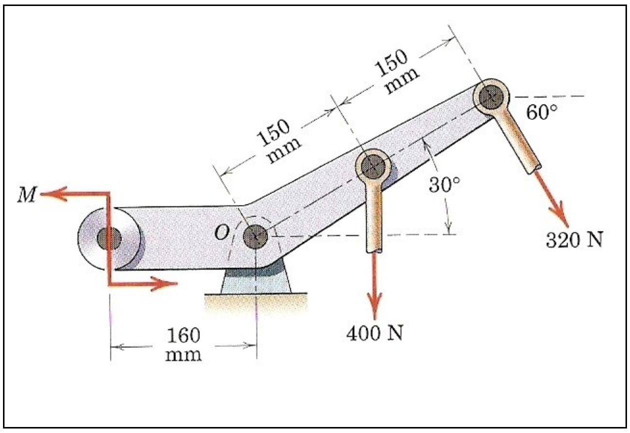
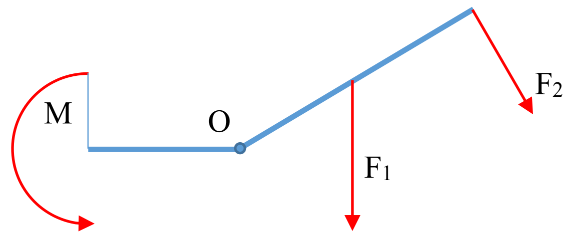
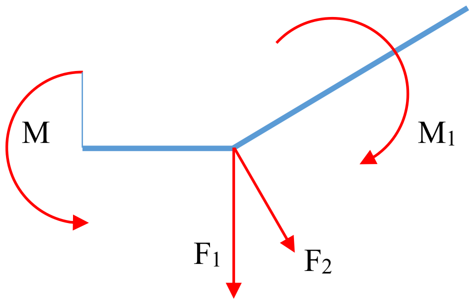
Esercizi elementari di statica

1) Calcolare il modulo della coppia **M** tale che la risultante delle due forze e della coppia passi per il punto O.



Soluzione:

Il seguente schema statico:	è staticamente equivalente al seguente:
	

dove:

$$M_1 = -[400 \cdot 150 \cdot cos(30°) + 320 \cdot 300] \cong -(51961.5 + 96000) = -147961.5\ [Nmm]$$

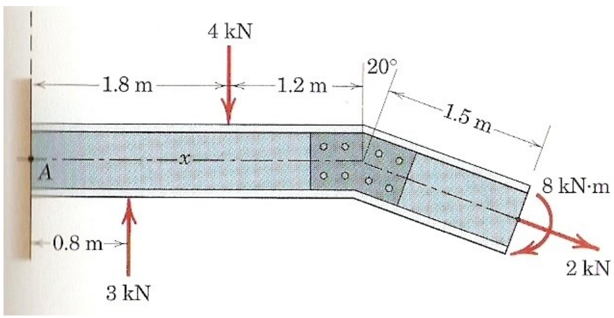
In questo modo la risultante $\bar{R}$ della forza passerà per il punto O.

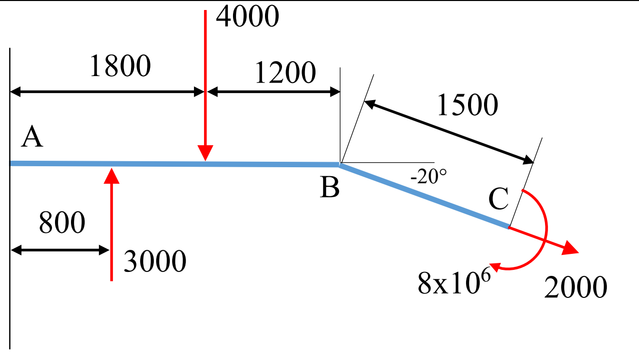
$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -400 \end{Bmatrix} + 320 \begin{Bmatrix} cos(-60°) \\ sen(-60°) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 160 \\ -677.128 \end{Bmatrix}$$

Per l'equilibrio è necessario che:

$$M - M_1 = 0 \qquad \text{cioè} \qquad M = -147961.5\ [Nmm]$$

2) Il vincolo nel punto A dipende dal valore e dalla posizione delle forze applicate. Calcolare la coppia M e la risultante **R** delle tre forze e della coppia mostrate in figura in modo tale che la risultante passi per il punto A





Attenzione:
$8\ [kNm]\ =\ 8000\ [Nm]\ =\ 8 \times 10^6\ [Nmm]$

Soluzione:

La risultante **R** delle forze vale:

$$\bar{\boldsymbol{R}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -4000 \end{Bmatrix} + 2000 \begin{Bmatrix} cos(-20°) \\ sen(-20°) \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} 1879.385 \\ -1684.040 \end{Bmatrix}$$

Il suo modulo vale:

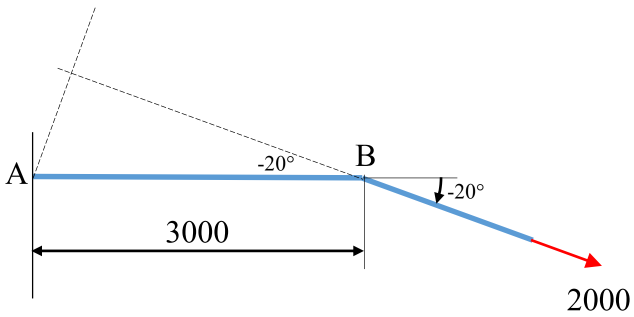
$$\|\bar{\boldsymbol{R}}\| = \sqrt{(1879.385)^2 + (-1684.040)^2} = 2523.505\ [N]$$

La sua direzione, rispetto all'asse orizzontale, vale:

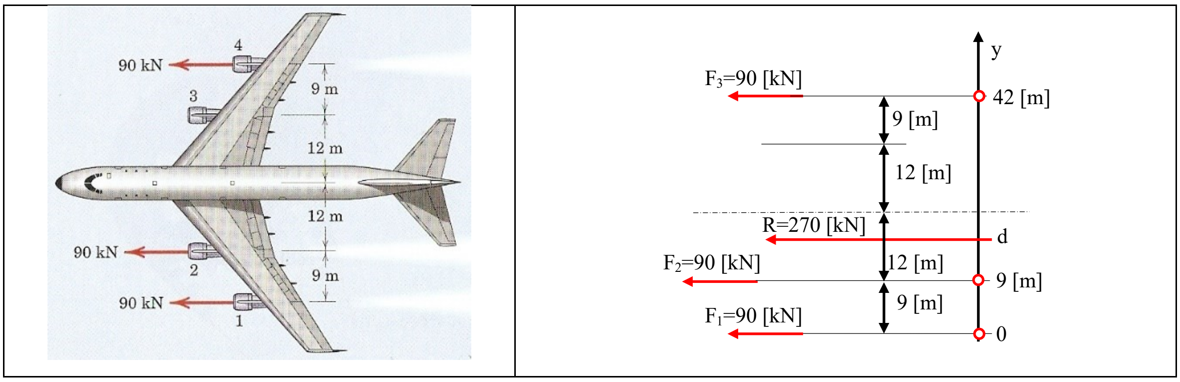
$$\alpha = arctang\left(\frac{-1684.040}{1879.385}\right) = -41.86°$$

Il momento delle forze esterne all'incastro vale:

$$M_A = 3000 \cdot 800 - 4000 \cdot 1800 + 2000 \cdot (1800 + 1200) \cdot sen(-20°) - 8 \cdot 10^6 = -14.852\ [kNm]$$



3) Un aereo di linea con quattro motori a reazione (ognuno dei quali produce una spinta pari a 90 kN), viaggia a velocità costante, quando all'improvviso il motore n.3 si ferma. Determinare e localizzare la risultante delle forze prodotte dai tre motori ancora in funzione. Trattare il problema come se fosse bidimensionale.



