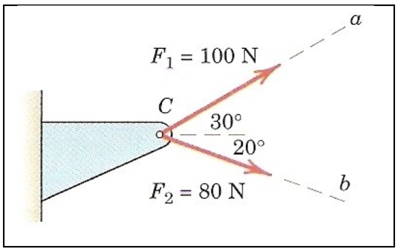
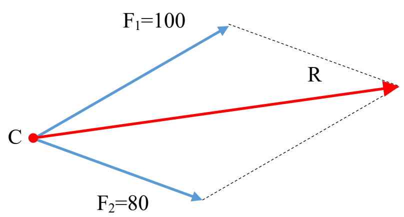
Esercizi elementari di statica

1) Le forze $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_2$ agiscono su un supporto come indicato nella Figura. Determinare la loro risultante $\mathbf{R}$ e la relativa proiezione F_b lungo l’asse b.



Soluzione:



$$\bar{F}_1 = 100\begin{Bmatrix} cos(30°) \\ sen(30°) \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} 86.603 \\ 50 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{F}_2 = 80\begin{Bmatrix} cos(-20°) \\ sen(-20°) \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} 75.175 \\ -27.362 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \begin{Bmatrix} 86.603 \\ 50 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 75.175 \\ -27.362 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 161.778 \\ 22.638 \end{Bmatrix}$$

Il modulo del vettore $\bar{R}$ vale:

$$\|\bar{R}\| = \sqrt{(161.778)^2 + (22.638)^2} \cong 163.354\ [N]$$

La sua direzione rispetto all’orizzontale vale:

$$\alpha = arctang\left(\frac{22.638}{161.778}\right) \cong 7.966°$$

La sua proiezione lungo l’asse b vale:

$$\|\bar{F}_B\| = \|\bar{R}\| \times cos(\beta)$$

dove β è l’angolo compreso tra $\|\bar{R}\|$ e l’asse b, e vale:

$$\beta = 7.966° + 20° = 27.966°$$

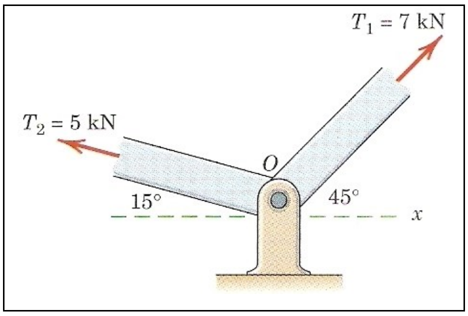
da cui:

$$\|\bar{F}_B\| = \|\bar{R}\| \times cos(\beta) = 163.354 \times cos(27.966°) \cong 144.279\ [N]$$

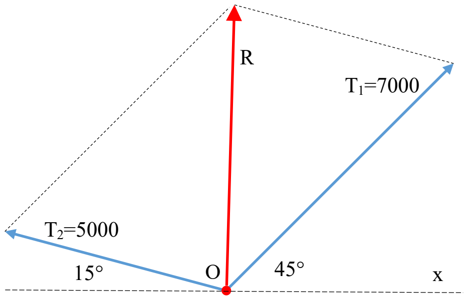
Il vettore $\bar{F}_B$ ha la stessa direzione dell’asse b, pertanto vale:

$$\bar{F}_B = \|\bar{F}_B\|\begin{Bmatrix} cos(-20°) \\ sen(-20°) \end{Bmatrix} = 144.279\begin{Bmatrix} cos(-20°) \\ sen(-20°) \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} 135.578 \\ -49.346 \end{Bmatrix}$$

2) Due travi sono vincolate nella cerniera a terra O e sono caricate a trazione da due forze **T**$_1$ e **T**$_2$ come indicato in figura. Determinare il modulo della risultante **R** delle due forze e l'angolo che essa forma con l'asse orizzontale x.



Soluzione:



$$\bar{T}_1 = 7000\begin{Bmatrix} cos(45°) \\ sen(45°) \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} 4949.747 \\ 4949.747 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{T}_2 = 5000\begin{Bmatrix} cos(165°) \\ sen(165°) \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} -4829.629 \\ 1294.095 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{R} = \bar{T}_1 + \bar{T}_2 = \begin{Bmatrix} 4949.747 \\ 4949.747 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -4829.629 \\ 1294.095 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 120.118 \\ 6243.842 \end{Bmatrix}$$

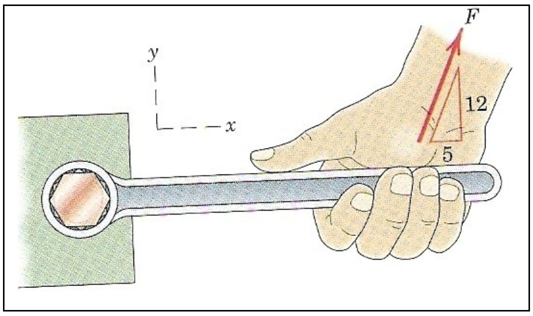
Il modulo del vettore $\bar{R}$ vale:

$$\|\bar{R}\| = \sqrt{(120.118)^2 + (6243.842)^2} \cong 6244.997\ [N] \cong 6245\ [N]$$

La sua direzione rispetto all'orizzontale vale:

$$\alpha = arctang\left(\frac{6243.842}{120.118}\right) \cong 88.898°$$

3) La componente verticale della forza **F** esercitata da una persona sulla manopola della chiave mostrata in figura vale 320 N. Determina la componente orizzontale ed il modulo della forza **F**.



Soluzione:

Possiamo procedere in due modi.

a) Calcoliamo l'angolo tra l'asse orizzontale e la direzione della forza (vedi figura):

$$5 \times tang(\alpha) = 12 \quad \text{da cui} \quad \alpha = arctang\left(\frac{12}{5}\right) \cong 67.38°$$

Calcoliamo il modulo della forza F:

$$F \times sen(\alpha) = F_y = 320 \qquad \text{da cui} \quad F = \frac{320}{sen(67.38°)} \cong 346.667\ [N]$$

Calcoliamo la componente orizzontale della forza:

$$F_x = F \times cos(\alpha) = 346.667 \times \cos(67.38°) = 133.334\ [\mathrm{N}]$$

In alternativa possiamo seguire un'altra procedura, sfruttando i dati a disposizione:

b) Scriviamo la proporzione (vedi figura):

$$12{:}\,5 = F_y{:}\,F_x = 320{:}\,F_x$$

da cui:

$$F_x = \frac{5 \times 320}{12} = \frac{400}{3}\ [N] \cong 133.333\ [N].$$

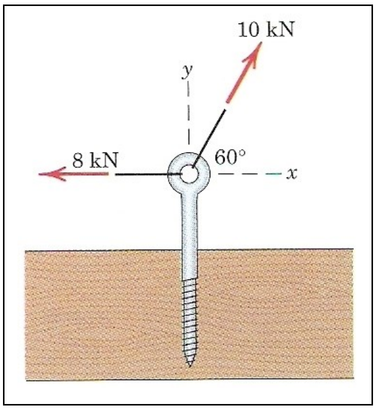
Il modulo della forza vale quindi:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{320^2 + \left(\frac{400}{3}\right)^2} = \frac{1040}{3}\ [N] \cong 346.667[N]$$

