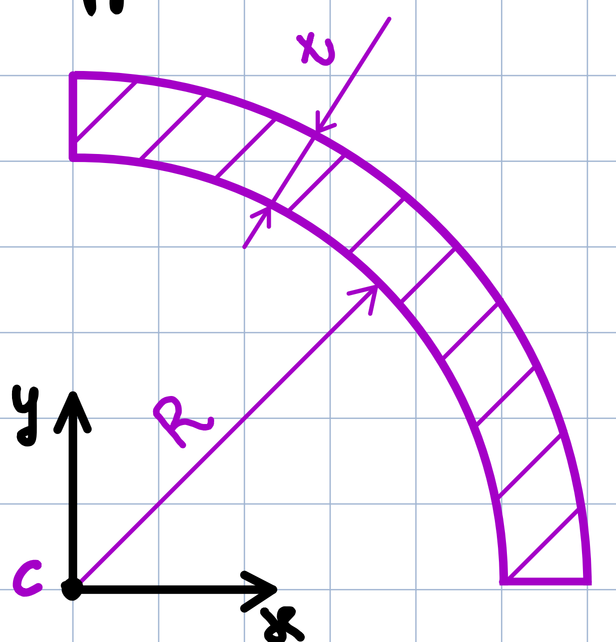
I momenti d'inerzia baricentrici del rettangolo, rispetto al suo sistema baricentrico locale valgono:

$$I_{x_{G_\square}} = \frac{b h^3}{12} = \frac{(60)(10)^3}{12} = 5000 \ mm^4$$

$$I_{y_{G_\square}} = \frac{b^3 h}{12} = \frac{(60)^3(10)}{12} = 180000 \ mm^4$$

$$I_{xy_{G_\square}} = \emptyset$$

Per quanto riguarda l'arco di corona circolare è necessaria una strategia differente.



Abbiamo visto che le coordinate polari ci semplificano non poco la vita. Calcoliamo quindi i momenti d'inerzia rispetto agli assi locali xy, che hanno origine nel centro della corona circolare.

$$I_{x_0} = \int_A y^2\, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_R^{R+t} [\rho \sin(\vartheta)]^2 \rho\, d\rho\, d\vartheta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\vartheta)\, d\vartheta \int_R^{R+t} \rho^3\, d\rho =$$

$$= \frac{1}{8}\Big[\vartheta - \cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^4 \Big|_R^{R+t} =$$

$$= 1.31751\text{E}6 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_0} = \int_A x^2\, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_R^{R+t} [\rho \cos(\vartheta)]^2 \rho\, d\rho\, d\vartheta =$$

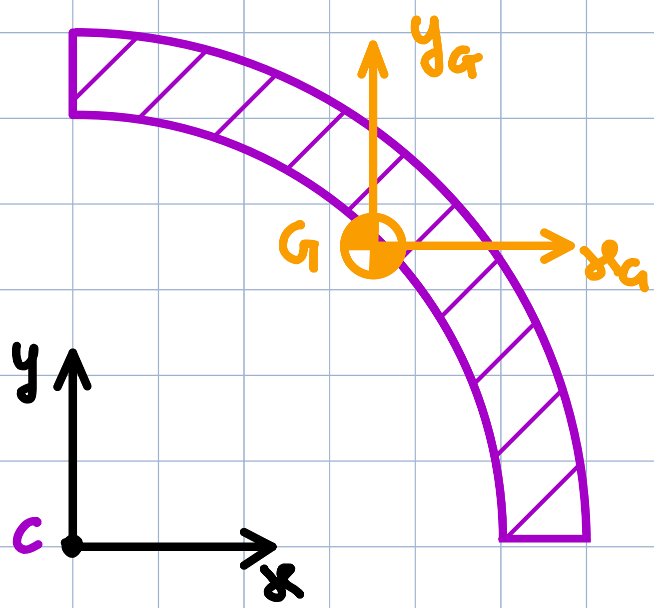
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\vartheta)\, d\vartheta \int_R^{R+t} \rho^3\, d\rho =$$

$$= \frac{1}{8}\Big[\vartheta + \cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^4 \Big|_R^{R+t} = 1.31751\text{E}6 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy_0} = \int_A xy\, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_R^{R+t} [(\rho\cos(\vartheta))(\rho\sin(\vartheta))]\, \rho\, d\rho\, d\vartheta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\, d\vartheta \int_R^{R+t} \rho^3\, d\rho =$$

$$= -\frac{1}{8}\cos^2(\vartheta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^4 \Big|_R^{R+t} = 838\,750 \text{ mm}^4$$



