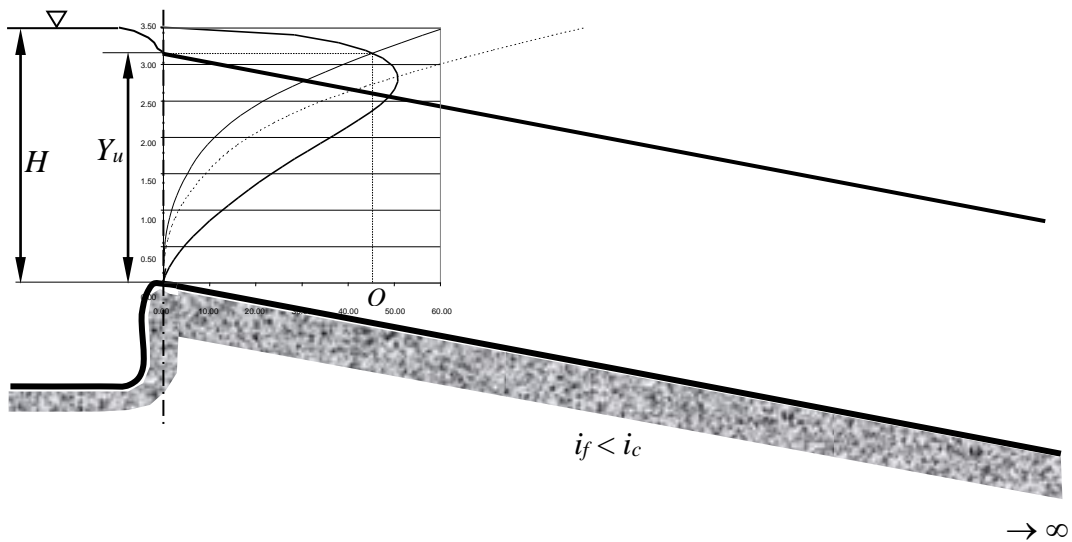


Andrea Balzano

Esercizi di IDRAULICA



Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Ingegneria
Dipartimento di Ingegneria del Territorio

Marzo 2004

CAPITOLO 1
IDROSTATICA

Esercizio 1.1

La paratoia cilindrica AB di peso P , avente come direttrice il quarto di circonferenza di centro C e raggio R , è incernierata in B e semplicemente appoggiata in A . Dati il peso specifico del liquido, identico, contenuto nei due comparti, γ , ed il livello della superficie libera nel serbatoio 1 , determinare la posizione della superficie libera nel comparto 2 in condizioni di equilibrio limite della paratoia (cioè tale che un ulteriore aumento di livello nel comparto 2 determini l'apertura della paratoia).

Dati:

- peso specifico del liquido, γ ;
- peso proprio della paratoia, \bar{P} ;
- posizione della superficie libera nel comparto 1;
- dati geometrici.

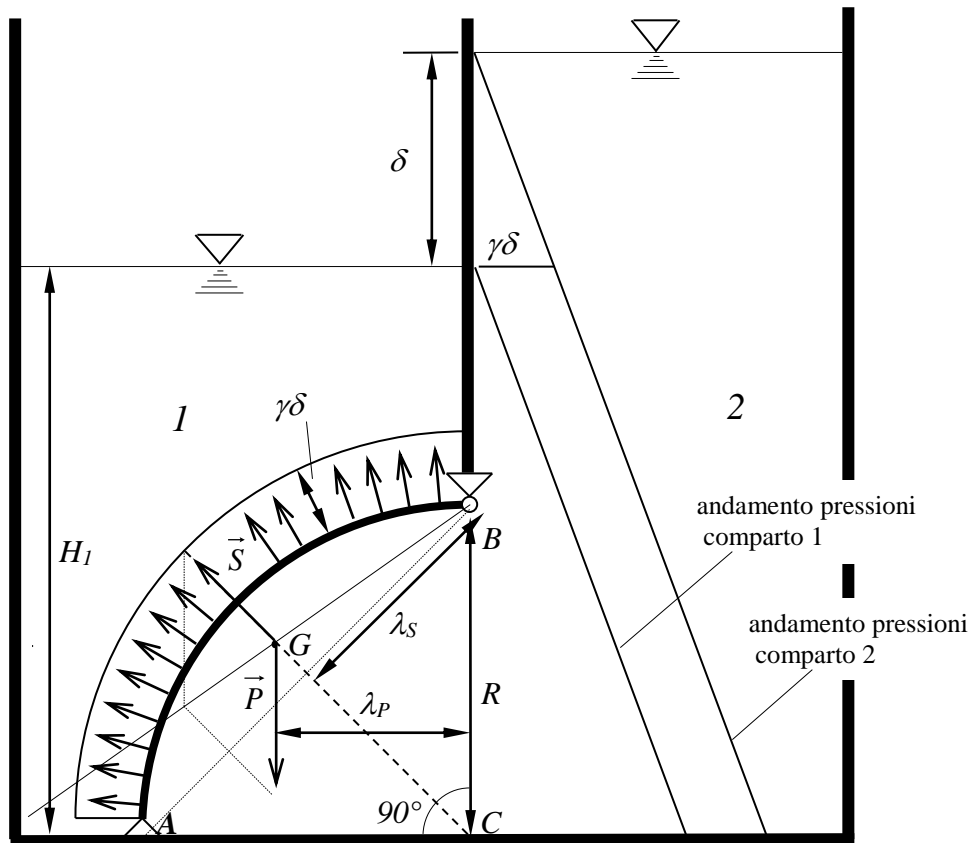


Figura 1.1

La condizione di apertura incipiente si realizza quando si annulla il momento risultante delle distribuzioni di pressione sulle due facce della paratoia e del suo peso proprio, col che è nulla la reazione vincolare del semplice appoggio in A .

Nel caso lo spessore della paratoia possa considerarsi trascurabile, e perciò le due superfici possano essere considerate come le due facce della stessa superficie geometrica, si verifica facilmente che la somma algebrica delle due distribuzioni di pressione sulle due facce è una distribuzione uniforme radiale di valore $\gamma\delta$, poiché, punto per punto, la differenza degli affondamenti del punto rispetto ai due piani dei carichi idrostatici è costante e pari al dislivello

incognito, δ , delle superfici libere nei due comparti del serbatoio. Per simmetria, la spinta idrostatica risultante sulla paratoia è data pertanto da un vettore \vec{S} avente la bisettrice dell'angolo $\hat{A}CB$ come retta d'azione, rivolto come il vettore \vec{CG} , e di modulo per unità di lunghezza in profondità (direzione normale al piano del disegno) $|\vec{S}| = \gamma \delta \overline{AB}$, ossia pari alla spinta sulla superficie piana proiezione della paratoia cilindrica su un piano perpendicolare alla bisettrice di $\hat{A}CB$ (il ragionamento è analogo a quello mediante il quale si dimostra il metodo di determinazione delle spinte idrostatiche per componenti).

Assimilando la paratoia ad un arco di cerchio omogeneo, il suo baricentro, ove è applicato il peso proprio, è situato sulla bisettrice dell'angolo $\hat{A}CB$, a distanza $\overline{CG} = R \operatorname{sen} \alpha / \alpha$ dal centro C dell'arco di circonferenza sezione della paratoia cilindrica nel piano del disegno, ove si è posto $2\alpha = \hat{A}CB$. Per il caso riportato in Figura 1.1, si calcolano i bracci del peso \vec{P} e della spinta \vec{S} rispetto al polo B , dati rispettivamente da:

$$\lambda_p = \overline{CG} \cos \alpha = \overline{CG} \sqrt{2} / 2$$

$$\lambda_s = R \operatorname{sen} \alpha = R \sqrt{2} / 2 .$$

La condizione di equilibrio limite alla rotazione attorno al polo B è data da:

$$\lambda_p P = \lambda_s S \ell ,$$

in cui ℓ è la dimensione in profondità della paratoia, Sostituendo i dati del problema per il caso in Figura 1.1, si ha:

$$PR \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \cos \alpha = \gamma \delta \frac{R}{\cos \alpha} R \operatorname{sen} \alpha \ell ,$$

con l'angolo α espresso in radianti, da cui infine:

$$\delta = \frac{P(\cos \alpha)^2}{R \alpha \ell} = \frac{2P}{\pi \gamma R \ell} .$$

Sulla base di tale espressione, si può determinare il modulo della spinta del liquido:

$$|\vec{S}| = \frac{2P}{\pi \ell \cos \alpha} = \frac{4P}{\sqrt{2} \pi \ell} .$$

Si osservi che, in generale, la paratoia è soggetta a una forza risultante delle pressioni e del peso proprio non nulla, ma avente nullo soltanto il momento rispetto alla cerniera B . La reazione di quest'ultima, pertanto, è anch'essa non nulla e necessaria per l'equilibrio della paratoia.

Essendo nullo il momento della forza $\vec{P} + \vec{S}$ rispetto al punto B , essa deve passare per detto punto. Inoltre, essa passa anche per il baricentro dell'arco di cerchio direttrice della paratoia cilindrica, in quanto per tale punto passano sia \vec{P} che \vec{S} . È pertanto possibile determinare la forza \vec{S} con un metodo grafico, congiungendo con un segmento i punti B e G e determinando la forza agente sulla bisettrice dell'arco di cerchio che determina, sommata vettorialmente con il peso \vec{P} , una risultante parallela alla congiungente \overline{BG} .

Esercizio 1.2

Determinare le spinte che si scaricano sulle flange AA e BB delle testate del serbatoio in Figura 1.2.

Dati:

- peso specifico del liquido contenuto nel serbatoio, γ ;
- misura del manometro semplice, Δ ;
- peso specifico del liquido manometrico, γ_m ;
- dati geometrici (a, D, α).

La posizione del piano dei carichi idrostatici si determina imponendo l'uguaglianza dei valori della pressione determinati per il menisco m_1 in funzione degli affondamenti dello stesso rispetto ai piani dei carichi idrostatici del liquido contenuto nel serbatoio (incognito) e del liquido manometrico (posto alla quota del menisco m_2):

$$\gamma\delta = \gamma_m\Delta,$$

da cui si ricava l'affondamento δ . Il liquido contenuto nel serbatoio si trova in pressione in tutti i suoi punti. Conseguentemente le spinte agenti sulle due testate tendono a separare queste ultime dal corpo del serbatoio.

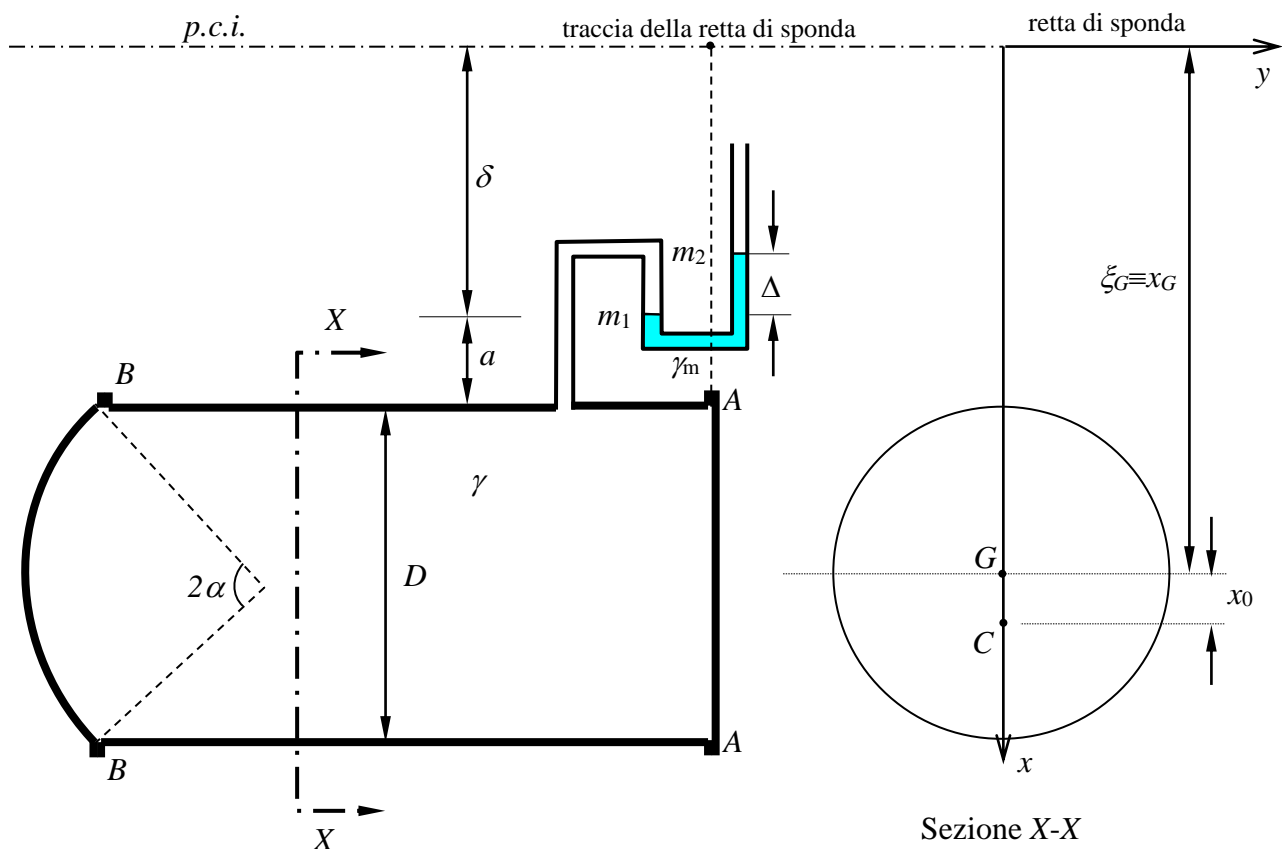


Figura 1.2

Il modulo della spinta sulla testata circolare piana AA si ottiene come prodotto della pressione nel baricentro della sezione per l'area della superficie circolare:

$$|\vec{S}_{AA}| = p_G \Omega_{AA} = \gamma \xi_G \frac{\pi D^2}{4}$$

La spinta \vec{S}_{AA} è applicata al centro di spinta, posto, per simmetria, sull'asse x indicato in Figura 1.2 (è infatti nullo il momento centrifugo della sezione circolare rispetto a tale asse), al disotto del baricentro della sezione, a una distanza da questo pari al rapporto fra il momento d'inerzia della sezione circolare rispetto all'asse orizzontale baricentrico giacente sul piano della sezione ed il momento statico della sezione rispetto alla retta di sponda¹:

$$x_0 = \frac{I_0}{M_s} = \frac{\iint_{\Omega_{AA}} (x - x_G)^2 d\Omega}{\iint_{\Omega_{AA}} x d\Omega} = \frac{\pi r^4 / 4}{\pi r^2 x_G} = \frac{r^2}{4x_G}.$$

In tale espressione, in forza del teorema di Varignon, si è calcolato il momento statico come prodotto dell'area della superficie circolare moltiplicata per la distanza del baricentro della sezione dalla retta di sponda.

La spinta \vec{S}_{BB} viene esercitata sulla calotta sferica dal liquido adiacente. Pertanto, per il principio di azione e reazione essa è l'uguale e contraria della forza che la calotta esercita sul liquido. Fatta questa osservazione, la spinta può determinarsi mediante applicazione dell'equazione globale dell'idrostatica ad un volume liquido avente una parte della superficie di contorno a contatto con la calotta. Il volume più semplice rispondente a questo requisito è il volume W_C avente come parte rimanente della superficie di contorno la superficie circolare verticale di diametro D (vedi Figura 1.3).

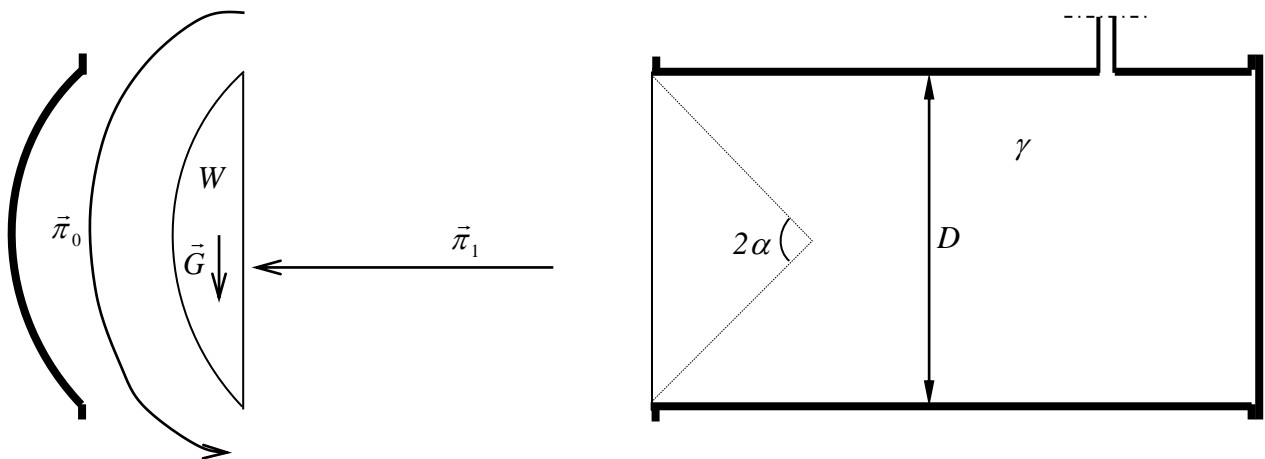


Figura 1.3

Tale volume liquido è in equilibrio idrostatico sotto l'azione della \vec{p}_0 esercitata dalla calotta, uguale e contraria alla spinta esercitata dal liquido sulla calotta, $\vec{S}_{BB_0} = -\vec{p}_0$, della \vec{p}_1 esercitata dal liquido adiacente e del peso proprio \vec{G} . (la rappresentazione grafica fatta della forza \vec{p}_0 vuole

¹ Con il simbolo ξ_G è stato indicato l'affondamento del baricentro della sezione rispetto al piano dei carichi idrostatici, misurato sempre lungo la verticale; con il simbolo x_G è stata indicata la coordinata del baricentro lungo l'asse giacente sul piano della sezione, normale alla retta di sponda. Essendo il piano in cui giace la sezione verticale, le due grandezze coincidono. In generale, per una superficie piana formante un angolo β rispetto all'orizzontale si avrà $\xi_G = x_G \sin \beta$.

soltanto evidenziare che essa agisce sulla superficie sferica: essa è ovviamente un vettore come tutte le altre forze. Di più, essendo essa la risultante di forze elementari tutte passanti per il centro della sfera, è applicabile nel centro della sfera o, per le condizioni di equivalenza dei sistemi di forze, in qualunque altro punto della sua retta d'azione, passante per il centro della sfera).

L'equazione globale per il volume liquido si scrive perciò:

$$\vec{G} + \vec{\pi}_0 + \vec{\pi}_1 = 0 ,$$

da cui l'espressione della spinta cercata:

$$\vec{S}_{BB} = -\vec{\pi}_0 = \vec{G} + \vec{\pi}_1$$

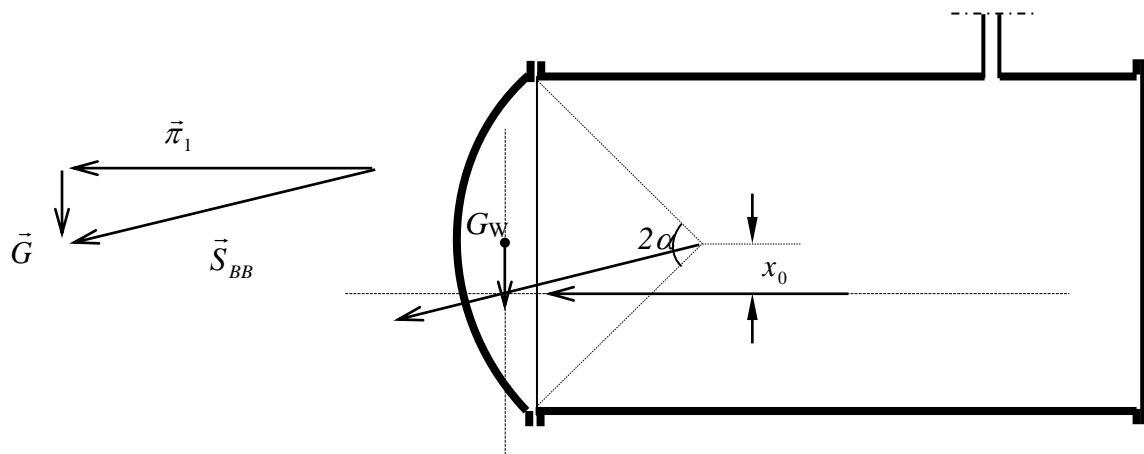


Figura 1.4

La forza peso è data dal prodotto del peso specifico del liquido, γ , per il volume di controllo, W_C . Essa è applicata nel baricentro del volume liquido, G_w . La $\vec{\pi}_1$ ha lo stesso modulo e lo stesso punto di applicazione della spinta sulla testata piana, \vec{S}_{AA} , in quanto le due spinte, aventi versi opposti, sono esercitate su una identica superficie geometrica aventi i baricentri alla stessa quota. Dovendo essere il sistema delle due forze, \vec{G} e $\vec{\pi}_1$, equivalente alla loro risultante applicata nel centro della calotta sferica, il punto di intersezione delle rispettive rette d'azione deve appartenere alla retta d'azione della risultante \vec{S}_{BB} , come illustrato in Figura 1.4².

Essendo la superficie piana circolare la proiezione della superficie della calotta nella direzione dell'asse del serbatoio, lo stesso risultato si ottiene immediatamente mediante il metodo di calcolo per componenti.

² Tale osservazione può anche essere utilizzata per ricavare la posizione del baricentro G_w , note che siano le posizioni del centro della calotta e del centro di spinta della componente orizzontale.

Esercizio 1.3

Determinare in modulo, direzione e punto di applicazione, la spinta esercitata complessivamente sulla valvola sferica dai fluidi contenuti nei due comparti del serbatoio in pressione riportato in Figura 1.5. Verificare l'equilibrio della valvola sferica nella sua sede.

Dati:

- Peso specifico γ del liquido contenuto nel serbatoio e γ_m del liquido manometrico;
- misura fornita dal manometro differenziale, Δ ;
- peso proprio della valvola, P ;
- dati geometrici (dimensioni serbatoio e valvola, quote pelo libero e menischi manometro)

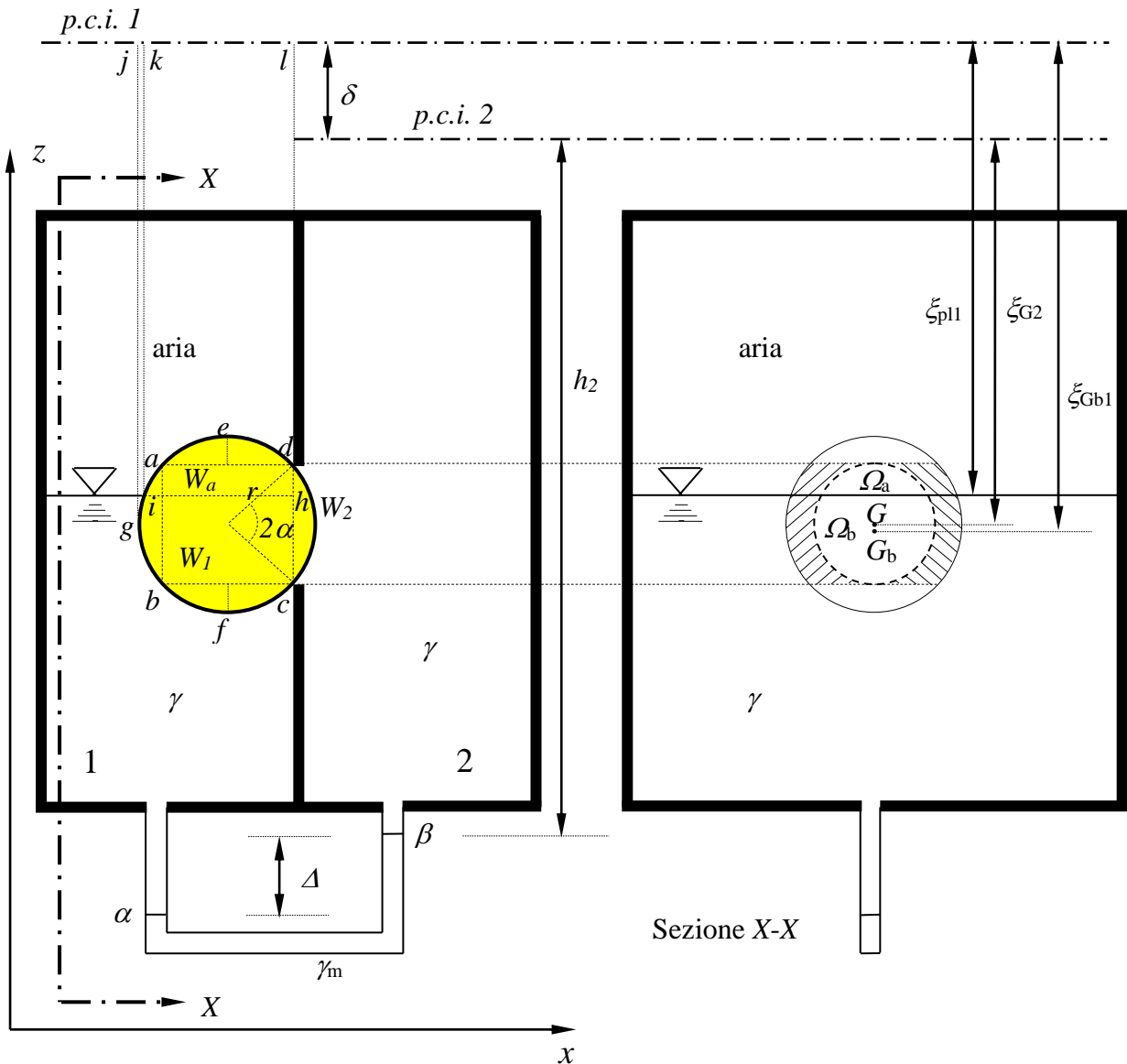


Figura 1.5

Calcolo della spinta per componenti

La componente orizzontale S_{01} della spinta esercitata dai fluidi nel comparto 1 si riduce alla spinta *fittizia* sulla sezione piana circolare dell'apertura praticata nel setto di separazione dei due comparti, $\Omega = \Omega_a + \Omega_b$, proiezione della calotta sferica ab in direzione normale al setto di separazione. Infatti, la parte rimanente di superficie laterale della sfera compresa nel comparto 1

può essere suddivisa in parti le cui proiezioni orizzontali piane sono uguali e le relative spinte orizzontali opposte in verso (semi-calotte ae , ed e bf , fc e volume la cui proiezione su un piano verticale è riportata, campita, nella sezione $X-X$). Assumendo una posizione del piano dei carichi idrostatici del liquido nel comparto 1 come in Figura 1.5, e come verso positivo delle proiezioni orizzontali quello delle x crescenti, si ha pertanto:

$$S_{o1} = p_{aria} \Omega_a + p_{Gb_1} \Omega_b = \gamma \xi_{pl1} \Omega_a + \gamma \xi_{Gb_1} \Omega_b$$

in cui p_{aria} è la pressione dell'aria, pari alla pressione vigente sul pelo libero del liquido, p_{Gb_1} è la pressione del liquido del comparto 1 alla quota del baricentro G_b della sezione Ω_b , ξ_{pl1} e ξ_{Gb_1} sono gli affondamenti, rispetto al piano dei carichi idrostatici del liquido nel serbatoio 1, del pelo libero e del baricentro G_b rispettivamente.

La componente verticale della spinta esercitata dai fluidi nel comparto 1 è data dalla somma algebrica delle spinte verticali agenti sulle proiezioni ortogonali dei due volumi W_a e W_1 su un piano orizzontale. Assunto come verso positivo delle proiezioni verticali lo stesso dell'asse z , si ha:

$$\begin{aligned} S_{v1_a} &= -p_{aria} \Omega_{hi} = -\gamma \xi_{pl} \Omega_{hi} = -\gamma V_{ijlh} \\ S_{v1_1} &= \gamma V_{gildcfb} - \gamma V_{giki} \end{aligned} ,$$

in cui $V_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}$ rappresenta un volume individuato dai punti della sua sezione con un piano verticale, contenuti nel pedice del simbolo. Si osservi che, mentre le componenti verticali delle pressioni agenti sulla superficie di contorno del volume W_a sono sempre rivolte verso il basso, per il calcolo della componente verticale della spinta agente sul volume W_1 si è dovuta suddividere la relativa superficie di contorno in due parti, in ognuna delle quali le componenti verticali delle pressioni agenti avessero verso concorde. Si osservi anche che la S_{v1_a} è pari al peso di un volume liquido *fittizio* compreso fra il piano dei carichi idrostatici 1 e la proiezione orizzontale, Ω_{hi} , della parte della superficie di contorno del volume W_a esposta all'aria. Complessivamente, per la componente verticale della spinta esercitata dai fluidi del comparto 1 si ha:

$$S_{v1} = S_{v1_a} + S_{v1_1} = -\gamma V_{ijlh} + \gamma V_{gildcfb} - \gamma V_{giki} = \gamma V_{gihcfb} .$$

Essa è perciò data dal peso di una massa liquida *fittizia* di peso specifico γ e volume pari alla parte del volume della valvola sferica immersa nel liquido del comparto 1.

Per quanto concerne il comparto 2, con analoga analisi si determinano le componenti orizzontale e verticale della spinta esercitata sulla valvola dal liquido del comparto 2:

$$\begin{aligned} S_{o2} &= -p_{G_2} \Omega = -\gamma \xi_{G_2} \Omega \\ S_{v2} &= \gamma W_2 \end{aligned} .$$

La componente verticale della spinta esercitata complessivamente dai fluidi contenuti nei due comparti è pertanto pienamente determinata, ed uguale a una forza verticale rivolta verso l'alto, di modulo pari al peso di una massa liquida di volume pari al volume della parte della valvola effettivamente immersa nel liquido e peso specifico γ .

$$S_v = S_{v1} + S_{v2} = \gamma V_{gihcfb} + \gamma W_2 = \gamma V_{gihcfb} = \gamma (W_1 + W_2) .$$

La componente orizzontale della spinta complessiva è data da:

$$S_o = S_{o1} + S_{o2} = \gamma \xi_{pl1} \Omega_a + \gamma \xi_{Gb_1} \Omega_b - \gamma \xi_{G_2} \Omega ,$$

in cui risultano incogniti i tre affondamenti ξ . Assumendo per comodità come riferimento delle quote la superficie libera e ricordando che $\Omega = \Omega_a + \Omega_b$, l'espressione della componente orizzontale della spinta si può scrivere:

$$S_o = \gamma \xi_{pl} \Omega_a + \gamma (\xi_{pl} + z_{pl} - z_{G_b}) \Omega_b - \gamma (\xi_{pl} - \delta + z_{pl} - z_G) \Omega = \gamma (z_{pl} - z_{G_b}) \Omega_b - \gamma (-\delta + z_{pl} - z_G) \Omega$$

in cui le quote del pelo libero e dei baricentri delle figure piane sono noti, come tutti i dati geometrici. Il valore della differenza di quota fra i due piani dei carichi idrostatici, δ , si ricava in funzione della misura del manometro differenziale, Δ , dalla relazione:

$$\delta = \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} \Delta$$

che, sostituita nella equazione precedente, consente di determinare il valore di S_o .