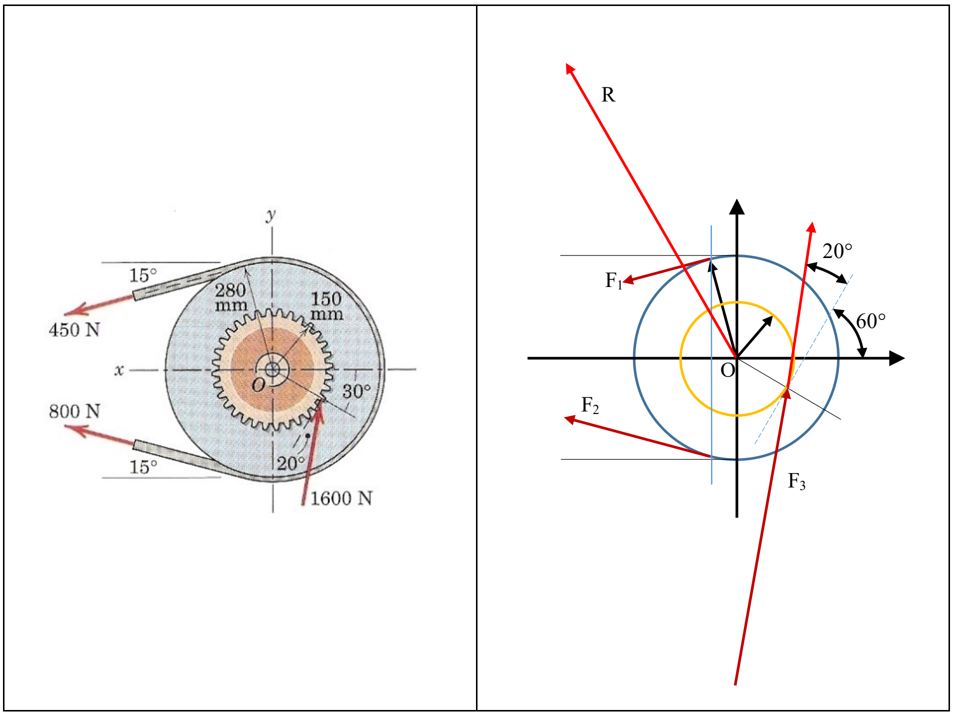
La risultante delle forze vale:

$$\bar{\boldsymbol{R}} = \bar{\boldsymbol{F}}_1 + \bar{\boldsymbol{F}}_2 + \bar{\boldsymbol{F}}_3 = \begin{Bmatrix} -90 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -90 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -90 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -270 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La sua distanza dal riferimento posto in corrispondenza del motore N.1 vale:

$$d = \frac{90 \cdot 9 + 90 \cdot 42}{90 + 90 + 90} = \frac{9 + 42}{3} = 17\ [m]$$

4) La ruota dentata e la puleggia ad essa collegata (vedi figura) ruotano in senso antiorario e sono caricate da una forza pari a 1600 N (da un'altra ruota dentata non rappresentata nel disegno) e dalla cinghia con due forze di trazione pari a 800 N e 450 N. Rappresentare l'azione di queste tre forze per mezzo di una risultante **R** applicata nel punto O e da una coppia di modulo M.



Soluzione:

La somma delle tre forze è la seguente:

$$\overline{\boldsymbol{R}} = \overline{\boldsymbol{F}}_1 + \overline{\boldsymbol{F}}_2 + \overline{\boldsymbol{F}}_3 = 450\begin{Bmatrix} cos(180° + 15°) \\ sen(180° + 15°) \end{Bmatrix} + 800\begin{Bmatrix} cos(180° - 15°) \\ sen(180° - 15°) \end{Bmatrix} + 1600\begin{Bmatrix} cos(60° + 20°) \\ sen(60° + 20°) \end{Bmatrix}$$

da cui:

$$\overline{\boldsymbol{R}} = \begin{Bmatrix} -929.570 \\ 1666.279 \end{Bmatrix}$$

Il modulo della forza vale:

$$\|\overline{\boldsymbol{R}}\| = \sqrt{(-929.570)^2 + (1666.279)^2} = 1908.032\ [N]$$

I coseni direttori della risultante sono:

$$\bar{r} = \frac{1}{1908.032}\begin{Bmatrix} -929.570 \\ 1666.279 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.4872 \\ 0.8733 \end{Bmatrix}$$

L'angolo della risultante rispetto all'asse orizzontale vale:

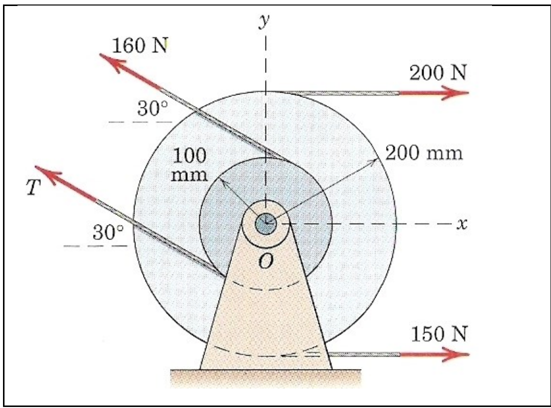
$$\alpha = arctang\left(\frac{1666.279}{-929.570}\right) = -60.844°$$

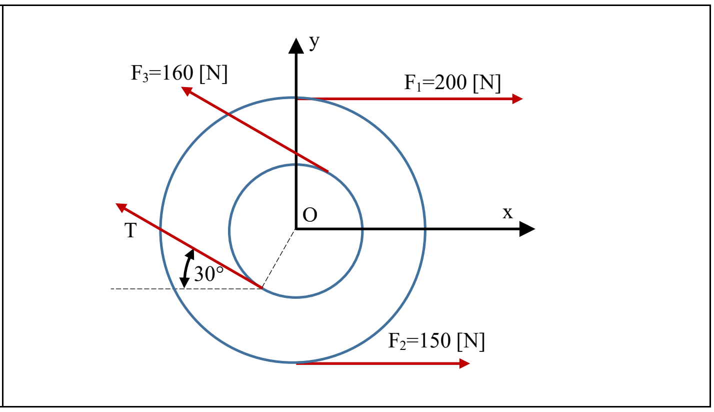
Il momento delle forze calcolato rispetto al punto O vale:

$$M_1 = F_1 \cdot 280 - F_2 \cdot 280 + F_3 \cdot cos(20°) \cdot 150$$

$$M_1 = 450 \cdot 280 - 800 \cdot 280 + 1600 \cdot cos(20°) \cdot 150 = 127526.229\ [Nmm]$$

5) Due pulegge tra loro collegate sono sottoposte alle forze di trazione indicate in figura. Determinare la forza T, il modulo della risultante **R** e l'angolo antiorario θ che essa forma rispetto all'asse orizzontale x in modo che passi per il centro O.