4) Determinare la risultante **R** delle due forze mostrate in figura usando due metodi:

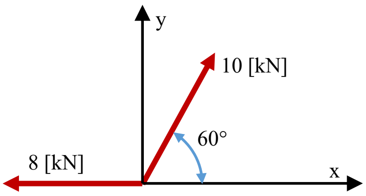
   a) la regola del parallelogramma per la somma dei vettori;

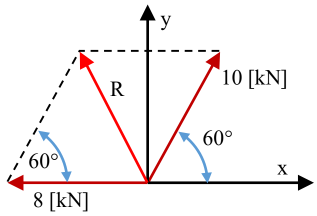
   b) la somma delle componenti scalari.



Soluzione:

a) regola del parallelogramma:





Osservando i triangoli che formano il parallelogramma, possiamo scrivere:

$$R = \sqrt{8^2 + 10^2 - 2 \times 8 \times 10 \times cos(60)} \cong 9.165\ [kN]$$

b) Somma delle componenti scalari.

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \begin{Bmatrix} 10 \times cos(60) \\ 10 \times sen(60) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -8 \\ 0 \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} -3 \\ 8.660 \end{Bmatrix}$$

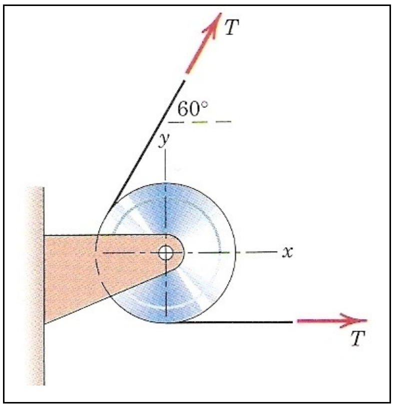
Il modulo del vettore risultante vale:

$$R = \sqrt{(-3)^2 + (8.660)^2} \cong 9.165\ [kN]$$

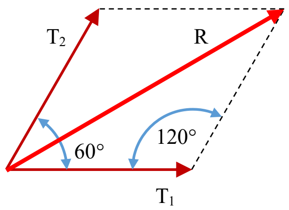
La direzione della risultante (cioè il versore) è la seguente:

$$\bar{r} = \frac{1}{9.165} \begin{Bmatrix} -3 \\ 8.660 \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} -0.327 \\ 0.945 \end{Bmatrix}$$

5) Se le forze di trazione **T** che agiscono sui cavi della puleggia mostrata in figura hanno ciascuna modulo pari a 400 N, esprimi in notazione vettoriale la forza risultante **R** esercitata sulla puleggia; poi calcolane il modulo.



Soluzione:



$$R = \sqrt{400^2 + 400^2 - 2 \times 400 \times 400 \times cos(120)} =$$
$$= 400\sqrt{2 - 2 \times cos(120)} \cong 692.82\ [N]$$

$$\bar{R} = \bar{T}_1 + \bar{T}_2 = \begin{Bmatrix} 400 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 400 \times cos(60) \\ 400 \times sen(60) \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} 600 \\ 346.41 \end{Bmatrix}$$

Il modulo del vettore risultante vale:

$$R = \sqrt{(600)^2 + (346.41)^2} \cong 692.82\ [N]$$

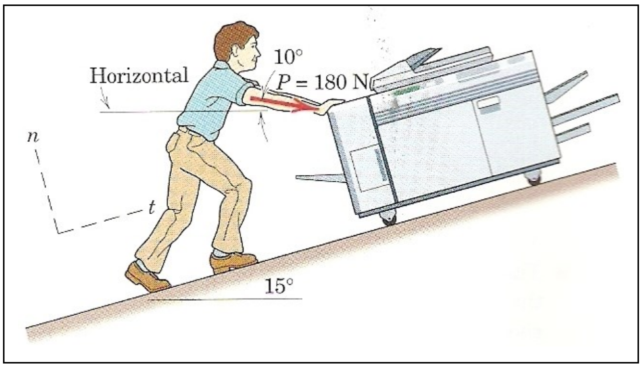
La direzione della risultante (cioè il versore) è la seguente:

$$\bar{r} = \frac{1}{692.82} \begin{Bmatrix} 600 \\ 346.41 \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} 0.866 \\ 0.5 \end{Bmatrix}$$

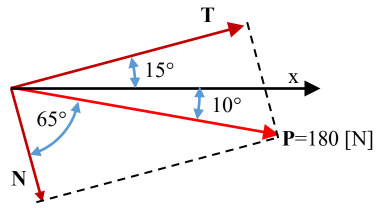
La risultante è inclinata rispetto all'asse orizzontale x dell'angolo:

$$0.866 \times tang(\alpha) = 0.5 \qquad \text{da cui} \qquad \alpha = arctang\left(\frac{0.5}{0.866}\right) = 30°$$

6) Spingendo una fotocopiatrice lungo un piano inclinato, una persona esercita una forza **P** pari a 180 N, come mostrato in figura. Determina la componente parallela e perpendicolare della forza **P** al piano inclinato.



Soluzione:



Si tratta di dividere la forza $\overline{\boldsymbol{P}}$, in due vettori $\overline{\boldsymbol{T}}$ e $\overline{\boldsymbol{N}}$ orientati rispettivamente nelle direzioni note $\overline{\boldsymbol{t}}$ e $\overline{\boldsymbol{n}}$.

I dati sono i seguenti:

$$\overline{\boldsymbol{P}} = 180\begin{Bmatrix} cos(-10) \\ sen(-10) \end{Bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{t}} = \begin{Bmatrix} cos(15) \\ sen(15) \end{Bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{n}} = \begin{Bmatrix} cos(-65-10) \\ sen(-65-10) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} cos(-75) \\ sen(-75) \end{Bmatrix}$$

Le uniche incognite sono i moduli dei vettori $\overline{\boldsymbol{T}}$ e $\overline{\boldsymbol{N}}$.