Calcolo della spinta mediante l'equazione globale dell'idrostatica

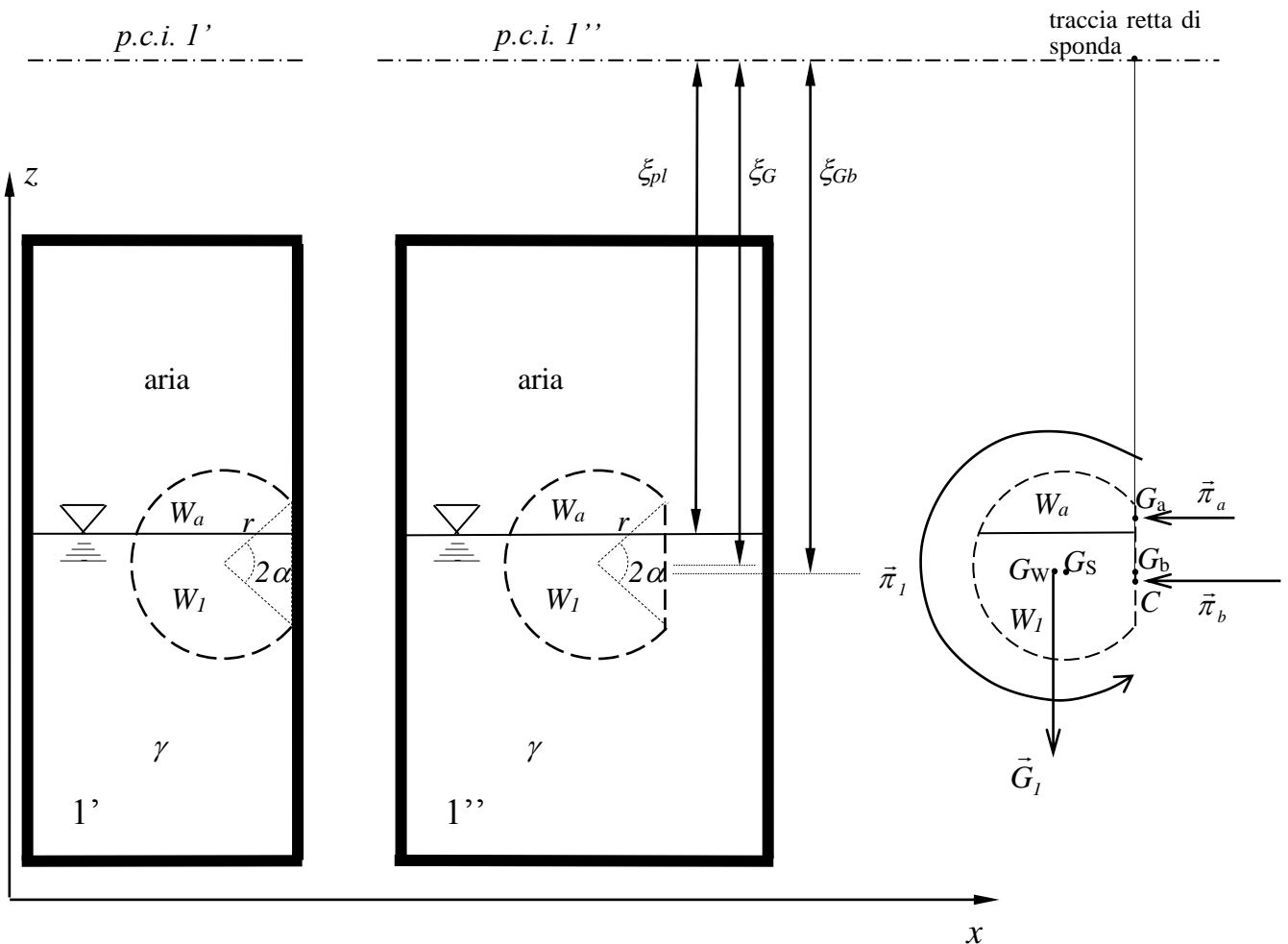


Figura 1.6

Come nel procedimento seguito in precedenza, la spinta totale esercitata dai fluidi sulla superficie della valvola sferica va determinata come somma delle spinte agenti sulle parti della superficie stessa che si trovano nei due compartimenti. Si illustra di seguito il procedimento per determinare la spinta esercitata dai fluidi nel comparto 1.

Il problema può essere risolto mediante l'applicazione dell'equazione globale dell'idrostatica se è possibile definire una situazione fittizia in cui un volume fluido, anche disomogeneo:

1. ha tutta o parte della superficie di contorno uguale alla superficie reale sulla quale si vuole determinare la spinta;
2. è soggetto alla stessa distribuzione di pressioni del caso reale;
3. si trova in equilibrio idrostatico nel fluido circostante.

Rispondono a tali requisiti i volumi riportati in tratteggio nei serbatoi 1' e 1'' in Figura 1.6, entrambi costituiti da aria nella parte posta al di sopra del pelo libero del liquido e liquido di peso specifico γ nella parte sottostante. Nel primo caso il volume è materialmente a contatto della parete del serbatoio ove, nel serbatoio reale, si trovava l'apertura circolare fra i due compartimenti; nel secondo caso il volume è interamente circondato di fluido. Essendo il piano dei carichi idrostatici del liquido posto nella stessa posizione relativa al pelo libero, i due volumi sono soggetti punto per punto alla stessa pressione, uguale anche a quella agente in realtà sulla superficie della valvola: a ciascuno dei due può indifferentemente farsi riferimento per la determinazione della spinta cercata.

È poi evidente che i volumi fittizi si trovano in condizioni di equilibrio idrostatico con i fluidi circostanti. Lo stesso non avrebbe potuto dirsi di un uguale volume omogeneo di aria o di liquido, in quanto in tale caso le superfici di separazione aria-liquido non sarebbero state costituite da piani orizzontali (più in generale: da superfici equipotenziali), condizione necessaria per l'equilibrio idrostatico.

Con riferimento allo schema statico di Figura 1.6, l'equazione globale per il volume di controllo si scrive:

$$\vec{G}_1 + \vec{\pi}_1 + \vec{\pi}_a + \vec{\pi}_b = 0$$

in cui \vec{G}_1 è la forza peso agente sul volume di controllo, assunta pari, in buona approssimazione, al peso della sola parte liquida del volume ($\vec{G}_1 \neq \gamma W_1$; nel caso dell'acqua $\gamma \approx 10^3 \gamma_{\text{aria}}$), mentre la forza di superficie è stata scomposta nelle tre forze:

- $\vec{\pi}_1 = \vec{S}_1$, agente sulla superficie sferica, uguale alla spinta cercata (la rappresentazione grafica fatta della forza vuole soltanto evidenziare che essa agisce sulla superficie sferica: essa è ovviamente un vettore come tutte le altre forze. Di più, essendo essa la risultante di forze elementari tutte passanti per il centro della sfera, è applicabile nel centro della sfera o in qualunque altro punto della sua retta d'azione, passante per il centro della sfera);
- $\vec{\pi}_a$, agente sulla parte di superficie piana circolare, Ω_a , posta al di sopra del pelo libero;
- $\vec{\pi}_b$, agente sulla parte di superficie piana circolare, Ω_b , posta al di sotto del pelo libero;

Si ottiene pertanto la spinta esercitata dal liquido nel comparto 1:

$$\vec{S}_1 = \vec{\pi}_1 = -\vec{G}_1 - \vec{\pi}_a - \vec{\pi}_b,$$

la cui componente verticale, di modulo $G_1 = \gamma W_1$, si riconosce essere uguale alla S_{v1} determinata con il metodo di calcolo per componenti.

Con ragionamento del tutto analogo si determina la spinta agente sulla parte della superficie della valvola posta nel comparto 2, analizzando l'equilibrio idrostatico di un volume identico alla parte del volume della valvola contenuta nel comparto 2, costituito interamente di liquido, posto nella stessa posizione relativa rispetto al piano dei carichi idrostatici del liquido del comparto 2, come illustrato in Figura 1.7.

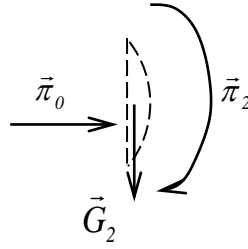


Figura 1.7

Si ha pertanto:

$$\vec{\pi}_0 + \vec{\pi}_2 + \vec{G}_2 = 0 ,$$

in cui $\vec{\pi}_2 = \vec{S}_2$ è la spinta esercitata sulla valvola dal liquido del comparto 2 e $\vec{G}_2 / \gamma W_2$ è pari alla componente verticale della spinta S_{v2} determinata con il metodo per componenti. Si ottiene perciò:

$$\vec{S} = \vec{\pi}_2 = -\vec{\pi}_0 - \vec{G}_2 ,$$

da cui l'espressione della spinta totale:

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = -\vec{G}_1 - \vec{G}_2 - \vec{\pi}_a - \vec{\pi}_b - \vec{\pi}_0 ,$$

la cui componente verticale si è riconosciuto essere uguale alla $S_v = \gamma(W_1 + W_2)$ determinata con il metodo di calcolo per componenti.

Il vettore $-(\vec{\pi}_a + \vec{\pi}_b + \vec{\pi}_0)$ ha direzione orizzontale e modulo:

$$\pi_x = \left| \gamma \xi_{p1} \Omega_a + \gamma \xi_{Gb1} \Omega_b - \gamma \xi_{G2} \Omega \right| ,$$

pari al valore assoluto della componente orizzontale S_o determinata con il metodo per componenti. Introducendo le relazioni fra gli affondamenti ξ_{p1} , ξ_{Gb1} e ξ_{G2} e la formula del manometro differenziale come già fatto nel caso precedente, si determina il valore di $\pi_x = S_o$.

La rappresentazione grafica qualitativa della spinta \vec{S} e delle forze componenti evidenziate nell'analisi statica è riportata nella Figura 1.8.

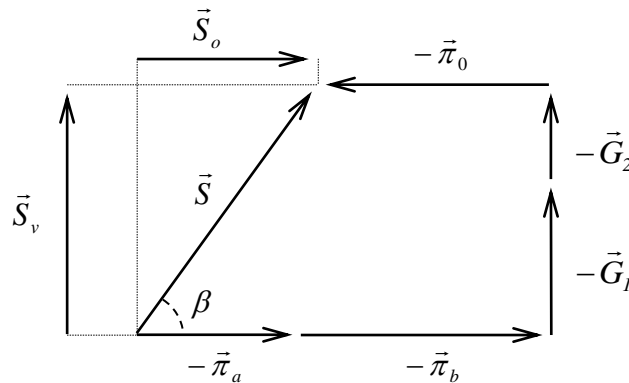


Figura 1.8

La risultante \vec{S} forma con l'orizzontale un angolo $\beta = \arctg(\vec{S}_v / \vec{S}_o)$ ed ha modulo $|\vec{S}| = \sqrt{|\vec{S}_v|^2 + |\vec{S}_o|^2}$. Essendo la risultante di forze elementari di pressione puntualmente perpendicolari alla superficie sferica e perciò passanti tutte per il centro della sfera, la spinta \vec{S} è applicata essa stessa nel centro della sfera. Per le condizioni di equivalenza dei sistemi di forze, è infatti consentito fare scorrere tali componenti infinitesime lungo le rispettive rette d'azione fino al centro della sfera e ivi effettuare la composizione per ottenere la spinta risultante, \vec{S} .

- ✓ Le posizioni ipotizzate per i singoli piani dei carichi idrostatici sono assolutamente arbitrarie e non verificabili, in mancanza di ulteriori informazioni, anche successivamente alla determinazione della spinta complessiva. Alle stesse conclusioni sulla determinazione della spinta si sarebbe potuti giungere nel caso in cui entrambi i serbatoi fossero stati ipotizzati in depressione, ovvero aventi i piani dei carichi idrostatici sezionanti il volume della valvola, purché con il p.c.i. 1 al di sopra del p.c.i. 2 della quantità δ , come imposto dalla posizione dei menischi del manometro differenziale.

Condizione di equilibrio della valvola nella sua sede

La valvola è soggetta, oltre che alla spinta dei fluidi, al peso proprio ed alla reazione vincolare esercitata dal contorno circolare dell'apertura praticata nel setto di separazione dei due comparti. Quest'ultima è una reazione di semplice appoggio distribuita su tale contorno (la cui rappresentazione in Figura 1.9 è del tutto qualitativa quanto all'effettivo andamento degli sforzi resistenti), equivalente ad una forza orizzontale diretta nel verso negativo dell'asse delle x come precedentemente definito, applicata in un punto intermedio fra i punti Q e T , rispettivamente di massima e di minima quota del contorno circolare. Essa è pertanto in grado di produrre unicamente un momento M_{VQ} avente verso di rotazione orario rispetto al punto Q ed uno M_{VT} di verso antiorario rispetto al punto T . Nel caso la valvola sia omogenea o, comunque, abbia una distribuzione di massa a simmetria sferica (p.es. una sfera cava avente spessore della parete sferica costante e densità del materiale costituente uniforme), anche il peso proprio della valvola è applicato nel centro della sfera, costituente il baricentro della valvola, e per tale punto passa perciò anche la risultante \vec{R} .

Pertanto, dovendosi la forza totale agente sulla valvola e le reazioni vincolari equilibrarsi (quanto a risultante e momento risultante), si ha che le situazioni di equilibrio possibili per la valvola sono quelle per le quali la retta d'azione della risultante $\vec{R} = \vec{S} + \vec{P}$ della spinta dei fluidi e del peso proprio interseca la sezione circolare dell'apertura³.

Le condizioni limite di equilibrio della valvola consistono nel passaggio della retta d'azione della risultante \vec{R} per il punto Q o per il punto T , con rotazione incipiente della valvola rispetto allo stesso punto. Nella parte destra della Figura 1.9 sono riportate le due condizioni di equilibrio limite e due condizioni di disequilibrio a parità di spinta dei fluidi, ossia, per vari valori del peso proprio della valvola. In particolare, la rotazione della valvola rispetto al punto Q avverrà qualora essa abbia peso proprio inferiore alla componente verticale della spinta dei fluidi, ossia, al peso del volume sferico costituito dai fluidi che esercitano la pressione sulla superficie della valvola, di modulo $\gamma(W_1 + W_2)$, come determinati nell'analisi statica del sistema; avverrà attorno al punto T se invece il peso della valvola è maggiore di detto volume fluido. Il problema della determinazione dei valori critici corrispondenti del peso della valvola si risolve semplicemente imponendo che la retta d'azione della risultante \vec{R} formi con l'orizzontale un angolo $\pm \alpha$:

³ Naturalmente, la conseguente condizione di sforzo sul bordo della circonferenza determinerà l'effettiva possibilità del vincolo di esercitare la reazione o, in alternativa, il collasso del vincolo.

$$\frac{|\vec{S}_v| - |\vec{P}|}{|\vec{S}_o|} = \frac{|\vec{S}| \sin \beta - |\vec{P}|}{|\vec{S}| \cos \beta} = \pm \tan \alpha$$

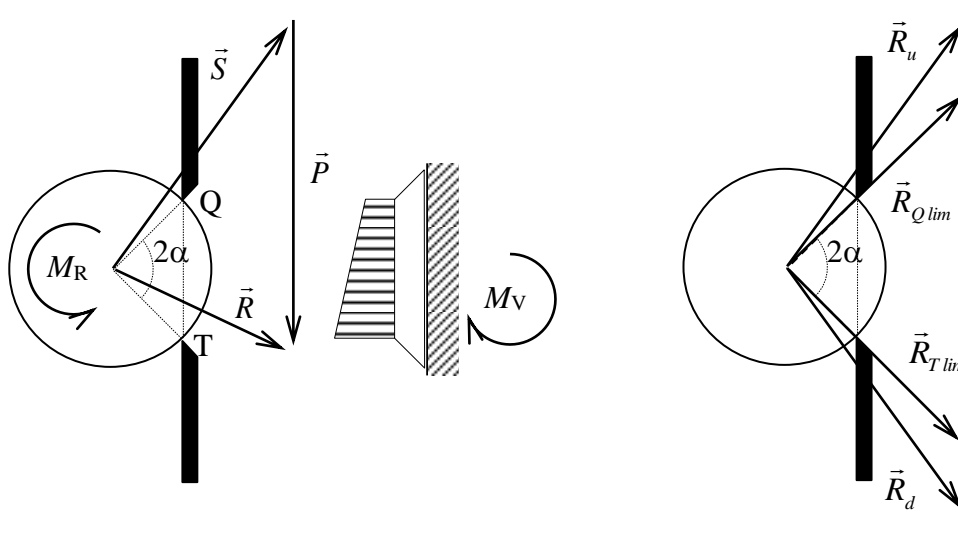


Figura 1.9

In modo del tutto analogo, per un fissato valore del peso proprio della valvola si può invece determinare un valore limite della misura del manometro differenziale al di sotto della quale l'equilibrio non è più possibile. Si utilizza ancora la relazione su riportata, in cui $|\vec{S}_o|$ dipende dalla misura Δ secondo quanto esposto in precedenza nella soluzione del primo problema. In tale caso, il segno da assumere a secondo membro è unico e dipende dal verso della componente verticale della risultante \vec{R} .

Esercizio 1.4

Determinare il modulo della forza assiale \vec{F} che occorre applicare al pistone a testata sferica perché questo rimanga in equilibrio sotto la spinta del liquido all'interno del comparto B del serbatoio. Entrambi i pistoni sono supposti vincolati alle pareti del serbatoio mediante manicotti ideali privi di attrito, a tenuta stagna.

Dati:

- pesi specifici γ_1 e γ_2 dei liquidi contenuti nel serbatoio;
- misura del manometro semplice, Δ ;
- peso specifico γ_m del liquido manometrico;
- pesi propri dei pistoni;
- dati geometrici (dimensioni pistoni, posizione piano di separazione liquidi 1 e 2, angolo di inclinazione pistone comparto B, etc.)

La posizione del piano dei carichi idrostatici del liquido 1 posto nel comparto A del serbatoio si determina imponendo l'equilibrio delle pressioni sul menisco interno del manometro semplice:

$$\gamma_m \Delta = \gamma_1 \xi_1$$

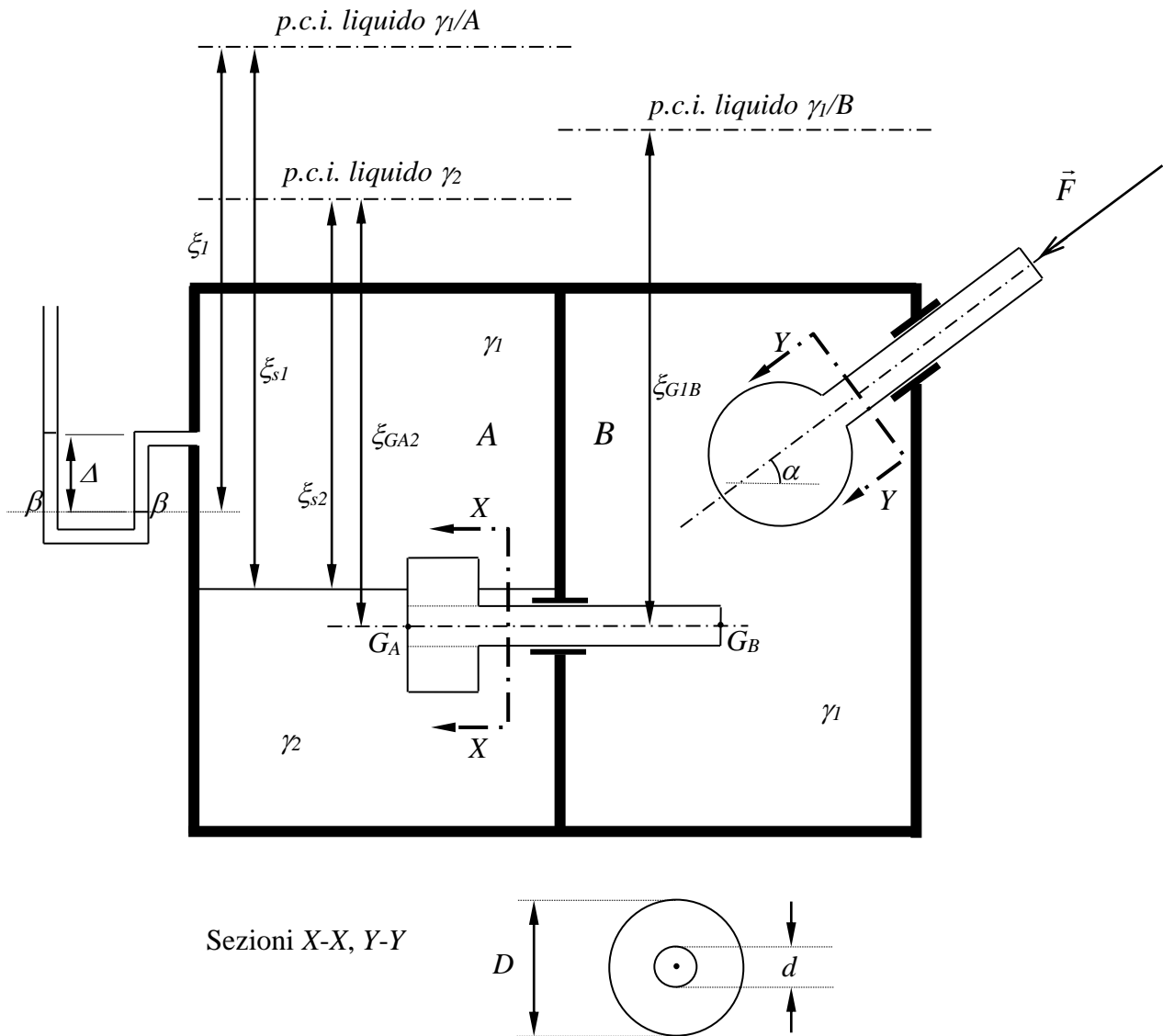


Figura 1.10

da cui si calcola l'affondamento del menisco interno dal piano dei carichi idrostatici del liquido 1 nel comparto A:

$$\xi_1 = \frac{\gamma_m}{\gamma_1} \Delta$$

In modo analogo, la posizione del piano dei carichi idrostatici del liquido 2 si ottiene imponendo l'equilibrio delle pressioni sulla superficie piana di separazione fra il liquido 1 ed il liquido 2:

$$\gamma_2 \xi_{s2} = \gamma_1 \xi_{s1} \quad \Rightarrow \quad \xi_{s2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \xi_{s1}$$

La posizione del piano dei carichi idrostatici del liquido 1 contenuto nel comparto B si determina imponendo l'equilibrio del pistone interposto fra i due comparti, sotto l'azione delle forze:

- peso proprio \vec{P} , noto;

- spinta dei liquidi 1 e 2 nel comparto A, determinabile dalla posizione, ora nota, dei piani dei carichi idrostatici dei liquidi 1 e 2 nel comparto A;
- spinta del liquido 1 nel comparto B, incognita;
- reazione vincolare del manicotto ideale (equivalente ad una forza trasversale \vec{R} , giacente nel piano del setto di separazione dei due comparti, più una coppia di momento \vec{M}), incognita.

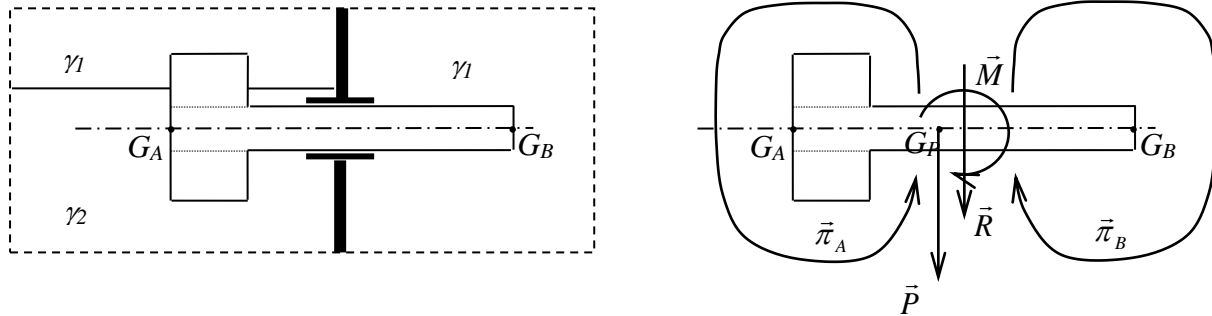


Figura 1.11

A tale scopo è sufficiente imporre l'equilibrio alla traslazione, espresso dalla prima equazione cardinale della statica, esprime l'annullamento della risultante delle forze esterne applicate al pistone⁴:

$$\vec{P} + \vec{\pi}_A + \vec{\pi}_B + \vec{R} = 0 .$$

Proiettando l'equazione vettoriale lungo la direzione dell'asse del pistone (perpendicolare alla direzione della forza \vec{R}), vengono eliminati i contributi della reazione del vincolare e, nel caso specifico, del peso proprio del pistone, avendo quest'ultimo asse orizzontale. In funzione dei moduli delle componenti assiali delle spinte dei liquidi si scrive:

$$\pi_{Aa} - \pi_{Ba} = 0 .$$

Dall'analisi delle distribuzioni di pressione sulle parti della superficie laterale del pistone ricadenti nei due comparti, è facile convincersi che tali componenti assiali sono date dalle spinte sulle superfici piane circolari date: per il comparto A, dalla proiezione della sezione retta dello stelo del pistone sulla superficie della testata dello stesso (indicata in Figura 1.11 dalle linee di proiezione tratteggiate); per il comparto B, dalla stessa sezione retta dello stelo. È infatti evidente che nel comparto B tale parte della superficie di contorno del pistone è l'unica ad avere normale con componente non nulla lungo l'asse. Nel comparto A, oltre a parti di superficie di contorno aventi anch'esse normale ortogonale all'asse, i contributi delle due corone circolari identiche poste sulle due facce della testata sono uguali e contrari, essendo tali facce poste nella stessa posizione relativa ai piani dei carichi idrostatici dei due liquidi.

Avendo tali superfici uguale area, la condizione di equilibrio alla traslazione assiale del pistone si traduce nella uguaglianza delle pressioni agenti sui relativi baricentri, da cui infine si ricava la posizione del piano dei carichi idrostatici del liquido del comparto B:

$$\gamma_2 \xi_{G2A} = \gamma_1 \xi_{G1B} \quad \Rightarrow \quad \xi_{G1B} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \xi_{G2A}$$

⁴ La risultante della coppia è nulla per definizione.

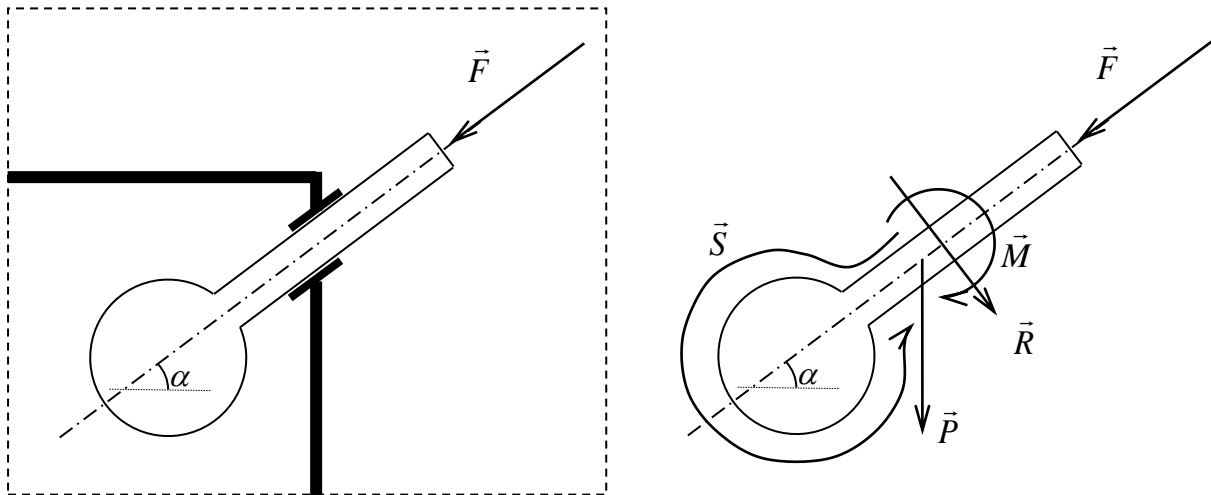


Figura 1.12

Il modulo della forza assiale \vec{F} che tiene in equilibrio il pistone si può determinare, come nel caso precedente, imponendo l'equilibrio alla traslazione del pistone:

$$\vec{S} + \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = 0 ,$$

in cui \vec{S} è la spinta che il liquido 1 esercita sul pistone, risultante della distribuzione di pressioni agenti sulla parte della superficie laterale del pistone interna al serbatoio. Proiettando l'equazione cardinale della statica lungo l'asse, assumendo come verso positivo delle proiezioni il verso opposto a quello ipotizzato per la forza \vec{F} e assumendo che la componente assiale della spinta \vec{S} abbia verso positivo, si scrive:

$$S_a - P \operatorname{sen} \alpha - F = 0 ,$$

dove, ancora, le reazioni vincolari sono state eliminate dall'operazione di proiezione.

La spinta \vec{S} può determinarsi mediante applicazione dell'equazione globale dell'idrostatica ad un volume liquido fittizio, uguale geometricamente al volume della parte del pistone interna al serbatoio, costituito dal liquido 1 (o da altro liquido di uguale peso specifico, γ_1), posto nella stessa posizione relativa rispetto al piano dei carichi idrostatici. Tale volume fittizio è quello indicato in Figura 1.13 con V_{abcde} . Per come è stato scelto, evidentemente il volume fittizio subisce dal liquido all'interno del serbatoio una spinta uguale ad \vec{S} .

Essendo in realtà interessati alla proiezione di tale spinta lungo l'asse, S_a , osservando che sulla superficie laterale dello stelo del pistone le pressioni sono ovunque normali all'asse, si può anche considerare, in luogo della spinta complessiva – risultante della distribuzione di pressioni agente sulla intera superficie di contorno del pistone interna al serbatoio – la componente assiale della spinta agente sul volume V_{bcd} , che, per quanto detto, è identica alla S_a .

L'equazione globale dell'idrostatica applicata al volume liquido V_{bcd} si scrive:

$$\vec{G} + \vec{\pi}_0 + \vec{\pi}_1 = 0 ,$$

dove \vec{G} è il peso del volume liquido, $\vec{\pi}_0$ è la spinta agente sulla superficie sferica della testata del

pistone, la cui componente assiale è uguale alla S_a e $\bar{\pi}_1$ è la forza di superficie agente sulla parte residua della superficie di contorno del volume, costituita dalla sezione retta, circolare, dello stelo del pistone.

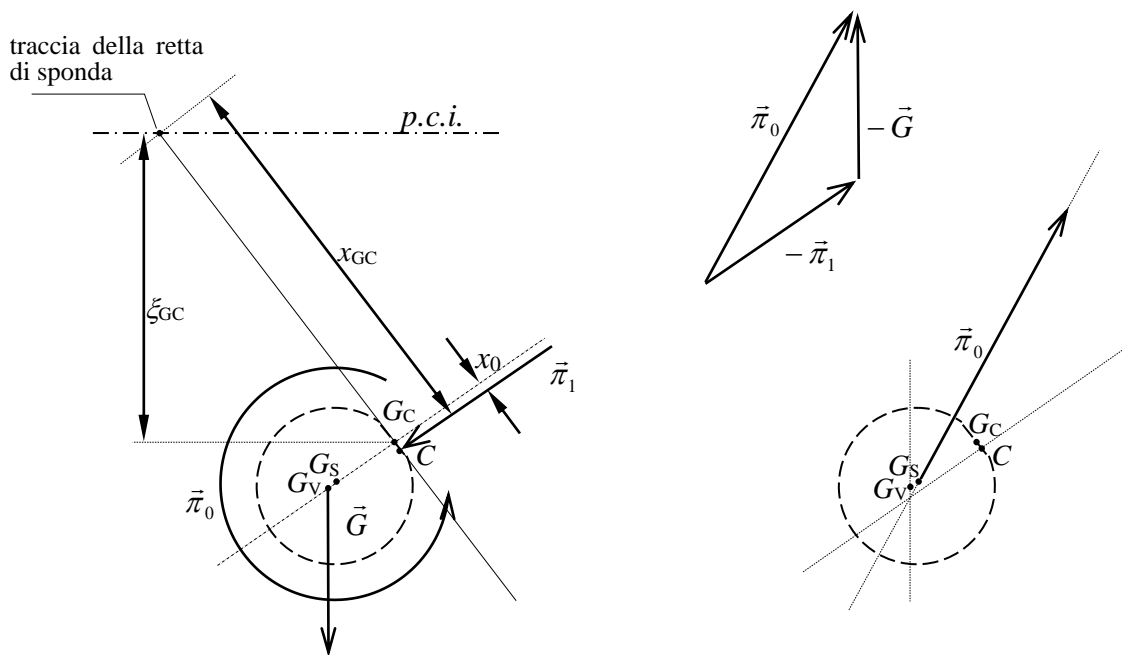
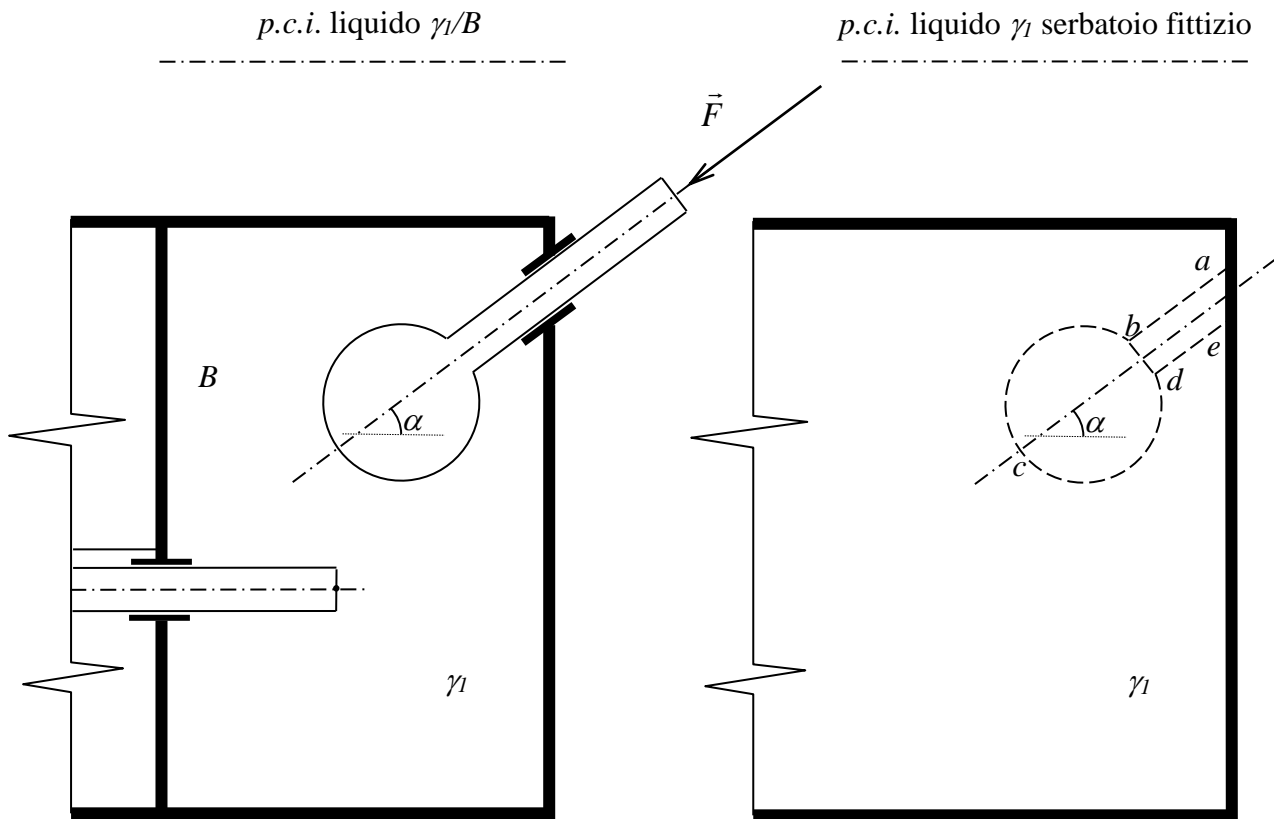


Figura 1.13

Il modulo della forza \vec{G} è dato dal prodotto del volume per la densità del liquido: $|\vec{G}| = \gamma V_{bcd}$. La forza è applicata nel baricentro del volume liquido G_V , il quale giace sull'asse del pistone, spostato da parte opposta dello stelo del pistone rispetto al centro della sfera G_S .