Soluzione:

La risultante delle forze ed il loro momento rispetto al centro O valgono rispettivamente:

$$\overline{\boldsymbol{R}} = \overline{\boldsymbol{F}}_1 + \overline{\boldsymbol{F}}_2 + \overline{\boldsymbol{F}}_3 + \overline{\boldsymbol{T}} = 200\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} + 150\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} + 160\begin{Bmatrix}cos(180° - 30°)\\sen(180° - 30°)\end{Bmatrix} + T\begin{Bmatrix}cos(180° - 30°)\\sen(180° - 30°)\end{Bmatrix}$$

$$M_O = -F_1 \cdot 200 + F_2 \cdot 200 + F_3 \cdot 100 - T \cdot 100 = 0$$

da cui:

$$T = \frac{-F_1 \cdot 200 + F_2 \cdot 200 + F_3 \cdot 100}{100} = 2(F_2 - F_1) + F_3 = 2(150 - 200) + 160 = 60\ [N]$$

$$\overline{\boldsymbol{R}} = 200\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} + 150\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} + 160\begin{Bmatrix}cos(150°)\\sen(150°)\end{Bmatrix} + T\begin{Bmatrix}cos(150°)\\sen(150°)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}159.474\\110\end{Bmatrix}$$

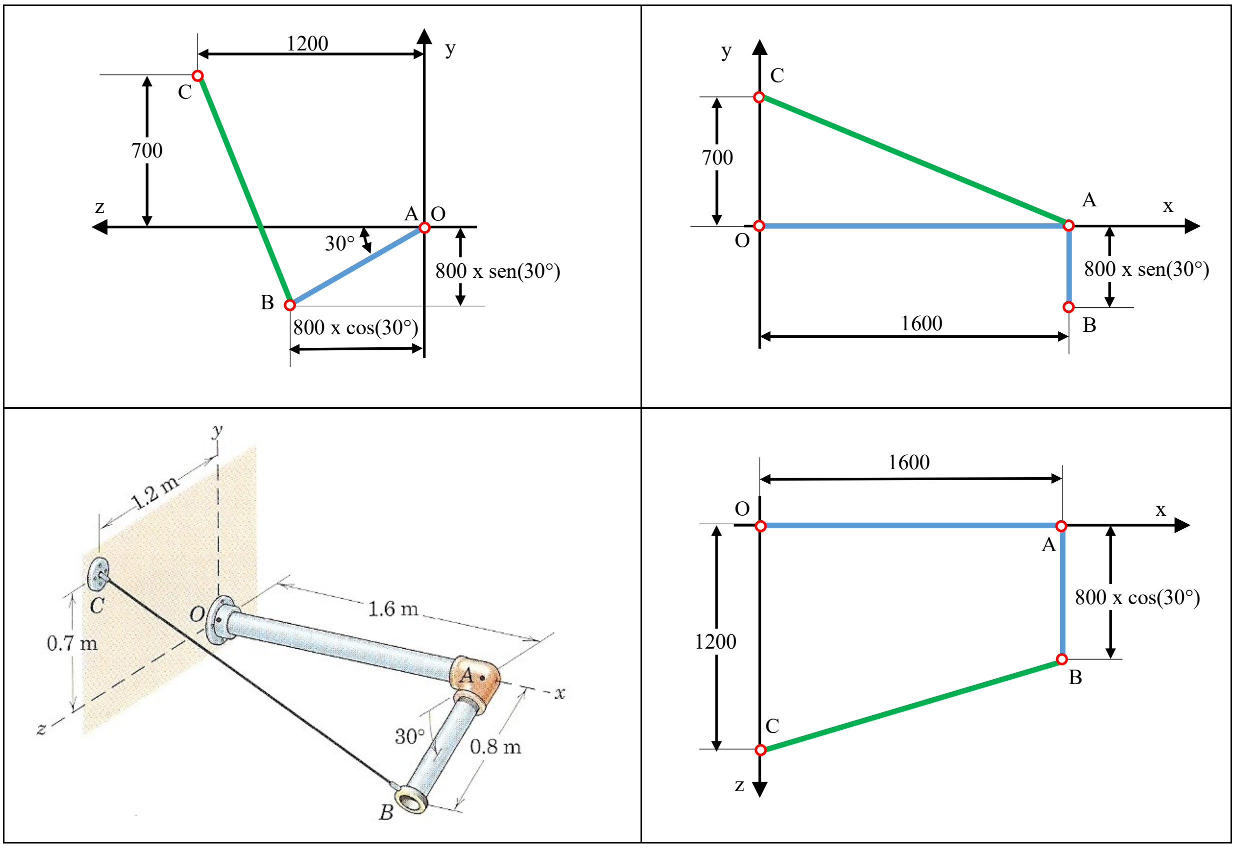
Il modulo della risultante vale:

$$\|\overline{\boldsymbol{R}}\| = \sqrt{(159.474)^2 + (110)^2} = 193.732\ [N]$$

L'angolo della risultante rispetto all'asse orizzontale vale:

$$\alpha = arctang\left(\frac{110}{159.474}\right) \cong 34.6°$$

6) Sostituire la forza di trazione che il cavo CB esercita nel punto B (pari a 750 N), con una forza **R** passante per il punto O ed una coppia.



Soluzione:

La forza è diretta dal nodo B al nodo C ed il suo modulo vale 750 [N]. Essa può essere espressa in forma vettoriale nel modo seguente:

$$\overline{\boldsymbol{F}}_{BC} = 750\begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

dove l, m e n rappresentano i coseni direttori del vettore. Dalla geometria osserviamo che il vettore che unisce il nodo B al nodo C ha componenti:

$$\overline{\boldsymbol{BC}} = \begin{Bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 700 \\ 1200 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1600 \\ -800 \cdot sen(30°) \\ 800 \cdot cos(30°) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1600 \\ 1100 \\ 507.18 \end{Bmatrix}$$

La lunghezza del cavo vale:

$$\|\boldsymbol{BC}\| = \sqrt{(-1600)^2 + (1100)^2 + (507.18)^2} = 2006.8\ [mm]$$

I coseni direttori valgono quindi:

$$\begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \frac{1}{2006.8}\begin{Bmatrix} -1600 \\ 1100 \\ 507.18 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.7973 \\ 0.5481 \\ 0.2527 \end{Bmatrix}$$

La forza vale quindi:

$$\overline{\boldsymbol{F}}_{BC} = 750\begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = 750\begin{Bmatrix} -0.7973 \\ 0.5481 \\ 0.2527 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -598 \\ 411.1 \\ 189.5 \end{Bmatrix}$$