Osservando lo schema possiamo rapidamente calcolare il modulo dei due vettori:

$$\|\boldsymbol{T}\| = 180 \times cos(25) \cong 163.135\ [N]$$

$$\|\boldsymbol{N}\| = 180 \times sen(25) \cong 76.071\ [N]$$

In alternativa è possibile seguire la seguente procedura generale:

$$\overline{\boldsymbol{P}} = \|\boldsymbol{T}\|\overline{\boldsymbol{t}} + \|\boldsymbol{N}\|\overline{\boldsymbol{n}} = \|\boldsymbol{T}\|\begin{Bmatrix} cos(15) \\ sen(15) \end{Bmatrix} + \|\boldsymbol{N}\|\begin{Bmatrix} cos(-75) \\ sen(-75) \end{Bmatrix} = 180\begin{Bmatrix} cos(-10) \\ sen(-10) \end{Bmatrix}$$

Possiamo quindi scrivere un sistema di due equazioni e due incognite:

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{T}\| \times cos(15) + \|\boldsymbol{N}\| \times cos(-75) = 180 \times cos(-10) \\ \|\boldsymbol{T}\| \times sen(15) + \|\boldsymbol{N}\| \times sen(-75) = 180 \times sen(-10) \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} cos(15) & cos(-75) \\ sen(15) & sen(-75) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \|\boldsymbol{T}\| \\ \|\boldsymbol{N}\| \end{Bmatrix} = 180\begin{Bmatrix} cos(-10) \\ sen(-10) \end{Bmatrix} \qquad [1]$$

Osserviamo che:

$$cos(-10) = cos(10) \quad ; \quad sen(-10) = -sen(10)$$

$$cos(-75) = cos(75) = sen(15) \quad ; \quad sen(-75) = -sen(75) = -cos(15)$$

da cui:

$$\begin{bmatrix} cos(15) & sen(15) \\ sen(15) & -cos(15) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \|\boldsymbol{T}\| \\ \|\boldsymbol{N}\| \end{Bmatrix} = 180\begin{Bmatrix} cos(10) \\ -sen(10) \end{Bmatrix}$$

Osservando che il determinante della matrice pari a -1, possiamo scrivere (regola di Cramer):

$$\|\boldsymbol{T}\| = -\boldsymbol{det}\begin{bmatrix} 180 \times cos(10) & sen(15) \\ -180 \times sen(10) & -cos(15) \end{bmatrix} = 180 \times [cos(15) \times cos(10) - sen(15) \times sen(10)]$$

$$\|\boldsymbol{N}\| = -\boldsymbol{det}\begin{bmatrix} cos(15) & 180 \times cos(10) \\ sen(15) & -180 \times sen(10) \end{bmatrix} = 180 \times [cos(15) \times sen(10) + sen(15) \times cos(10)]$$

Posto $\alpha = 15°$ e $\beta = 10°$ ricordando che:

$$cos(\alpha) \times cos(\beta) - sen(\alpha) \times sen(\beta) = cos(\alpha + \beta)$$

$$cos(\alpha) \times sen(\beta) + sen(\alpha) \times cos(\beta) = sen(\alpha + \beta)$$

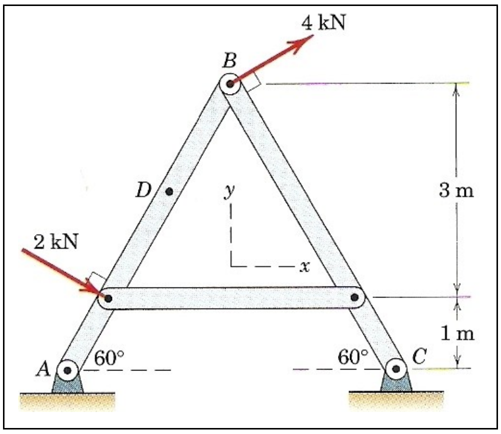
abbiamo:

$$\|\boldsymbol{T}\| = 180 \times cos(\alpha + \beta) = 180 \times cos(25) \cong 163.135\ [N]$$

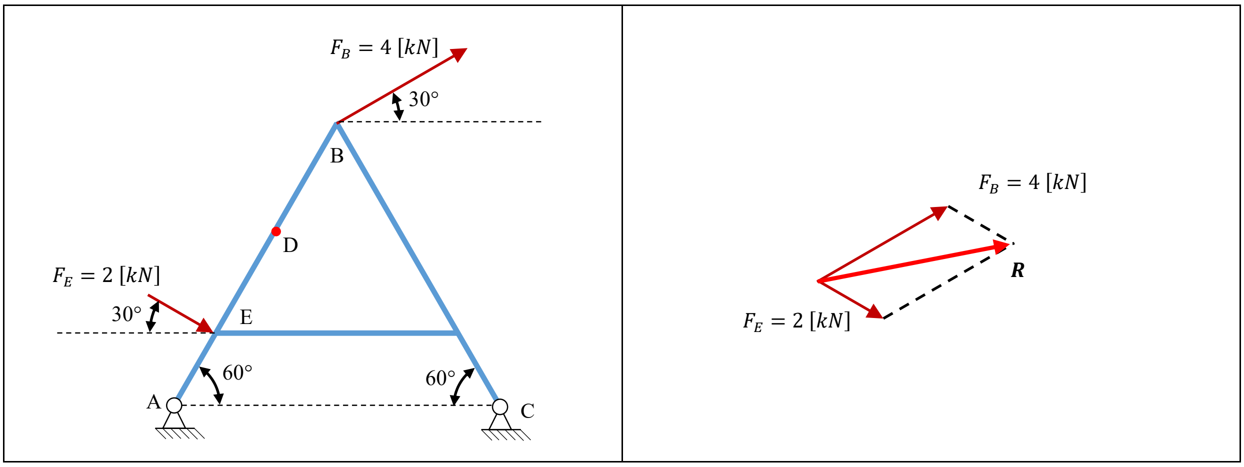
$$\|\boldsymbol{N}\| = 180 \times sen(\alpha + \beta) = 180 \times sen(25) \cong 76.071\ [N]$$

La seconda procedura è chiaramente più lunga della prima, ma è valida per qualsiasi direzione dei versori $\bar{\boldsymbol{t}}$ e $\bar{\boldsymbol{n}}$ (purché non siano tra loro paralleli, nel qual caso il determinante della matrice nell'equazione [1] si annulla).

7) Combina in un'unica forza **R** le due forze (mostrate nella figura) che agiscono sulla struttura a forma di A. Esprimi **R** in forma vettoriale usando i versori **i** e **j**, determinane il modulo e l'angolo che assume rispetto all'asse orizzontale x. Ipotizzando che la forza **R** sia applicata nel punto D della trave AB, trovane la distanza s da A.



Soluzione:



Il vettore $\bar{F}_B$ è il seguente: $\bar{F}_B = 4000 \begin{Bmatrix} cos(30) \\ sen(30) \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} 3464.1 \\ 2000 \end{Bmatrix}$ espresso in [N].

Il vettore $\bar{F}_E$ è il seguente: $\bar{F}_E = 2000 \begin{Bmatrix} cos(-30) \\ sen(-30) \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} 1732.051 \\ -1000 \end{Bmatrix}$ espresso in [N].