Le coordinate del baricentro della sezione di corona circolare si ottengono da una banale traslazione in y delle coordinate calcolate in precedenza

$$\begin{cases} \bar{x}_{G0} = 35.111 \text{ mm} \\ \bar{y}_{G0} = Y_{G0} - 10 = 35.111 \text{ mm} \end{cases}$$

Ricordando la formula di trasporto di Huygens-Steiner:

$$I = I_G + A d^2 \longrightarrow I_G = I - A d^2$$

$$I_{x_{G0}} = I_{x_0} - A_0 (\bar{y}_{G0})^2 =$$

$$= 1.31751E6 - (863.938)(35.111)^2 =$$

$$= 252\,486 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_{G0}} = I_{y_0} - A_0 (\bar{x}_{G0})^2 =$$

$$= 1.31751E6 - (863.938)(35.111)^2 =$$

$$= 252\,486 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy_{G\circ}} = I_{xy_\circ} - A_\circ (\bar{x}_{G\circ})(\bar{y}_{G\circ}) =$$

$$= 838750 - (863.938)(35.111)(35.111) =$$

$$= -226670 \text{ mm}^4$$

NB: il segno meno deriva dal fatto che gran parte dell'area è contenuta nel II e IV quadrante del sistema baricentrico del settore circolare.

Noti i momenti d'inerzia baricentrici delle parti che vanno a costituire l'intera sezione, attraverso il teorema di Huygens-Steiner è possibile calcolare i momenti di inerzia baricentrici della sezione globale.

$$I_x = I_{xG_\square} + A_\square (y_{G_\square})^2 + I_{xG_\circ} + A_\circ (y_{G_\circ})^2 =$$

$$= 5000 + (600)(-23.671)^2 + 252486 + (863.938)(16.439)^2 =$$

$$= 827162 \text{ mm}^4$$

$$I_y = I_{yG_\square} + A_\square (x_{G_\square})^2 + I_{yG_\circ} + A_\circ (x_{G_\circ})^2 =$$

$$= 180000 + (600)(-3.016)^2 + 252486 + (863.938)(2.095)^2 =$$

$$= 441734 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = I_{xyG_\square} + A_\square (x_{G_\square})(y_{G_\square}) + I_{xyG_\circ} +$$

$$+ A_\circ (x_{G_\circ})(y_{G_\circ}) =$$

$$= \varnothing + (600)(-3.016)(-23.671) + (-226670) +$$

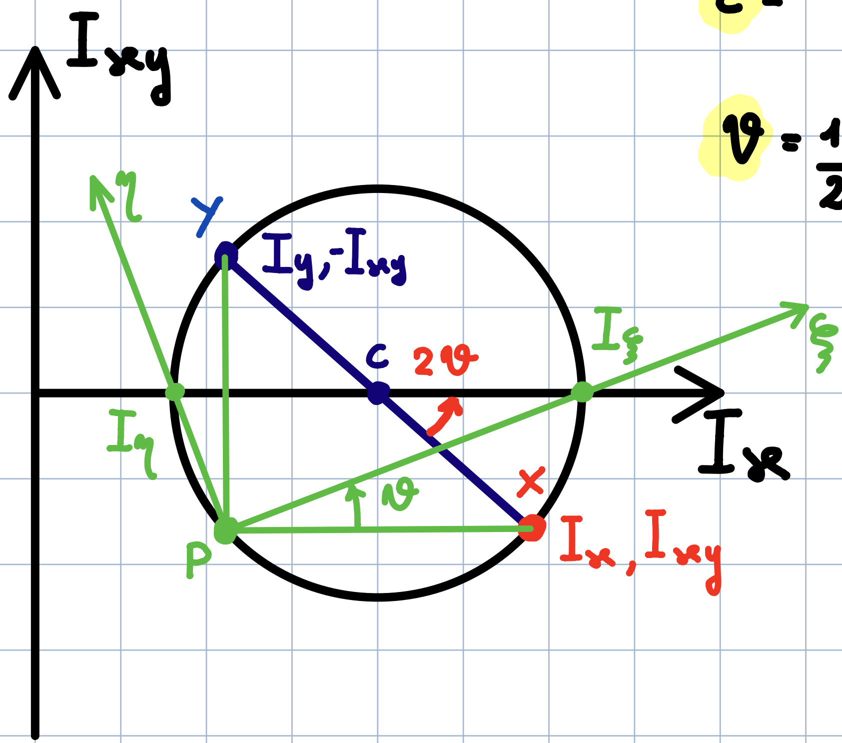
$$+ (863.938)(2.095)(16.439) = -153687 \text{ mm}^4$$