Il vettore posizione che individua il punto di applicazione della forza è:

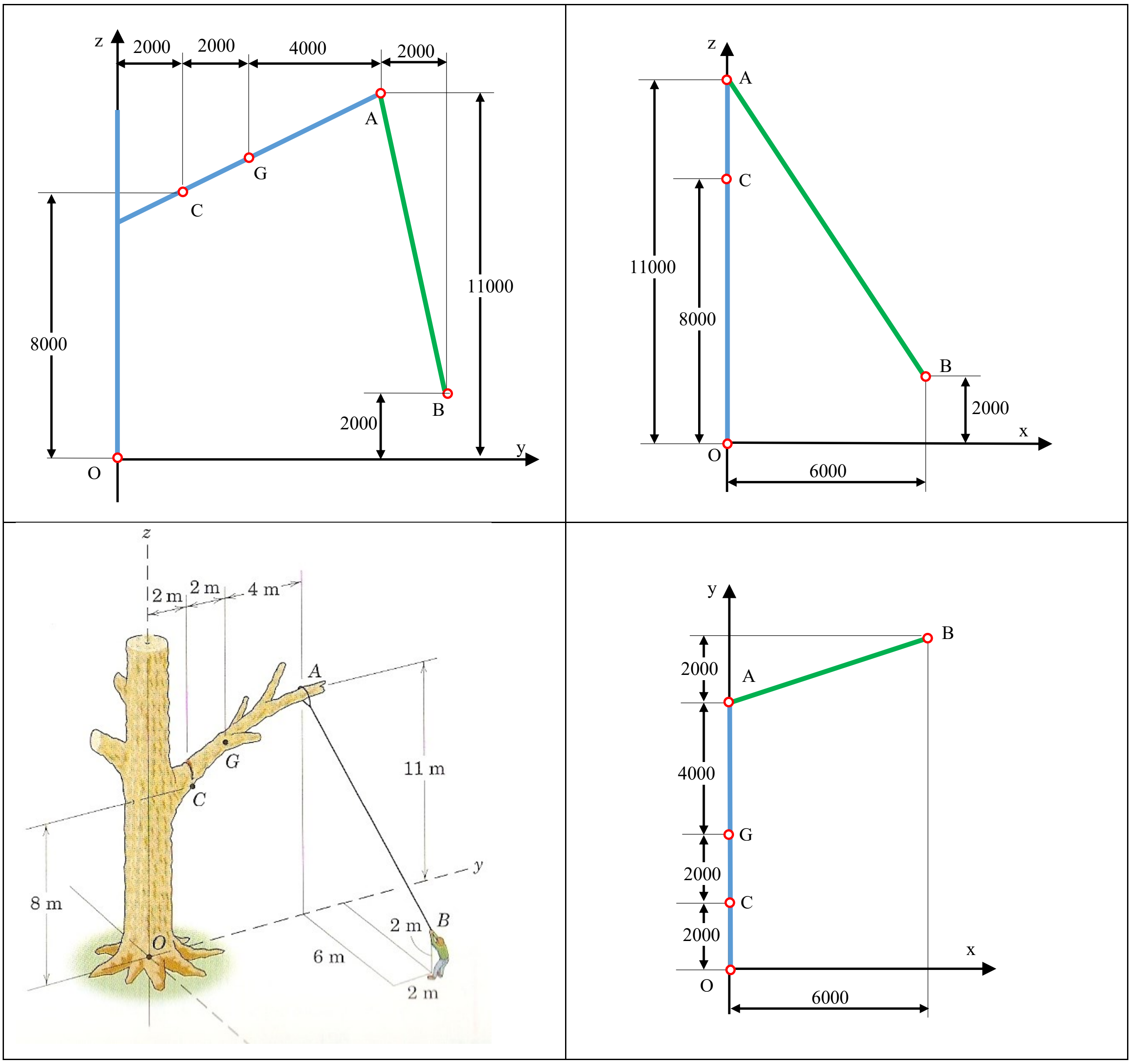
$$\overline{\boldsymbol{OB}} = \begin{Bmatrix} 1600 \\ -800 \cdot sen(30°) \\ 800 \cdot cos(30°) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1600 \\ -400 \\ 692.82 \end{Bmatrix}$$

Il prodotto vettoriale vale quindi:

$$\boldsymbol{M} = \overline{\boldsymbol{OB}} \wedge \overline{\boldsymbol{F}}_{BC} = det \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\imath}} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1600 & -400 & 692.82 \\ -598 & 411.1 & 189.5 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -400 \cdot 189.5 - 411.1 \cdot 692.82 \\ -598 \cdot 692.82 - 1600 \cdot 189.5 \\ 1600 \cdot 411.1 - 598 \cdot 400 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -360618 \\ -717506 \\ 418560 \end{Bmatrix}$$

I momenti sono espressi in [Nmm].

7) Nel tentativo di abbattere un ramo quasi del tutto segato, un giardiniere esercita una trazione pari a 400 N su una fune legata al ramo nel punto A. Determinare il momento della forza intorno al punto C esercitata sul ramo.



Soluzione:

La forza è applicata nel punto A, ha modulo pari a 400 [N] ed è orientata verso il punto B.

La sua direzione è pertanto:

$$\overline{\boldsymbol{BA}} = \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6000 \\ 10000 \\ 2000 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 8000 \\ 11000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6000 \\ 2000 \\ -9000 \end{Bmatrix}$$

La lunghezza del cavo vale:

$$\|\overline{\boldsymbol{BA}}\| = \sqrt{(6000)^2 + (2000)^2 + (-9000)^2} = 11000\ [mm]$$

I coseni direttori valgono quindi:

$$\begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \frac{1}{11000} \begin{Bmatrix} 6000 \\ 2000 \\ -9000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.\overline{54} \\ 0.\overline{18} \\ -0.\overline{81} \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} 0.545 \\ 0.182 \\ -0.818 \end{Bmatrix}$$

La forza vale quindi:

$$\overline{\boldsymbol{F}}_{AB} = 400\begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = 400\begin{Bmatrix} 0.545 \\ 0.182 \\ -0.818 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 218 \\ 72.8 \\ -327.2 \end{Bmatrix}$$

Il vettore posizione che individua il punto di applicazione della forza A rispetto al punto C vale:

$$\overline{\boldsymbol{AC}} = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 8000 \\ 11000 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 2000 \\ 8000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 6000 \\ 3000 \end{Bmatrix}$$

Il prodotto vettoriale vale quindi:

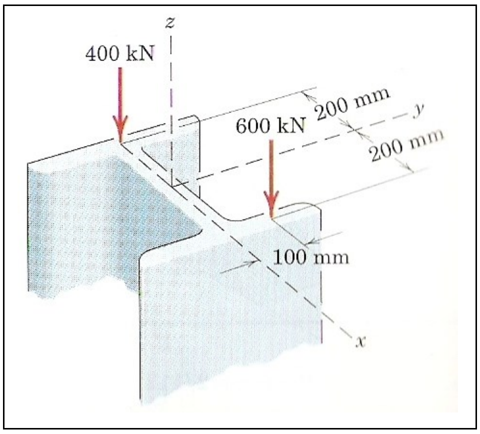
$$\boldsymbol{M} = \overline{\boldsymbol{AC}} \wedge \overline{\boldsymbol{F}}_{AB} = det\begin{bmatrix} \bar{\imath} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 6000 & 3000 \\ 218 & 72.8 & -327.2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6000 \cdot 327.2 - 72.8 \cdot 3000 \\ 218 \cdot 3000 \\ -218 \cdot 6000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2181600 \\ 654000 \\ -1308000 \end{Bmatrix}$$

I momenti sono espressi in [Nmm].