Il modulo della $\vec{\pi}_1$ è dato dal prodotto della pressione nel baricentro della superficie piana circolare, G_C , per l'area della sezione:

$$|\vec{\pi}_1| = p_{G_C} \Omega_C = \gamma_1 \xi_{GC} \frac{\pi d^2}{4},$$

in cui ξ_{GC} è l'affondamento del baricentro della sezione circolare rispetto al piano dei carichi idrostatici e d è il diametro della sezione circolare. Il vettore $\vec{\pi}_1$ è applicato nel centro di spinta della sezione circolare C , posto sulla retta di massima pendenza del piano della sezione, passante per il centro del cerchio, da parte opposta della retta di sponda rispetto al centro della circonferenza, ad una distanza da quest'ultimo pari a:

$$x_0 = \frac{I_0}{M_s} = \frac{I_0}{x_{G_C} \Omega_C} = \frac{I_0}{x_{G_C} \frac{\pi d^2}{4}},$$

dove I_0 è il momento di inerzia della sezione circolare calcolato rispetto all'asse baricentrico orizzontale giacente sul piano della sezione e M_s il momento statico della sezione rispetto alla retta di sponda⁵.

La spinta incognita è data da:

$$\vec{\pi}_0 = -\vec{G} - \vec{\pi}_1,$$

rappresentata graficamente nella Figura 1.13. Essendo la risultante di una distribuzione di pressioni dirette verso il centro della sfera (normalmente alla sua superficie), la spinta $\vec{\pi}_0$ è essa stessa applicata nel centro della sfera. Dovendosi tale punto di applicazione potersi ottenere anche traslando le forze $-\vec{G}$ e $-\vec{\pi}_1$ lungo le rispettive rette d'azione e componendole nel punto di intersezione di tali rette, deve aversi che la retta d'azione della spinta $\vec{\pi}_0$, passante per il centro della sfera, deve passare anche in tale punto di intersezione, come mostrato nella Figura 1.13.

La componente assiale della spinta trovata è data da:

$$\pi_{0a} = S_a = |\vec{\pi}_1| + |\vec{G}| \sin \alpha,$$

per cui la condizione di equilibrio alla traslazione assiale del pistone si riscrive:

$$|\vec{\pi}_1| + |\vec{G}| \sin \alpha - P \sin \alpha - F = 0,$$

dalla quale si ricava, infine, il valore del modulo della forza \vec{F} richiesto:

$$F = |\vec{F}| = |\vec{\pi}_1| + |\vec{G}| \sin \alpha - P \sin \alpha = \gamma_1 \xi_{GC} \frac{\pi d^2}{4} + \gamma_1 V_{bcd} \sin \alpha - P \sin \alpha$$

⁵ calcolato, per il teorema di Varignon, come prodotto dell'area della sezione per la distanza del baricentro della sezione dalla retta di sponda.

1) Assegnate tutte le dimensioni geometriche, i pesi specifici γ e γ_m , la forza verticale F agente sul pistone (comprendente anche il peso proprio del pistone), l'indicazione Δ del manometro differenziale, determinare la spinta che trattiene nella propria sede la valvola conica

2) Assegnati la misura del manometro metallico n in kp/cm^2 , i pesi specifici γ e γ_m e tutti i dati geometrici, determinare la misura del manometro semplice a liquido, Δ .

3) Assegnati la misura Δ del manometro differenziale, i pesi specifici γ_1 , γ_2 , γ_3 e γ_m (con $\gamma_m \gg \gamma_1$ e $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3$) e tutti i dati geometrici, determinare la spinta che trattiene nella propria sede la valvola conica.

4) Assegnati la misura Δ del manometro semplice a liquido, il peso proprio del pistone P , i pesi specifici γ e γ_m e tutti i dati geometrici, determinare la spinta sul fondello sferico.

5) Assegnati i pesi specifici γ_1 , γ_2 e γ_m , le profondità h_1 ed h_2 e tutti i dati geometrici, determinare la misura del manometro differenziale e la spinta sulla paratoia a settore.

6) Assegnati la misura del manometro metallico p_M in bar, i pesi specifici γ_1 , γ_2 e γ_m e tutti i dati geometrici, determinare la spinta che si scarica sui bulloni che fissano il manometro semplice a liquido al serbatoio.

7) Assegnate le quote h ed h_1 , i pesi specifici γ e γ_m e tutti i dati geometrici, determinare l'indicazione del manometro differenziale nei casi (a) e (b).

8) Assegnati il peso specifico γ , la posizione del piano di separazione fra il liquido e l'aria soprastante e tutti gli altri dati geometrici, determinare il peso proprio del secchio capovolto, in equilibrio nelle condizioni indicate in figura

9) Assegnati il peso specifico γ , le dimensioni del pistone e della campana, la posizione del piano di separazione fra il liquido e l'aria soprastante e tutti gli altri dati geometrici, determinare la forza da applicare al pistone e la forza da applicare alla campana per mantenere il sistema in equilibrio.

10) Assegnati il peso specifico γ ed i dati geometrici, determinare la spinta sul fondo conico del recipiente cilindrico indicato in figura.

11) Assegnati la misura Δ del manometro semplice a liquido, il peso proprio P del coperchio semisferico, la posizione del piano di separazione fra l'aria ed il liquido sottostante, i pesi specifici γ_1 , γ_2 e γ_m e tutti i dati geometrici, determinare la forza F necessaria a sollevare il coperchio.

12) Assegnati le altezze h_1 ed h_2 , il peso specifico γ e tutti gli altri dati geometrici, determinare la spinta sul recipiente tronco-conico con setto indicato in figura e l'indicazione del manometro differenziale, il cui liquido manometrico possiede peso specifico γ .

CAPITOLO 2
CORRENTI IN PRESSIONE

Esercizio 2.1

Determinare la portata fluente dal serbatoio *A* in condizioni di moto permanente. Calcolare la spinta che si scarica sulla flangia di collegamento del convergente alla condotta.

Dati:

- dati geometrici (lunghezze, diametri e scabrezze dei tre tratti, diametro dell'ugello del convergente, livello del liquido nel serbatoio, quota dell'asse della condotta, coefficiente di contrazione);
- peso specifico del liquido convogliato, γ .

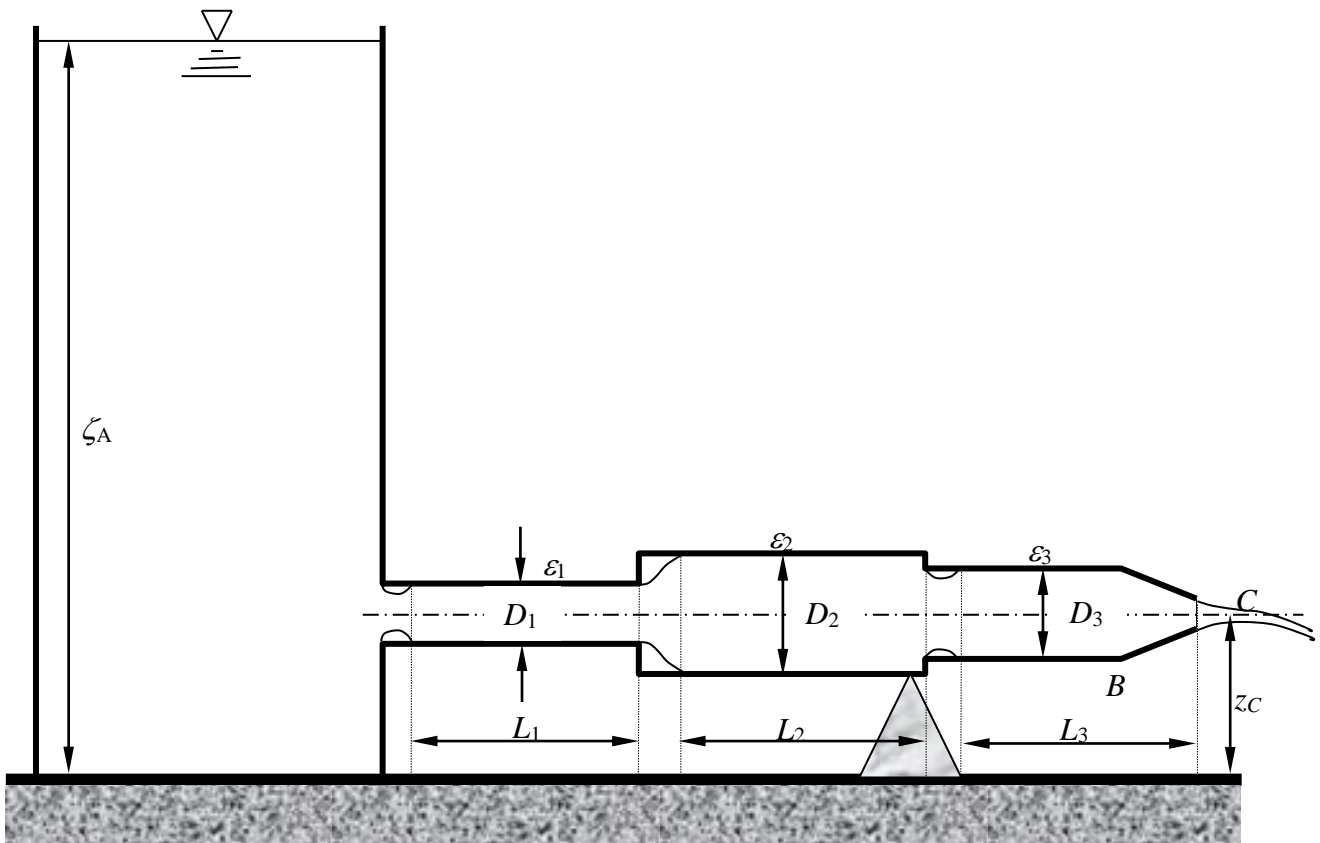


Figura 2.1

In generale una corrente può essere suddivisa in tratti nei quali essa può considerarsi *gradualmente variata*, in cui le traiettorie hanno curvatura trascurabile e lo stato di tensione in una sezione normale al moto è dato in buona approssimazione da una pressione variabile con legge idrostatica, e da tratti in cui ciò non si verifica neanche approssimativamente, avendo le traiettorie curvatura apprezzabile.

In una corrente gradualmente variata la distribuzione di pressione in una sezione normale (che in tal caso si dice *regolare*, essendo essa piana e le velocità normali in ogni punto) obbedisce pertanto alla relazione:

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost}$$

che esprime la costanza della quota piezometrica in tutti i punti della sezione.

Essendo unico il valore di tale grandezza per tutti i punti di una stessa sezione – individuata da un valore dell'ascissa curvilinea definita sulla linea luogo dei baricentri delle sezioni (asse della corrente) – l'andamento del carico piezometrico lungo l'asse della corrente può essere rappresentato da una unica linea detta *linea piezometrica*. In una data sezione, il calcolo delle pressioni agenti nei vari punti viene pertanto eseguito con riferimento al piano orizzontale posto ad una quota pari alla quota piezometrica locale, sul quale dette pressioni sono nulle. Tale piano è evidentemente l'analogo del piano dei carichi idrostatici introdotto in idrostatica – al quale, tuttavia, tale denominazione è riservata.

Essendo l'andamento dei carichi piezometrici delle correnti gradualmente variate (in *tutti* i suoi punti) rappresentabili per mezzo di un'unica linea, tali correnti vengono anche denominate *lineari*.

Il carico (energia per unità di peso) totale in un punto della sezione di una corrente gradualmente variata è dato dalla somma del carico piezometrico – uguale per tutti i punti della sezione, come detto – e dell'altezza cinetica locale, variabile da punto a punto. Il carico totale medio nella sezione è dato da:

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} ,$$

in cui $U = Q/\Omega$ è la velocità media della corrente nella sezione, Q è la portata e Ω l'area della sezione, e α è il *coefficiente di ragguglio dell'altezza cinetica*, dato da:

$$\alpha = \frac{\int_{\Omega} u^3 d\Omega}{U^3 \Omega} ,$$

che nel caso di moto turbolento è molto prossimo all'unità.

Il carico totale medio in una sezione è pertanto rappresentabile da una seconda curva caratteristica, detta *linea dei carichi totali*, avente quota superiore alla quota piezometrica della altezza cinetica calcolata con la velocità media della corrente, eventualmente corretta con il coefficiente di ragguglio.

Il moto di una corrente gradualmente variata è descritto dalla equazione di bilancio della quantità di moto:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial s} = - \frac{\tau_0}{\gamma R_i} ,$$

in cui τ_0 è lo sforzo resistente alla parete e R_i è il raggio idraulico, definito come rapporto fra l'area della sezione ed il perimetro bagnato. La cadente dei carichi totali rappresenta pertanto la perdita di energia specifica (per unità di peso) della corrente per effetto delle resistenze al moto, per unità di lunghezza lungo l'asse. Le corrispondenti perdite di carico si dicono perciò *distribuite*.

Nel caso di moto permanente, o stazionario, l'equazione si scrive:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -J ,$$

in cui J è detta *cadente dei carichi totali*, che, integrata fra due sezioni a e b , fornisce:

$$H_b - H_a = - \int_a^b J(s) ds .$$

Inoltre, l'equazione di continuità, la cui espressione generale per un fluido comprimibile è:

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho \Omega)}{\partial t} = 0 ,$$

trascurando la comprimibilità del liquido, si riduce per il moto stazionario alla:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 ,$$

per cui la portata si mantiene costante sezione per sezione:

$$Q = U\Omega = \text{cost} .$$

Tale conclusione è di carattere generale per un fluido incomprimibile in moto stazionario. Nel caso specifico, supponendo la condotta realizzata di materiale praticamente indeformabile (acciaio, ghisa, PVC, polietilene ad alta densità, etc..) essa è valida anche per il moto vario⁶ di un fluido incomprimibile, essendo comunque in tal caso nulla la derivata temporale locale dell'area della sezione per l'indeformabilità del materiale.

Nei tratti nei quali la corrente non può considerarsi gradualmente variata non è definibile una equazione della corrente di tipo differenziale. Il moto, eventualmente comprendente fenomeni di distacco con relative elevate dissipazioni di energia, deve in tal caso essere studiato mediante l'equazione globale del bilancio della quantità di moto. Tipicamente, per tratti di questo tipo, generalmente di sviluppo limitato, interposti fra due tratti sedi di correnti gradualmente variate, ciò che interessa in pratica è determinare la variazione del carico totale fra le due sezioni regolari che li comprendono, del tipo:

$$\Delta H = H_m - H_v = \eta \frac{U_v^2}{2g} .$$

Si badi che, per quanto detto, in tratti del dominio liquido di questo tipo non ha senso, a rigore, il tracciamento delle linee piezometrica e dei carichi totali. Tuttavia, ciò si suole fare, convenzionalmente, nella rappresentazione grafica, avendo però chiara in mente la differenza sostanziale con le correnti gradualmente variate, per le quali, sole, le due curve sono definibili rigorosamente.

Per il fatto che tali tratti sono generalmente di sviluppo limitato, le relative perdite di carico vengono dette *localizzate*. Nelle rappresentazioni del profilo longitudinale di una condotta a scale distorte, tali zone possono essere anche rappresentate, in pratica, come una discontinuità delle linee piezometrica e dei carichi totali.

Come di frequente accade nelle applicazioni tecniche, nella corrente che ha sede nella condotta riportata in Figura 2.1, nei tratti nei quali la corrente è gradualmente variata si ha, più specificamente, il moto uniforme, nel quale le traiettorie sono rettilinee e parallele, mentre tutti i tratti rimanenti sono interessati da distacchi di vena con intense dissipazioni localizzate di energia.

Diamo di seguito un sommario delle formule utilizzate per il calcolo delle perdite di carico distribuite e localizzate.

- Perdite di carico distribuite

- Formula di Darcy-Weisbach:

⁶ Purché non rapidamente variato; a esclusione, cioè, dei cosiddetti fenomeni di *colpo d'ariete*, determinati da brusche manovre di regolazione delle condotte e caratterizzati dalla propagazione di onde elastiche all'interno del liquido.

$$J = \lambda \frac{U^2}{2gD},$$

in cui λ è il numero indice di resistenza (detto anche coefficiente di resistenza, coefficiente di perdita distribuita o fattore d'attrito – *friction factor* nei testi in lingua inglese, indicato sovente con il simbolo f), dato da:

- $\lambda = \frac{64}{Re}$ regime laminare ($Re < \sim 2000$)
- $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{\sqrt{\lambda} Re} + \frac{1}{3,71} \frac{\varepsilon}{D} \right)$ regime turbolento ($Re > \sim 2000$), Colebrook-White,

in cui $Re = UD/\nu$ è il numero di Reynolds, ε è la scabrezza equivalente della parete interna del tubo e ν la viscosità cinematica del liquido.

La natura implicita della equazione nell'incognita λ richiede un procedimento iterativo per la sua soluzione. Essendo l'equazione del tipo $x = f(x)$, dove $x = (1/\lambda)^{1/2}$, le iterazioni possono eseguirsi (anche se in modo non molto efficiente) calcolando successivamente:

$$x_k = f(x_{k-1}) = -2 \log \left(\frac{2,51}{Re} x_{k-1} + \frac{1}{3,71} \frac{\varepsilon}{D} \right),$$

assumendo come valore iniziale $x_0 = 0$, ossia, le condizioni di moto turbolento pienamente sviluppato ($Re = \infty$), finché due valori successivi differiscono di una prefissata tolleranza.

La determinazione di λ può anche eseguirsi con il solutore automatico di un foglio elettronico, o, per via grafica, mediante l'abaco di Moody, riportato in Figura 2.2.

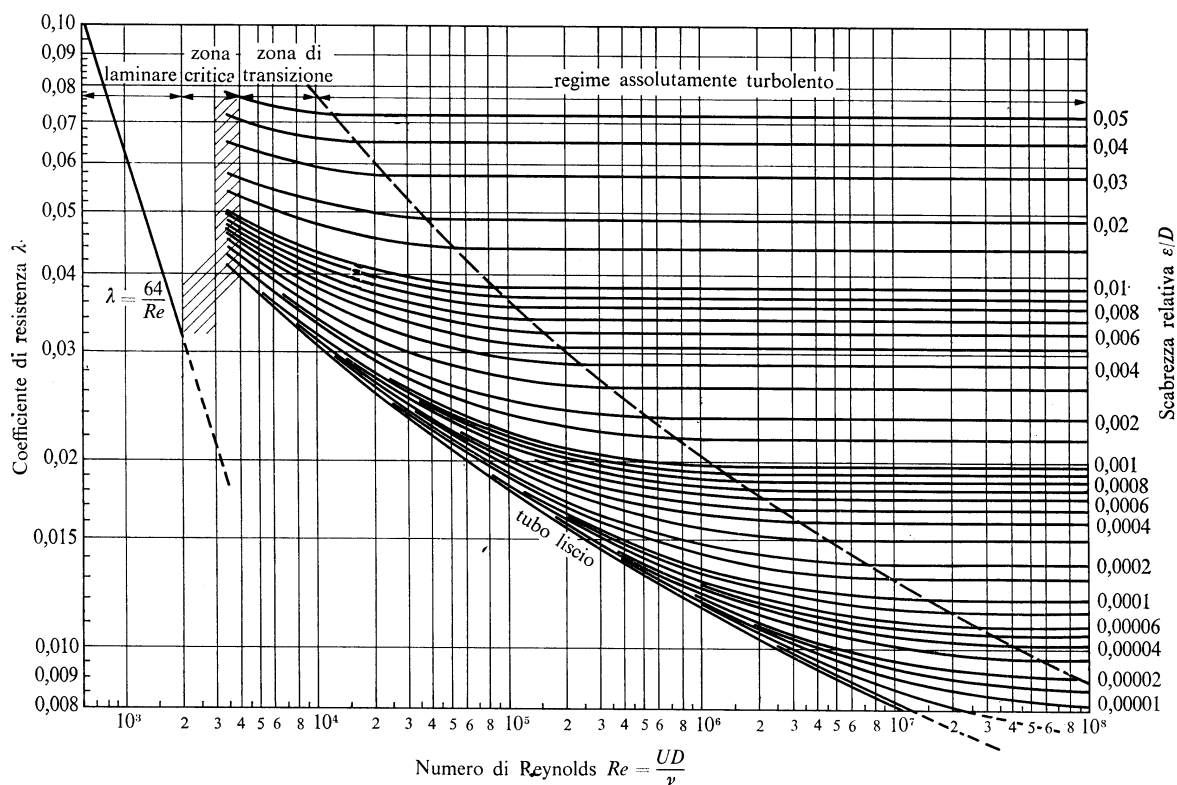


Figura 2.2. Abaco di Moody.

– Formula di Chezy:

$$J = \frac{U^2}{\chi^2 R_i},$$

in cui χ (usualmente indicato anche con il simbolo C) è il coefficiente di Chezy, calcolabile mediante varie formule:

- $\chi = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R_i}}}$ Bazin;
- $\chi = \frac{100}{1 + \frac{m}{\sqrt{R_i}}}$ Kutter;
- $\chi = k_s R_i^{1/6}$ Gauckler-Strickler;
- $\chi = \frac{1}{n} R_i^{1/6}$ Manning.

La formula di Chezy, particolarizzata con una delle formule elencate per il coefficiente χ , è applicabile *unicamente nei casi di moto turbolento pienamente sviluppato*, poiché non vi compare il numero di Reynolds. Confrontando le formule di Darcy-Weisbach e di Chezy è tuttavia possibile stabilire un legame fra numero indice di resistenza e coefficiente di Chezy:

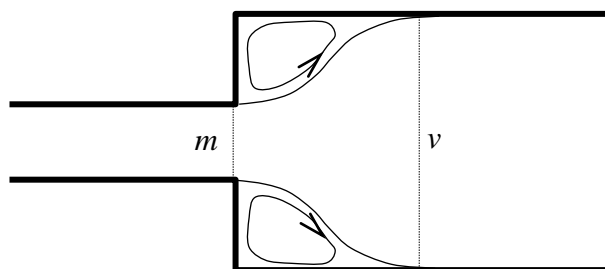
$$\chi = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}.$$

ε (m), γ ($m^{1/2}$), m ($m^{1/2}$), n ($m^{-1/3}s$) sono *coefficienti di scabrezza* crescenti all'aumentare della scabrezza, o rugosità, della parete interna del tubo. $k_s = 1/n$ ($m^{1/3}s^{-1}$) è invece decrescente all'aumentare della scabrezza della parete. I valori dei coefficienti di scabrezza si trovano tabellati nei manuali in funzione delle caratteristiche della parete del tubo.

Esistono poi numerose formule di origine empirica, di carattere meno generale delle due su esposte, stabilite sperimentalmente, e perciò valide, soltanto nell'intervallo dei parametri per i quali sono state determinate. Si tratta prevalentemente di formule ormai di raro utilizzo.

- Perdite di carico localizzate

– Perdita di Borda o per brusco allargamento



$$\Delta H = \frac{(U_m - U_v)^2}{2g} = \left(\frac{\Omega_v}{\Omega_m} - 1 \right)^2 \frac{U_v^2}{2g}$$

Figura 2.3

– Perdita di imbocco

All'imbocco di una condotta si verifica una perdita localizzata composta di una parte dovuta alla viscosità e, se si verifica un distacco della vena liquida, di una parte relativa al brusco allargamento che la vena subisce fra la sezione ove si ha la massima contrazione (sezione contratta) e la sezione in cui la vena occupa nuovamente l'intera condotta. L'entità della contrazione dipende dalla variazione della direzione delle traiettorie delle particelle prossime alla parete.

Tipicamente si considerano tre casi notevoli:

- Imbocco a spigolo vivo (non raccordato), deviazione di 90°

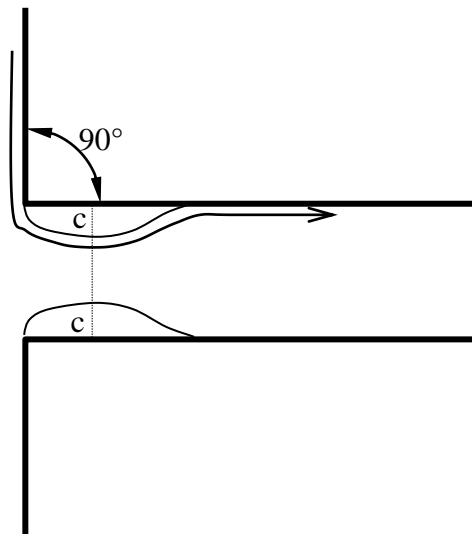


Figura 2.4

Le perdite dovute alla viscosità possono essere valutate come perdita di energia cinetica, calcolabile sulla base della corrispondente correzione del valore della velocità torricelliana nella sezione contratta, effettuata mediante il coefficiente di velocità $C_v \cong 0,98$:

$$\Delta H_1 = (1 - C_v^2) \frac{U_c^2}{2g} = (1 - C_v^2) \frac{(Q / \Omega_c)^2}{2g} = (1 - C_v^2) \frac{(\Omega U / \Omega_c)^2}{2g} = \frac{1 - C_v^2}{C_c^2} \frac{U^2}{2g}$$

avendo indicato con $C_c = \Omega_c / \Omega$ il coefficiente di contrazione che, per deviazione di 90° delle traiettorie, vale $C_c \cong 0,61$. Sostituendo i valori numerici si ha:

$$\Delta H_1 = \frac{1 - (0,98)^2}{(0,61)^2} \frac{U^2}{2g} = 0,106 \frac{U^2}{2g} \cong 0,1 \frac{U^2}{2g} .$$

La perdita dovuta al brusco allargamento è data da:

$$\Delta H_2 = \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g} = \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g} = \left(\frac{1}{0,61} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g} = 0,409 \frac{U^2}{2g} \cong 0,4 \frac{U^2}{2g}$$

Complessivamente si ha pertanto una perdita di imbocco pari a:

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 \cong 0,5 \frac{U^2}{2g}$$

- Imbocco con tubo aggiuntivo interno, deviazione di 180°,

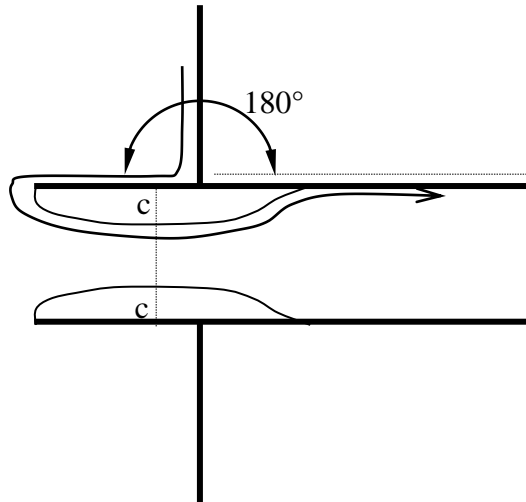


Figura 2.5

Il coefficiente di contrazione vale, in questo caso, $C_c = 0,5$. Sostituendo tale valore nelle espressioni precedentemente ottenute per le perdite viscose e per brusco allargamento, si ottiene:

$$\Delta H_1 = \frac{1 - C_c^2}{C_c^2} \frac{U^2}{2g} = \frac{1 - (0,98)^2}{(0,5)^2} \frac{U^2}{2g} = 0,158 \frac{U^2}{2g}$$

$$\Delta H_2 = \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g} = \left(\frac{1}{0,5} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g} = 1,00 \frac{U^2}{2g}$$

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 \cong 1,16 \frac{U^2}{2g}$$

- Imbocco ben raccordato

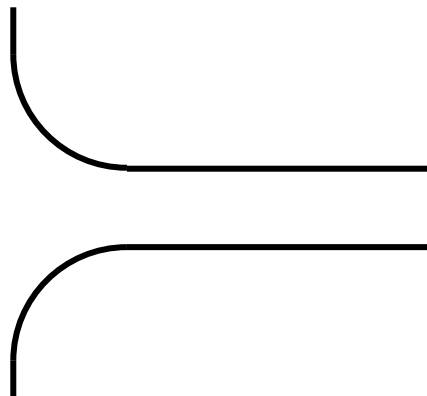


Figura 2.6

$$\Delta H = 0,05 \div 0,10 \frac{U^2}{2g}$$

– Perdita per brusco restringimento

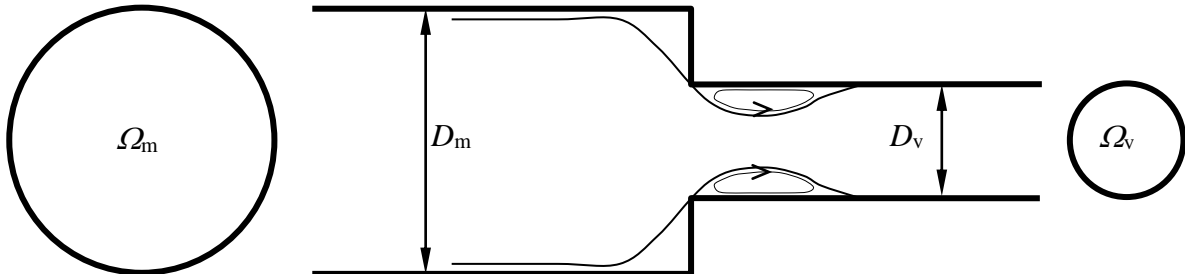


Figura 2.7

In corrispondenza di un brusco restringimento di sezione, a valle del cambio di diametro si verifica un distacco di vena, con una contrazione di entità dipendente dal rapporto dei due diametri. Conseguentemente si produce una perdita localizzata dovuta prevalentemente al successivo brusco allargamento che la vena subisce a valle della sezione contratta.

La perdita di carico è espressa come frazione dell'altezza cinetica della corrente a valle:

$$\Delta H = \eta_r \frac{U_v^2}{2g},$$

dipendente dal rapporto dei diametri come riportato nella tabella seguente (v. Manuale di Ingegneria Civile Cremonese, edizione 1981, Parte Prima, pag. 208):

Tabella 2.1.

Ω_v/Ω_m	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
C_c	0,624	0,632	0,643	0,659	0,681	0,712	0,813	1,0
η_r	0,47	0,44	0,40	0,35	0,28	0,21	0,10	0

Come si può vedere dalla Tabella 2.1, per $\Omega_v/\Omega_m \ll 1$ si ricade nel caso limite della perdita di imbocco.