Noti i momenti baricentrici è necessario trovare i momenti principali e la relativa orientazione degli assi ad essi associati. Utilizziamo il cerchio di Mohr delle inerzie.

Ci troviamo in una configurazione dove i

$$I_x > I_y \quad \text{e} \quad I_{xy} < \varnothing$$

CERCHIO DI MOHR



$$c = \frac{I_x + I_y}{2} = 634448 \text{ mm}^4$$

$$\vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{atan}\left(\frac{-2 I_{xy}}{I_x - I_y}\right) = 19.286^\circ$$

N.B.: È stata utilizzata la costruzione del polo per evidenziare subito le direzioni principali d'inerzia: conduco per il punto $X(I_x, I_{xy})$ la parallela all'asse I_x e per il punto $Y(I_y, -I_{xy})$ la parallela all'asse I_{xy}. L'intersezione da luogo al polo. Tracciando da quest'ultimo due rette passanti per i punti $(I_\xi, \emptyset)$ e $(I_\eta, \emptyset)$ si identificano le direzioni principali ξ e η.

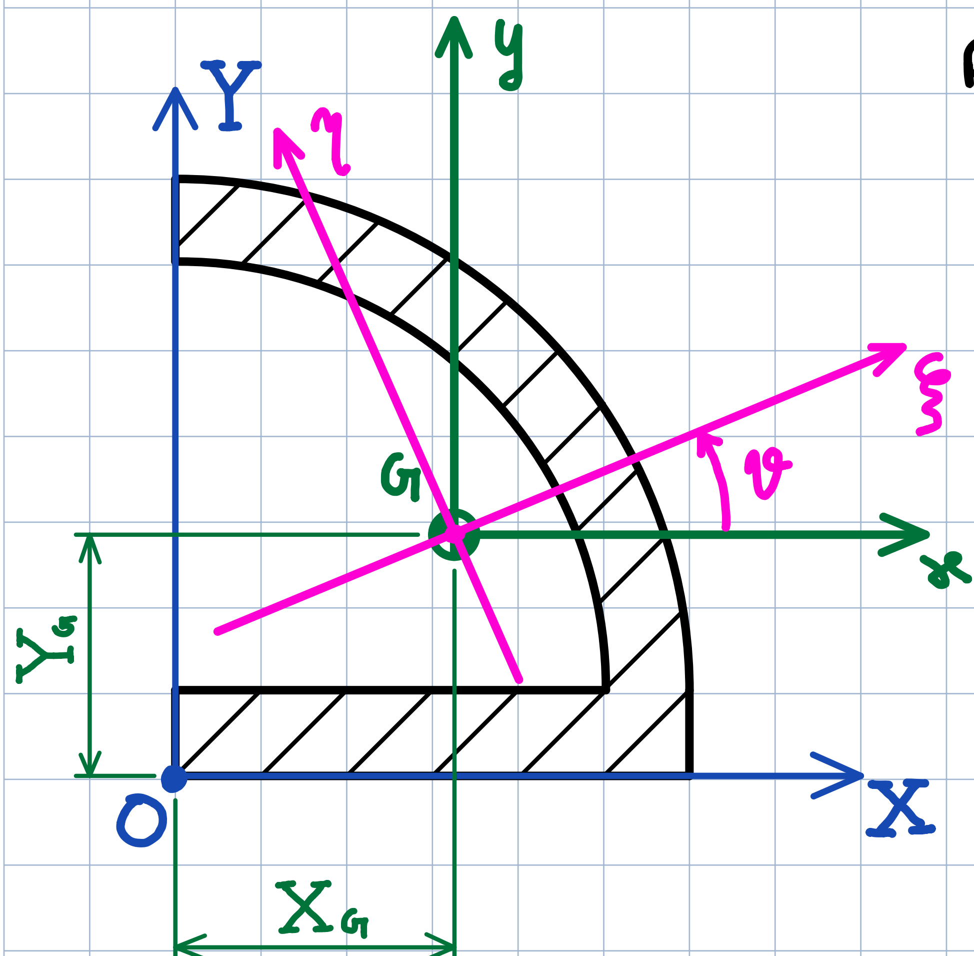
Si noti che l'arco che l'arco compreso tra i punti x e $(I_\xi, \emptyset)$ sottende un angolo al centro 2ϑ: di conseguenza l'angolo alla circonferenza tra la direzione parallela all'asse I_x e l'asse principale ξ sarà metà di quest'ultimo (ϑ), poiché insiste sullo stesso arco.