E' possibile esprimerli in modo più conciso, usando [kNm]:

$$\boldsymbol{M} = \overline{\boldsymbol{AC}} \wedge \overline{\boldsymbol{F}}_{AB} = \begin{Bmatrix} -2.182 \\ 0.654 \\ -1.308 \end{Bmatrix} \text{ [kNm]}$$

8) La trave in acciaio a forma di H è progettata per sostenere le due forze verticali mostrate in figura. Sostituisci queste due forze con una singola forza equivalente agente sull'asse verticale ed una coppia **M.**



Soluzione:

Essendo le due forze parallele all'asse z, la loro risultante è pari a:

$$\overline{\boldsymbol{R}} = \overline{\boldsymbol{F}}_1 + \overline{\boldsymbol{F}}_2 = 400\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} + 600\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = 1000\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad [\text{kN}]$$

il cui modulo è chiaramente pari a a 1000 [kN].

Il vettore posizione che individua il punto di applicazione della prima forza (400 kN) è il seguente:

$$\overline{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -200 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

mentre il vettore posizione che individua il punto di applicazione della seconda forza (600 kN) è il seguente:

$$\overline{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}} = \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 200 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Di conseguenza la coppia di trasporto sull'asse verticale della trave vale:

$$\overline{\boldsymbol{M}} = \overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{1}} + \overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{2}} = \overline{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} \wedge \overline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{1}} + \overline{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}} \wedge \overline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{2}} = det\begin{bmatrix} \bar{\imath} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -400 \end{bmatrix} + det\begin{bmatrix} \bar{\imath} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 200 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & -600 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -200 \cdot 400 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -100 \cdot 600 \\ 200 \cdot 600 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -60000 \\ 40000 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [\text{kNmm}]$$

In modo più semplice (e forse più intuitivo) il trasporto della forza $\overline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{2}}$ (quella da 600 [kN]) sull'asse x dà luogo al momento:

$$M_x = -600 \cdot 100 \; [kNmm]$$

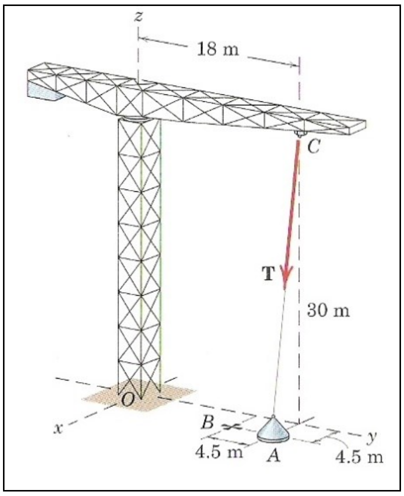
negativo perché ruota in senso orario se osservato dalla direzione delle x positive.

Il trasporto delle due forze in direzione x, fino all'asse della trave dà luogo al momento:

$$M_y = -400 \cdot 200 + 600 \cdot 200 = 40000 \; [kNmm]$$

positivo perché ruota in senso antiorario se osservato dalla direzione delle y positive.

9) Nel sollevare un carico dalla posizione A il cavo è sottoposto ad una forza di trazione **T** pari a 21 kN. Calcola il momento che **T** produce intorno alla base O della gru.



Soluzione:

La forza è applicata nel punto C, ha modulo pari a 21 [kN] ed è orientata verso il punto A.

La sua direzione è pertanto:

$$\overline{\boldsymbol{BC}} = \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.5 \\ 18 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 18 \\ 30 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.5 \\ 0 \\ -30 \end{Bmatrix} \qquad [\mathrm{m}]$$

La lunghezza del cavo vale:

$$\|\overline{\boldsymbol{BC}}\| = \sqrt{(4.5)^2 + (0)^2 + (-30)^2} = 30.336\ [m]$$

I coseni direttori valgono quindi:

$$\begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \frac{1}{30.336} \begin{Bmatrix} 4.5 \\ 0 \\ -30 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.1483 \\ 0 \\ -0.9889 \end{Bmatrix}$$

La forza vale quindi:

$$\overline{\boldsymbol{T}} = 21 \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = 21 \begin{Bmatrix} 0.1483 \\ 0 \\ -0.9889 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.1151 \\ 0 \\ -20.768 \end{Bmatrix} \qquad [\mathrm{kN}]$$

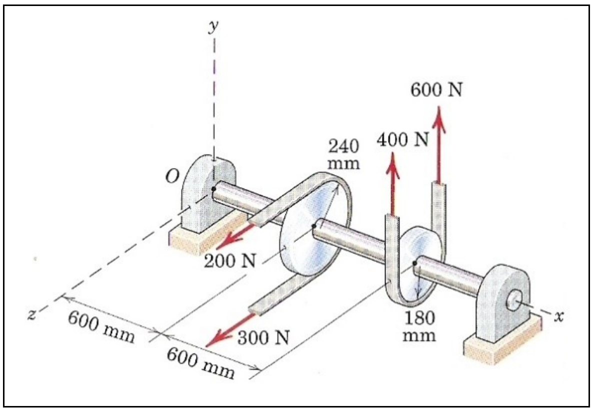
Il vettore posizione che individua il punto di applicazione della forza C rispetto al punto O vale:

$$\overline{\boldsymbol{CO}} = \begin{Bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 18 \\ 30 \end{Bmatrix}$$

Il prodotto vettoriale vale quindi:

$$\boldsymbol{M} = \overline{\boldsymbol{CO}} \wedge \overline{\boldsymbol{T}} = det \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\imath}} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 18 & 30 \\ 3.1151 & 0 & -20.768 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -18 \cdot 20.768 \\ 30 \cdot 3.1151 \\ -18 \cdot 3.1151 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -373.82 \\ 93.45 \\ -56.07 \end{Bmatrix} \qquad [\mathrm{kNm}]$$

10) Le pulegge calettate sull'albero sono caricate come indicato in fig.10. Determinare la risultante applicata nel punto O e la coppia relativa.



Soluzione:

La risultante delle forze agenti sulla puleggia più vicina al punto O vale:

$$\overline{\boldsymbol{R}}_{\mathbf{1}} = \overline{\boldsymbol{F}}_1 + \overline{\boldsymbol{F}}_2 = 200\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix} + 300\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\\500\end{Bmatrix} \quad [\mathrm{N}]$$

Il trasporto nel centro della puleggia delle forze $\overline{\boldsymbol{F}}_1$ e $\overline{\boldsymbol{F}}_2$ dà luogo al momento di trasporto:

$$M_{1x} = (200 - 300) \cdot 240 = -24000 \; [Nmm]$$

(negativo perché orario quando osservato dalle x positive).