La risultante è quindi la seguente:

$$\bar{R} = \bar{F}_B + \bar{F}_E = \begin{Bmatrix} 3464.1 \\ 2000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1732.051 \\ -1000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5196.152 \\ 1000 \end{Bmatrix}$$

La risultante può essere espressa nel modo seguente:

$$\bar{R} = \begin{Bmatrix} 5196.152 \\ 1000 \end{Bmatrix} = 5196.152 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + 1000 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

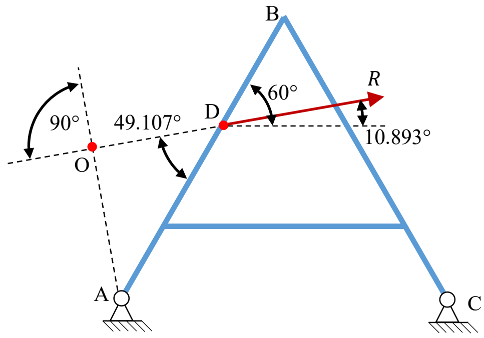
Il suo modulo vale:

$$\|R\| = \sqrt{(5196.152)^2 + (1000)^2} = 5291.503\ [N]$$

La sua direzione (l'angolo rispetto all'orizzontale) è la seguente:

$$5196.152 \times tang(\alpha) = 1000 \quad \text{da cui:} \quad \alpha = arctang\left(\frac{1000}{5196.152}\right) = 10.893°$$

La distanza di un vettore da un punto si misura sempre in direzione perpendicolare al vettore stesso. Osservando la figura, abbiamo:



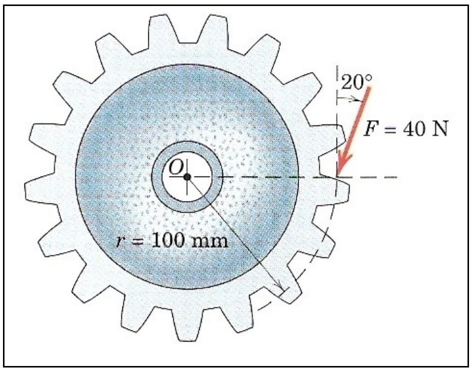
$$s = L_{AO} = L_{AD} \times sen(O\widehat{D}A)$$

dove l'angolo $O\widehat{D}A$ vale:

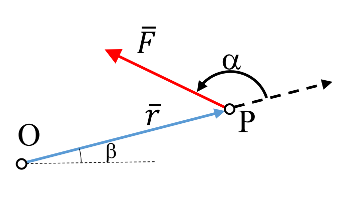
$$60° - 10.893° = 49.107°$$

$$s = L_{AO} = L_{AD} \times sen(49.107°)$$

8) Determina il momento della forza **F** rispetto al punto O.



Soluzione:



Calcoliamo il prodotto vettoriale dei vettori $\bar{r}$ ed $\bar{F}$.

$$\bar{M} = \bar{r} \wedge \bar{F} = \det\begin{bmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = M_x\bar{\imath} + M_y\bar{\jmath} + M_z\bar{k}$$

dove:

$$\begin{cases} M_x = r_yF_z - r_zF_y \\ M_y = r_xF_z - r_zF_x \\ M_z = r_xF_y - r_yF_x \end{cases}$$

Osserviamo che se i due vettori $\bar{r}$ ed $\bar{F}$ giacciono nel piano x-y, allora $r_z = F_z = 0$ e di conseguenza:

$$\begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = r_xF_y - r_yF_x \end{cases}$$

Osserviamo che:

$$r_x = \|r\|cos(\beta) \;\; ; \quad r_y = \|r\|sen(\beta) \quad ; \;\; F_x = \|F\|cos(\alpha+\beta) \;\; ; \;\; F_y = \|F\|sen(\alpha+\beta)$$

Sostituendo abbiamo:

$$M_z = r_xF_y - r_yF_x = \|r\|cos(\beta) \times \|F\|sen(\alpha+\beta) - \|r\|sen(\beta) \times \|F\|cos(\alpha+\beta)$$

Riorganizzando l'equazione abbiamo:

$$M_z = r_xF_y - r_yF_x = \|r\| \times \|F\| \times [sen(\alpha+\beta) \times cos(\beta) - cos(\alpha+\beta) \times sen(\beta)]$$

Posto: $\gamma = \alpha + \beta$, ricordo che:

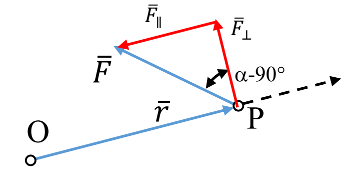
$$\mathrm{sen}(\gamma)cos(\beta) - \cos(\gamma)sen(\beta) = \mathrm{sen}(\gamma - \beta) = \mathrm{sen}(\alpha)$$

e quindi

$$M_z = \|r\| \times \|F\| \times \mathrm{sen}(\alpha)$$

In conclusione, ***il momento M_z è pari al prodotto dei moduli dei due vettori per il seno dell'angolo compreso.***

L'ultima espressione può essere interpretata in due modi distinti:



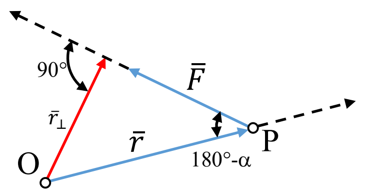
1) I° modo

$$M_z = \|r\| \times [\|F\| \times \mathrm{sen}(\alpha)] = \|r\| \times F_{\perp}$$

dove $F_{\perp} = \|F\| \times \mathrm{sen}(\alpha)$ non è altro che **la proiezione del vettore $\bar{F}$ in direzione perpendicolare al vettore $\bar{r}$.**

Per interpretare il grafico a lato, osserviamo che:

$$\mathrm{sen}(\alpha) = \cos(\alpha - 90°)$$



1) II° modo

$$M_z = \|F\| \times [\|r\| \times \mathrm{sen}(\alpha)] = \|F\| \times r_{\perp}$$

dove $r_{\perp} = \|r\| \times \mathrm{sen}(\alpha)$ non è altro che **la proiezione del vettore $\bar{r}$ in direzione perpendicolare al vettore $\bar{F}$.**

Per interpretare il grafico a lato, osserviamo che:

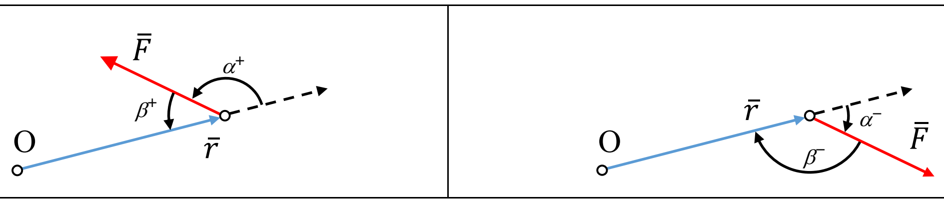
$$\mathrm{sen}(\alpha) = \mathrm{sen}(180° - \alpha)$$

Tornando al tema dell'esercizio, il momento della forza **F** rispetto al punto O vale:

$$M_z = \|r\| \times [\|F\| \times \mathrm{sen}(\alpha)] = \|r\| \times F_{\perp} = 100 \times 40 \times \cos(20°) \cong 3758.77\ [Nmm] \cong 3.759\ [Nm]$$

E' importante osservare che il momento non cambia se si fa scorrere la forza **F** lungo la sua linea d'azione: infatti, se ciò dovesse capitare, la distanza $r_{\perp}$ non cambierebbe (vedi l'ultimo grafico).