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + (2I_{xy})^2} = 246\,492 \text{ mm}^4$$

I momenti principali valgono quindi:

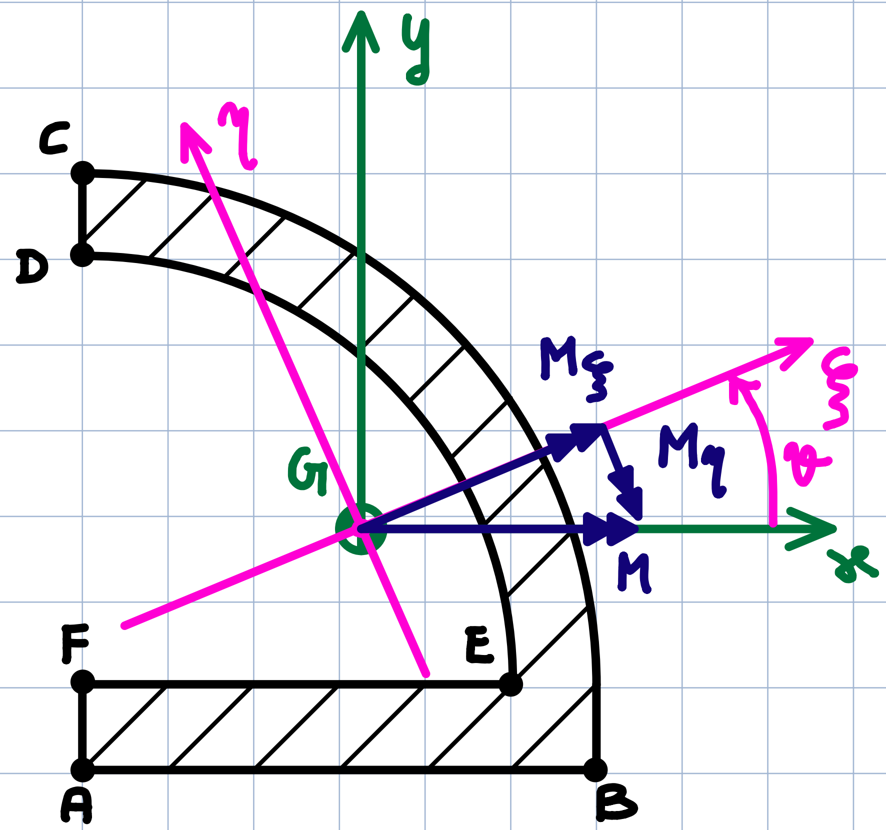
$$\begin{matrix} I_\xi \\ I_\eta \end{matrix} = C \pm R = \begin{cases} \text{MAX} & I_\xi = 880\,940 \text{ mm}^4 \\ \text{MIN} & I_\eta = 387\,956 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

A questo punto abbiamo trovato i momenti d'inerzia principali e le loro direzioni.