– Perdite in tronchi divergenti

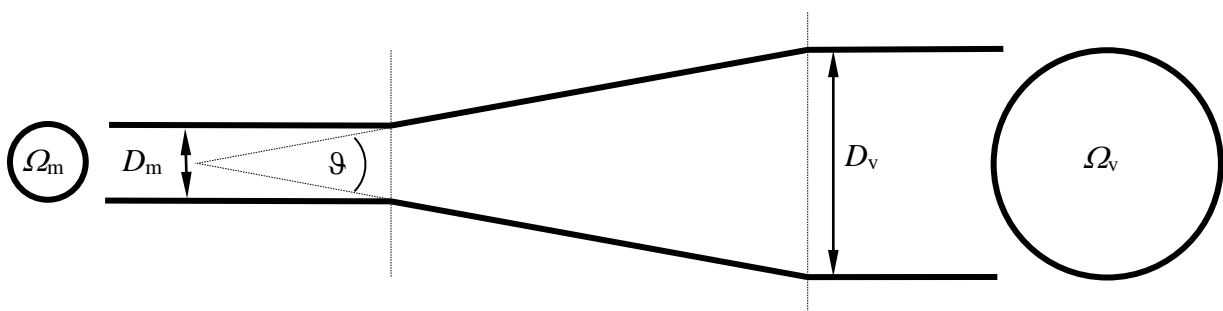


Figura 2.8

Le perdite in tronchi divergenti vengono espresse in forma simile alle perdite di brusco allargamento (Gibson):

$$\Delta H = K_g \frac{(U_m - U_v)^2}{2g} = K_g \left(\frac{\Omega_v}{\Omega_m} - 1 \right)^2 \frac{U_v^2}{2g},$$

in cui il coefficiente K_g dipende dal valore dell'angolo di apertura del divergente, ϑ , e dal rapporto delle aree delle sezioni, come illustrato nella tabella seguente (Marchi e Rubatta – Meccanica dei Fluidi, p. 452).

Tabella 2.2

ϑ	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	120°	180°	Ω_m/Ω_v
K_g	0,20	0,40	0,70	0,95	1,10	1,20	1,20	1,16	1,12	1,05	1,00	1/2
			0,65	0,80	0,95	1,00	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,00

Come si può vedere dalla Tabella 2.2, per fissati valori delle aree delle sezioni il coefficiente K_g ha un massimo di valore maggiore dell'unità. Il motivo di ciò risiede nel fatto che le formule di Gibson esprimono le perdite di carico che si misurano *complessivamente* nel divergente, e contengono perciò, oltre alle perdite dovute alla turbolenza associata al distacco della vena liquida, le perdite continue dovute alla resistenza della parete del tubo. Queste ultime, evidentemente, per fissati valori delle aree delle sezioni, diminuiscono all'aumentare dell'angolo di apertura, diminuendo in tal modo lo sviluppo dell'elemento. Viceversa, al tendere a zero dell'angolo di apertura, le perdite complessive aumentano indefinitamente per il fatto che, pur tendendo a zero le perdite per distacco di vena, lo sviluppo dell'elemento cresce indefinitamente. Il valore minimo del coefficiente K_g si ha per $\vartheta = 6^\circ \div 7^\circ$ e vale 0,13.

– Perdite nelle curve

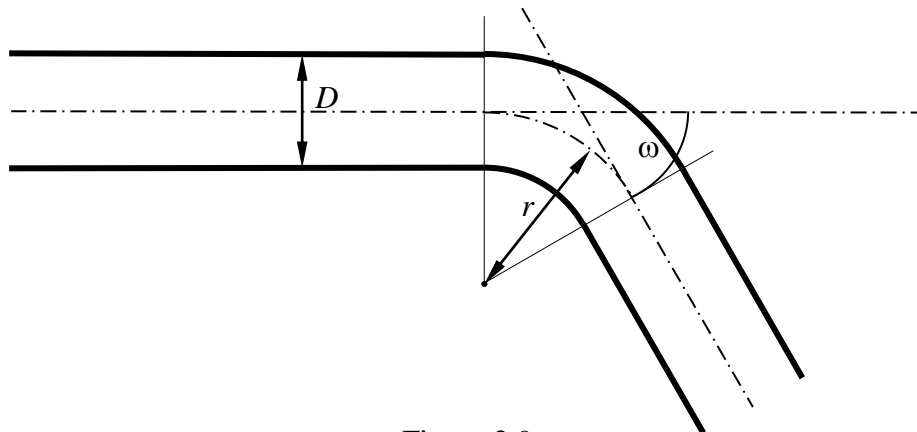


Figura 2.9

Le perdite localizzate nelle curve sono proporzionali all'altezza cinetica della corrente, secondo un coefficiente di proporzionalità dipendente dall'angolo di deviazione, ω , e dal rapporto fra il raggio di curvatura dell'asse della condotta ed il diametro del tubo:

$$\Delta H = \eta_c \frac{U^2}{2g}, \quad \eta_c = \eta_c(\omega, r/D).$$

Nei manuali il lettore può trovare una serie di espressioni di perdite di carico localizzate di varia natura (gomiti, giunzioni, valvole di vario tipo, saracinesche, etc..) di cui in questa sede si omette una descrizione particolareggiata.

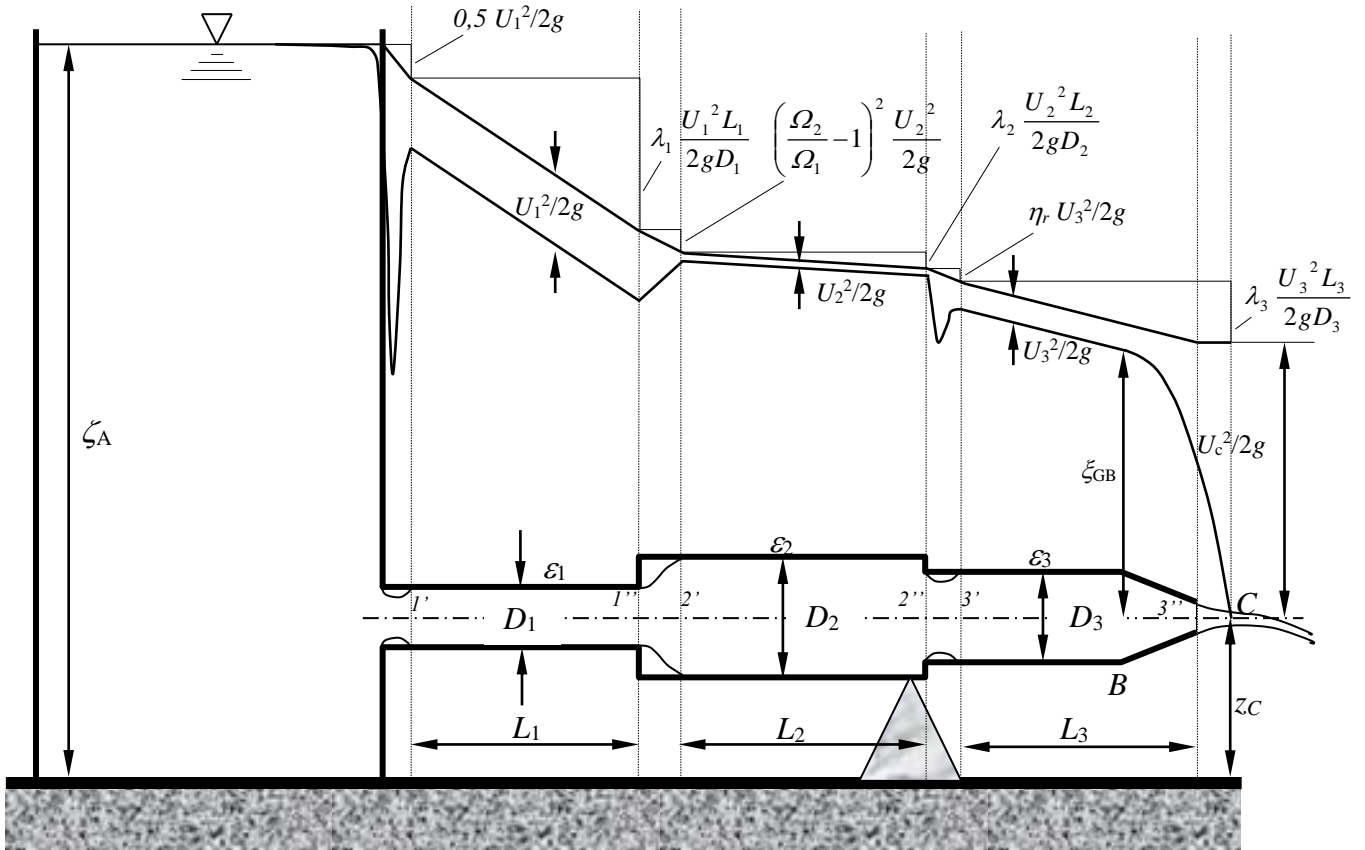


Figura 2.10

Determinazione della portata

Per il caso proposto, le perdite di carico che intervengono fra l'interno del serbatoio A e la sezione contratta C a valle del convergente sono, nell'ordine (vedi Figura 2.10):

- $H_A - H_{1'} = 0,5 \frac{U_1^2}{2g}$ perdita di imbocco;
- $H_{1'} - H_{1''} = \int_{1'}^{1''} J(s) ds = \int_{1'}^{1''} \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} ds = \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} L_1$ perdita distribuita tratto 1;
- $H_{1''} - H_{2'} = \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g}$ perdita per brusco allargamento;
- $H_{2'} - H_{2''} = \int_{2'}^{2''} J(s) ds = \int_{2'}^{2''} \lambda_2 \frac{U_2^2}{2gD_2} ds = \lambda_2 \frac{U_2^2}{2gD_2} L_2$ perdita distribuita tratto 2;

- $H_{2''} - H_{3'} = \eta_r (\Omega_2 / \Omega_3) \frac{U_3^2}{2g}$ perdita per brusco restringimento;
- $H_{3'} - H_{3''} = \int_{3'}^{3''} J(s) ds = \int_{3'}^{3''} \lambda_3 \frac{U_3^2}{2gD_3} ds = \lambda_3 \frac{U_3^2}{2gD_3} L_3$ perdita distribuita tratto 3;
- $H_c - H_{3''} \cong 0$ percorso in aria a valle convergente,

in cui per le perdite distribuite è stata utilizzata la formula di Darcy-Weisbach, dove, in termini generali, $\lambda = \lambda(Re, \varepsilon/D)$. Inoltre, la costanza dei diametri dei vari tratti della condotta fa sì che, essendo le velocità medie pure costanti, la cadente abbia valori costanti all'interno di ciascun tratto. Ovviamente, alla stessa conclusione si perverrebbe se venisse utilizzata per il calcolo delle perdite distribuite la formula di Chezy.

Sommando membro a membro le espressioni delle perdite di carico nei vari tratti, si ottiene la forma finita dell'equazione di conservazione della quantità di moto per la corrente (detta anche espressione del teorema di Bernoulli generalizzato ai fluidi viscosi):

$$H_A - H_c = 0,5 \frac{U_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} L_1 + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{U_2^2}{2gD_2} L_2 + \eta_r \frac{U_3^2}{2g} + \lambda_3 \frac{U_3^2}{2gD_3} L_3, \quad (2.1)$$

in cui:

$$H_A = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} \cong z_A + \frac{p_A}{\gamma} = \zeta_A$$

$$H_c = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{U_c^2}{2g} \cong z_c + \frac{U_c^2}{2g},$$

avendo considerato punti del serbatoio A abbastanza lontani dall'imbocco della condotta per poterne trascurare l'altezza cinetica. Detti punti si trovano pertanto all'interno di un campo di pressioni idrostatico, in cui la quota piezometrica si mantiene costante e pari alla quota della superficie libera del liquido contenuto nel serbatoio.

Nella sezione contratta a valle del convergente si hanno ovunque condizioni di pressione nulla. Si badi che tale sezione *non* è una sezione regolare. Si può infatti mostrare facilmente che una distribuzione di pressione uniforme su una sezione verticale, quale è la sezione c, deriva dall'avere tutte le traiettorie passanti per tale sezione curvatura non trascurabile, causata dalla accelerazione di gravità cui le particelle sono sottoposte, muovendosi, da tale sezione in poi, come un grave in aria.

Sostituendo nella equazione (2.1) le espressioni dei carichi totali agli estremi della corrente, si ha:

$$\zeta_A - z_c = \frac{U_c^2}{2g} + 0,5 \frac{U_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} L_1 + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{U_2^2}{2gD_2} L_2 + \eta_r \frac{U_3^2}{2g} + \lambda_3 \frac{U_3^2}{2gD_3} L_3. \quad (2.2)$$

Utilizzando l'equazione di continuità nella forma $U\Omega = Q = \text{cost}$, l'equazione (2.2) può scriversi:

$$\zeta_A - z_c = \frac{Q^2}{2g\Omega_c^2} + 0,5 \frac{Q^2}{2g\Omega_1^2} + \frac{\lambda_1 Q^2 L_1}{2gD_1\Omega_1^2} + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{Q^2}{2g\Omega_2^2} + \frac{\lambda_2 Q^2 L_2}{2gD_2\Omega_2^2} + \alpha \frac{Q^2}{2g\Omega_3^2} + \frac{\lambda_3 Q^2 L_3}{2gD_3\Omega_3^2},$$

riconducibile, mettendo in evidenza i quadrati delle portate che compaiono nei termini di perdita di carico e nell'altezza cinetica nella sezione contratta, a una forma del tipo:

$$\zeta_A - z_c = KQ^2,$$

in cui:

$$K = \frac{1}{2g\Omega_c^2} + \frac{0,5}{2g\Omega_1^2} + \frac{\lambda_1 L_1}{2gD_1\Omega_1^2} + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{1}{2g\Omega_2^2} + \frac{\lambda_2 L_2}{2gD_2\Omega_2^2} + \frac{\eta_r}{2g\Omega_3^2} + \frac{\lambda_3 L_3}{2gD_3\Omega_3^2} \quad (2.3)$$

Nel caso il regime di moto sia del tipo turbolento pienamente sviluppato, il coefficiente K è pienamente determinato, essendo in tal caso $\lambda = \lambda(\varepsilon/D)$, potendosi trascurare il termine $2,51/(\lambda Re)$ nella formula di Colebrook-White. In tal caso si ricava il valore della portata dalla:

$$Q = \sqrt{\frac{\zeta_A - z_c}{K}}. \quad (2.4)$$

Per verificare l'accettabilità dell'approssimazione occorrerà, in pratica, controllare i valori del numero di Reynolds, Re , che si ottengono, per i vari tratti, in corrispondenza del valore di portata determinato. Il controllo può essere effettuato graficamente sull'abaco di Moody, oppure, analiticamente, facendo riferimento alla curva separatrice delle zone del diagramma relative a moto turbolento di transizione e moto turbolento pienamente sviluppato, la cui espressione è:

$$Re^* = \frac{u^* \varepsilon}{\nu} = 70,$$

in cui u^* è la velocità d'attrito, definita come $u^* = \sqrt{\tau_0/\rho}$. Ricordando che $\tau_0 = \gamma R_i J$ e utilizzando la formula di Darcy-Weisbach, con semplici passaggi si ottiene l'espressione di Re^* in funzione delle grandezze utilizzate nei calcoli pratici, data da:

$$Re^* = \frac{U\varepsilon\sqrt{\lambda/2}}{2\nu}.$$

Qualora la verifica indicasse valori di Re^* propri del regime di transizione, il calcolo mediante la equazione (2.4) andrà reiterato, utilizzando in ciascuna iterazione, per il calcolo del coefficiente K , i valori degli indici di resistenza e dei numeri di Reynolds determinati nella iterazione precedente. Come già accennato, per il calcolo di primo tentativo si potrà convenientemente adottare l'ipotesi di moto turbolento pienamente sviluppato.

L'applicazione della formula di Chezy in luogo delle formule di Darcy-Weisbach – Colebrook, essendo di validità limitata al moto turbolento pienamente sviluppato, non comporta iterazioni. Naturalmente, in linea di principio occorre sempre verificare le condizioni di turbolenza pienamente sviluppata controllando Re^* o mediante l'abaco di Moody. Nel caso in cui il moto non risultasse turbolento pienamente sviluppato, la formula di Chezy sarà insufficiente e risulterà necessario effettuare il calcolo iterativo con le formule di Darcy-Weisbach – Colebrook.

Calcolo della spinta sul convergente

Il calcolo della spinta che il liquido esercita sul convergente si effettua mediante applicazione dell'equazione globale di bilancio della quantità di moto al volume di controllo V_c compreso fra la sezione maggiore del convergente (sezione B) e la sezione contratta, ove, come già detto la pressione è ovunque nulla.

Adottando come verso positivo della normale alle superfici di contorno del volume di controllo quello della normale esterna, l'equazione globale si scrive:

$$\vec{G} + \vec{\Pi} = \vec{I} + \vec{M} ,$$

dove:

$$\vec{G} = \int_{V_c} \rho \vec{f} dV_c = \int_{V_c} \rho \vec{g} dV_c = - \int_{V_c} \rho g \nabla z dV_c$$

è la risultante delle forze di massa, date in questo caso dalla forza peso;

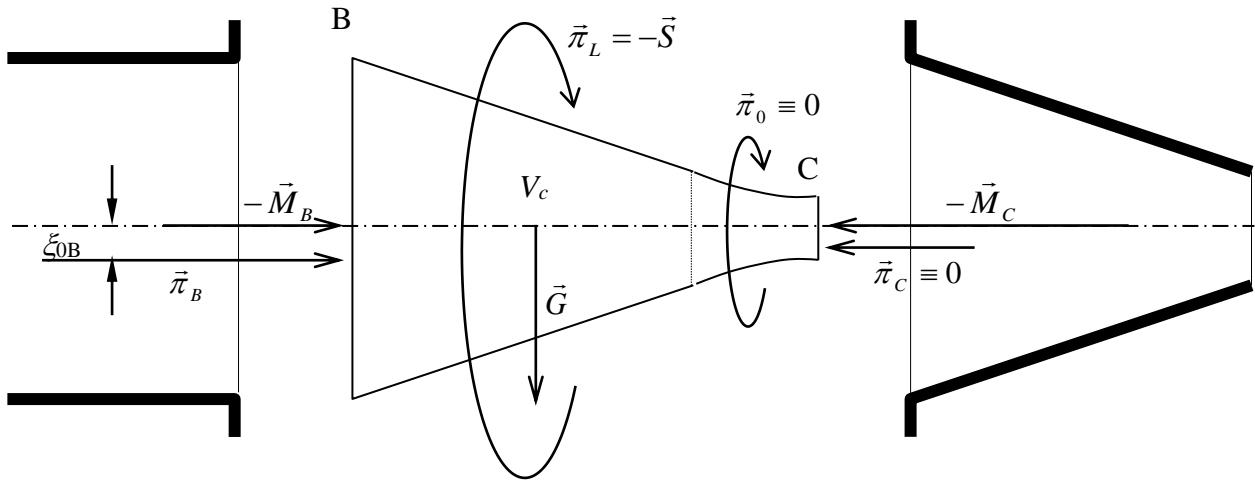


Figura 2.11

$$\vec{\Pi} = \int_{S_c} \vec{t}_n dS = \int_{S_c} (\underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}}_R) \vec{n} dS = \int_{S_c} \left\{ -p \underline{\underline{I}} + 2\mu \left[\underline{\underline{e}} - 1/3(\nabla \cdot \vec{u}) \underline{\underline{I}} \right] + \underline{\underline{\tau}}_R \right\} \vec{n} dS$$

è la risultante delle forze agenti sulla superficie di contorno del volume di controllo, comprendenti gli effetti dello stato tensionale complessivo, dovuto al tensore degli sforzi viscosi per un fluido comprimibile, $\underline{\underline{\tau}}$, ed al tensore degli sforzi turbolenti, dato da $(\tau_R)_{ij} = -\rho \overline{u_i' u_j'}$;

$$\vec{I} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{u} dV$$

è il termine di inerzia locale, e

$$\vec{M} = \int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$$

è il flusso di quantità di moto attraverso la superficie di contorno del volume di controllo. Quest'ultima può essere suddivisa nelle seguenti quattro superfici:

- la sezione regolare corrispondente alla sezione di area massima del convergente, sezione B;
- la sezione contratta, sezione C;
- la superficie laterale del tronco di cono a contatto con le pareti del convergente;
- la parte di superficie laterale del volume di controllo compresa fra l'ugello del convergente e la sezione contratta, esposta alla pressione atmosferica.

Con riferimento alla Figura 2.11, indichiamo le forze di superficie agenti sulle quattro parti della superficie di contorno rispettivamente con $\vec{\pi}_B$, $\vec{\pi}_C$, $\vec{\pi}_L$ e $\vec{\pi}_0$.

Per quanto riguarda lo stato di sforzo, si ha, in pratica, per una corrente quale quella in considerazione, unidimensionale e di liquido incompressibile, che gli sforzi turbolenti e gli sforzi viscosi risultano generalmente trascurabili rispetto ai termini del tensore sferico delle pressioni, il quale solo può pertanto essere assunto, in buona approssimazione, per descrivere lo stato di tensione nel liquido. Essendo la sezione contratta e la superficie laterale a contatto con l'aria esposte alla pressione atmosferica, ossia, alla pressione relativa nulla, si ha conseguentemente:

$$\vec{\pi}_C = \vec{\pi}_0 = 0 .$$

La $\vec{\pi}_B$, agendo su una sezione regolare, è la risultante di forze di pressione distribuite idrostaticamente, e la sua determinazione segue perciò le regole per la valutazione delle spinte idrostatiche su superfici piane. Essa è parallela all'asse della condotta e rivolta (v. Figura 2.11) da sinistra verso destra essendo la piezometrica in tale sezione soprastante il baricentro della sezione. Il suo modulo è dato da (v. Figura 2.10):

$$|\vec{\pi}_B| = p_{G_B} \Omega_3 = \gamma \xi_{G_B}^E \Omega_3$$

ed è applicata lungo l'asse verticale della sezione, ad una distanza ξ_{B0} dal centro della sezione stessa.

Infine, $\vec{\pi}_L$, essendo la forza che, materialmente, la parete interna del convergente esercita sul volume di controllo, rappresenta, per il principio di azione e reazione, l'uguale e contraria della spinta \vec{S} cercata, che il liquido contenuto nel volume di controllo esercita sul convergente.

Per quanto riguarda i flussi di quantità di moto, le superfici laterali a contatto con la parete del convergente ed esposta all'aria costituiscono dei tubi di flusso e per essi è pertanto:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 ,$$

col che risultano nulli i relativi flussi di quantità di moto.

Nelle sezioni B e C le velocità risultano di verso rispettivamente opposto e concorde con la normale esterna e normali alle sezioni stesse, per cui i relativi flussi di quantità di moto sono dati rispettivamente da:

$$\vec{M}_B = - \int_{S_B} \rho |\vec{u}| \vec{u} dS$$

e

$$\vec{M}_C = \int_{S_C} \rho |\vec{u}| \vec{u} dS .$$

Introducendo il coefficiente di ragguglio delle quantità di moto per una sezione Ω :

$$\beta = \frac{\int u^2 d\Omega}{U^2 \Omega} ,$$

i moduli possono esprimersi come:

$$|\vec{M}_B| = \beta \rho U_B^2 \Omega_3$$

e

$$|\vec{M}_C| = \beta \rho U_C^2 \Omega_C ,$$

nelle quali il coefficiente di ragguglio può porsi uguale ad 1 se il moto è turbolento.

Considerando che in condizioni di moto permanente si annulla il termine di inerzia locale, l'equazione vettoriale del bilancio della quantità di moto può risciversi:

$$\vec{G} + \vec{\pi}_B - \vec{S} = \vec{M}_B + \vec{M}_C ,$$

da cui si ottiene l'espressione della spinta cercata:

$$\vec{S} = \vec{G} + \vec{\pi}_B - \vec{M}_B - \vec{M}_C , \quad (2.5)$$

della quale è riportata la composizione grafica:

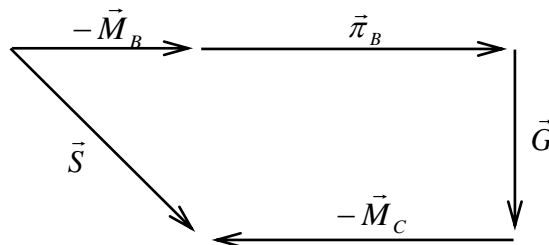


Figura 2.12

Per definire compiutamente il sistema di forze la cui risultante è data da \vec{S} , occorre determinare il punto di applicazione di quest'ultima – ovvero, per maggiore precisione, la posizione della retta d'azione – di modo che il momento della spinta \vec{S} rispetto ad un qualunque punto dello spazio sia uguale al momento risultante delle distribuzioni di forze reali rispetto allo stesso punto.

- Metodo grafico.

Il metodo grafico per la determinazione del punto di applicazione di una forza si basa sulle condizioni di equivalenza dei sistemi di forze, che riassumiamo brevemente:

- due sistemi di forze si dicono equivalenti se possiedono uguali risultante e momento risultante rispetto ad un qualunque punto dello spazio;
- due sistemi equivalenti hanno momenti risultanti uguali rispetto a qualunque punto dello spazio (cambiando il punto cambiano i valori del momento risultante per i due sistemi, che si mantengono però sempre uguali fra loro);

- se ad un sistema di forze applicate ad un corpo rigido si sostituisce un sistema equivalente, non si altera lo stato di quiete o di moto del corpo;
- ogni sistema di forze nello spazio equivale sempre a una forza e una coppia;
- un sistema di forze giacenti su un piano con vettore risultante non nullo è equivalente ad una sola forza (applicata in un punto opportuno); se il vettore risultante è nullo, il sistema equivale ad una coppia.

Da tali proposizioni consegue che: dato un sistema di forze, facendo scorrere una delle forze del sistema lungo la propria retta d'azione si ottiene sempre un sistema equivalente. Infatti, in tal modo rimangono invariati il vettore risultante ed il momento risultante del sistema. Un sistema equivalente si ottiene poi anche eseguendo la somma di due forze del sistema applicate nel medesimo punto, dal momento che, anche in questo caso, non variano né il vettore risultante né, per la proprietà distributiva del prodotto vettoriale rispetto alla somma di vettori, il momento risultante.

Nel caso del convergente, in cui tutte le forze appartengono ad uno stesso piano (il piano verticale contenente l'asse della condotta) si potrà procedere, per esempio, nel seguente modo per ridurre il sistema di forze ad una unica forza (risultante) applicata in un punto opportuno (v. Figura 2.13):

1. si fanno scorrere le forze $-\vec{M}_B$ e $-\vec{M}_C$, giacenti sull'asse della condotta, fino al baricentro del volume di controllo;
2. si sommano le due forze;
3. il vettore risultante dalla somma di $-\vec{M}_B$ e $-\vec{M}_C$ viene sommato alla forza peso \vec{G} , applicata nello stesso punto;
4. il vettore risultante dalla somma di cui al punto 3 e la forza $\vec{\pi}_B$ vengono fatte scorrere lungo le rispettive rette d'azione fino al punto di intersezione delle stesse;
5. le due forze vengono sommate.

In un caso tridimensionale generale, il sistema di forze equivarrà ad una coppia di momento pari al momento risultante del sistema di forze rispetto ad un qualunque punto dello spazio e da un vettore uguale al vettore risultante del sistema, applicato nel punto utilizzato per il calcolo del momento risultante.

In questo modo è stata determinata sia la risultante (in modulo, direzione e verso) che il suo punto di applicazione (per meglio dire: uno dei possibili punti di applicazione lungo la propria retta d'azione). Da un punto di vista pratico, tuttavia, avendo costruito il poligono delle forze di Figura 2.12, la sola determinazione della retta d'azione della risultante può effettuarsi imponendo che il momento della risultante rispetto ad un qualunque punto dello spazio sia uguale al momento dei vettori componenti rispetto allo stesso punto.

Per l'arbitrarietà della scelta del punto rispetto al quale calcolare i momenti, lo si potrà scegliere nel modo più conveniente. In pratica, nel caso sotto esame, sarà conveniente scegliere come polo per il calcolo dei momenti il baricentro del volume di controllo. Rispetto a tale punto risultano infatti nulli i momenti dei due flussi di quantità di moto e della forza peso. Il momento risultante del sistema di forze ha pertanto modulo pari a:

$$M_r = |\vec{\pi}_B|_{\xi_{0B}}$$

e verso di rotazione antiorario. La retta d'azione della risultante \vec{S} , di direzione individuata dalla costruzione del poligono delle forze, dovrà pertanto trovarsi ad una distanza δ dal baricentro del volume di controllo, tale che risulti:

$$|\vec{\pi}_B|_{\xi_{0B}} = \delta |\vec{S}| \quad (2.6)$$

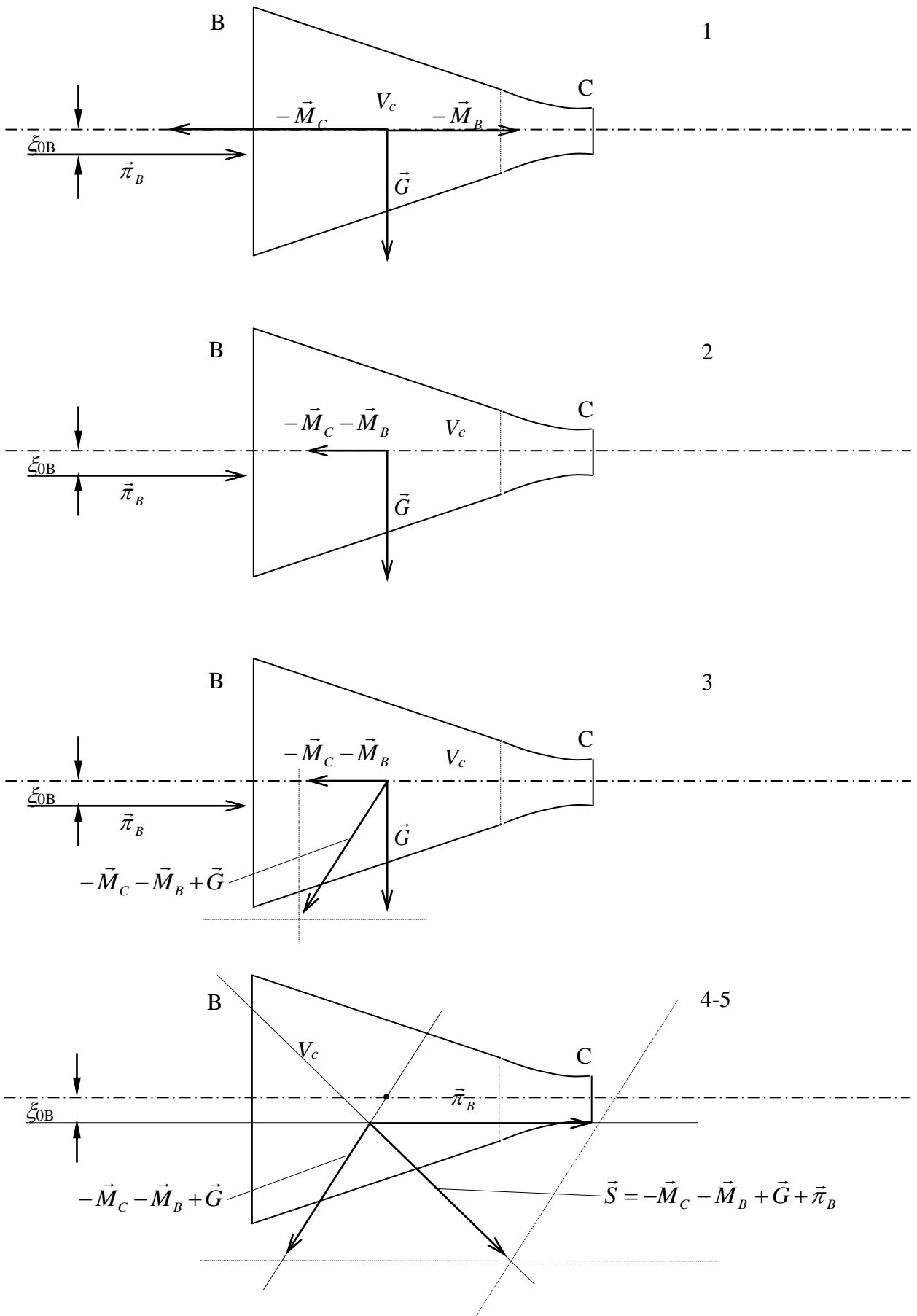


Figura 2.13.

e il verso di rotazione antiorario, come mostrato in Figura 2.14. Dalla equazione (2.5) si ricava il valore del braccio δ .