Quando si esegue il prodotto $\bar{M} = \bar{r} \wedge \bar{F}$ l'angolo tra il vettore $\bar{r}$ e il vettore $\bar{F}$ (vedi la seguente figura) è α oppure $\beta = 180° - \alpha$?



L'angolo α si trova ruotando il vettore $\bar{r}$ (vedi gli ultimi due schemi) fino a renderlo parallelo al vettore $\bar{F}$: se la rotazione è antioraria (figura a sinistra), l'angolo è positivo (α^+); viceversa se la rotazione è oraria (figura a destra), l'angolo è negativo (α^-). L'angolo β si trova ruotando il vettore $\bar{F}$ fino a renderlo parallelo al vettore $\bar{r}$, ma di verso negativo. Osserviamo che: $\mathrm{sen}(\alpha) = \mathrm{sen}(\beta)$. E' quindi indifferente usare un angolo o l'altro, purché si faccia attenzione al senso di rotazione e quindi al segno.

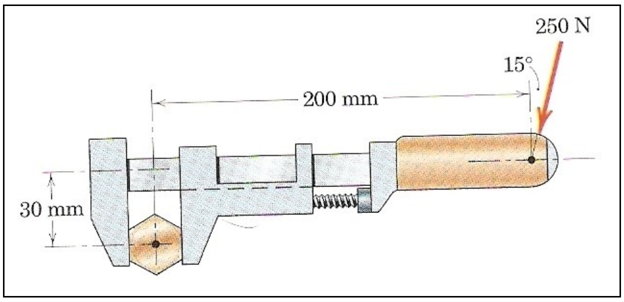
Ultima osservazione:
Il prodotto vettoriale non gode della proprietà commutativa valida sia per la somma dei vettori ($\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \bar{F}_2 + \bar{F}_1$) che per il loro prodotto scalare ($\bar{F}_1 \times \bar{F}_2 = \bar{F}_2 \times \bar{F}_1 = \|\bar{F}_1\| \cdot \|\bar{F}_2\| \cdot \cos(\alpha)$ dove α indica l'angolo compreso tra i due vettori). Abbiamo infatti:

$$\bar{r} \wedge \bar{F} = \det \begin{bmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} \neq \det \begin{bmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ r_x & r_y & r_z \end{bmatrix} = \bar{F} \wedge \bar{r}$$

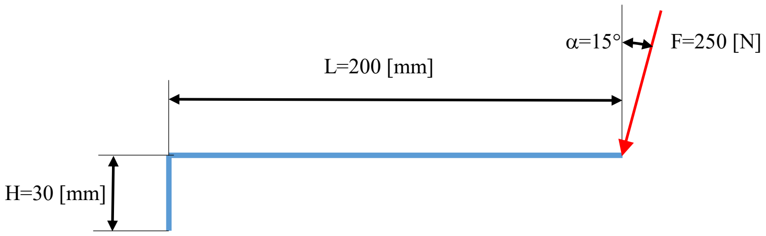
Analizzando l'espressione precedente, osserviamo che è valida la seguente relazione:

$$\bar{r} \wedge \bar{F} = -\bar{F} \wedge \bar{r}$$

8) Calcola il momento della forza indicata nella figura rispetto al centro del dado del bullone.

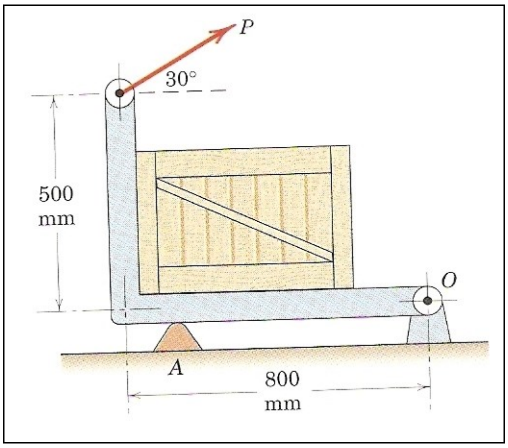


Soluzione:

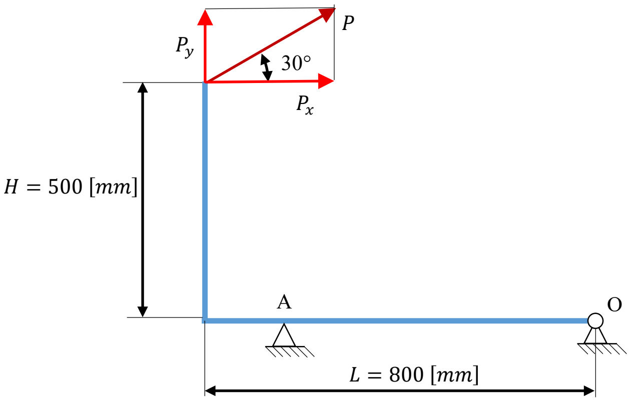


$$M_z = \|r\| \times [\|F\| \times \mathrm{sen}(\alpha)] = \|L\| \times F_\perp = 200 \times 250 \times \cos(15°) \cong 3758.77\ [Nmm] \cong 3.759\ [Nm]$$

9) Una cassa di legno è appoggiata su un supporto incernierato nel punto O ed appoggiato in A. Per annullare la forza di reazione nel punto A, la forza P deve garantire un momento rispetto ad O pari a 1200 Nm. Calcolare il modulo della forza P.



Soluzione:



Il momento della forza **P** intorno al polo O si può calcolare facilmente scomponendo la forza in direzione orizzontale e verticale e sommando il contributo delle due componenti.

$$M_O = -(P_x \times H) - (P_y \times L)$$

Per convenzione consideriamo positivi i momenti antiorari (per chi osserva il piano x-y dal verso positivo dell'asse z). Di conseguenza in questo caso i due contributi sono entrambe negativi (orari).
La forza P deve garantire un momento rispetto ad O pari a 1200 Nm; di conseguenza possiamo scrivere:

$$-(P_x \times H) - (P_y \times L) + 1200000\ [Nmm] = 0$$

Poiché:

$$P_x = P \times \cos(30°) \qquad \text{e} \qquad P_y = P \times \text{sen}(30°)$$