Il trasporto nel punto O della risultante $\overline{\boldsymbol{R}}_{\mathbf{1}}$ dà luogo al momento di trasporto:

$$M_{1y} = -R_1 \cdot 600 = -500 \cdot 600 = -300000 \; [Nmm]$$

(negativo perché orario quando osservato dalle y positive).

La risultante delle forze agenti sulla puleggia più lontana al punto O vale:

$$\overline{\boldsymbol{R}}_{\mathbf{2}} = \overline{\boldsymbol{F}}_3 + \overline{\boldsymbol{F}}_4 = 400\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix} + 600\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\1000\\0\end{Bmatrix} \qquad [\mathrm{N}]$$

Il trasporto nel centro della puleggia delle forze $\overline{\boldsymbol{F}}_3$ e $\overline{\boldsymbol{F}}_4$ dà luogo al momento di trasporto:

$$M_{2x} = (600 - 400) \cdot 180 = 36000 \; [Nmm]$$

Il trasporto nel punto O della risultante $\overline{\boldsymbol{R}}_{\mathbf{2}}$ dà luogo al momento di trasporto:

$$M_{2z} = -R_2 \cdot (600 + 600) = 1000 \cdot 1200 = 1200000 \; [Nmm]$$

(positivo perché antiorario quando osservato dalle z positive).

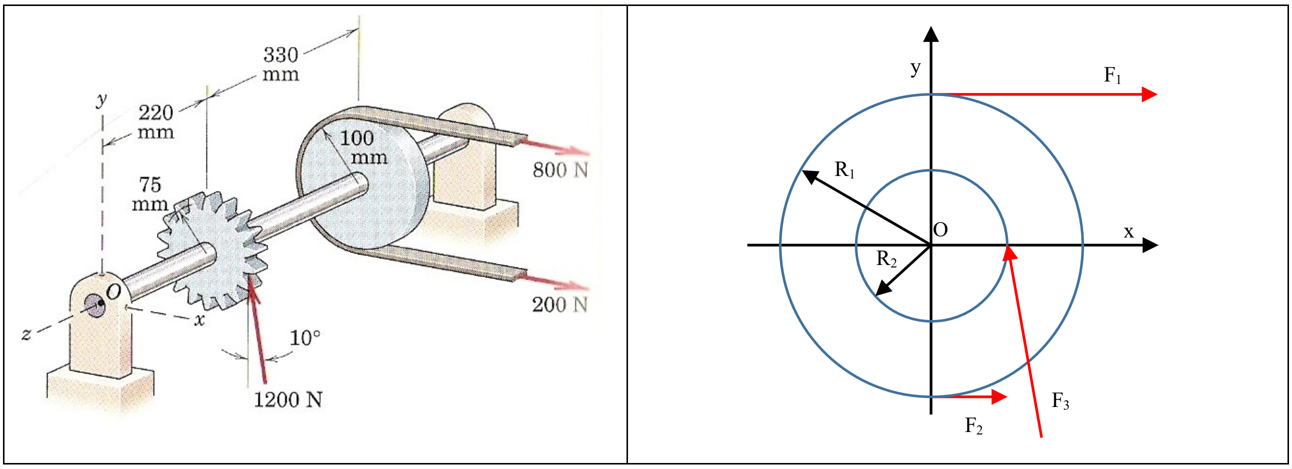
Riassumendo, la risultante delle forze agenti nel punto O vale:

$$\overline{\boldsymbol{R}} = \overline{\boldsymbol{R}}_{\mathbf{1}} + \overline{\boldsymbol{R}}_{\mathbf{1}} = \begin{Bmatrix}0\\0\\500\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}0\\1000\\0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\1000\\500\end{Bmatrix}$$

La somma dei momenti vale:

$$\overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{O}} = (M_{1x} + M_{2x})\bar{\boldsymbol{\imath}} + M_{1y}\bar{\boldsymbol{\jmath}} + M_{2z}\overline{\boldsymbol{k}} = \begin{Bmatrix}-24000 + 36000\\-300000\\1200000\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}12000\\-300000\\1200000\end{Bmatrix} \quad [Nmm]$$

11) La puleggia e la ruota dentata sono sottoposte alle forze indicate in figura. Determinare la risultante applicata nel punto O e la coppia relativa.



Soluzione:

Sull'asse della puleggia agisce la seguente forza orizzontale (orientata come l'asse x), risultante delle forze $\overline{\boldsymbol{F}}_1$ e $\overline{\boldsymbol{F}}_2$:

$$\overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{1}} = \overline{\boldsymbol{F}}_1 + \overline{\boldsymbol{F}}_2 = 800\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix} + 200\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1000\\0\\0\end{Bmatrix}\ [\mathrm{N}]$$

oltre al momento di trasporto:

$$M_{1z} = (-F_1 + F_2)\cdot R_1 = (-800 + 200)\cdot 100 = -60000\ [Nmm]$$

Sull'asse della ruota dentata agisce la forza $\overline{\boldsymbol{F}}_3$:

$$\overline{\boldsymbol{F}}_3 = 1200\begin{Bmatrix}cos(90° + 10°)\\sen(90° + 10°)\\0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-208.378\\1181.769\\0\end{Bmatrix}$$

$$M_{3z} = F_3 \cdot cos(10°)\cdot R_2 = 1200\cdot cos(10°)\cdot 75 = 88632.7\ [Nmm]$$

Dopo avere calcolato la risultante delle due forze $\overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{1}}$ e $\overline{\boldsymbol{F}}_3$, è necessario calcolare il suo momento di trasporto nel nodo O.

$$\overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{O}} = \overline{\boldsymbol{R}}_1 + \overline{\boldsymbol{F}}_3 = \begin{Bmatrix}1000\\0\\0\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}-208.378\\1181.769\\0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}791.622\\1181.769\\0\end{Bmatrix}$$

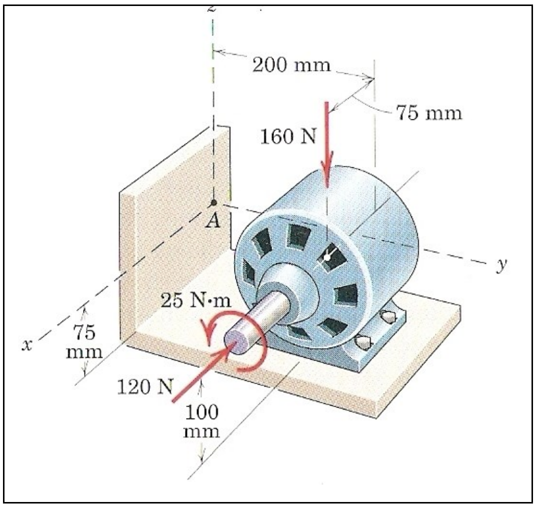
$$\overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{O}} = \begin{Bmatrix}0\\0\\-220-330\end{Bmatrix} \wedge \overline{\boldsymbol{R}}_1 + \begin{Bmatrix}0\\0\\-220\end{Bmatrix} \wedge \overline{\boldsymbol{F}}_3$$

$$\overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{O}} = det\begin{bmatrix}\bar{\imath} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\0 & 0 & -550\\1000 & 0 & 0\end{bmatrix} + det\begin{bmatrix}\bar{\imath} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\0 & 0 & -220\\791.622 & 1181.769 & 0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{Bmatrix}0\\-550000\\0\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}259989.18\\-174156.84\\0\end{Bmatrix}$$