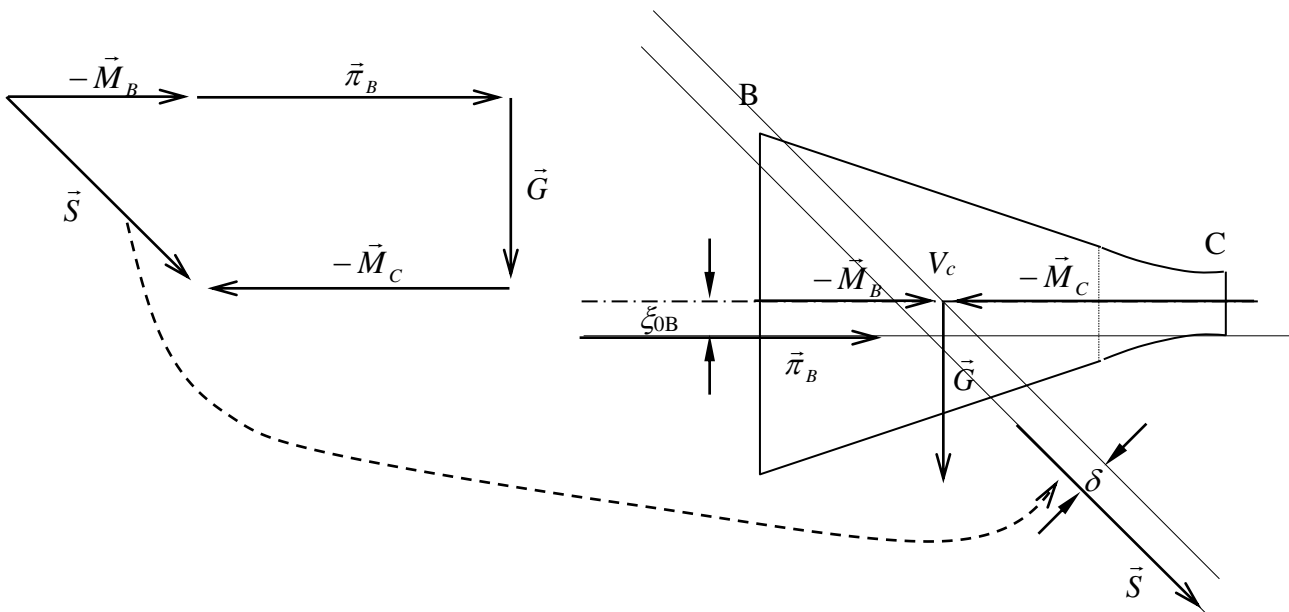


Figura 2.14

- Metodo analitico.

Utilizzando strumenti di calcolo automatico (codici di calcolo, fogli elettronici, etc..) può tornare comodo disporre di un metodo che non richieda operazioni manuali.

A parte la possibilità di implementare i procedimenti grafici illustrati mediante le equazioni della Geometria Analitica, un modo più semplice per determinare uno dei possibili punti di applicazione della risultante di un sistema di forze piano evitando qualunque operazione grafica consiste nell'imporre separatamente le uguaglianze dei momenti dei singoli componenti nelle due direzioni degli assi coordinati (nel caso in questione: orizzontale e verticale), del sistema di forze e della risultante rispetto ad un qualunque punto.

Chiamati \vec{S}_o e \vec{S}_v i componenti, rispettivamente, orizzontale e verticale della risultante, determinati dal poligono delle forze, scegliendo ancora il baricentro, di coordinate x_G e y_G , come polo per il calcolo dei momenti si impone:

$$|\vec{S}_o|(y_G - y_P) = |\vec{\pi}_B|\xi_{0B}$$

e

$$|\vec{S}_v|(x_G - x_P) = 0$$

da cui si determinano le coordinate x_P, y_P di un punto di applicazione (v. Figura 2.15):

$$\begin{cases} x_P = x_G \\ y_P = y_G - \frac{|\vec{\pi}_B|\xi_{0B}}{|\vec{S}_o|} \end{cases},$$

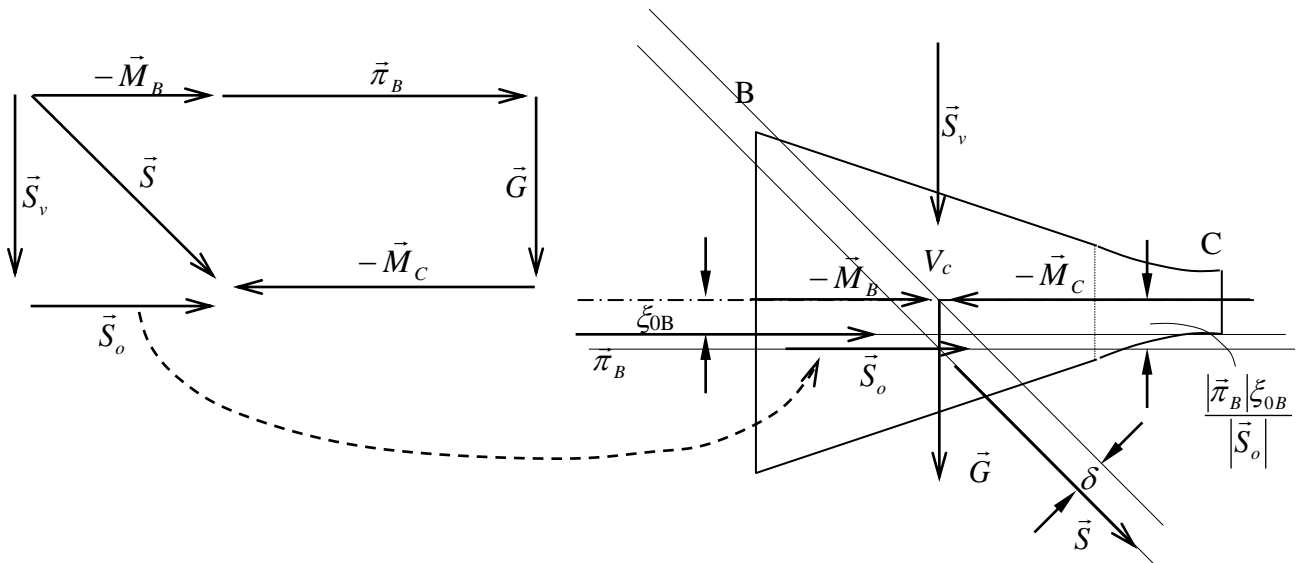


Figura 2.15

Ovviamente, il punto di applicazione così determinato dovrà appartenere alla retta d'azione della risultante determinata precedentemente con il metodo grafico.

Esercizio 2.2

Determinare la portata fluente dal serbatoio A nel serbatoio B in condizioni di moto permanente (Figura 2.16). Calcolare la spinta che si scarica sulla flangia di collegamento del convergente alla condotta.

Dati:

- dati geometrici (lunghezze, diametri e scabrezze dei tre tratti, diametro dell'ugello del convergente, livelli del liquido nei serbatoi);
- peso specifico del liquido convogliato, γ .

Determinazione della portata

La determinazione della portata si esegue in modo del tutto analogo al caso dell'Esercizio 2.1⁷, salvo che, nell'equazione:

$$H_A - H_c = 0,5 \frac{U_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} L_1 + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{U_2^2}{2gD_2} L_2 + \eta_r \frac{U_3^2}{2g} + \lambda_3 \frac{U_3^2}{2gD_3} L_3, \quad (2.7)$$

identica a quella determinata in precedenza, si ha ora:

$$H_A = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} \cong z_A + \frac{p_A}{\gamma} = \zeta_A$$

$$H_c = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{U_c^2}{2g} \cong \zeta_B + \frac{U_c^2}{2g},$$

⁷ Si trascura la piccola perdita di carico distribuita che interviene fra lo sbocco del convergente e la sezione contratta.

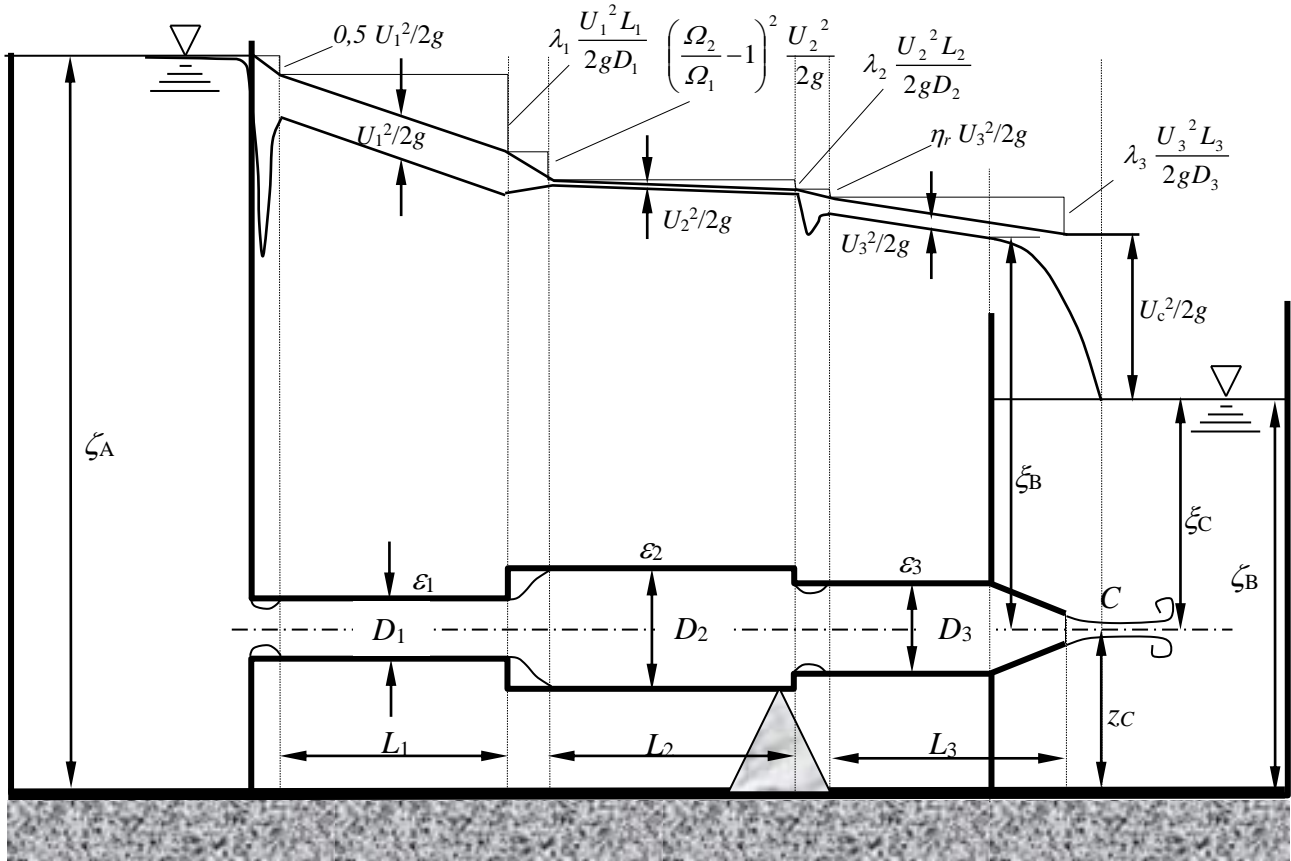


Figura 2.16

essendo, questa volta, la corrente allo sbocco nel serbatoio gradualmente variata, e perciò dotata dello stesso carico piezometrico del liquido circostante in quiete, pari al livello del serbatoio di valle⁸. Eseguendo l'operazione di sostituzione delle velocità in funzione della portata e delle aree delle sezioni, si perviene ad una equazione nella forma:

$$\zeta_A - \zeta_B = KQ^2 ,$$

in cui il coefficiente K è dato ancora dalla espressione (2.3):

$$K = \frac{1}{2g\Omega_c^2} + \frac{0,5}{2g\Omega_1^2} + \frac{\lambda_1 L_1}{2gD_1\Omega_1^2} + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1\right)^2 \frac{1}{2g\Omega_2^2} + \frac{\lambda_2 L_2}{2gD_2\Omega_2^2} + \frac{\eta_r}{2g\Omega_3^2} + \frac{\lambda_3 L_3}{2gD_3\Omega_3^2} .$$

Calcolo della spinta sul convergente

In questo caso il convergente è sottoposto all'azione di una spinta interna, di tipo dinamico, e di una spinta esterna, esercitata dal liquido circostante in quiete, valutabile pertanto con i metodi utilizzati in idrostatica.

Adottando anche in questo caso un volume di controllo compreso fra la sezione B e la sezione contratta, l'equazione globale si scrive ancora:

⁸ Se come sezione terminale della corrente se ne fosse presa una a valle della sezione contratta, in cui la velocità della corrente fosse stata integralmente dissipata, il termine esprimente l'altezza cinetica della sezione contratta avrebbe figurato come ultima della serie di perdite di carico a secondo membro nella equazione (2.1), assumendo il nome di *perdita di sbocco*.

$$\vec{G} + \vec{I} = \vec{I} + \vec{M} .$$

Considerando la stessa suddivisione della superficie di contorno del volume effettuata nel caso dello sbocco in aria (Esercizio 2.1), in cui ora le spinte sulla sezione B e sulla sezione laterale a contatto con il divergente sono contraddistinte dal pedice i, si ha ora che le spinte $\vec{\pi}_0$ e $\vec{\pi}_c$ sono non nulle. Conformemente all'ipotesi utilizzata per il calcolo della quota piezometrica nella sezione contratta, si suppone che esse siano spinte di tipo idrostatico.

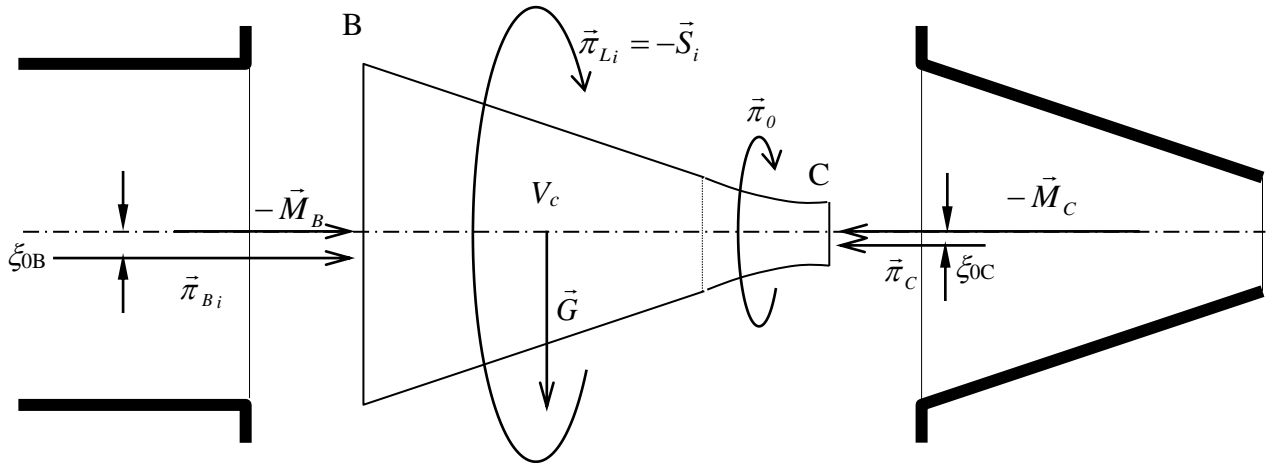


Figura 2.17

Riconoscendo, come nel caso precedente, che la spinta interna \vec{S}_i incognita è l'uguale e contraria della spinta $\vec{\pi}_{L_i}$, l'espressione della spinta interna è data ora da :

$$\vec{S}_i = \vec{G} + \vec{\pi}_{B_i} + \vec{\pi}_0 + \vec{\pi}_c - \vec{M}_B - \vec{M}_C ,$$

in cui:

$$|\vec{\pi}_{b_i}| = \gamma \xi_B \Omega_3$$

e

$$|\vec{\pi}_c| = \gamma \xi_C \Omega_c .$$

Per il calcolo della spinta esercitata sulla superficie esterna del convergente si considera lo stesso volume di controllo⁹, in equilibrio in un campo di pressioni idrostatico (quale è ragionevole supporre, come già detto, il campo di pressioni nel serbatoio B agente sul convergente reale).

L'equazione globale dell'idrostatica, data da:

$$\vec{G} + \vec{I} = 0 ,$$

⁹ Trascurando lo spessore del convergente. A rigore il volume di controllo considerato per il calcolo della spinta interna è delimitato dalla parete interna del convergente; quello considerato per il calcolo della spinta esterna è delimitato dalla superficie esterna.

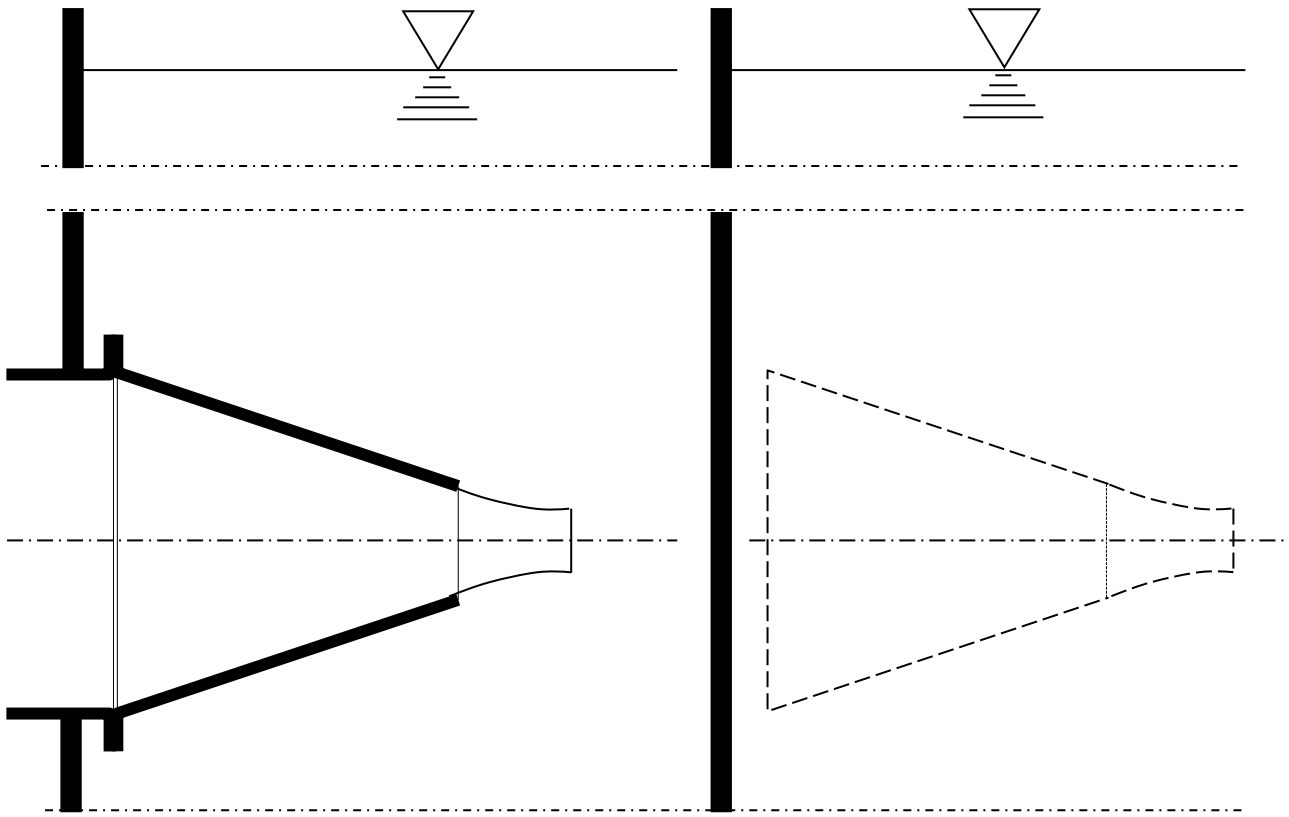


Figura 2.18

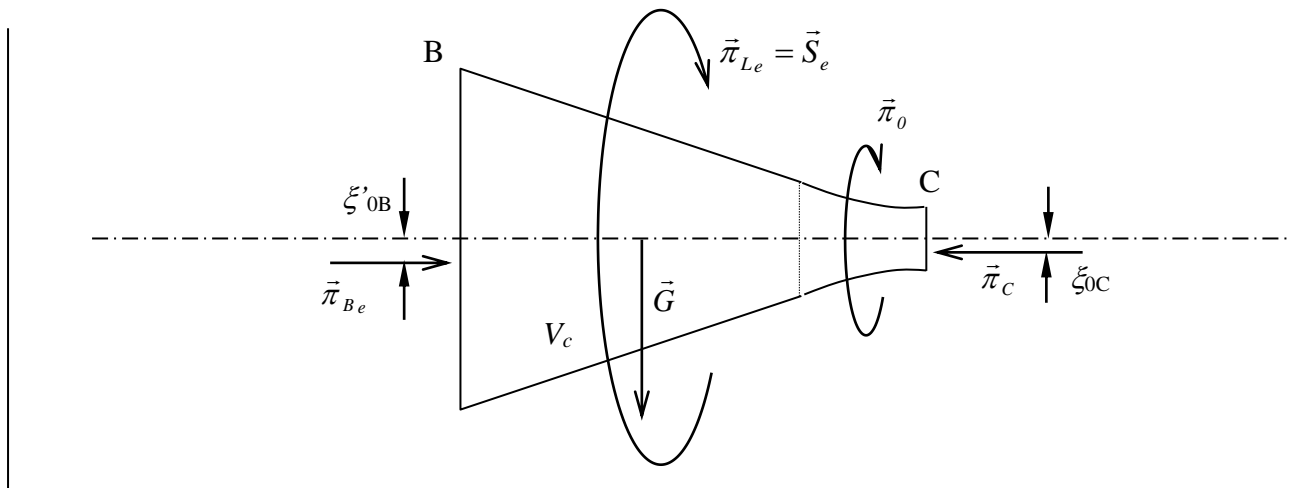


Figura 2.19

si scrive, evidenziando la decomposizione delle forze di superficie:

$$\vec{G} + \vec{\pi}_{B_e} + \vec{\pi}_{L_e} + \vec{\pi}_0 + \vec{\pi}_c = 0 .$$

La spinta esterna cercata è uguale alla spinta esercitata sulla parte di superficie laterale del volume di controllo coincidente, nella realtà, con la superficie esterna del convergente:

$$\vec{S}_e = \vec{\pi}_{L_e} .$$

La spinta esterna è data perciò da:

$$\vec{S}_e = -\vec{G} - \vec{\pi}_{B_e} - \vec{\pi}_0 - \vec{\pi}_c ,$$

e la spinta totale, somma delle spinte interna ed esterna, da:

$$\vec{S}_{tot} = \vec{S}_e + \vec{S}_i = (\vec{G} + \vec{\pi}_{B_i} + \vec{\pi}_0 + \vec{\pi}_c - \vec{M}_B - \vec{M}_C) - (\vec{G} + \vec{\pi}_{B_e} + \vec{\pi}_0 + \vec{\pi}_c) = \vec{\pi}_{B_i} - \vec{M}_B - \vec{M}_C - \vec{\pi}_{B_e} ,$$

in cui (vedi Figura 2.16):

$$|\vec{\pi}_{B_i}| = \gamma \xi_B \Omega_3$$

$$|\vec{\pi}_{B_e}| = \gamma \xi_C \Omega_3 .$$

La spinta totale agente sul convergente è pertanto una forza orizzontale, riportata nella composizione vettoriale di Figura 2.20, avente per retta d'azione l'asse della condotta.

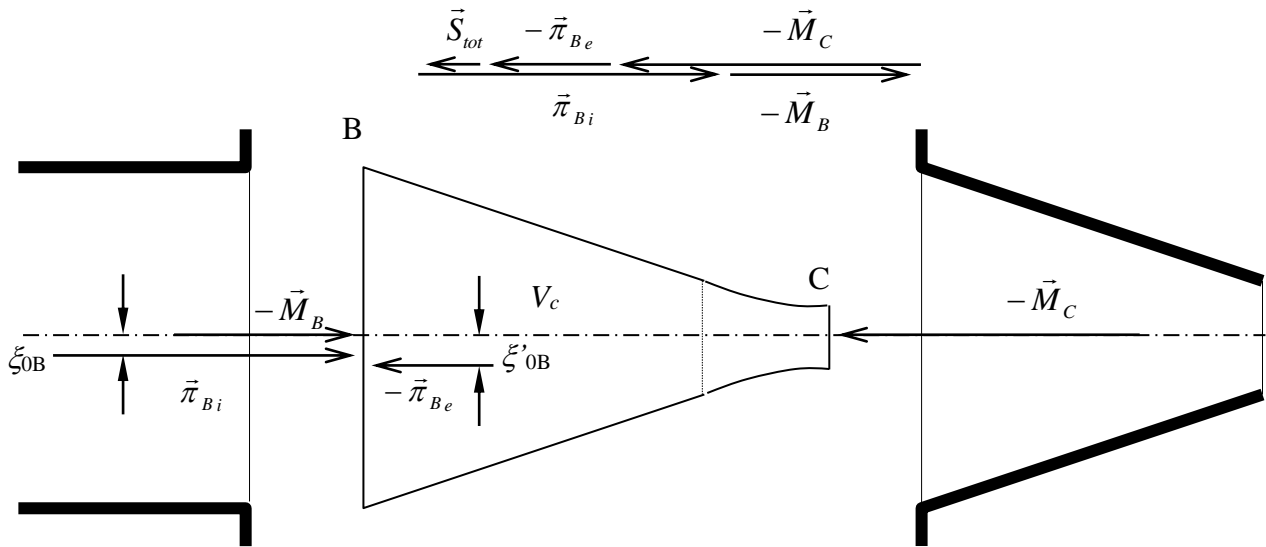


Figura 2.20

Infatti, calcolando il momento risultante del sistema di forze rispetto ad un punto dell'asse, si ha:

$$M_a = \vec{\pi}_{B_i} \xi_{0B} - \vec{\pi}_{B_e} \xi'_{0B} = \gamma \xi_B \Omega_3 \xi_{0B} - \gamma \xi_C \Omega_3 \xi'_{0B} = \gamma \Omega_3 \left(\xi_B \frac{I_o}{M_{s_B}} - \xi_C \frac{I_o}{M_{s_{B'}}} \right) =$$

$$\gamma \Omega_3 \left(\xi_B \frac{I_o}{\Omega_3 \xi_B} - \xi_C \frac{I_o}{\Omega_3 \xi_C} \right) = 0$$

per cui anche la risultante \vec{S}_{tot} deve avere per retta d'azione l'asse della condotta.

Esercizio 2.3

Determinare la portata che in regime permanente fluisce fra i due serbatoi di Figura 2.21. Calcolare la potenza installata a servizio della pompa e la massima portata che può fluire nella condotta.

Dati:

- dati geometrici (lunghezze, diametri e scabrezze dei tre tratti, diametro dell'ugello del convergente, livelli del liquido nei serbatoi);
- peso specifico del liquido convogliato, γ ;
- curva caratteristica della pompa;
- curva del rendimento della pompa, η , a numero di giri fissato.

Essendo il livello energetico totale nel serbatoio B maggiore che nel serbatoio A, perché si possa stabilire il flusso stazionario diretto dal serbatoio A al serbatoio B occorre fornire energia alla corrente per mezzo di una pompa (macchina operatrice).

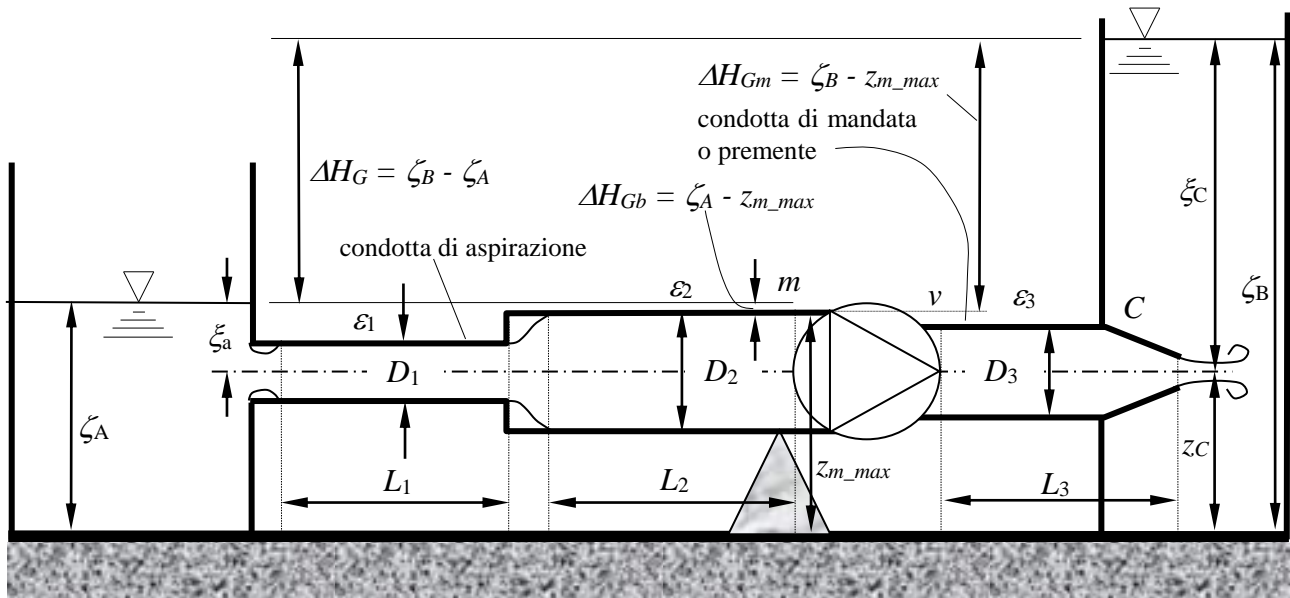


Figura 2.21. Schema della condotta di pompaggio.

Contrariamente al caso del funzionamento a gravità visto negli Esercizi 2.1 e 2.2, in questo caso l'andamento della linea dei carichi totali, invece che essere sempre decrescente, presenta un aumento nel senso del moto, con discontinuità, fra le sezioni a monte ed a valle della pompa. Qualitativamente l'andamento della linea dei carichi totali si può analizzare come per i casi precedenti, avendo cura di rispettare le condizioni al contorno del problema, rappresentate dalle quote dei peli liberi nei due serbatoi, ζ_A e ζ_B . Si parte pertanto dal serbatoio A con la sequenza di perdite localizzate e distribuite esaminate in precedenza, fino alla sezione immediatamente a monte della pompa. Analogamente, si procede dal serbatoio B, a ritroso, fino alla sezione immediatamente a valle della pompa, con carichi totali crescenti.

In corrispondenza della pompa si deve produrre pertanto un differenziale di carico totale fra monte e valle detto *prevalenza totale* della pompa, indicato con il simbolo ΔH . Il corrispondente differenziale di quota piezometrica:

$$\Delta H_m = \left(H_v - \frac{U_3^2}{2g} \right) - \left(H_m - \frac{U_2^2}{2g} \right) = \left(z_v + \frac{p_v}{\gamma} \right) - \left(z_m + \frac{p_m}{\gamma} \right) = \Delta H - \left(\frac{U_3^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} \right) \quad (2.8)$$

prende il nome di *prevalenza manometrica*. Nella pratica conviene determinare la prevalenza totale di una pompa in funzionamento indirettamente, misurando la prevalenza manometrica mediante manometri e sommandovi la differenza delle altezze cinetiche fra valle e monte della pompa,, secondo la equazione (2.8).