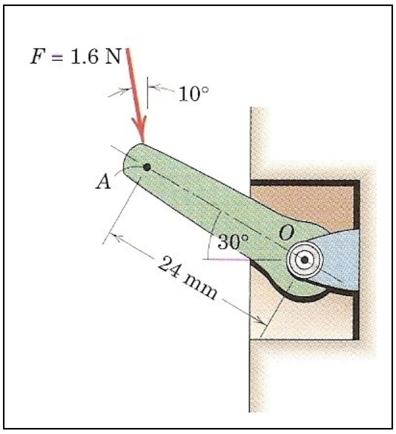
abbiamo:

$$P[\cos(30°) \times H + \text{sen}(30°) \times L] = 1200000$$

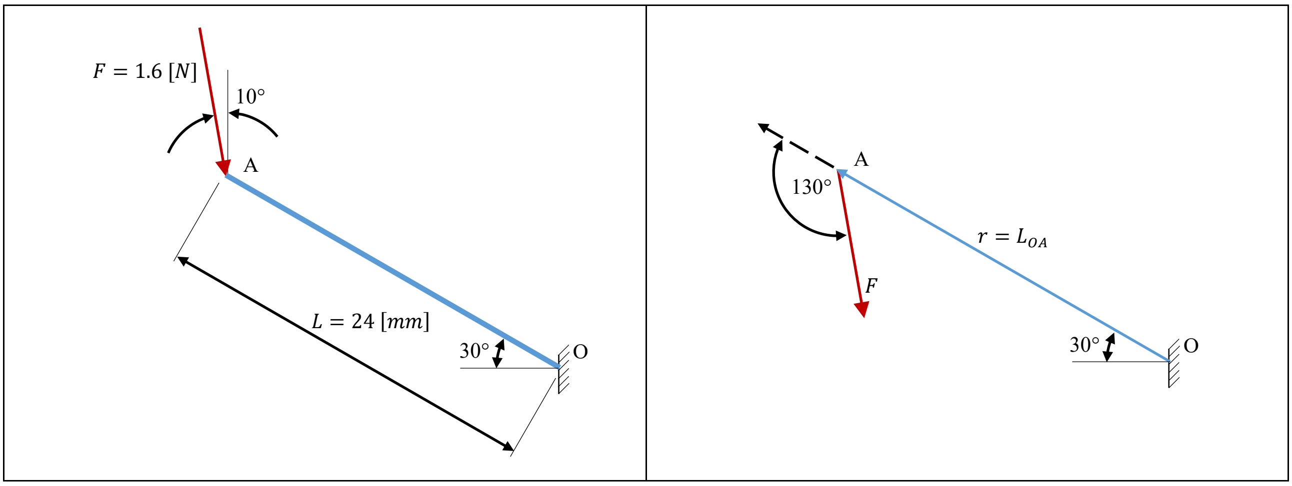
da cui:

$$P = \frac{1200000}{\cos(30°) \times H + \text{sen}(30°) \times L} = \frac{1200000}{\cos(30°) \times 500 + \text{sen}(30°) \times 800} \cong \frac{1200000}{833.0} \cong 1440.55\ [N]$$

10) Calcolare il momento della forza **F** rispetto al punto O.



Soluzione:

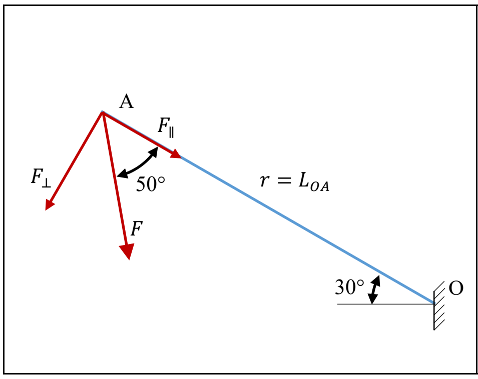


Perché il vettore $\bar{r}$ si allinei alla forza $\bar{F}$ è necessario che ruoti di 130°. Di conseguenza il momento della forza $\bar{F}$ rispetto al punto O vale:

$$M_O = \|\bar{r} \wedge \bar{F}\| = \|\bar{r}\| \times \|\bar{F}\| \times sen(\alpha) = 24 \times 1.6 \times sen(130°) \cong 29.416\ [Nmm]$$

Osserviamo che $sen(130°) = sen(180° - 130°) = sen(50°)$: l'angolo β tra il vettore $\bar{F}$ e la direzione negativa del vettore $\bar{r}$ vale esattamente 50°.

In alternativa è possibile scomporre la forza $\bar{F}$ in due componenti: $\bar{F}_{\parallel}$ parallela al raggio $\bar{r}$, e $\bar{F}_{\perp}$ perpendicolare al raggio $\bar{r}$ (solo quest'ultima contribuirà al momento).



$$M_O = \|\bar{r} \wedge \bar{F}\| = \|\bar{r}\| \times \|\bar{F}_{\perp}\|$$

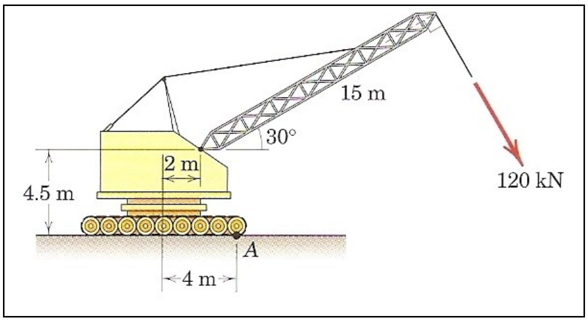
dove:

$$\|\bar{F}_{\perp}\| = \|\bar{F}\| \times sen(50°)$$

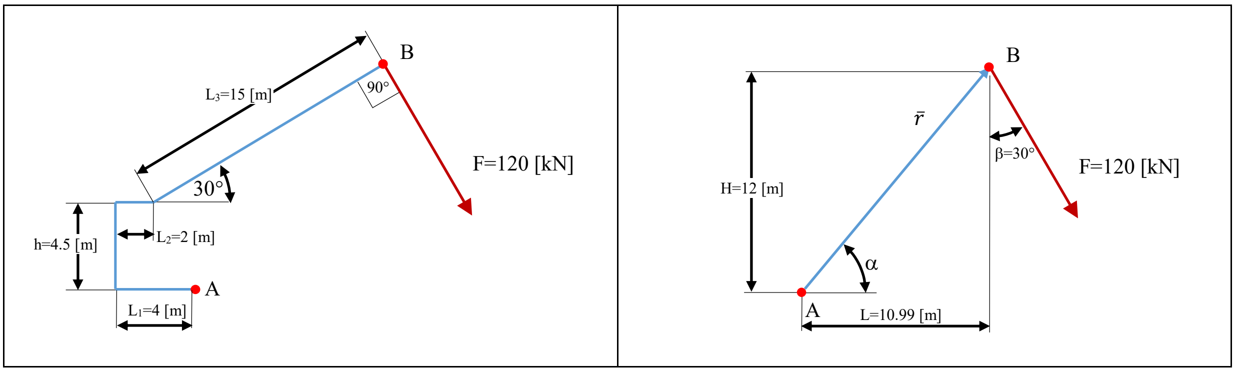
da cui:

$$M_O = \|\bar{r}\| \times \|\bar{F}\| \times sen(50°) = 24 \times 1.6 \times sen(50°) \cong 29.416\ [Nmm]$$

11) Calcolare il momento intorno al punto A prodotto dalla forza di trazione di modulo 120 kN applicata al cavo della gru come indicato nella figura.



