

Esercizio

Una pompa centrifuga è rappresentata dalle seguenti curve caratteristiche, $H(Q)=30-5000*Q$ ed $\eta(Q)=0.5+17*Q-250*Q^2$ quando la velocità di rotazione è di 1500 giri/min. La pompa è inserita in un circuito idraulico costituito da due serbatoi aperti all'atmosfera con i peli liberi che distano fra loro di 22 m. Una rilevazione sperimentale prevede che la prevalenza sia di 25 m quando la portata circolante nell'impianto è pari a $0.05 \text{ m}^3/\text{s}$ (per la caratteristica del circuito si assuma una forma parabolica).

- Si richiede di valutare il punto di lavoro della macchina e la corrispondente potenza assorbita.
- Allo scopo di regolare la portata viene variata la velocità di rotazione. Si richiede di determinare il nuovo punto di funzionamento a 1750 giri/min e la potenza assorbita nella nuova condizione operativa.

Dati:

$$n_1=1500 \text{ rpm} \quad H_1(Q)=30-5000*Q^2 \quad \eta_1(Q)=0.5+17*Q-250*Q^2 \quad Q[\text{m}^3/\text{s}] \quad H[\text{m}]$$

$$\Delta z = 22 \text{ m}$$

dato sperimentale: $H=25 \text{ m}$ per $Q = 0.05 \text{ m}^3/\text{s}$

$$n_2 = 1750 \text{ rpm}$$

Soluzione:

- Per individuare il punto di funzionamento della macchina è necessario determinare la curva caratteristica del circuito (caratteristica esterna). Si assume una forma parabolica seguente:

$$H_c(Q)=A + B*Q^2$$

in cui per portata nulla, $H_c=\Delta z$, essendo nulla la differenza di pressione e di velocità del fluido tra i due serbatoi. Di conseguenza $A=\Delta z=22 \text{ m}$. Dal dato sperimentale è possibile ottenere il valore di B, osservando che esso soddisfa l'equazione:

$$25=22 + B*(0.05)^2 \text{ da cui } B=1200.$$

Il punto operativo della macchina è ottenuto risolvendo il sistema delle curve caratteristiche della pompa e del circuito:

$$H(Q) = 30-5000*Q^2$$

$$H_c(Q) = 22 + 1200 \cdot Q^2$$

Dall'intersezione delle due curve si trova il punto di funzionamento e, per la portata ottenuta, si calcola il corrispondente rendimento (essendo nota la sua espressione analitica). Il punto di funzionamento sarà allora caratterizzato dai seguenti valori:

$$H = 23.5 \text{ m}$$

$$Q = 0.036 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\eta = 0.788$$

Dunque, la potenza assorbita dalla pompa è: $P_{\text{ass}} = \rho \cdot Q \cdot g \cdot H / \eta = 10.5 \text{ kW}$

- b)** Per regolare (cambiare) la portata nel circuito è necessario modificarne il punto di funzionamento, ovvero l'intersezione tra la caratteristica della pompa e del circuito. E' possibile intervenire sul circuito, ad esempio agendo su una valvola, modificando le perdite, oppure sulla pompa, variandone la velocità di rotazione, oppure su entrambe. In questo caso non si ha nessuna azione sul circuito (e dunque nessuna modifica della sua curva caratteristica), mentre cambia la curva caratteristica della pompa, della quale si incrementa il numero di giri. Per trovare il nuovo punto di lavoro del sistema è dunque necessario determinare la curva caratteristica della pompa alla nuova velocità di rotazione ed individuarne l'intersezione con la caratteristica esterna.

Per ottenere la curva di funzionamento della pompa alla nuova velocità di rotazione n_2 si utilizza la curva caratteristica (nota) della pompa alla velocità di rotazione n_1 e si fa ricorso alla teoria della similitudine. Per un generico punto A_1 appartenente alla caratteristica della pompa a n_1 , il punto B_1 corrispondente (ovvero in similitudine) ad A_1 ma relativo alla velocità n_2 è di certo appartenente alla curva di funzionamento della pompa a n_2 (in particolare è il punto in cui la pompa presenta, a giri n_2 , le stesse prestazioni adimensionali del punto A_1). I punti A_1 e B_1 presentano, ovviamente, gli stessi valori dei parametri adimensionali (φ , ψ ed η). Eseguendo tale operazione per tutti i possibili punti A_1 si ottengono altrettanti punti B_1 , ovvero la curva caratteristica della pompa alla velocità di rotazione n_2 . Tali considerazioni equivalgono a dire, più semplicemente, che le due curve caratteristiche dimensionali, diventano un'unica curva in termini adimensionali ($\psi = \psi(\varphi)$); questo nel contesto della similitudine geometrica e cinematica. La similitudine geometrica è garantita dal fatto che la macchina non cambia, quella cinematica si ottiene attraverso l'uguaglianza dei parametri adimensionali. Si noti che la similitudine è qui sfruttata soltanto per ottenere la curva caratteristica interna a

velocità di rotazione n_2 , indipendentemente dal fatto che la macchina lavori, a giri n_2 , in similitudine rispetto al caso a giri n_1 (cosa che, infatti, non accade).