Introducendo la prevalenza totale nella equazione del moto, quest'ultima, ulteriormente generalizzata per estensione ai moti con immissioni di energia localizzate, si scrive:

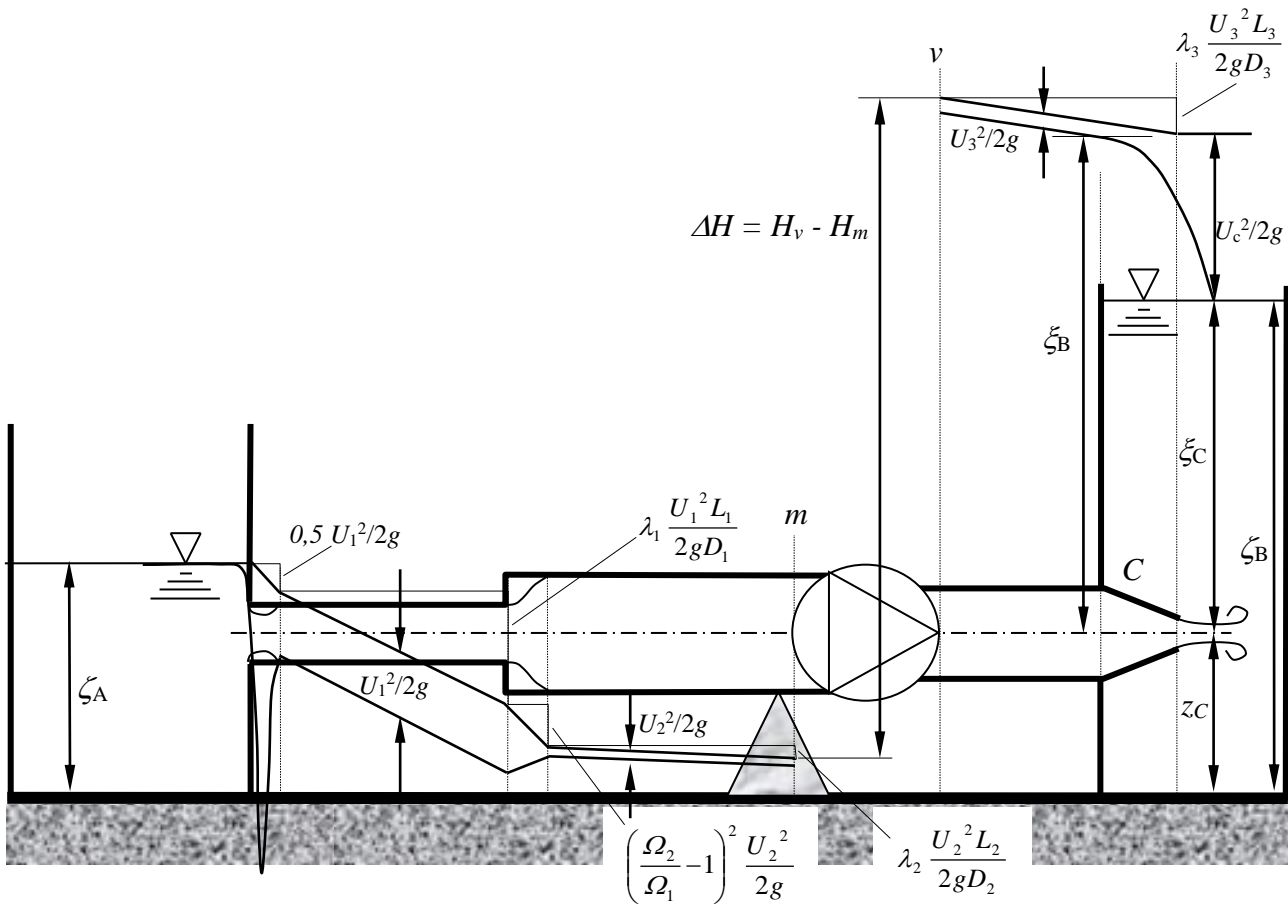


Figura 2.22

$$H_A - H_C = 0,5 \frac{U_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} L_1 + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{U_2^2}{2gD_2} L_2 - \Delta H + \lambda_3 \frac{U_3^2}{2gD_3} L_3$$

con:

$$H_A = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} \cong z_A + \frac{p_A}{\gamma} = \zeta_A$$

$$H_C = z_C + \frac{p_C}{\gamma} + \frac{U_C^2}{2g} \cong \zeta_B + \frac{U_C^2}{2g} .$$

Eseguendo la ormai familiare operazione di riduzione dei termini cinetici e della perdite di carico in funzione del quadrato della portata, si ottiene una equazione che lega i valori di prevalenza totale richiesti in funzione delle portate circolanti corrispondenti, detta *equazione caratteristica della condotta*:

$$\Delta H = \zeta_B - \zeta_A + KQ^2 ,$$

in cui il coefficiente K è dato dalla espressione:

$$K = \frac{1}{2g\Omega_c^2} + \frac{0,5}{2g\Omega_1^2} + \frac{\lambda_1 L_1}{2gD_1\Omega_1^2} + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{1}{2g\Omega_2^2} + \frac{\lambda_2 L_2}{2gD_2\Omega_2^2} + \frac{\lambda_3 L_3}{2gD_3\Omega_3^2}$$

e che, si badi, prescinde dalle modalità di funzionamento della pompa. La prevalenza totale è quindi somma di un termine:

$$\Delta H_g = \zeta_B - \zeta_A$$

detto *prevalenza geodetica*, che rappresenta il minimo valore possibile della prevalenza totale in assenza di perdite di carico, con il termine esprimente le perdite di carico. Evidentemente, quest'ultimo termine tende a zero al tendere all'infinito dei diametri di tutti i tratti della condotta, tendendo in tal caso a zero il coefficiente K . Nel caso di sbocco in aria, la quota ζ_B di riferimento per il calcolo della prevalenza geodetica ΔH_g è quella dell'asse della condotta allo sbocco.

Si definiscono, inoltre:

- *altezza geodetica di aspirazione* (H_{ga}): differenza di quota fra l'intradosso della sezione immediatamente a monte della pompa ed il pelo libero della vasca di monte (quando l'intradosso della sezione a monte della pompa si trova a quota superiore al pelo libero):
- *battente geodetica* (H_{gb}): differenza di quota fra il pelo libero della vasca di monte e l'intradosso della sezione della condotta immediatamente a monte della pompa (quando questa si trova a quota inferiore al pelo libero, vedi Figura 2.21, dove $H_{gb} = \xi_a - D_2/2$):
- *altezza geodetica di mandata* (H_{gm}): differenza di quota fra il pelo libero della vasca di valle e l'intradosso della sezione della condotta immediatamente a monte della pompa (Figura 2.21):

Il funzionamento della pompa è descritto da una equazione del tipo $\Delta H = f(Q)$, detta *curva caratteristica della pompa*, di cui è riportato un esempio in Figura 2.23 (ove la prevalenza viene però indicata con il simbolo H). Nella stessa figura sono anche riportate, sempre per la stessa pompa, in funzione della portata: le curve della potenza assorbita all'asse (N_a), del rendimento (η), del cosiddetto NPSH (*Net Positive Suction Head*, letteralmente: carico positivo netto di aspirazione) e della differenza delle altezze cinetiche fra la bocca di mandata ($V_2^2/2g$) e la bocca di aspirazione ($V_1^2/2g$). Questo ultimo è il termine che, sommato alla prevalenza manometrica, fornisce la prevalenza totale (equazione 2.8).

Essendo $P = \gamma Q H$ la potenza di una corrente di portata Q di un liquido di peso specifico γ in una sezione in cui il carico totale è pari ad H , la potenza che la pompa fornisce alla corrente (incremento di potenza della corrente fra monte e valle della pompa), detta *potenza utile*, è data da:

$$N_u = \gamma Q \Delta H$$

e la potenza assorbita all'asse:

$$N_a = \frac{\gamma Q \Delta H}{\eta} .$$

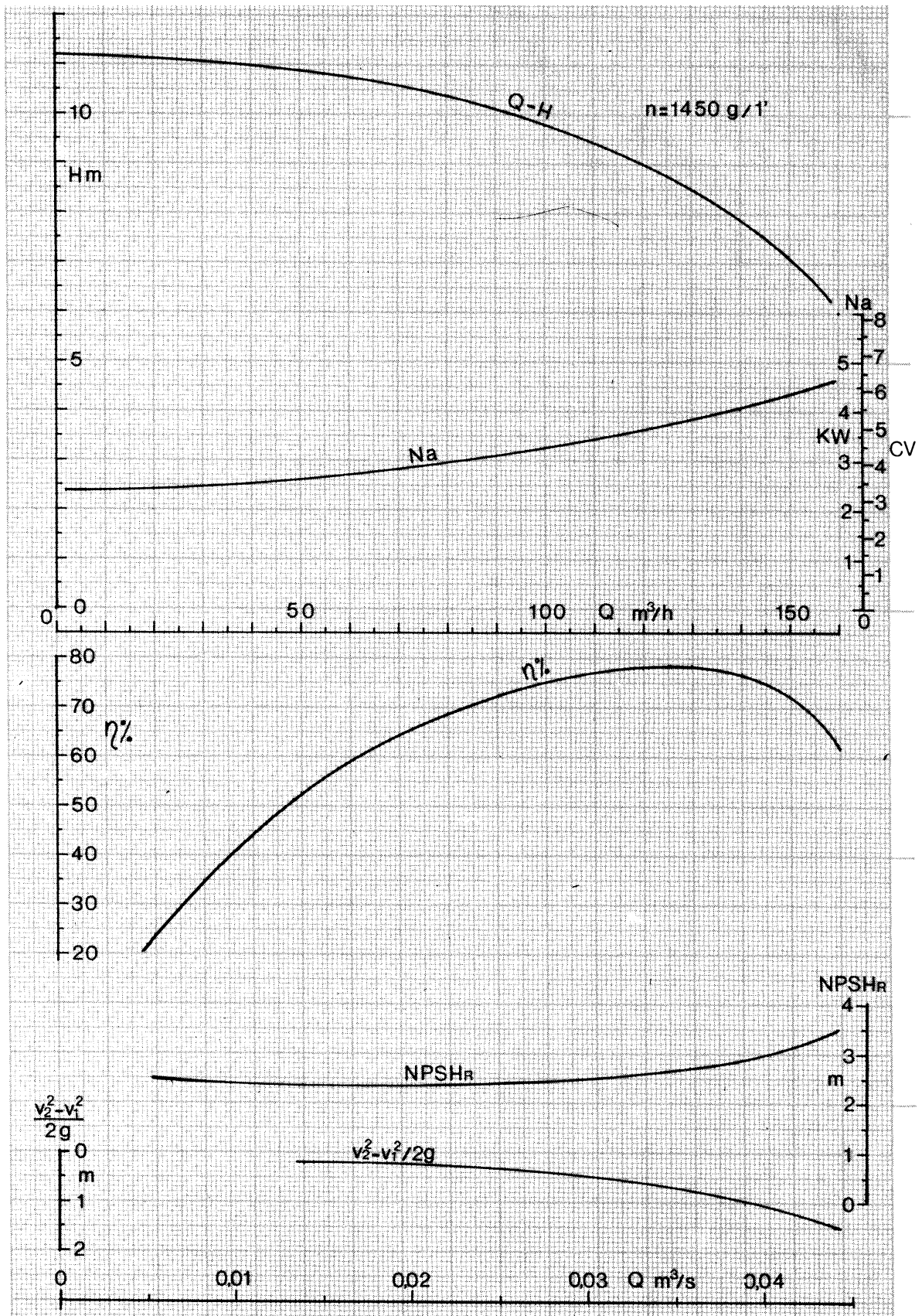


Figura 2.23. Curve caratteristica, della potenza assorbita, del rendimento, dell' $NPSH_R$ e del differenziale delle altezze cinetiche mandata-aspirazione per una pompa centrifuga in funzione della portata, a numero di giri costante ($n = 1450 \text{ g/min}$).

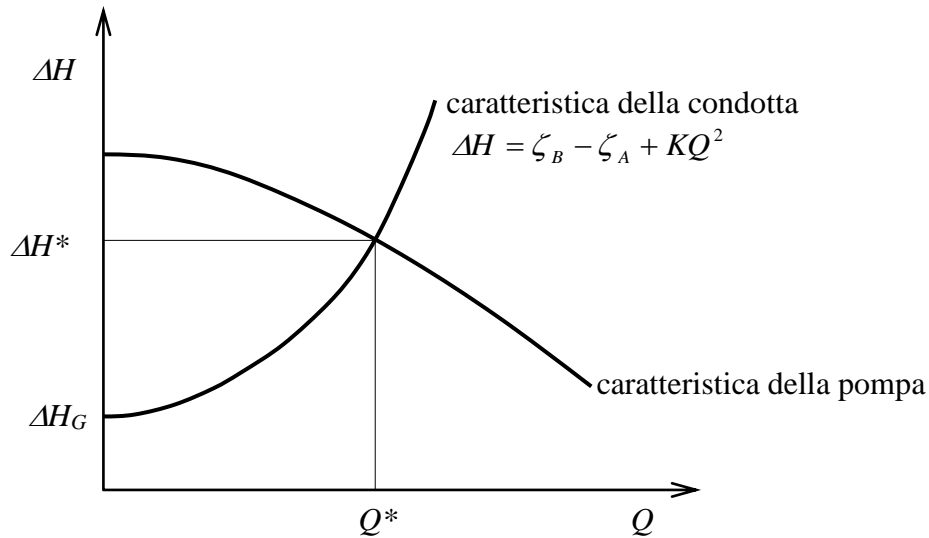


Figura 2.24. Determinazione del punto di funzionamento di un sistema pompa - condotta

Le due equazioni caratteristiche, della condotta e della pompa, devono essere verificate simultaneamente, per cui il punto di funzionamento del sistema condotta + pompa è rappresentato dal punto di intersezione delle due curve (ovviamente, tracciate utilizzando *le stesse unità di misura*), come mostrato in Figura 2.24.

L'effettiva possibilità di realizzare il passaggio di una data portata dipende dal regime delle pressioni che si stabiliscono nelle varie sezioni della condotta. Come può vedersi dalla Figura 2.22, la condotta a monte della pompa (*condotta di aspirazione*) è soggetta in vari punti a condizioni di depressione. In particolare, le sezioni critiche sotto questo profilo sono la sezione contratta in prossimità dell'imbocco e la sezione immediatamente a monte della pompa. All'interno delle singole sezioni, il punto a pressione minima sarà quello posto alla quota massima: il punto di intradosso della condotta.

Detto ξ_a l'affondamento dell'asse della condotta rispetto alla superficie libera del serbatoio A, e ricordato che la prima parte della perdita di imbocco che si osserva nella sezione contratta è data, per l'imbocco a spigolo vivo, da $0,1 U_1^2/2g$, la massima depressione nella sezione contratta si calcola dalla relazione (vedi Figura 2.25):

$$0,1 \frac{U_1^2}{2g} + \frac{U_c^2}{2g} = \xi_a - \frac{D_1}{2} - \frac{p_{c_{min}}}{\gamma} ,$$

ottenuta da semplici considerazioni geometriche sul dislivello fra il pelo libero nel serbatoio ed il punto di minimo della piezometrica. La pressione $p_{c_{min}}$ è presa col proprio segno ed è pertanto, nel caso in questione, negativa. Il corrispondente valore dell'altezza piezometrica è dato da:

$$\frac{p_{c_{min}}}{\gamma} = \xi_a - \frac{D_1}{2} - 0,1 \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_c^2}{2g} .$$

La corrispondente pressione assoluta all'intradosso è data pertanto da:

$$p_{c_{min}}^* = p_{atm}^* + p_{c_{min}} .$$

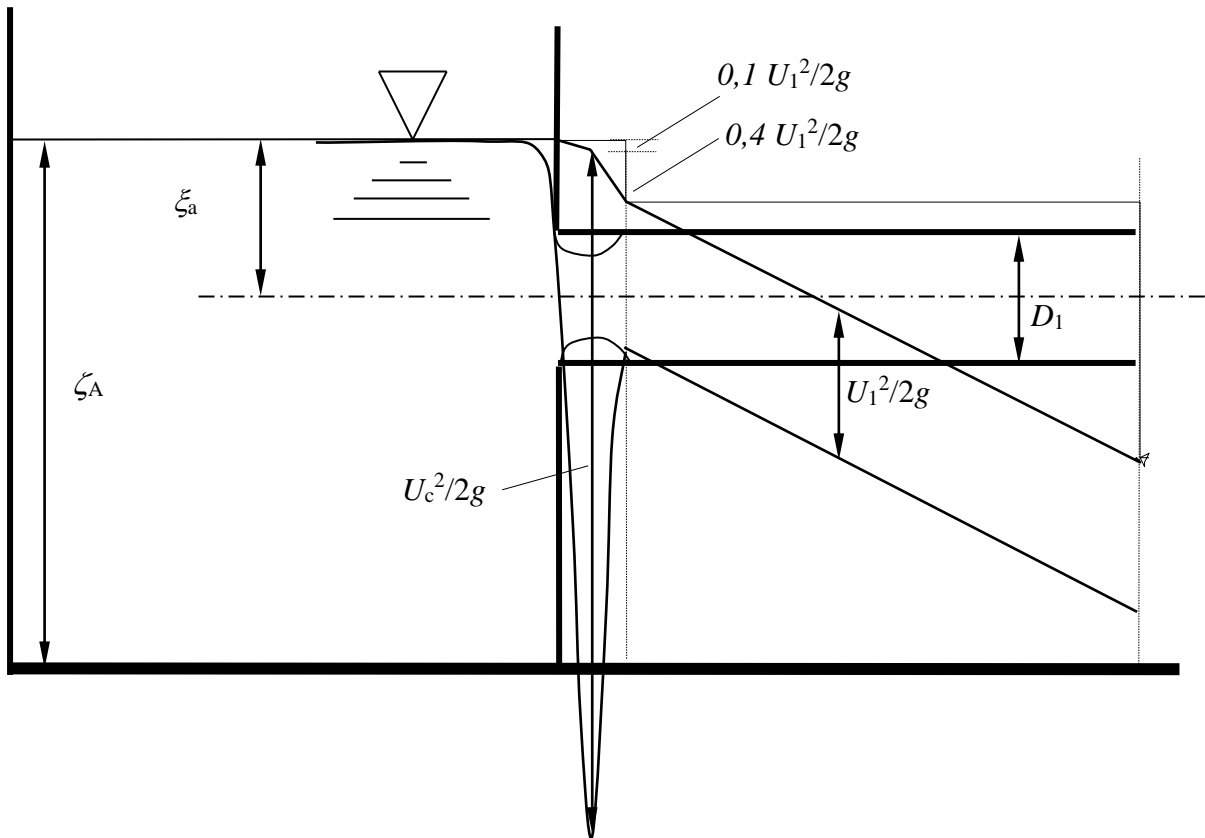


Figura 2.25. Dettaglio della linea piezometrica nella sezione contratta dell'imbocco.

Il limite massimo al quale si può spingere la depressione corrisponde al raggiungimento di una pressione assoluta pari alla *tensione di vapore* (o pressione di vapor saturo) p_v^* del liquido convogliato nelle particolari condizioni di funzionamento¹⁰.

Deve essere perciò verificata la condizione:

$$p_{c_{\min}} + p_{am}^* > p_v^*$$

In caso contrario, il liquido tende a passare massivamente in fase gassosa attraverso la formazione di bolle di vapore al suo interno (*cavitazione*). Tale fenomeno comporta innanzitutto un generale irregolare e rumoroso funzionamento della condotta, per effetto della eterogeneità del fluido convogliato, esaltata dalla continua formazione e successiva chiusura delle cavità gassose. Inoltre, gli urti che il liquido esercita in tal modo sulle pareti della condotta e sugli organi mobili della pompa (girante) risultano particolarmente nocivi nei confronti di questi ultimi e sono in grado di mettere fuori uso la macchina in breve tempo. A tale risultato contribuisce ulteriormente l'azione ossidante sulle parti metalliche della pompa legata alla maggiore disponibilità di ossigeno libero, per effetto della diminuzione della solubilità dei gas nei liquidi al diminuire della pressione. In tali

¹⁰ La tensione di vapore rappresenta una misura quantitativa della tendenza di un liquido a passare in fase gassosa per effetto dell'energia cinetica delle molecole che lo costituiscono. Se si pone un liquido a occupare solo parte del volume di un contenitore chiuso nel quale venga realizzato il vuoto, la pressione assoluta, inizialmente nulla, aumenta al passare del tempo: ciò accade perché il numero di molecole che, nell'unità di tempo, passano dal liquido alla fase gassosa è maggiore del numero di molecole che, dalla fase gassosa, rientrano nel liquido. La pressione raggiunge, dopo un certo tempo, un valore massimo che si mantiene costante nel tempo: si è raggiunto un equilibrio dinamico per cui il numero di molecole che, nell'unità di tempo, passano dal liquido alla fase gassosa è uguale al numero di molecole che, dalla fase gassosa, rientrano nel liquido. Il valore della pressione che si misura a regime è pari, numericamente, al valore della tensione di vapore della sostanza liquida.

condizioni, infatti, parte dell'aria che si trovava in soluzione nel liquido nella vasca di presa tende anch'essa a passare allo stato gassoso, seppure in misura meno eclatante rispetto al fenomeno della cavitazione (tale fenomeno è il medesimo che si osserva nei punti di massima quota di una normale condotta e che richiede l'installazione di opportuni organi di sfiato per l'eliminazione delle bolle).

In funzione dei dati del problema in questione deve pertanto aversi:

$$\frac{P_{atm}^*}{\gamma} + \xi_a - \frac{D_1}{2} - 0,1 \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_c^2}{2g} > \frac{P_v^*}{\gamma} . \quad (2.9)$$

Lo stesso tipo di verifica occorre fare, come detto, anche alla sezione di entrata della pompa. Più precisamente, ai fini di tale verifica bisogna tenere conto del fatto che i minimi valori di pressione si riscontrano all'interno della macchina, all'imbocco della girante, per effetto sia di perdite di carico totale – sia distribuite che, soprattutto, localizzate all'imbocco della girante – che della velocità all'ingresso nella girante, U_g . La verifica della massima depressione va fatta pertanto tenendo conto di tale perdita di carico aggiuntiva, Δh , e dell'altezza cinetica all'ingresso della girante, $U_g^2/2g$, i cui andamenti in funzione della portata sono determinati dal costruttore, che li fornisce sotto forma di una grandezza ad essi legata: l' $NPSH_R$ di cui alla Figura 2.23.

Introducendo il battente geodetico:

$$H_{gb} = \xi_a - \frac{D_2}{2}$$

e raccogliendo tutte le perdite di carico in un termine:

$$\Delta y = 0,5 \frac{U_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} L_1 + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{U_2^2}{2gD_2} L_2 ,$$

un'analisi simile a quella condotta per la sezione contratta all'imbocco consente di esprimere la pressione relativa minima (massima depressione) all'interno della macchina:

$$H_{gb} - \frac{P_{\min}}{\gamma} = \Delta y + \frac{U_g^2}{2g} + \Delta h ,$$

da cui si ottiene la condizione per il funzionamento regolare della pompa:

$$\frac{P_{atm}^*}{\gamma} + H_{gb} - \Delta y - \frac{U_2^2}{2g} - \Delta h > \frac{P_v^*}{\gamma}$$

esprimibile nella forma:

$$\frac{P_{atm}^*}{\gamma} + H_{gb} - \Delta y - \frac{P_v^*}{\gamma} > \frac{U_2^2}{2g} + \Delta h ,$$

nella quale

$$NPSH_R = \frac{U_2^2}{2g} + \Delta h$$

è il valore di $NPSH$ minimo richiesto, caratteristico della singola pompa, il cui andamento in funzione della portata è riportato in Figura 2.23, e:

$$NPSH_a = \frac{P_{am}^*}{\gamma} + H_{gb} - \Delta y - \frac{P_v^*}{\gamma}$$

è il valore di $NPSH$ disponibile (*available* in lingua inglese) all'imbocco della pompa. In sostanza la verifica viene fatta calcolando un $NPSH$ disponibile che dipende soltanto da termini noti ($p_{am}^*/\gamma, p_v^*/\gamma$) o calcolabili sulla base della conformazione della condotta ($H_{gb}, \Delta y$) e confrontandolo con il valore minimo ammissibile fornito dal costruttore.

Nel caso si abbia a che fare con una pompa la cui sezione di ingresso stia a quota superiore del pelo libero di monte, dovrà considerarsi una prevalenza di aspirazione H_{ga} ; tutte le formule scritte sono ancora valide purché si sostituisca $-H_{ga}$ ad H_{gb} .

In pratica, particolarmente per quanto riguarda la pompa, è buona norma adottare criteri più cautelativi di quello esposto in precedenza, limitando la depressione massima ad un valore inferiore al limite corrispondente al raggiungimento di pressioni assolute pari alla tensione di vapore. Una congrua maggiorazione della pressione assoluta minima di riferimento rispetto al valore della tensione di vapore può essere indicato nell'ordine di 0,5 m di colonna di liquido.

L'esito negativo della verifica *impone necessariamente il ridimensionamento della condotta.*

Calcolo della portata massima convogliabile

Per ciascuna delle due sezioni di controllo si possono definire le condizioni critiche relative al raggiungimento di un valore della pressione minima pari alla tensione di vapore (o eventualmente ad una pressione maggiore, più cautelativa). Dipendendo il raggiungimento di tali condizioni dalla presenza delle perdite di carico, esse definiscono un valore massimo della portata che può essere convogliata dalla condotta in oggetto *indipendentemente dalla potenza della pompa*. Tale valore sarà dato dal minore dei due valori di portata che si ottengono, per ciascuna delle sezioni di controllo, imponendo sulla sezione la pressione assoluta minima (depressione massima) che si è disposti ad accettare in condotta, p_{acc}^* , comunque non inferiore alla tensione di vapore del liquido.

Per la sezione contratta all'imbocco il valore della portata critica si ottiene imponendo il segno di uguaglianza nella equazione (2.9):

$$\frac{P_{am}^*}{\gamma} + \xi_a - \frac{D_1}{2} - 0,1 \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_c^2}{2g} = \frac{P_{acc}^*}{\gamma}$$

da cui, nel caso il liquido sia acqua:

$$10,33 + \xi_a - \frac{D_1}{2} - 0,1 \frac{Q_{cr_i}^2}{2g\Omega_1^2} - \frac{Q_{cr_i}^2}{2g\Omega_1^2 C_c} = \frac{P_{acc}^*}{\gamma},$$

nella quale sono stati introdotti il valore di colonna d'acqua corrispondente alla pressione atmosferica standard (10,33 m) e il coefficiente di contrazione all'imbocco, C_c .

Si ottiene quindi il valore della portata critica per la sezione di imbocco:

$$Q_{cr_i} = \sqrt{\frac{10,33 + \xi_a - \frac{D_1}{2} - \frac{P_{acc}^*}{\gamma}}{0,1 \frac{1}{2g\Omega_1^2} + \frac{1}{2g\Omega_1^2 C_c^2}}}$$

Analogamente, per la sezione di controllo all'aspirazione della pompa si avrà, in condizioni critiche:

$$\frac{P_{atm}^*}{\gamma} + H_{gb} - \Delta y(Q_{cr_a}) - \frac{P_{acc}^*}{\gamma} = \frac{U_g^2}{2g} + \Delta h = NPSH_R(Q_{cr_a}) \quad (2.10)$$

da cui si può dedurre – per via grafica, dal momento che l'andamento di $NPSH_R$ è fornito in tale forma – il valore della portata critica corrispondente. In pratica ciò si realizza tracciando, sul grafico del $NPSH_R$ fornito dal costruttore (Figura 2.23) la curva dei valori del primo membro della (2.10) in funzione di Q , che è una parabola avente concavità rivolta verso il basso. Il valore di portata del punto di intersezione delle due curve rappresenta il valore critico per l'aspirazione della pompa. Si rimarca come valori di portata maggiori *richiedano necessariamente il ridimensionamento della condotta*, non essendo realizzabili con l'installazione di una pompa di maggiore potenza.

Esercizio 2.4

Si vuole sopperire al fabbisogno idrico q_3' di un centro abitato E con le acque delle sorgenti A e B , le cui portate q_1' e q_2' stanno nel rapporto assegnato. Si vuole allacciare le sorgenti mediante condotte in acciaio AC e BC , che in C si collegano con un tubo di ghisa usato, già in opera, del diametro D_3 .

Calcolare i diametri commerciali da assegnare alle condotte AB ed AC e le rispettive lunghezze, e tracciare le piezometriche. Nell'ipotesi che le condotte AC e BC siano formate da tubi nuovi, calcolare:

- le portate convogliate nei tre tronchi;
- il valore della perdita di carico da produrre con una valvola di riduzione posta lungo la condotta CE perché a tubi nuovi arrivi in E ancora la portata iniziale q_3' , e l'area della luce libera che la valvola deve possedere.

Dati:

- fabbisogno idrico del centro E , q_3' ;
- rapporto fra le portate q_1' e q_2' , $\kappa = q_1'/q_2' = 0.6$;
- lunghezze L_1 , L_2 e L_3 dei tratti AC , BC e CE rispettivamente;
- diametro D_3 ;
- quote dei serbatoi ζ_A , ζ_B ed ζ_E ;
- scabrezza di Strickler della tubazione di ghisa esistente nel tratto CE , c_{gu} ;
- scabrezze dei tubi di acciaio in condizioni di tubi nuovi ed usurati, c_{an} e c_{au} .

Le condotte di adduzione per usi idropotabili possono generalmente essere comprese nella categoria delle cosiddette *lunghe condotte*. Si dice lunga condotta una condotta nella quale le altezze cinetiche, e quindi anche i termini ad esse proporzionali costituiti dalle perdite localizzate, possano considerarsi trascurabili al confronto delle perdite distribuite. Con riferimento alla formula di Darcy-Weisbach per il calcolo di queste ultime, tale condizione si esprime come segue:

$$\frac{U^2}{2g} \ll \lambda \frac{U^2}{2gD} L \quad (2.11)$$

A titolo di esempio, si consideri una tubazione di diametro interno $D = 200$ mm con rivestimento interno cementizio centrifugato, per la quale può adottarsi un valore di scabrezza assoluta equivalente $\varepsilon = 0,10$ mm. Per tale tubazione si calcola una scabrezza relativa $\varepsilon/D = 0,0005$ e, dall'abaco di Moody (Figura 2.2), per il moto turbolento pienamente sviluppato, il valore del coefficiente di resistenza $\lambda \cong 0,017$.

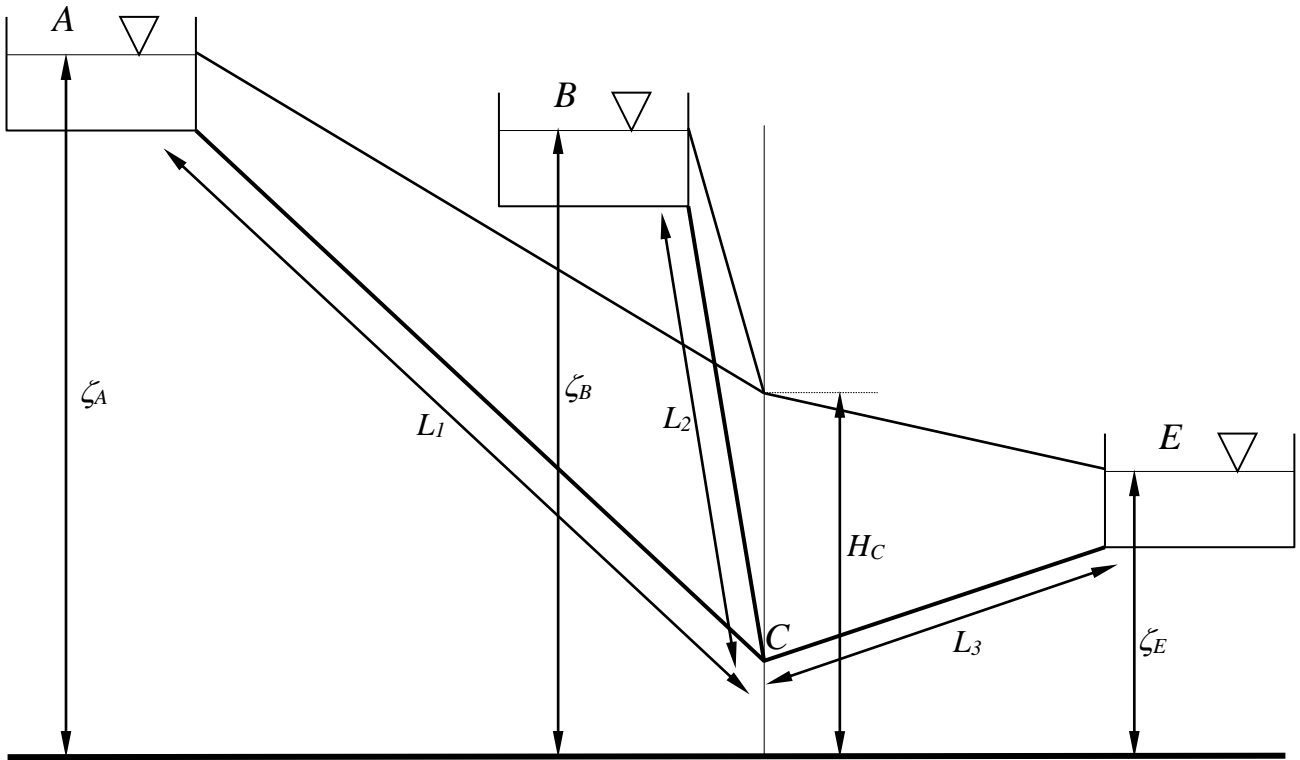


Figura 2.26

Sostituendo nell'equazione (2.11) e semplificando, si ricava la condizione:

$$\frac{D}{L} \ll 0,017 .$$

Assumendo trascurabile uno scarto del 4%, la condizione per poter considerare una condotta lunga nel senso descritto in precedenza può scriversi:

$$\frac{D}{L} \approx 0,00068 ,$$

che, per il diametro di 200 mm, fornisce una lunghezza minima $L \approx 356$ m. Si osservi che valori di lunghezza di tale ordine sono senz'altro largamente superati nelle condotte di adduzione (esterne agli abitati) e frequentemente anche nelle condotte di distribuzione interna. Il risultato si può generalizzare indicando un rapporto minimo fra lunghezza e diametro della tubazione dell'ordine del migliaio, perché questa possa considerarsi lunga nel senso detto.