Soluzione:



Il momento si trova moltiplicando il vettore posizione $\bar{r}$ che unisce il nodo A al nodo B, per il vettore della forza $\bar{F}$. Osservando la figura ricaviamo le componenti del vettore $\bar{r}$:

$$\bar{r} = \begin{Bmatrix} L \\ H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4 + 2 + 15 \times cos(30°) \\ 4.5 + 15 \times sen(30°) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10.99 \\ 12 \end{Bmatrix}$$

il cui modulo vale: $\|\bar{r}\| = \sqrt{(10.99)^2 + (12)^2} \cong 16.272\ [m]$

e il cui angolo rispetto all'orizzontale vale: $\alpha = arctan\left(\frac{12}{10.99}\right) \cong 47.516°$.

Il momento intorno al punto A vale:

$$M_O = \|\bar{r} \wedge \bar{F}\| = \|\bar{r}\| \times \|\bar{F}\| \times sen(\vartheta) = 16.272 \times 120 \times sen(\vartheta)$$

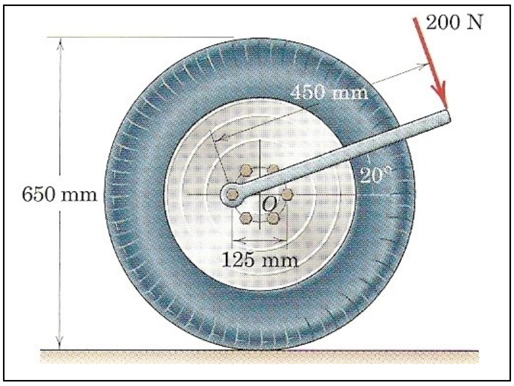
L'angolo ϑ è l'angolo negativo di cui bisogna ruotare $\bar{F}$ perché si allinei con il vettore posizione $\bar{r}$ orientato da B ad A. In questo caso vale (vedi lo schema):

$$\vartheta = -(\beta + 90° - \alpha) \cong -(30° + 90 - 47.516°) = -72.484°$$

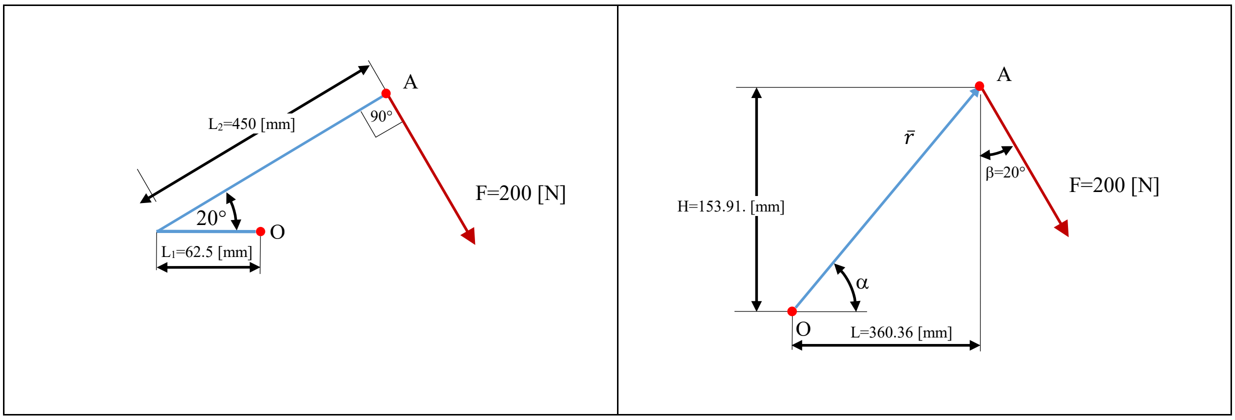
Abbiamo quindi:

$$M_O = 16.272 \times 120 \times sen(-72.484°) = -1862.107\ [kNm]$$

12) Determinare il momento M prodotto dalla forza rispetto al centro O della ruota nel caso in cui la chiave assuma la posizione mostrata in figura.



Soluzione:



Il momento si trova moltiplicando il vettore posizione $\bar{r}$ che unisce il nodo O al nodo A, per il vettore della forza $\bar{F}$. Osservando la figura ricaviamo le componenti del vettore $\bar{r}$:

$$\bar{r} = \begin{Bmatrix} L \\ H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 450 \times cos(20°) - 62.5 \\ 450 \times sen(20°) \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} 360.36 \\ 153.91 \end{Bmatrix}$$

il cui modulo vale: $\|\bar{r}\| = \sqrt{(360.36)^2 + (153.91)^2} \cong 391.853\ [mm]$

e il cui angolo rispetto all'orizzontale vale: $\alpha = arctan\left(\frac{153.91}{360.36}\right) \cong 23.127°$.

Il momento intorno al punto O vale:

$$M_O = \|\bar{r} \wedge \bar{F}\| = \|\bar{r}\| \times \|\bar{F}\| \times sen(\vartheta) = 391.853\ \times 200 \times sen(\vartheta)$$

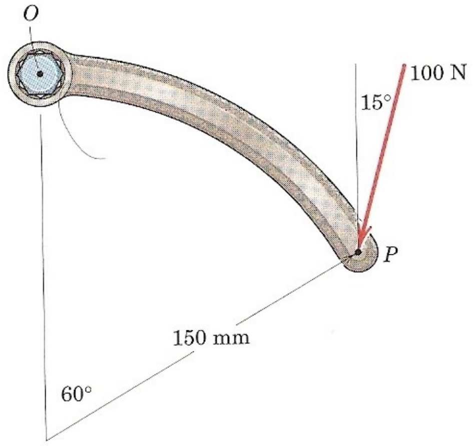
L'angolo ϑ è l'angolo negativo di cui bisogna ruotare $\bar{F}$ perché si allinei con il vettore posizione $\bar{r}$ orientato da A ad O. In questo caso vale (vedi lo schema):

$$\vartheta = -(\beta + 90° - \alpha) \cong -(20° + 90 - 23.127°) = -86.873°$$

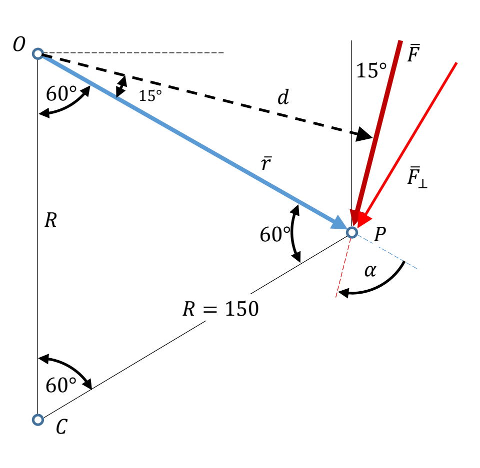
Abbiamo quindi:

$$M_O = 391.853\ \times 200 \times sen(-86.873°) \cong -78253.89\ [Nmm] \cong -78.254\ [Nm]$$

13) Determinare il momento M della forza rispetto al centro O della chiave curva mostrata in figura.