Per quanto detto sopra, è sufficiente utilizzare l'espressione (dimensionale) della curva caratteristica a giri n_1 , adimensionalizzarla e osservare che tale curva adimensionale è la stessa per il caso a giri n_2 . Esprimendo i parametri adimensionali in funzione delle variabili e dei parametri relativi al funzionamento a giri n_2 , si ottiene la curva caratteristica (dimensionale) a giri n_2 .

Parametri adimensionali della curva a n_1 : $\psi_1 = gH_1/(n_1^2 * D^2)$ $\varphi_1 = Q_1/(n_1 * D^3)$

Caratteristica dimensionale della pompa a n_1 : $H_1 = 30 - 5000 * Q^2$

da cui si ricava la curva caratteristica adimensionale della pompa:

$$\psi_1 n_1^2 * D^2 / g = 30 - 5000 * \varphi_1^2 * n_1^2 * D^6 \quad \Rightarrow \quad \psi_1 = 30 * g / (n_1^2 * D^2) - 5000 * g * D^4 * \varphi_1^2$$

La curva caratteristica adimensionale che è valida per tutte le curve caratteristiche dimensionali di tutte le macchine geometricamente simili ha quindi la forma seguente:

$$\psi = A - B * \varphi^2 \quad \text{con} \quad A = 30 * g / (n_1^2 * D^2) \quad \text{e} \quad B = 5000 * g * D^4$$

poiché $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ e $D_1 = D_2 = D$

L'ultima relazione rappresenta la curva caratteristica della pompa in termini adimensionali. Esprimendo ora i parametri adimensionali φ e ψ in funzione di H_2 , Q_2 e n_2 , si ottiene la curva caratteristica della pompa alla velocità di rotazione n_2 :

$$gH_2 / (n_2^2 * D^2) = 30 * g / (n_1^2 * D^2) - 5000 * g * D^4 * Q_2^2 / (n_2^2 * D^6) \quad \text{da cui semplificando si ha}$$

$$H_2 = 30 * n_2^2 / n_1^2 - 5000 * Q^2 \quad \Rightarrow \quad H_2 = 48.83 - 5000 * Q^2$$

Si noti che nel caso in cui le macchine (geometricamente simili) avessero avuto diametro diverso, l'analisi sarebbe stata la stessa, ma sarebbero comparsi anche i rapporti tra i diametri nell'espressione finale.

Con approccio del tutto simile, si ottiene la curva di rendimento per la pompa operante a velocità di rotazione n_2 :

$$\eta_1 = 0.5 + 17 * Q - 250 * Q^2 \quad \eta_1 = 0.5 + 17 * \varphi_1 * n_1 * D^3 - 250 * \varphi_1^2 * n_1^2 * D^6$$

L'ultima relazione rappresenta la curva del rendimento della pompa in termini adimensionali. Esprimendo ora il parametro adimensionale φ in funzione di Q_2 e n_2 si ottiene la curva caratteristica della pompa alla velocità di rotazione n_2 :

$$\eta_2 = 0.5 + 17 * n_1 * D^3 / (n_2 * D^3) * Q - 250 * n_1^2 * D^6 * Q^2 / (n_2^2 * D^6)$$

$$\eta_2 = 0.5 + 17 * (n_1/n_2) * Q - 250 * (n_1^2/n_2^2) * Q^2 \Rightarrow \eta = 0.5 + 14.6 * Q - 183.7 * Q^2$$

Il nuovo punto di funzionamento si ottiene, al solito, risolvendo il sistema fra la curva caratteristica della pompa alla velocità n_2 con quella (invariata) del circuito, e, per la portata ottenuta, si calcola il corrispondente rendimento (essendo nota la sua espressione analitica):

$$H_2(Q) = 48.83 - 5000 * Q^2$$

$$H_c(Q) = 22 + 1200 * Q^2$$

da cui:

$$H_2 = 25.7 \text{ m}$$

$$Q_2 = 0.055 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\eta_2 = 0.747$$

Dunque, la potenza assorbita dalla pompa è:

$$P_2 = \rho * Q_2 * g * H_2 / \eta_2 = 18.56 \text{ kW}$$

Si noti che il nuovo punto di lavoro del sistema NON è in similitudine con quello originario. A conferma di ciò, si vedano i rendimenti che differiscono nei due casi (a ulteriore conferma si possono calcolare i parametri adimensionali ϕ e ψ per i due punti di funzionamento e verificare che anch'essi differiscono).

Si è fatto uso di concetti di similitudine per determinare le curve di funzionamento della pompa a diverse velocità di rotazione, ma, note le curve, i punti di lavoro sono determinati dalla curva caratteristica del circuito. In generale, punti differenti della caratteristica del circuito non hanno alcun legame con le condizioni di similitudine della macchina.