Per lo svolgimento del problema si farà riferimento alla formula di Chezy per il calcolo delle perdite di carico. L'espressione del coefficiente di Chezy in funzione della scabrezza di Strickler, consente di scrivere le equazioni del moto nei vari tratti in forma monomia. Si ha infatti:

$$J = \frac{U^2}{C^2 R_i} = \frac{q^2}{C^2 R_i \Omega^2} = \frac{q^2}{c^2 R_i^{4/3} \Omega^2} = \frac{q^2}{c^2 (D/4)^{4/3} \left(\frac{\pi D^2}{4} \right)^2} = k q^2 D^{-n} ,$$

dove c è il coefficiente di scabrezza di Strickler ed R_i è il raggio idraulico della condotta, con:

$$k = \frac{4^{10/3}}{c^2 \pi^2} \quad , \quad n = \frac{16}{3} = 5,333 \text{ .}$$

Sulla base del coefficiente di scabrezza per la tubazione di ghisa, che si suppone in condizioni deteriorate, si determina per tale tratto il valore della costante k_{gu} contenuta nella formula monomia. La quota nel nodo C relativa al passaggio della portata $q_3'^{11}$ è data pertanto da:

$$H_C = \zeta_E + J_3 L_3 = \zeta_E + k_{gu} q_3'^2 D_3^{-n} L_3 = H_C' \text{ .}$$

Per ciascuna delle due condotte in acciaio, AC e BC , può ora essere determinato il diametro teorico – che, in generale, non avrà riscontro nella produzione industriale corrente. Le corrispondenti portate nei due tronchi si determinano imponendo le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} q_1'/q_2' = 0,6 \\ q_1' + q_2' = q_3' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1' = \frac{0,6}{1,6} q_3' \\ q_2' = \frac{1}{1,6} q_3' \end{cases} \text{ .}$$

Il diametro teorico del tronco AC si determina imponendo il valore della perdita di carico determinata dal livello assegnato nel serbatoio A e dalla quota piezometrica determinata per il nodo C . In fase di dimensionamento, occorrerà riferirsi alle condizioni di funzionamento più sfavorevoli, ossia, alle condizioni dei tubi alla fine della vita utile. In termini di coefficiente di scabrezza di Strickler ciò significa adottare un valore c_{au} numericamente inferiore al valore c_{an} relativo ai tubi nuovi (un valore superiore in termini di scabrezze di Bazin, Kutter, Manning, Colebrook-White). Il valore della costante della formula monomia è dato perciò da:

$$k_{au} = \frac{4^{10/3}}{c_{au}^2 \pi^2} \text{ .}$$

L'equazione del moto per il tronco AC si scrive pertanto:

$$\zeta_A - H_C' = k_{au} q_1'^2 D_1^{-5,333} L_1 \text{ ,}$$

dalla quale si ricava il valore del diametro teorico:

$$D_1 = \left(\frac{k_{au} q_1'^2 L_1}{\zeta_A - H_C'} \right)^{\frac{1}{5,333}}$$

Come accennato, nel caso generale non si disporrà di tubazioni commerciali aventi il diametro teorico così determinato. Il tronco verrà allora realizzato con una successione dei due diametri commerciali consecutivi disponibili nel listino del costruttore, D_1' e D_1'' , fra i quali ricade il valore del diametro teorico, D_1 . Imponendo che lungo le relative due tratte si abbia una perdita di carico pari a quella di progetto (prodotta dal diametro teorico) e che la somma delle lunghezze delle due tratte, L_1' ed L_1'' sia pari all'intera lunghezza del tronco, L_1 , si scrive il seguente sistema lineare:

¹¹ I valori dei coefficienti di scabrezza sono usualmente espressi nei manuali tecnici nelle unità del sistema internazionale (S.I.). I fabbisogni idrici dei centri abitati vengono invece sovente espressi in l/s . Volendo lavorare con le unità S.I., occorrerà preventivamente esprimere le portate in m^3/s .

$$\begin{cases} k_{au} q_1'^2 D_1'^{-n} L_1' + k_{au} q_1''^2 D_1''^{-n} L_1'' = \zeta_A - H_C' \\ L_1' + L_1'' = L_1 \end{cases},$$

che consente di determinare le lunghezze incognite delle due tratte. In modo del tutto analogo si determinano diametri commerciali e lunghezze delle due tratte del tronco BC .

Verifica a tubi nuovi, senza organi di regolazione

La condotta deve ora essere verificata per le varie situazioni di funzionamento. In particolare, a tubazioni nuove queste sono meno scabre ed esercitano perciò resistenze al moto inferiori rispetto alle stesse tubazioni in condizioni deteriorate, considerate per il dimensionamento. In assenza di organi di regolazione, le portate defluenti nei tre tronchi e la quota piezometrica nel nodo C si determinano risolvendo il seguente sistema di tre equazioni del moto e di una equazione di continuità al nodo C :

$$\begin{cases} k_{an} q_1'^2 D_1'^{-n} L_1' + k_{an} q_1''^2 D_1''^{-n} L_1'' = \zeta_A - H_C \\ k_{an} q_2'^2 D_2'^{-n} L_1' + k_{an} q_2''^2 D_2''^{-n} L_2'' = \zeta_B - H_C \\ k_{gu} q_3^2 D_3^{-n} L_3 = H_C - \zeta_E \\ q_1 + q_2 = q_3 \end{cases},$$

esprimibile nella forma sintetica:

$$\begin{cases} q_1 = \sqrt{\frac{\zeta_A - H_C}{K_1}} \\ q_2 = \sqrt{\frac{\zeta_B - H_C}{K_2}} \\ q_3 = \sqrt{\frac{H_C - \zeta_E}{K_3}} \\ q_1 + q_2 = q_3 \end{cases} \quad (2.12)$$

avendo posto:

$$\begin{aligned} K_1 &= k_{an} D_1'^{-n} L_1' + k_{an} D_1''^{-n} L_1'' \\ K_2 &= k_{an} D_2'^{-n} L_1' + k_{an} D_2''^{-n} L_2'' \\ K_3 &= k_{gu} D_3^{-n} L_3 \end{aligned}$$

Una soluzione della (2.1) in forma grafica può ottenersi nel seguente modo: si tracciano in un piano cartesiano le curve $q_1 = f_1(H_C)$, $q_2 = f_2(H_C)$, $q_3 = f_3(H_C)$, e $q_1 + q_2 = f_1(H_C) + f_2(H_C)$; in virtù della equazione di continuità la soluzione è rappresentata dal punto di intersezione delle due ultime curve, $q_3 = f_3(H_C)$ e $q_1 + q_2 = f_1(H_C) + f_2(H_C)$. In corrispondenza del valore così determinato della quota piezometrica nel nodo C , H_C'' , si leggono dalle rispettive curve anche i valori di q_1 e q_2 .

Affinché i versi delle portate siano gli stessi imposti in fase di progetto, dalla soluzione del sistema dovrà ottenersi $H_C < \zeta_B$. In caso contrario occorrerà riscrivere l'equazione del moto del lato corrispondente e l'equazione di continuità:

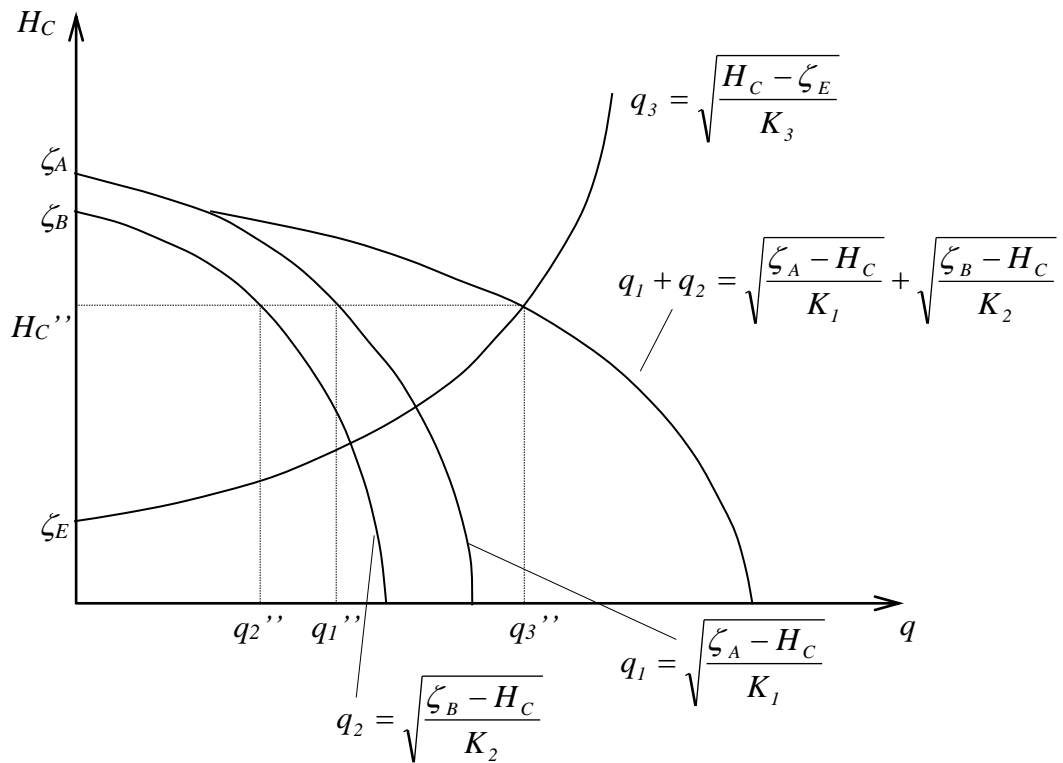


Figura 2.27. Soluzione grafica del problema di verifica (sistema di equazioni (2.12)).

$$q_2 = \sqrt{\frac{H_C - \zeta_B}{K_2}} \quad ; \quad q_1 = q_2 + q_3$$

e ripetere il calcolo.

Una soluzione numerica può ottenersi riproducendo, in sostanza, lo stesso procedimento della soluzione grafica, calcolando, per vari valori di H_C compresi nell'intervallo $[\zeta_E, \zeta_B]$, la differenza:

$$(q_1 + q_2) - q_3 = \sqrt{\frac{\zeta_A - H_C}{K_1}} + \sqrt{\frac{\zeta_B - H_C}{K_2}} - \sqrt{\frac{H_C - \zeta_E}{K_3}}$$

per individuare i due valori di H_C in corrispondenza dei quali tale differenza cambia di segno. Da questo punto in poi la radice può determinarsi con la precisione desiderata reiterando il calcolo della differenza nel punto medio dei due precedentemente individuati dal cambio di segno ed assumendo, come nuova coppia di punti, il punto medio e quello dei due punti precedenti per il quale la differenza assume segno opposto rispetto a quello determinato per il punto medio, cosicché si abbia la certezza che la radice è compresa fra tali due punti (Figura 2.28).

In alternativa, scrivendo l'equazione di continuità con le portate espresse in funzione della quota piezometrica H_C :

$$\sqrt{\frac{\zeta_A - H_C}{K_1}} + \sqrt{\frac{\zeta_B - H_C}{K_2}} = \sqrt{\frac{H_C - \zeta_E}{K_3}},$$

una prima quadratura fornisce:

H_C	segno $q_1+q_2-q_3$
ζ_E	+
$\zeta_E + 0.1(\zeta_B - \zeta_E)$	+
$\zeta_E + 0.2(\zeta_B - \zeta_E)$	+
$\zeta_E + 0.3(\zeta_B - \zeta_E)$	+
$\zeta_E + 0.4(\zeta_B - \zeta_E)$	+
$\zeta_E + 0.5(\zeta_B - \zeta_E)$	+
$\zeta_E + 0.6(\zeta_B - \zeta_E)$	+
$\zeta_E + 0.7(\zeta_B - \zeta_E)$	-
$\zeta_E + 0.8(\zeta_B - \zeta_E)$	-
$\zeta_E + 0.9(\zeta_B - \zeta_E)$	-
ζ_B	-

Figura 2.28. Schema del procedimento iterativo per la soluzione del sistema (2.12).

$$\frac{\zeta_A - H_C}{K_1} + \frac{\zeta_B - H_C}{K_2} + 2\sqrt{\frac{\zeta_A - H_C}{K_1}} \sqrt{\frac{\zeta_B - H_C}{K_2}} = \frac{H_C - \zeta_E}{K_3}.$$

Riordinando e quadrando nuovamente si ottiene:

$$\left(\frac{\zeta_A - H_C}{K_1} + \frac{\zeta_B - H_C}{K_2} - \frac{H_C - \zeta_E}{K_3} \right)^2 = 4 \frac{\zeta_A - H_C}{K_1} \frac{\zeta_B - H_C}{K_2},$$

ossia, una equazione di secondo grado, della quale si ricava, delle due radici possedute, quella che soddisfa le condizioni specifiche del caso (H_C reale, $\zeta_E < H_C < \zeta_B$).

Dimensionamento della valvola riduttrice di pressione

La verifica del funzionamento del sistema di condotte nelle quali i tratti AB e BC siano costituiti da tubi nuovi darà in generale, come risultato, una portata complessiva eccedente quella richiesta dall'utenza E , supposta invariata rispetto al dato di progetto. Il flusso della portata desiderata con le tubazioni dei tratti AB e BC nuove si potrà ottenere introducendo nella condotta CE una valvola riduttrice di pressione opportunamente regolata.

Indicando con il simbolo Δ la perdita di carico localizzata, incognita, procurata dalla valvola, il sistema di equazioni che descrive il funzionamento del sistema di condotte si scrive:

$$\begin{cases} k_{an} q_1^2 D_1'^{-n} L_1' + k_{an} q_1^2 D_1''^{-n} L_1'' = \zeta_A - H_C \\ k_{an} q_2^2 D_2'^{-n} L_2' + k_{an} q_2^2 D_2''^{-n} L_2'' = \zeta_B - H_C \\ k_{gu} q_3^2 D_3^{-n} L_3 + \Delta = H_C - \zeta_E \\ q_1 + q_2 = q_3 \end{cases}$$

in cui la portata $q_3 = q_3'$ è ora assegnata. Esplicitando le portate nelle prime due equazioni, come fatto precedentemente, e la perdita localizzata nella terza equazione, si ottiene la forma:

$$\begin{cases} q_1 = \sqrt{\frac{\zeta_A - H_C}{K_1}} \\ q_2 = \sqrt{\frac{\zeta_B - H_C}{K_2}} \\ \Delta = H_C - \zeta_E - K_3 q_3'^2 \\ q_1 + q_2 = q_3' \end{cases} \quad (2.13)$$

Analogamente a quanto fatto per la verifica a tubi nuovi in assenza di valvole riduttrici di pressione, il valore del carico piezometrico nel nodo C , H_C'''' , si determina come ascissa della curva $q_1 + q_2 = f_1(H_C) + f_2(H_C)$ corrispondente al valore di portata $q_1 + q_2 = q_3'$. In corrispondenza di tale valore del carico si determinano le portate q_1 e q_2 e, dalla terza equazione del sistema (2.13), il valore della perdita Δ da realizzare con la valvola riduttrice di pressione.

Il problema della determinazione della perdita di carico Δ può anche risolversi con metodi simili a quelli illustrati per la verifica a tubi nuovi.

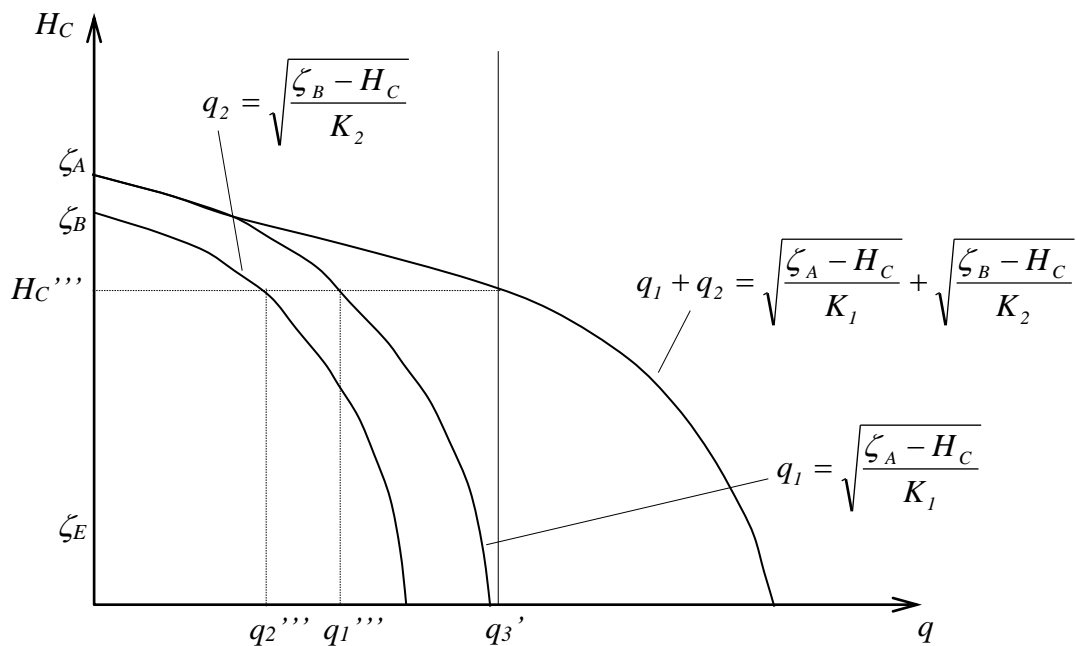


Figura 2.29. Soluzione grafica del problema di dimensionamento della valvola riduttrice.

Determinazione dell'area della luce libera della valvola

Nella valvola, la perdita di pressione Δ testé determinata viene realizzata per effetto del brusco allargamento della sezione della corrente. Detta Ω_v l'area della luce libera della valvola, il suo valore si ottiene dalla espressione della perdita di Borda, posta uguale a Δ :

$$\Delta = \left(\frac{\Omega_3}{\Omega_v} - 1 \right)^2 \frac{U_3^2}{2g} = \left(\frac{\Omega_3}{\Omega_v} - 1 \right)^2 \frac{q_3'^2}{2g\Omega_3^2},$$

dalla quale si ottiene infine:

$$\Omega_v = \frac{\Omega_3}{1 + \sqrt{2g\Delta} \frac{\Omega_3}{q_3'^2}}$$

1) Assegnati la misura del manometro semplice a liquido, Δ , i pesi specifici γ e γ_m e tutti i dati geometrici (quote, diametri, lunghezze, scabrezze omogenee equivalenti, posizione delle sezioni contratte, altezza del petto dello stramazzo), determinare il livello del liquido nel serbatoio B in condizioni di moto stazionario.

2) Assegnati la misura del manometro differenziale collegato al venturimetro, Δ , i pesi specifici γ e γ_m , la quota del menisco interno del manometro semplice a liquido e tutti gli altri i dati geometrici (quote, diametri, lunghezze, scabrezze di Strickler, coefficiente di contrazione a valle del convergente), determinare la misura del manometro semplice a liquido Δ_x , in condizioni di moto stazionario.

3) Assegnati la misura del manometro metallico n_M (bar), la quota del pelo libero del serbatoio A, la quota del piano di separazione fra il liquido e l'aria sovrastante nel serbatoio B, i pesi specifici γ e γ_m , la scabrezza di Strickler della condotta che alimenta il serbatoio A, le scabrezze di Kutter della condotta fra i serbatoi A e B e tutti gli altri dati geometrici, determinare la misura del manometro semplice a liquido Δ_x , in condizioni di moto stazionario.

4) Assegnati il dislivello dei peli liberi dei serbatoi A e B, Δ , il diametro D della luce in parete sottile circolare praticata sul setto di separazione, le caratteristiche della condotta congiungente i serbatoi B e C, il peso specifico γ e tutti gli altri dati geometrici, determinare il diametro D_x della luce di fondo in parete sottile nel serbatoio C, in condizioni di moto stazionario.

5) Assegnati la misura del manometro differenziale, Δ , i pesi specifici γ e γ_m , le quote del pelo libero del serbatoio A e del piano di separazione fra liquido ed aria nel serbatoio B, il coefficiente di contrazione C_c dell'ugello del convergente, nonché tutti gli altri dati geometrici, determinare la misura del manometro semplice a liquido Δ_x , in condizioni di moto stazionario.

6) Assegnati la quota del menisco del piezometro, la pressione misurata dal manometro metallico installato sulla condotta, le caratteristiche della condotta, i pesi specifici γ e γ_m e tutti gli altri dati geometrici (in particolare, le quote dei baricentri dei manometri metallici), determinare il livello nel serbatoio A e la misura del manometro metallico collegato al serbatoio B, in condizioni di moto stazionario.

7) Assegnati la misura Δ del manometro differenziale collegato al venturimetro, le caratteristiche della condotta, i pesi specifici γ e γ_m , la quota del pelo libero del serbatoio B, nonché tutti gli altri dati geometrici, determinare la portata totale fluente fra i due serbatoi in condizioni di moto stazionario.

8) Assegnati la misura di pressione del manometro metallico, le caratteristiche della condotta, la larghezza del petto dello stramazzo Bazin, il peso specifico γ e tutti gli altri dati geometrici (ad eccezione delle quote dei peli liberi dei serbatoi), determinare la portata fluente fra i due serbatoi in condizioni di moto stazionario.

9) Assegnati la misura Δ del manometro differenziale collegato al venturimetro, le caratteristiche della condotta, il diametro D della luce circolare posta sul setto divisorio fra i serbatoi A e B, la quota del piano di separazione fra liquido ed aria, i pesi specifici γ e γ_m e tutti gli altri dati geometrici, determinare la pressione dell'aria contenuta nel serbatoio A, in condizioni di moto stazionario.

10) Assegnati i pesi specifici γ e γ_m , le quote del pelo libero del serbatoio A, del piano di separazione fra il liquido e l'aria soprastante nel serbatoio B e dello sbocco in aria della condotta 2, le caratteristiche delle condotte, nonché tutti gli altri dati geometrici, determinare la misura Δ del manometro semplice, assumendo condizioni di moto stazionarie.

11) Assegnati i pesi specifici γ e γ_m , le quote dei peli liberi dei serbatoi, le caratteristiche della condotta, la misura Δ del manometro differenziale e tutti gli altri dati geometrici, determinare la potenza che la pompa fornisce alla corrente, assumendo condizioni di moto stazionarie.

12) Assegnati i pesi specifici γ e γ_m , la curva caratteristica della pompa, i diametri delle condotte di aspirazione e di mandata, la misura Δ del manometro differenziale, determinare la potenza che la pompa fornisce alla corrente, assumendo condizioni di moto stazionarie.

13) Assegnati i pesi specifici γ e γ_m , la quota del manometro metallico, i diametri, le lunghezze e le scabrezze delle condotte, nonché tutti gli altri dati geometrici, determinare la misura p_M del manometro metallico in bar, assumendo condizioni di moto stazionarie.

14) Assegnate le quote dei peli liberi dei serbatoi A e C, le caratteristiche (diametri, lunghezze e scabrezze) delle tre condotte, nonché tutti gli altri dati geometrici, determinare la quota che il pelo libero del serbatoio B deve possedere affinché risulti nulla la portata fluente nel tronco BN, assumendo condizioni di moto stazionarie.

15) Assegnati i pesi specifici γ e γ_m , la portata Q immessa nel serbatoio, la quota della cresta e la larghezza b dello stramazzo Bazin, le caratteristiche della condotta, la quota del pelo libero del serbatoio B, nonché tutti gli altri dati geometrici, determinare la quota del pelo libero nel serbatoio A, assumendo condizioni di moto stazionarie.

16) Assegnati il peso specifico γ , la quota del pelo libero nel serbatoio A, il diametro D della luce circolare in parete sottile posta sul fondo del serbatoio B, le caratteristiche (lunghezze, diametri, scabrezze) delle condotte e tutti gli altri dati geometrici, determinare la quota del pelo libero del serbatoio B, assumendo condizioni di moto stazionarie.

17) Assegnati i pesi specifici γ e γ_m , le caratteristiche (diametri, lunghezze e scabrezze) delle condotte, l'indicazione del piezometro (quota del menisco) e del manometro differenziale, le caratteristiche dimensionali del venturimetro, nonché tutti gli altri dati geometrici, determinare la misura Δ del manometro semplice, nell'ipotesi di moto stazionario.

18) Assegnati i pesi specifici γ e γ_m , la misura Δ del manometro semplice collegato al serbatoio B, il diametro D della luce in parete sottile, la lunghezza e la scabrezza della condotta, determinare il diametro che quest'ultima deve possedere affinché essa risulti assoggettata ad un battente δ assegnato.

CAPITOLO 3
CORRENTI A PELO LIBERO

Richiami di teoria

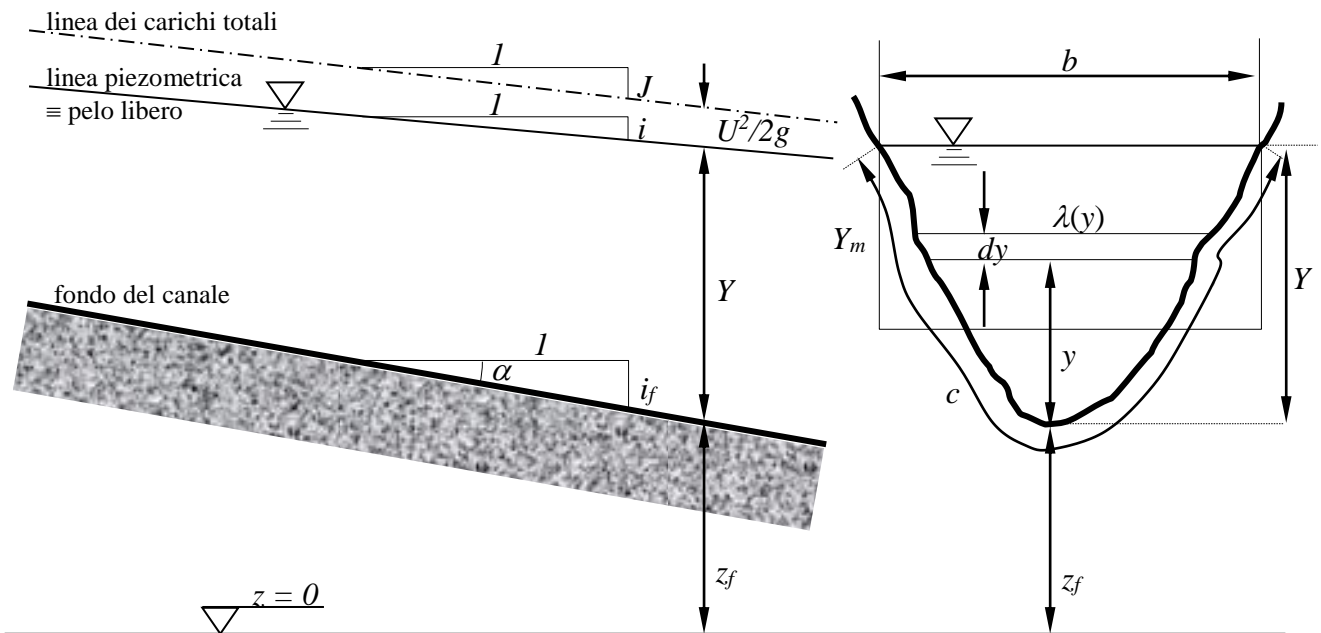


Figura 3.1. Elementi caratteristici di una corrente a pelo libero

- Ipotesi:
 - corrente gradualmente variata (distribuzione di pressione idrostatica);
 - piccola pendenza del fondo ($\cos \alpha \cong 1$, le superfici isopiezometriche sono piani verticali)
 - fluido incomprimibile;
 - coefficienti di ragguglio unitari.
- Equazioni (moto vario):

$$\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\tau_0}{\gamma R_i} = 0 \quad (\text{moto}) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \quad (\text{continuità}) \quad (3.2)$$

- $\Omega = \int_0^Y \lambda(y) dy$ area della sezione liquida della corrente;
- Y profondità della corrente;
- $Y_m = \Omega/b$ profondità media della corrente
- $Q = \int_{\Omega} u d\Omega$ portata della corrente;

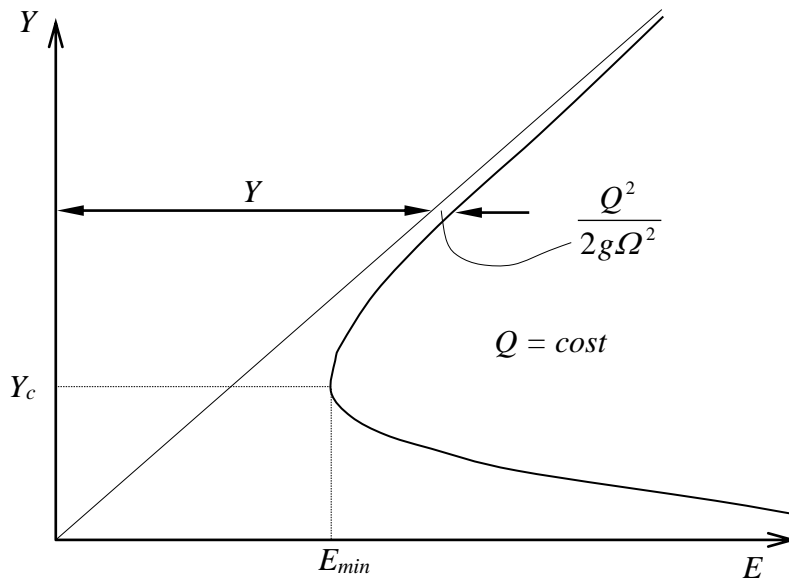


Figura 3.2. Andamento del carico specifico a portata costante di una corrente a pelo libero.

➤ condizioni di massima portata a carico specifico costante (Figura 3.3):

$$Q = \Omega \sqrt{2g(E - Y)}$$

$$\frac{\partial Q(Y)}{\partial Y} \Big|_{E=cost} = \frac{\partial}{\partial Y} \left(\Omega \sqrt{2g(E - Y)} \right) \Big|_{E=cost} = \frac{d\Omega}{dY} \sqrt{2g(E - Y)} - \Omega \frac{g}{\sqrt{2g(E - Y)}} = 0$$

↓

$$b_c 2g(E - Y_c) - \Omega_c g = 0 \Rightarrow Y_c + \frac{Y_{mc}}{2} = E \Rightarrow Q_{max} = \Omega_c \sqrt{gY_{mc}}$$

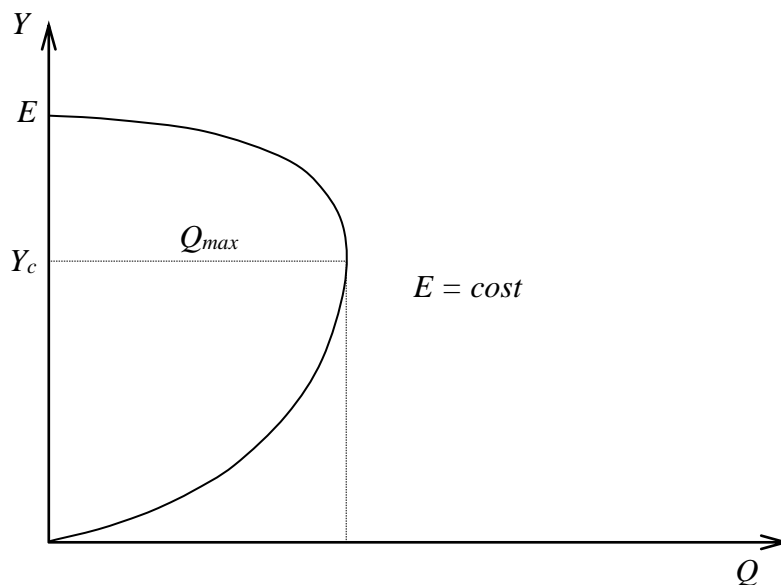


Figura 3.3. Andamento della portata a carico specifico costante di una corrente a pelo libero.

- Velocità media della corrente uguale alla celerità relativa c delle piccole perturbazioni

$$U_c = \sqrt{gY_{mc}} = c$$

- Classificazione delle correnti a pelo libero

denominazione	definizione	proprietà
correnti lente (subcritiche)	$Y > Y_c$ ($Fr < 1$)	$U < \sqrt{gY_m}$ – le perturbazioni si propagano sia verso monte che verso valle.
correnti critiche	$Y = Y_c$ ($Fr = 1$)	$U = \sqrt{gY_m}$ – la perturbazione di celerità relativa rivolta verso monte è stazionaria rispetto ad un osservatore fisso (la celerità assoluta è nulla).
correnti veloci (supercritiche)	$Y < Y_c$ ($Fr > 1$)	$U > \sqrt{gY_m}$ – le perturbazioni si propagano soltanto verso valle.

dove:

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gY_m}}$$

è il *numero di Froude*.