Sommando anche i contributi M_{1z} e M_{3z} precedentemente calcolati abbiamo:

$$\overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{O}} = \begin{Bmatrix}0\\-550000\\0\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}259989.18\\-174156.84\\0\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}0\\0\\-60000 + 88632.7\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}259989.18\\-724156.84\\28632.7\end{Bmatrix}$$

12) Il motore montato sul supporto indicato in figura, è caricato dal proprio peso **P** (pari a 160 N), e l'albero gli trasmette una spinta pari a $\mathbf{S_a}$=120 N e una coppia pari a $\mathbf{M_a}$ = 25 Nm. Determinare la coppia **M** e la risultante delle forze **R** applicata nel punto A.



Soluzione:

Il trasporto della forza peso **P** della quantità $x = -75$ [mm] produce un momento:

$$M_{Py} = 160 \cdot 75 = 12000\ [Nmm]$$

positivo perché antiorario per un osservatore posto in y+.

Il trasporto della forza peso **P** della quantità $y = -200$ [mm] produce un momento:

$$M_{Px} = -160 \cdot 200 = -32000\ [Nmm]$$

negativo perché orario per un osservatore posto in x+.

Il trasporto della forza $\mathbf{S}_a$ della quantità $y = -200$ [mm] produce un momento:

$$M_{Sz} = 120 \cdot 200 = 24000\ [Nmm]$$

positivo perché antiorario per un osservatore posto in z+.

Il trasporto della forza $\mathbf{S}_a$ della quantità $z = 100 - 75 = 25$ [mm] produce un momento:

$$M_{Sy} = -120 \cdot 25 = -3000\ [Nmm]$$

negativo perché orario per un osservatore posto in y+.

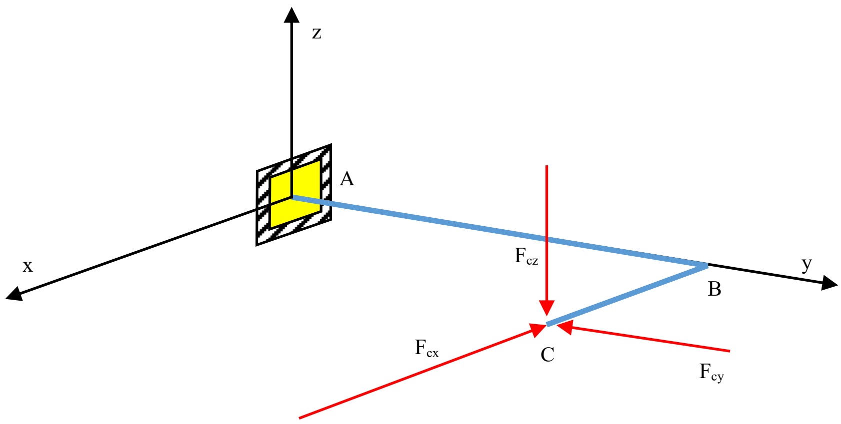
A questi momenti di trasporto è necessario sommare il momento all'albero: $\boldsymbol{M_a} = 25000\ [Nmm]$.
Per concludere abbiamo:

$$\overline{\boldsymbol{M}} = \begin{Bmatrix} M_{Px} + M_a \\ M_{Py} + M_{Sy} \\ M_{Sz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -32000 + 25000 \\ 12000 - 3000 \\ 24000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7000 \\ 9000 \\ 24000 \end{Bmatrix} [Nmm]$$

La risultante delle forze **R** applicata nel punto A vale:

$$\overline{\boldsymbol{R}} = \overline{\boldsymbol{P}} + \overline{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{a}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -160 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -120 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -120 \\ 0 \\ -160 \end{Bmatrix} [\mathrm{N}]$$

13) Calcolare il momento all'incastro.



Soluzione:

La risultate delle forze che agiscono nel nodo C è la seguente:

$$\overline{\boldsymbol{R}} = \begin{Bmatrix} F_{cx} \\ F_{cy} \\ F_{cz} \end{Bmatrix}$$

Il vettore posizione del punto C rispetto al punto A è il seguente:

$$\overline{\boldsymbol{r}} = \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{Bmatrix}$$

Pertanto il momento all'incastro vale:

$$\overline{\boldsymbol{M}}_A = \overline{\boldsymbol{r}} \wedge \overline{\boldsymbol{R}} = det \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_c & y_c & z_c \\ F_{cx} & F_{cy} & F_{cz} \end{bmatrix}$$

In questo caso $z_c = 0$ per cui:

$$\overline{\boldsymbol{M}}_A = det \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_c & y_c & 0 \\ F_{cx} & F_{cy} & F_{cz} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{cz} \cdot y_c \\ -F_{cz} \cdot x_c \\ F_{cy} \cdot x_c - F_{cx} \cdot y_c \end{Bmatrix}$$

Il momento in un punto P qualsiasi appartenente all'asta AB ($0 \leq y \leq L$) si può calcolare notando che il vettore posizione del punto C rispetto al punto P è il seguente:

$$\overline{\boldsymbol{r}} = \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ y_P \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c - y_P \\ z_c \end{Bmatrix}$$

Poiché in questo esempio $z_c = 0$, il momento vale:

$$\overline{\boldsymbol{M}}_A = \overline{\boldsymbol{r}} \wedge \overline{\boldsymbol{R}} = det \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_c & y_c - y_P & 0 \\ F_{cx} & F_{cy} & F_{cz} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{cz} \cdot (y_c - y_P) \\ -F_{cz} \cdot x_c \\ F_{cy} \cdot x_c - F_{cx} \cdot (y_c - y_P) \end{Bmatrix}$$

Nel punto B dove $y_c - y_P = 0$ abbiamo:

$$\overline{\boldsymbol{M}}_A(B) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F_{cz} \cdot x_c \\ F_{cy} \cdot x_c \end{Bmatrix}$$

Il momento in un punto P qualsiasi appartenente all'asta BC ($0 \leq x \leq a$) si può calcolare notando che il vettore posizione del punto C rispetto al punto P è il seguente:

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_P \\ L \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_c - x_P \\ y_c - L \\ z_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_c - x_P \\ 0 \\ z_c \end{Bmatrix}$$

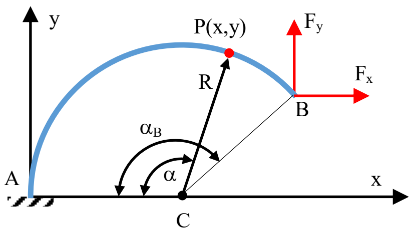
Poiché in questo esempio $z_c = 0$, il momento vale:

$$\bar{\boldsymbol{M}}_A = \bar{\boldsymbol{r}} \wedge \bar{\boldsymbol{R}} = det \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_c - x_P & 0 & 0 \\ F_{cx} & F_{cy} & F_{cz} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F_{cz} \cdot (x_c - x_P) \\ F_{cy} \cdot (x_c - x_P) \end{Bmatrix}$$

Nel punto C dove $x_c - x_P = 0$ il momento è nullo, mentre in B dove $x_P = 0$ il momento è lo stesso calcolato precedentemente:

$$\bar{\boldsymbol{M}}_A(B) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F_{cz} \cdot x_c \\ F_{cy} \cdot x_c \end{Bmatrix}$$

14) Calcolare il momento lungo l'asta curva piana.