Soluzione:



Analizzando la figura a lato, vediamo che il vettore posizione $\bar{r}$ è inclinato rispetto all'orizzontale di -30°, mentre il vettore $\bar{F}$ è inclinato rispetto alla verticale di -15°: di conseguenza l'angolo α, negativo perché di verso orario, vale -90°-15°+30° =-75°. Essendo il triangolo OCP equilatero, il modulo del vettore $\bar{r}$ vale 150 [mm]. Di conseguenza il momento vale:

$$M_O = \|\bar{r}\| \times \|\bar{F}\| \times sen(\alpha) = 150 \times 100 \times sen(-75°) \cong -14488.9\ [Nmm]$$

In alternativa è possibile proiettare il vettore $\bar{r}$ in direzione perpendicolare al vettore $\bar{F}$ e calcolarne il modulo.

In questo caso abbiamo: $\bar{d} = \bar{r} \cdot cos(15°)$ il cui modulo vale:

$$d = \|\bar{r}\| \cdot cos(15°) = 150 \cdot 0.966 = 144.889\ [mm]$$

I vettori $\bar{d}$ e $\bar{F}$ sono ortogonali ma orientati a -90° per cui il momento vale:

$$M_O = d \times \|\bar{F}\| \times sen(-90°) \cong -144.889 \times 100 = -14488.9\ [Nmm]$$

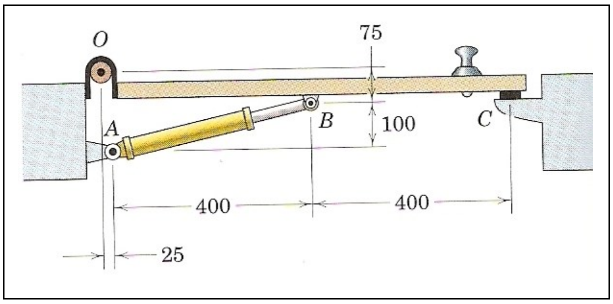
In alternativa è possibile calcolare la proiezione del vettore $\bar{F}$ in direzione perpendicolare al vettore posizione $\bar{r}$. In questo caso abbiamo:

$$\|\bar{F}_\perp\| = \|\bar{F}\| \cdot cos(15°) = 100 \cdot 0.966 = 96.6\ [N]$$

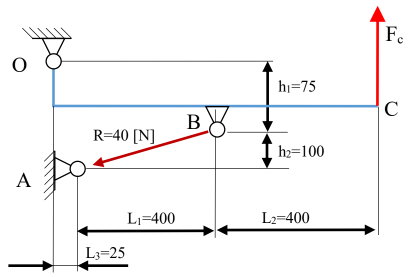
I vettori $\bar{r}$ e $\bar{F}_\perp$ sono ortogonali ma orientati a -90° per cui il momento vale:

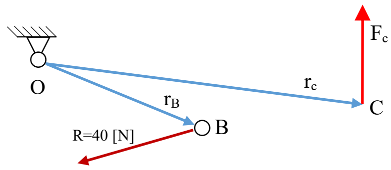
$$M_O = \bar{r} \wedge \bar{F}_\perp = \|\bar{r}\| \cdot \|\bar{F}_\perp\| \cdot sen(-90°) \cong -150 \times 96.6 = -14488.9\ [Nmm]$$

14) La forza esercitata dal pistone AB sulla porta è pari a 40 N, è diretta lungo la linea AB e tende a mantenere la porta chiusa. Calcola il momento di questa forza intorno alla cerniera O. Quanto deve valere la forza F_c normale al piano della porta che agisce nel punto C perché il momento rispetto al punto O annulli il momento prodotto dalla forza del pistone?



Soluzione:





Il momento della forza $\bar{R}$ rispetto alla cerniera O della porta, si trova moltiplicando il vettore posizione $\bar{r}_B$ che unisce il nodo O al nodo B, per il vettore della forza $\bar{R}$; il momento della forza $\bar{F}_c$ rispetto alla cerniera O della porta, si trova moltiplicando il vettore posizione $\bar{r}_C$ che unisce il nodo O al nodo C, per il vettore della forza $\bar{F}_c$.

Calcoliamo il vettore posizione $\bar{r}_B$:

$$\bar{r}_B = \begin{Bmatrix} L_3 + L_1 \\ -h_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 425 \\ -75 \end{Bmatrix}$$

il cui modulo vale: $\|\bar{r}_B\| = \sqrt{(425)^2 + (-75)^2} \cong 431.567\ [mm]$

e il cui angolo, rispetto all'orizzontale, vale: $\alpha = arctan\left(\frac{-75}{425}\right) \cong -10°$.

Il modulo della forza $\bar{R}$ vale 40 [N]; la sua inclinazione rispetto all'orizzontale vale:

$$\beta = arctan\left(\frac{100}{400}\right) \cong 14.036°$$

L'angolo al vertice B vale: $\vartheta_B = |\alpha| + \beta = 24.036°$. Per allineare la forza $\bar{R}$ al raggio $\bar{r}_B$ nel suo verso negativo, devo ruotarla di un angolo $\vartheta_B = -24.036°$.

Il momento intorno al punto O vale:

$$M_O(R) = \|\bar{r}_B \wedge \bar{R}\| = \|\bar{r}_B\| \times \|\bar{R}\| \times sen(\vartheta) = 431.567 \times 40 \times sen(-24.036°) = -7031.34\ [Nmm]$$

Calcoliamo il vettore posizione $\bar{r}_c$:

$$\bar{r}_c = \begin{Bmatrix} L_3 + L_1 + L_2 \\ h_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_{cx} \\ r_{cy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 825 \\ h_c \end{Bmatrix}$$

La coordinata h_c è incognita; osserviamo però che la forza $\bar{F}_c$ è verticale, per cui il suo momento rispetto alla cerniera O della porta è uguale a:

$$M_O(F_c) = r_{cx} \times F_c$$

Per aprire la porta è pertanto necessario che la forza F_c eserciti un momento $M_O(F_c)$ maggiore o uguale a $M_O(R)$:

$$M_O(F_c) = r_{cx} \times F_c \geq M_O(R) = 7031.34$$

da cui:

$$F_c \geq \frac{7031.34}{r_{cx}} = \frac{7031.34}{825} = 8.523\ [N]$$