Risulta quindi evidente che per poter calcolare gli sforzi di flessione sarà necessario proiettare il momento flettente M lungo le direzioni ξ ed η.

- Calcolo degli sforzi a flessione



Gli sforzi di flessione σ_ζ, dove ζ è la coordinata del sistema $\xi\eta\zeta$ che esce fuori dal piano del foglio, derivano da uno stato di **FLESSIONE DEVIATA**.

Proiettando il momento flettente M lungo le direzioni principali si ottiene:

$$M_\xi = M\cos(\vartheta) = (6.5\,E6)\cos(\vartheta) = 6.13523\,E6\ Nmm$$

$$M_\eta = M\sin(\vartheta) = (6.5\,E6)\sin(\vartheta) = 2.14683\,E6\ Nmm$$

Il momento M_ξ provoca sforzi di trazione (+) su la porzione positive dell'asse η;
il momento M_η provoca sforzi di trazione (+) su la porzione positive dell'asse ξ.
Tale affermazione può essere verificata attraverso l'applicazione della regola della mano destra.

Alla luce di queste considerazioni possiamo scrivere la forma definitive per gli sforzi: σ_ξ, sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti.

$$\sigma_\xi = \frac{M_\xi \eta}{I_\xi} + \frac{M_\eta \xi}{I_\eta}$$

il segno (+) serve per tener conto del fatto che per $\xi > 0$ il contributo del M_η a σ_ξ è di trazione.

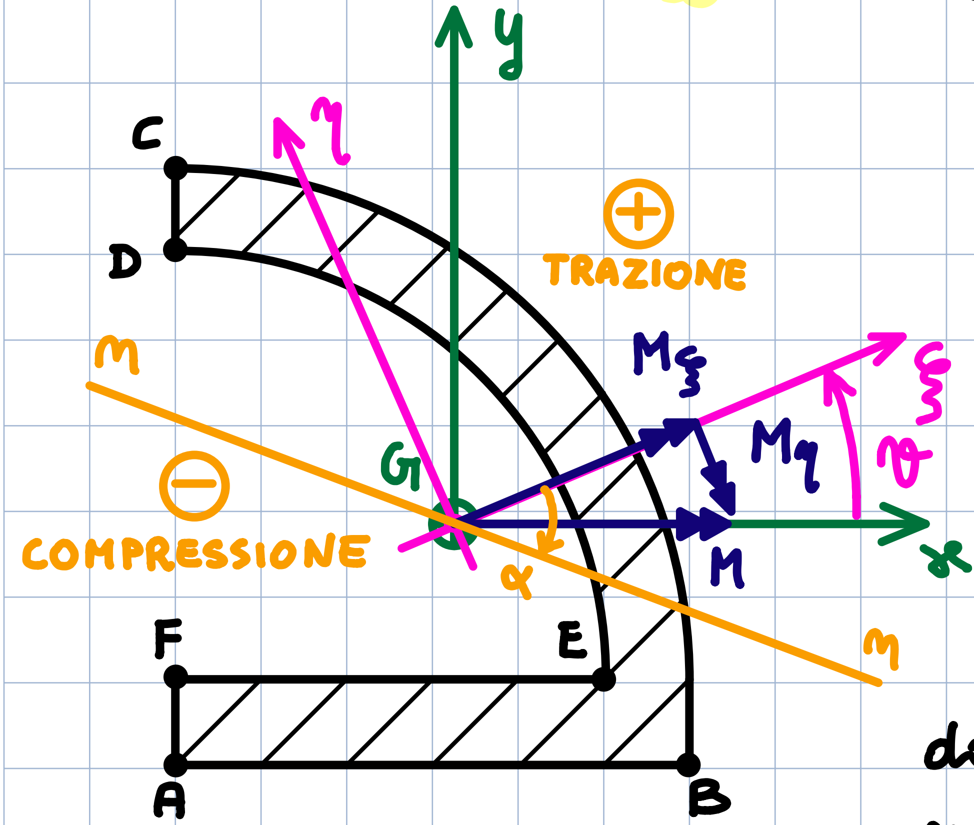
Per trovare l'equazione dell'asse neutro, nel sistema ξ-η è sufficiente imporre la condizione $\sigma_\xi = 0$.