Soluzione:

Il punto generico P della trave ha le seguenti coordinate cartesiane espresse in funzione dell'unico parametro α:

$$\begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R \cdot [1 - cos(\alpha)] \\ R \cdot sen(\alpha) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

dove l'angolo α (crescente dal punto A al punto B) ha il seguente campo di esistenza (vedi la figura):

$$0 \le \alpha \le \alpha_B$$

Il momento nel punto P si ottiene con il solito prodotto vettoriale:

$$\overline{\boldsymbol{M}}(P) = \overline{\boldsymbol{r}} \wedge \overline{\boldsymbol{R}} = det \begin{bmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}$$

dove il vettore posizione $\overline{\boldsymbol{r}}$ è il seguente:

$$\overline{\boldsymbol{r}} = \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R \cdot [1 - cos(\alpha_B)] \\ R \cdot sen(\alpha_B) \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} R \cdot [1 - cos(\alpha)] \\ R \cdot sen(\alpha) \\ 0 \end{Bmatrix} = R \begin{Bmatrix} cos(\alpha) - cos(\alpha_B) \\ sen(\alpha_B) - sen(\alpha) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

e la risultante delle forze $\overline{\boldsymbol{R}}$ è la seguente:

$$\overline{\boldsymbol{R}} = F_x \bar{\boldsymbol{\imath}} + F_y \bar{\boldsymbol{\jmath}} = F_x \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + F_y \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sostituendo:

$$\overline{\boldsymbol{M}}(P) = \overline{\boldsymbol{r}} \wedge \overline{\boldsymbol{R}} = det \begin{bmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ r_x & r_y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x \cdot F_y - r_y \cdot F_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$

Sostituendo:

$$M_z(\alpha) = r_x \cdot F_y - r_y \cdot F_x = R[cos(\alpha) - cos(\alpha_B)]F_y - R[sen(\alpha_B) - sen(\alpha)]F_x$$

Se, per esempio, poniamo $\alpha_B = 180°$ abbiamo:

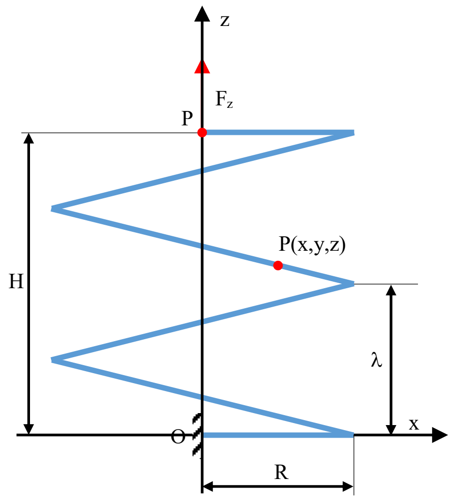
$$M_z(\alpha) = r_x \cdot F_y - r_y \cdot F_x = R\{F_x sen(\alpha) + F_y[1 + cos(\alpha)]\}$$

In $\alpha = 0°$ abbiamo: $M_z(0°) = 2RF_y$

In $\alpha = 90°$ abbiamo: $M_z(90°) = R(F_x + F_y)$

In $\alpha = 180°$ abbiamo: $M_z(180°) = 0$

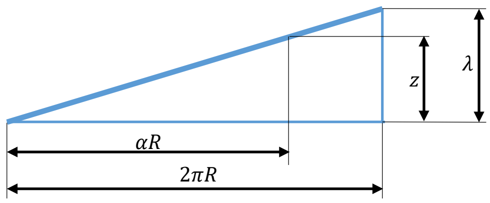
15) Calcolare il momento lungo la molla elicoidale di raggio R e passo assiale λ.

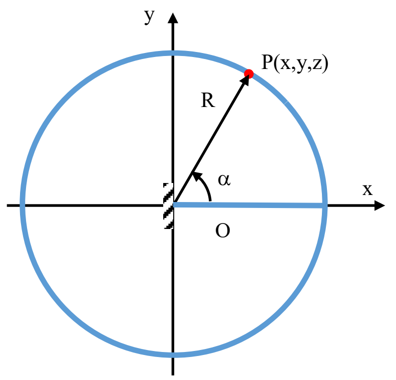


Soluzione: Per individuare la coordinata z del punto P generico appartenente alla molla (vedi figura a lato), osserviamo che possiamo scrivere la seguente proporzione:

$$\lambda : 2\pi R = z : R\alpha$$

da cui: $$z = \frac{\lambda}{2\pi}\alpha$$





In altre parole, ogni volta che il punto P si sposta di un angolo α nel piano x-y, sale in direzione z di una quantità $\frac{\lambda}{2\pi}\alpha$.
Le coordinate del punto generico P appartenente alla molla sono quindi:

$$\overline{\boldsymbol{P}} = \begin{Bmatrix} R \cdot cos(\alpha) \\ R \cdot sen(\alpha) \\ \dfrac{\lambda}{2\pi}\alpha \end{Bmatrix}$$

con α espresso in radianti.

Il vettore posizione $\bar{\boldsymbol{r}}$ è il seguente:

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} R \cdot cos(\alpha) \\ R \cdot sen(\alpha) \\ \dfrac{\lambda}{2\pi}\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R \cdot cos(\alpha) \\ -R \cdot sen(\alpha) \\ H - \dfrac{\lambda}{2\pi}\alpha \end{Bmatrix}$$

Il momento nel punto P si ottiene con il solito prodotto vettoriale:

$$\overline{\boldsymbol{M}}(P) = \bar{\boldsymbol{r}} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_z \end{Bmatrix} = det \begin{bmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ 0 & 0 & F_z \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_z r_y \\ -F_z r_x \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sostituendo:

$$M_x(\alpha) = F_z r_y = -F_z \cdot R \cdot sen(\alpha)$$

$$M_y(\alpha) = -F_z r_x = F_z \cdot R \cdot cos(\alpha)$$

Il modulo del momento vale: $\|\bar{M}\| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = F_z \cdot R$

ed è inclinato rispetto all'asse x dell'angolo: $\vartheta = arctang\left(\frac{M_y}{M_x}\right) = arctang\left(\frac{-1}{tang(\alpha)}\right)$. Quindi il momento risultante è perpendicolare al raggio inclinato dell'angolo α rispetto all'orizzontale.