$$\sigma_\xi = 0 \quad \frac{M_\xi \eta}{I_\xi} + \frac{M_\eta \xi}{I_\eta} = 0$$

$$\eta = \underbrace{-\left(\frac{I_\xi}{I_\eta}\right)\left(\frac{M_\eta}{M_\xi}\right)}_{\text{coeff. angolare } m} \xi$$

EQUAZIONE DELL'ASSE NEUTRO

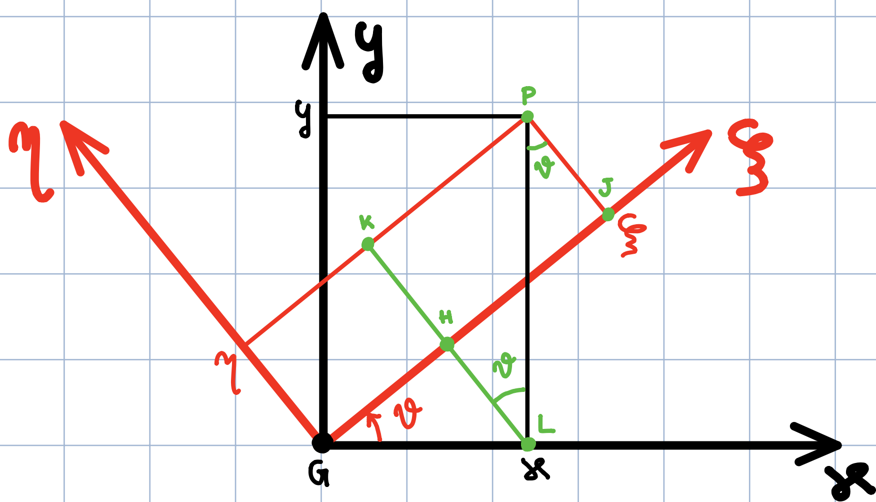
$m = -0.4946 \longrightarrow \alpha = \arctan(m) = -38.47°$



L'asse neutro costituisce per definizione il luogo dei punti che non si allungano né si accorciano, quindi dove gli sforzi sono nulli. Serve quindi ad identificare quale porzione della sezione si trova in trazione e quale in compressione. Questo risulta essere molto utile quando si ha a che fare con materiali che non tollerano la trazione (e.g. mattone, calcestruzzo).

Si noti come la direzione dell'asse neutro e la direzione della risultante dei momenti M_ξ e M_η non coincidono.

Per calcolare gli sforzi nei punti caratteristici della sezione è necessario utilizzare una trasformazione dal sistema Gxy a quello ruotato rigidamente di ϑ $G\xi\eta$.



$$\xi = \overline{GH} + \overline{HJ}$$

$$\overline{HJ} \equiv \overline{KP}$$

$$\overline{GH} = x \cos(\vartheta)$$

$$\overline{KP} \equiv \overline{HJ} = y \sin(\vartheta)$$

$$\xi = x\cos(\vartheta) + y\sin(\vartheta)$$

$$\eta = \overline{LK} - \overline{LH}$$

$$\overline{LK} = y\cos(\vartheta)$$

$$\overline{LH} = x\sin(\vartheta)$$

$$\eta = y\cos(\vartheta) - x\sin(\vartheta)$$

In forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

	x	y	ξ	η	σ_z
A	-33.016	-28.671	-40.633	-16.158	-337.38
B	26.984	-28.671	16.0	-35.975	-162.0
C	-33.016	31.329	-20.816	40.475	+166.7
D	-33.016	21.329	-24.119	31.037	+82.69
E	16.984	-18.671	9.864	-23.233	-107.22
F	-33.016	-28.671	-37.330	-6.719	-253.37

Coordinate in [mm].

Sforzi in [MPa]