- Moto uniforme

Nel moto uniforme è:

$$i_f = i = j ;$$

la linea dei carichi totali è parallela al profilo del pelo libero ed al fondo del canale.

Per una corrente a pelo libero in moto uniforme la formula di Chezy per il calcolo delle perdite di carico:

$$j = \frac{U^2}{\chi^2 R_i}$$

si scrive perciò:

$$i_f = \frac{U^2}{\chi^2 R_i} .$$

Lo stesso dicasi per la formula di Darcy-Weisbach. Con riferimento alla formula di Chezy, le espressioni della velocità e della portata di moto uniforme per un alveo di data sezione, scabrezza delle pareti e pendenza del fondo sono date da:

$$U = \chi \sqrt{R_i i_f} \quad ; \quad Q = \Omega \chi \sqrt{R_i i_f} ,$$

ove per il coefficiente di Chezy χ si adatterà una delle formule pratiche disponibili (Bazin, Kutter, Gauckler-Strickler, Manning), stabilite per condizioni di moto turbolento pienamente

sviluppato, ovvero, una più generale formula (Marchi) costituente una estensione al caso delle correnti a pelo libero della formula di Colebrook-White:

$$\frac{\chi}{\sqrt{g}} = -5,75 \log \left(\frac{\chi/\sqrt{g}}{Re\varphi} + \frac{\varepsilon}{13,3 R_i \varphi} \right)$$

in cui Re è il numero di Reynolds, ε è la scabrezza equivalente della parete e φ è un coefficiente di forma (vedi manuali tecnici).

La curva che rappresenta l'andamento della portata di moto uniforme in funzione della profondità della corrente (attraverso i termini della formula di Chezy da questa dipendenti) è detta *scala delle portate di moto uniforme*.

- Classificazione degli alvei

Detta Y_u la profondità di moto uniforme corrispondente ad una data portata per un dato alveo, si ha la seguente classificazione degli alvei:

denominazione	definizione
alvei a debole pendenza o fluviali	$Y_u > Y_c \equiv$ la corrente di moto uniforme è una corrente lenta
alvei a pendenza critica	$Y_u = Y_c \equiv$ la corrente di moto uniforme è una corrente critica
alvei a forte pendenza o torrentizi	$Y_u < Y_c \equiv$ la corrente di moto uniforme è una corrente veloce

- ✓ Si dice pendenza critica per un dato alveo ed una data portata il valore di pendenza del fondo per il quale $Y_u = Y_c$. Uguagliando le espressioni della portata ottenute per lo stato critico e per il moto uniforme (Chezy), si ottiene:

$$\Omega\chi\sqrt{R_i i_{fc}} = \Omega\sqrt{gY_m} \Rightarrow i_{fc} = \frac{g\Omega}{\chi^2 b R_i} = i_{fc}(Y).$$

Per un fissato di valore di profondità Y dalla formula precedente si calcola un valore di pendenza del fondo tale che $Y = Y_u = Y_c$ ed un valore corrispondente di portata. Se una corrente di uguale portata viene fatta fluire in moto uniforme in un alveo di forma uguale ma pendenza minore della pendenza critica (debole pendenza), evidentemente essa dovrà avere, per la formula di Chezy, una profondità maggiore, ed essere pertanto una corrente lenta *per quella portata*. Analogamente si può ragionare per un alveo a pendenza maggiore della pendenza critica (forte pendenza) e concludere che la corrente di moto uniforme è in tal caso veloce. Ciò giustifica le denominazioni degli alvei riportate in tabella.

- ✓ La caratteristica di debole o forte pendenza *non è intrinseca dell'alveo*, ma è associata ad un fissato valore di portata. Un alveo può essere a forte pendenza per un dato valore di portata ed a debole pendenza per un altro valore di portata (vedi Esercizio 3.2).
- ✓ Si può dimostrare che, in conformità con il significato fisico della classificazione delle correnti a pelo libero su esposta, il problema matematico costituito dal sistema di equazioni differenziali (3.1) e (3.2) in due variabili (tipicamente: Y, U o Y, Q) richiede la specificazione, oltre che delle condizioni iniziali, di *due* condizioni al contorno, e precisamente:
 - una condizione da monte ed una condizione da valle se la corrente è lenta;

– due condizioni da monte se la corrente è veloce.

- Moto permanente

In moto permanente o stazionario sono nulle le derivate temporali locali di una qualunque grandezza caratteristica della corrente. Le equazioni del moto e di continuità (3.1) e (3.2) assumono pertanto la forma:

$$\frac{dH}{ds} = -j = -\frac{\tau_0}{\gamma R_i} \quad (\text{moto}) \quad (3.3)$$

$$\frac{dQ}{ds} = 0 \quad (\text{continuità}) \quad (3.4)$$

per cui, in pratica, il moto permanente è descritto da una sola equazione differenziale, nella quale converrà evidenziare la portata che, per l'equazione di continuità, non varia al variare della sezione (ascissa curvilinea) del canale. Conseguentemente, il problema matematico associato alla sola equazione differenziale del moto richiede *una sola condizione al contorno*, e precisamente:

- una condizione *da valle* se la corrente è lenta;
- una condizione *da monte* se la corrente è veloce.

La seconda affermazione non contrasta con la proprietà delle correnti veloci nei confronti della propagazione delle perturbazioni, in quanto fornire le condizioni da monte è l'unica possibilità se le perturbazioni associate a tali condizioni, come visto in precedenza, si propagano soltanto verso valle e solo verso valle possono perciò effettivamente condizionare lo stato della corrente.

La prima affermazione può risultare invece, a prima vista, contraddittoria con quanto affermato in precedenza a riguardo delle correnti lente, e cioè, che in esse le perturbazioni possano propagarsi sia verso monte che verso valle, rimanendo apparentemente esclusa la seconda possibilità.

Una conciliazione dei due punti di vista su basi rigorose esula dai limiti del presente corso. Il lettore può tuttavia facilmente convincersi del fatto che le condizioni di una corrente lenta dipendono senz'altro, da un punto di vista fisico, anche dalle condizioni di monte – non fosse altro che dal valore (costante nel tempo) della portata che viene immessa nell'alveo. In effetti, in sede di svolgimento di alcuni esercizi applicativi della teoria verranno poste in luce situazioni nelle quali, essendo incognito il valore della portata, si renda necessaria la effettiva considerazione di due condizioni al contorno sullo stesso tratto di corrente, imposte in punti appropriati, in accordo con le modalità di propagazione delle perturbazioni in relazione al tipo di corrente.

D'altro canto, da un punto di vista pratico, di effettiva realizzazione ancor più che matematico, la condizione di moto permanente non è altro che il limite asintotico temporale di un processo di moto vario dipendente dalle due condizioni al contorno menzionate. Di queste, la condizione da monte è costituita dalla portata immessa, mantenuta costante nel tempo al fine di raggiungere il regime stazionario; rimane quindi disponibile soltanto la condizione da valle.

Da un punto di vista puramente applicativo-operativo, la determinazione dei profili di moto permanente si effettua quindi sulla base della regola su esposta per l'imposizione dell'unica condizione al contorno richiesta: da valle in corrente lenta, da monte in corrente veloce.

- Profili di moto permanente

Ricordando che $H = E + z_f$, esprimendo l'equazione del moto (3.3) in funzione del carico specifico, essa assume la forma seguente:

$$\frac{dE}{ds} = i_f - j, \quad (3.5)$$

nella quale la cadente j può esprimersi mediante la formula di Chezy. Per quanto attiene alla forma dell'alveo, nel caso generale l'energia specifica è rappresentabile nella forma $E = E(s, Y(s))$, per cui la derivata a primo membro della (3.5) va sviluppata nel modo seguente:

$$\frac{dE}{ds} = \left. \frac{\partial E}{\partial s} \right|_{Y=const} + \left. \frac{\partial E}{\partial Y} \right|_{s=const} \frac{dY}{ds}.$$

È cioè ammesso, in generale, che il carico specifico possa assumere due diversi valori in due diverse sezioni, a parità di profondità della corrente. Un esempio di questo tipo è dato dal canale non prismatico di Figura 3.4, nel quale, per uno stesso valore della portata, la corrente assume, in due sezioni di caratteristiche differenti e a parità di profondità $Y = Y_A = Y_B$, valori del carico differenti, essendo $\Omega_A(Y) < \Omega_B(Y)$.

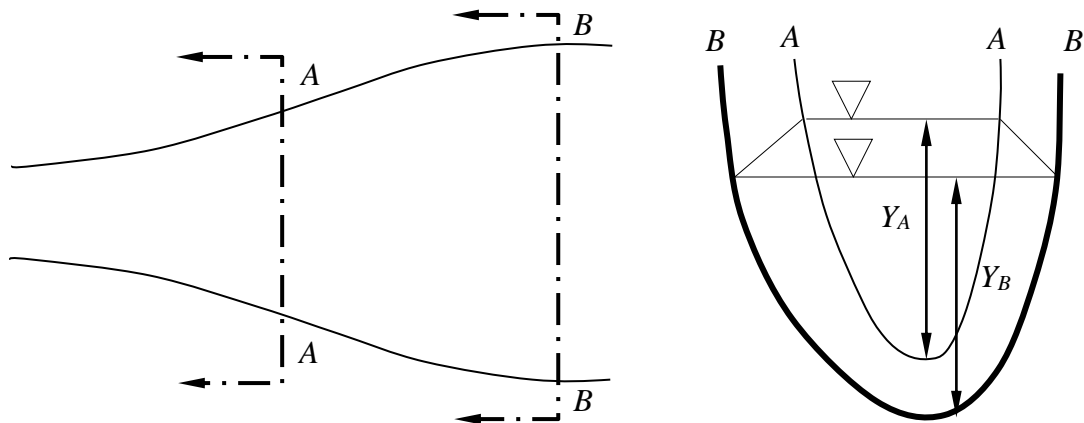


Figura 3.4. Esempio di alveo non prismatico.

Nel caso di *alveo prismatico*, in cui la sezione è unica per tutto il tronco, l'energia è una funzione del tipo $E = E(Y(s))$. L'equazione del moto si può allora scrivere:

$$\frac{dY}{ds} = \frac{i_f - j}{\frac{dE}{dY}} = \frac{i_f - j}{1 - \frac{Q^2 b}{g \Omega^3}} = \frac{i_f - j}{1 - Fr^2}, \quad (3.6)$$

la quale consente di calcolare il profilo del pelo libero. Discutendo il segno di numeratore e denominatore del secondo membro dell'equazione del pelo libero, si possono determinare le caratteristiche dei possibili tipi di profilo.

➤ Alvei a debole pendenza (Figura 3.5):

- profilo D_1 : corrente lenta ritardata, tende asintoticamente verso monte al moto uniforme, asintoticamente verso valle all'orizzontale;
- profilo D_2 : corrente lenta accelerata, tende asintoticamente verso monte al moto uniforme, raggiunge l'altezza critica a valle, con tangente verticale;

- profilo D_3 : corrente veloce ritardata; raggiunge, teoricamente, la profondità nulla a monte, ad una distanza finita (ovviamente nella realtà tale possibilità è esclusa; il profilo non può mai svolgersi completamente verso monte: sulla base di quanto detto, essendo la corrente veloce esso è determinato da una condizione al contorno posta a monte, determinata da un ostacolo che forza la corrente a diventare veloce); raggiunge a valle la profondità critica con tangente verticale.

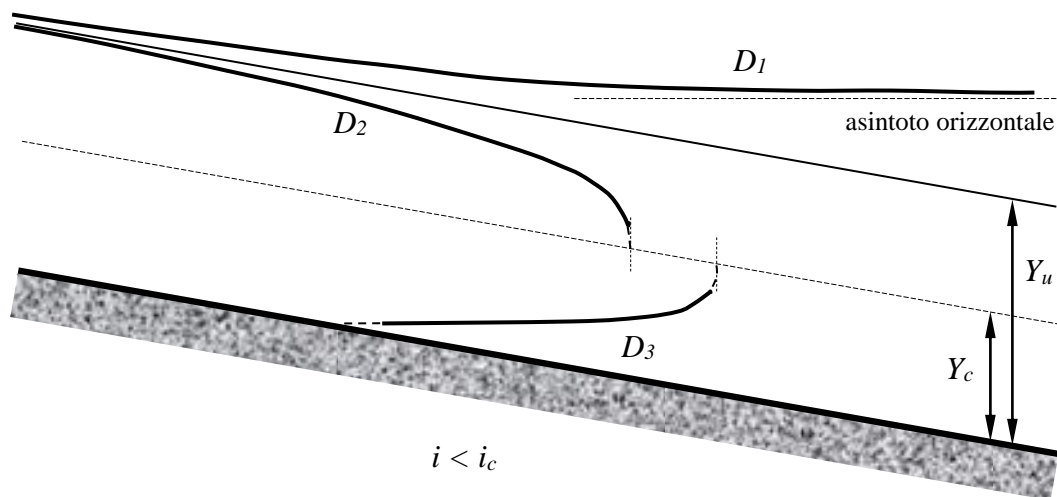


Figura 3.5. Profili di moto permanente in alvei a debole pendenza.

➤ Alvei a forte pendenza (Figura 3.6)

- profilo F_1 : corrente lenta ritardata; raggiunge la profondità critica a monte, con tangente verticale; tende asintoticamente verso valle all'orizzontale. Similmente al caso del profilo D_3 , tale eventualità è in realtà esclusa, dovendo essere il profilo di corrente lenta determinato da una condizione al contorno posta a valle (in pratica, da un ostacolo alla corrente);

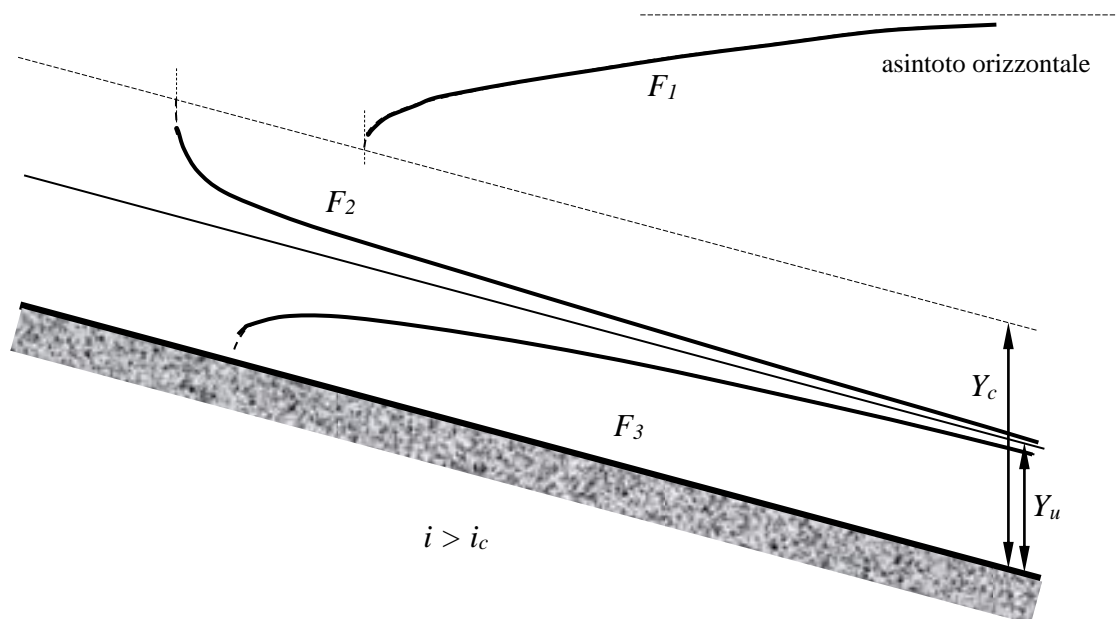


Figura 3.6. Profili di moto permanente in alvei a forte pendenza.

- profilo F_2 : corrente veloce accelerata; raggiunge a monte la profondità critica con tangente verticale, tende asintoticamente verso valle al moto uniforme;
- profilo F_3 : corrente veloce ritardata; raggiunge la profondità nulla a monte ad una distanza finita (analogamente al profilo D_3 , ciò in realtà non succede; il profilo è originato da una condizione al contorno da monte a profondità non nulla, per effetto di un ostacolo che obbliga la corrente a portarsi ad una profondità inferiore a quella di moto uniforme); tende asintoticamente verso valle alla profondità di moto uniforme

➤ Alvei a pendenza nulla (Figura 3.7)

Il caso in cui la pendenza dell'alveo sia nulla può considerarsi un caso limite di alveo a debole pendenza. Il valore nullo della pendenza determina, per la legge del moto uniforme, una altezza di moto uniforme tendente all'infinito; viene perciò a mancare l'analogo del profilo D_1 . Per il resto, per i casi di profondità maggiore o minore della profondità critica, il comportamento del segno del numeratore e del denominatore del secondo membro della equazione (3.6) è il medesimo che nel caso di pendenza debole ma non nulla. Si individuano pertanto i profili O_2 e O_3 , aventi le stesse caratteristiche qualitative rispettivamente dei D_2 e D_3 . Verso monte, dovendo tendere all'altezza di moto uniforme, il profilo O_2 tende ad aumentare indefinitamente la profondità.

Si osservi che l'equazione (3.6) non possiede alcuna singolarità derivante specificamente dall'essere l'alveo a pendenza nulla, la cui unica conseguenza consiste nel fatto che il numeratore della frazione a secondo membro si mantiene di segno negativo.

Date le caratteristiche dei possibili profili, è anche evidente che non possa darsi il caso di un alveo a pendenza nulla di lunghezza indefinita.

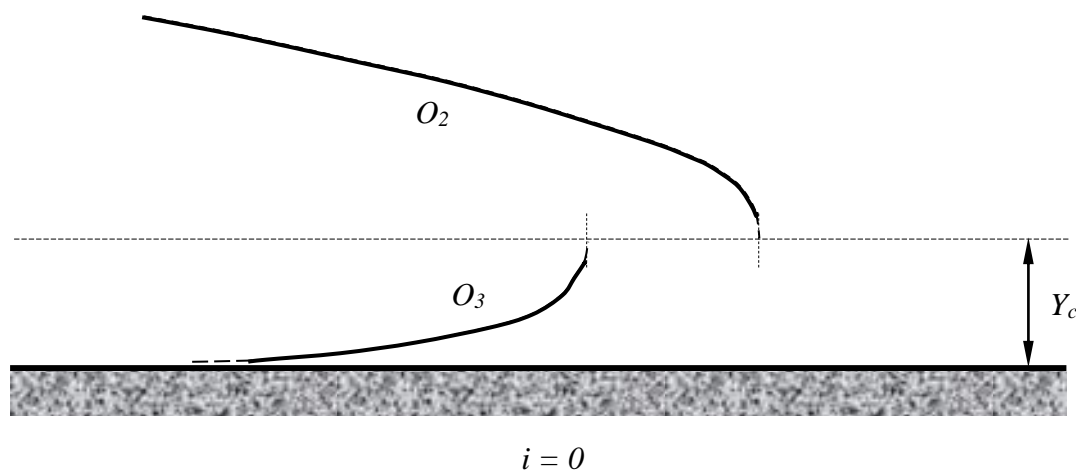


Figura 3.7. Profili di moto permanente in alveo a pendenza nulla.

➤ Alvei in contropendenza (Figura 3.8)

La stessa osservazione qualitativa sui profili in alveo a pendenza nulla può farsi nel caso di alvei in contropendenza. Anche in questo caso, infatti, il numeratore del secondo membro della equazione (3.6) può assumere esclusivamente il segno negativo, mentre entrambi i segni sono consentiti per il denominatore. Si hanno perciò i profili N_2 e N_3 , aventi le stesse caratteristiche qualitative dei profili O_2 e O_3 .

Anche gli alvei in contropendenza non possono essere che di lunghezza finita.

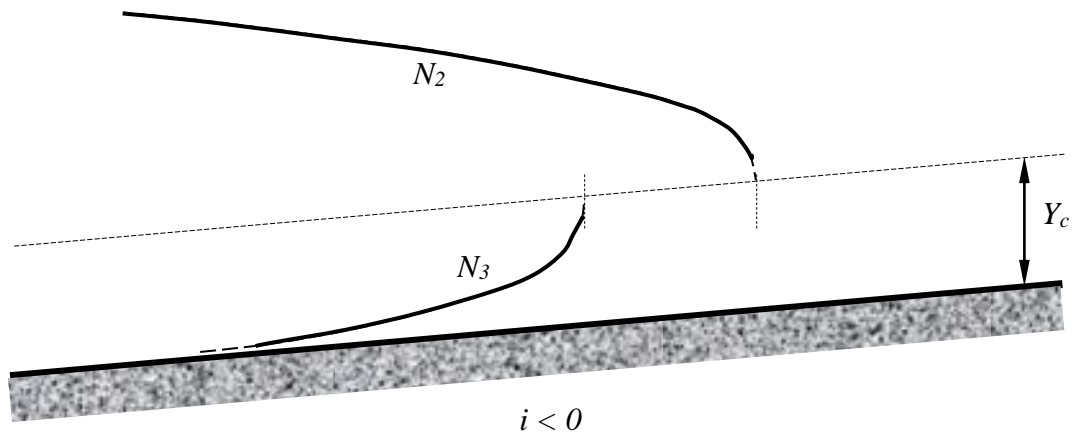


Figura 3.8. Profili di moto permanente in alveo in contropendenza.

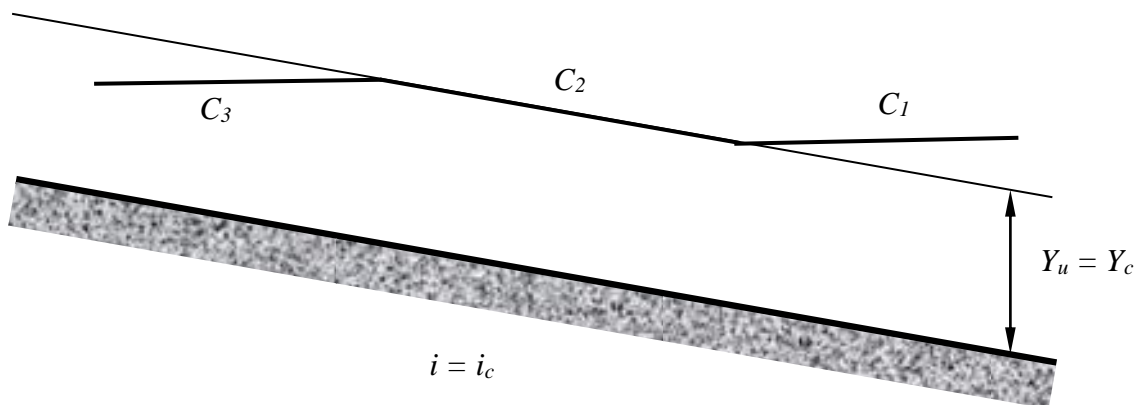


Figura 3.9. Profili di moto permanente in alveo a pendenza critica.

➤ Alvei a pendenza critica (Figura 3.9)

Sono gli alvei per i quali la profondità di moto uniforme è pari alla profondità critica. In essi sono possibili unicamente profili con profondità crescente (C_3 , $Y < Y_u$ o C_1 , $Y > Y_u$) o stazionaria (C_2 , $Y = Y_u = Y_c$). Nei tratti a profondità crescente il profilo si mantiene molto prossimo all'orizzontale, almeno per profondità non troppo piccole.

Per un alveo rettangolare in cui $Y/b \ll 1$, assumendo l'espressione del coefficiente di Chezy in funzione della scabrezza di Strickler si può mostrare che, in prossimità della profondità critica la pendenza dei profili C_1 od C_3 rispetto all'orizzontale è pari a $i_f/9$. Il profilo C_1 tende all'orizzontale al tendere all'infinito della profondità (verso valle), mentre il profilo C_3 tende ad assumere una pendenza infinita (tangente verticale) al tendere a zero della profondità. Come per altri profili teoricamente passanti per il fondo dell'alveo, anche il profilo C_3 , di corrente veloce, si traccia a partire da una condizione fissata a monte con profondità non nulla.

Esercizio 3.1

Determinare la scala delle portate di moto uniforme e la relazione fra portate e corrispondenti valori delle altezze critiche di un alveo prismatico la cui sezione è riportata in Figura 3.10 (misure in m).

Dati:

- scabrezza dell'alveo $k_s = 30 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ (Gauckler-Strickler);
- pendenza dell'alveo $i_f = 0,0015$.

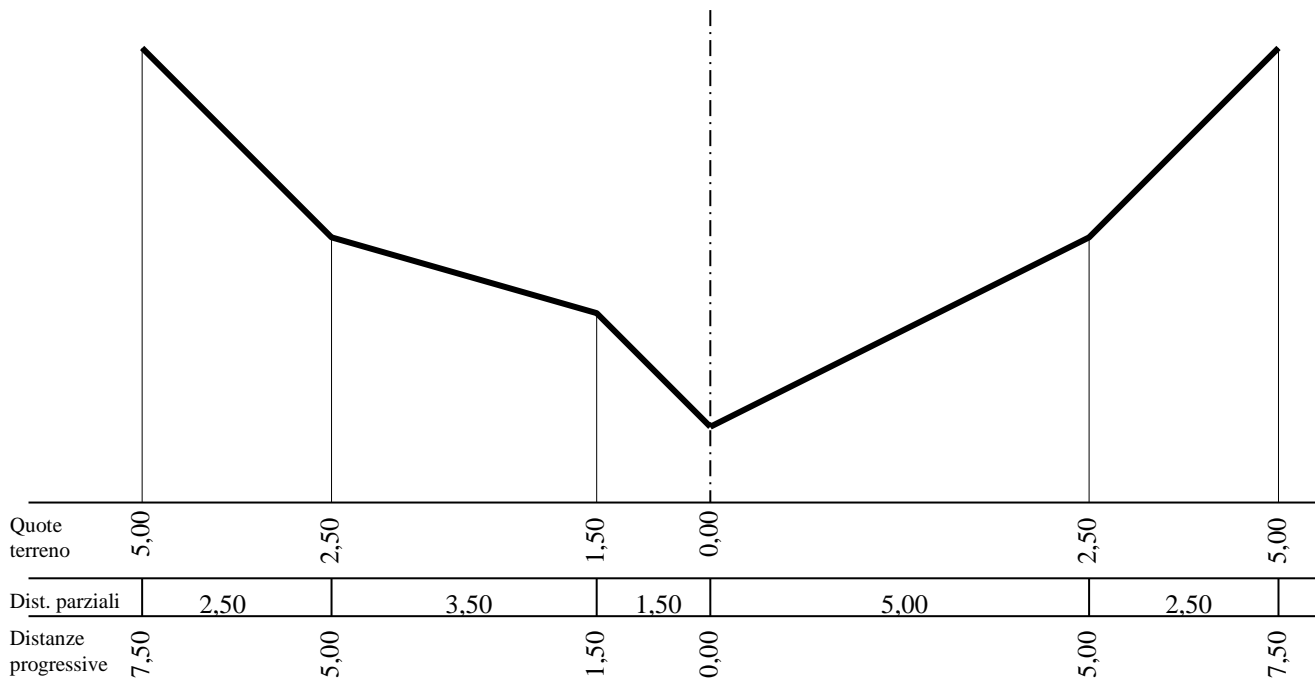


Figura 3.10. Sezione trasversale di un canale (misure in m).

La sezione trasversale di un canale viene normalmente fornita in forma di coordinate planimetriche e altimetriche di punti caratteristici dell'alveo fra i quali è plausibile determinare le quote mediante interpolazione lineare. Un esempio di sezione trasversale è riportato in Figura 3.10, nella quale compaiono le quote dell'alveo in tali punti caratteristici (denominate *quote del terreno*, immaginando che si tratti di un alveo naturale), le interdistanze fra due punti contigui (*distanze parziali*) e le distanze dall'asse della sezione, assunto passante per il punto più depresso della sezione (*distanze progressive*).

Allo scopo di determinare le curve richieste, la medesima rappresentazione in termini di quote e distanze progressive viene utilizzata con un passo delle quote abbastanza ridotto da consentire il tracciamento delle curve stesse per punti con sufficiente risoluzione e precisione, ad esempio 0,5 m. Avendo assunto l'asse passante per il punto più depresso, le quote del pelo libero misurate rispetto a tale punto sono le profondità Y della corrente. Assegnata la forma della sezione tramite le distanze dall'asse delle sponde destra (λ_{dx}) e sinistra (λ_{sx}) in funzione della profondità Y e introdotto un indice i per la numerazione dei valori di profondità considerati, è agevole ricavare, mediante un foglio elettronico, le curve delle seguenti grandezze (vedi Figura 3.11):

- $\lambda_i = \lambda_{dx_i} + \lambda_{sx_i} = b_i$ larghezza del pelo libero (m);
- $\Omega_i = \Omega_{i-1} + \frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_{i-1}) \times (y_i - y_{i-1})$ area della sezione (m^2);

- $c_i = c_{i-1} + \sqrt{(\lambda_{dx_i} - \lambda_{dx_{i-1}})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} + \sqrt{(\lambda_{sx_i} - \lambda_{sx_{i-1}})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$ contorno bagnato (m);
- $R_i = \Omega_i / c_i$ raggio idraulico (m);
- $Y_{m_i} = \Omega_i / b_i$ profondità media (m);
- $\chi_i = k_s R_i^{1/6}$ coefficiente di Chezy ($m^{1/2}s^{-1}$);
- $Q_{u_i} = \Omega_i \chi_i \sqrt{R_i i_f}$ portata di moto uniforme della corrente di profondità Y_i (m^3s^{-1});
- $Q_{c_i} = b_i \sqrt{g Y_{m_i}^3}$ portata per la quale $Y_c = Y_i$ (m^3s^{-1}).

y, Y (m)	λ_{dx} (m)	λ_{sx} (m)	λ, b (m)	Ω (m ²)	c (m)	R_i (m)	Y_m (m)	χ (m ^{1/2} s ⁻¹)	Q_u (m ³ s ⁻¹)	Q_c (m ³ s ⁻¹)
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.50	1.00	0.50	1.50	0.38	1.83	0.21	0.25	23.05	0.15	0.59
1.00	2.00	1.00	3.00	1.50	3.65	0.41	0.50	25.87	0.96	3.32
1.50	3.00	1.50	4.50	3.38	5.48	0.62	0.75	27.68	2.84	9.15
2.00	4.00	3.25	7.25	6.31	8.41	0.75	0.87	28.60	6.06	18.45
2.50	5.00	5.00	10.00	10.63	11.35	0.94	1.06	29.67	11.81	34.30
3.00	5.50	5.50	11.00	15.88	12.77	1.24	1.44	31.11	21.33	59.73
3.50	6.00	6.00	12.00	21.63	14.18	1.53	1.80	32.19	33.29	90.92
4.00	6.50	6.50	13.00	27.88	15.59	1.79	2.14	33.05	47.70	127.85
4.50	7.00	7.00	14.00	34.63	17.01	2.04	2.47	33.77	64.62	170.55
5.00	7.50	7.50	15.00	41.88	18.42	2.27	2.79	34.40	84.11	219.14

Figura 3.11. Implementazione del calcolo della scala delle portate di moto uniforme e delle altezze critiche su foglio elettronico.

In particolare, nelle espressioni su riportate le espressioni fornite per l'area della sezione e per il contorno bagnato sono discretizzazioni alle differenze finite dei seguenti integrali, che definiscono dette grandezze:

$$\Omega(Y) = \int_0^Y \lambda(y) dy ;$$

$$c(Y) = \int_0^Y \sqrt{1 + \left(\frac{d\lambda_{dx}}{dy}\right)^2} dy + \int_0^Y \sqrt{1 + \left(\frac{d\lambda_{sx}}{dy}\right)^2} dy .$$

Riportando in grafico le varie grandezze, si ottengono i diagrammi riportati nelle Figura 3.12, Figura 3.13 e Figura 3.14, di cui la prima riporta i dati che definiscono compiutamente la forma della sezione, la seconda riporta grandezze utilizzate per il tracciamento dei profili e la terza riporta la *scala delle portate di moto uniforme* – relazione univoca fra profondità e portata in moto uniforme – e la relazione univoca fra portate ed altezze critiche corrispondenti.

Qualora tali diagrammi vengano utilizzati direttamente per l'esecuzione dei calcoli ed il canale in oggetto si componga di diversi tronchi aventi uguali caratteristiche geometriche e di scabrezza ma diverse pendenze, si suole utilizzare la scala delle portate *ridotte* di moto uniforme, ossia la

traduzione grafica della relazione (scala delle portate dell'alveo di pendenza unitaria):

$$\frac{Q}{\sqrt{i_f}} = \Omega \chi \sqrt{R_i} .$$

Dati sezione

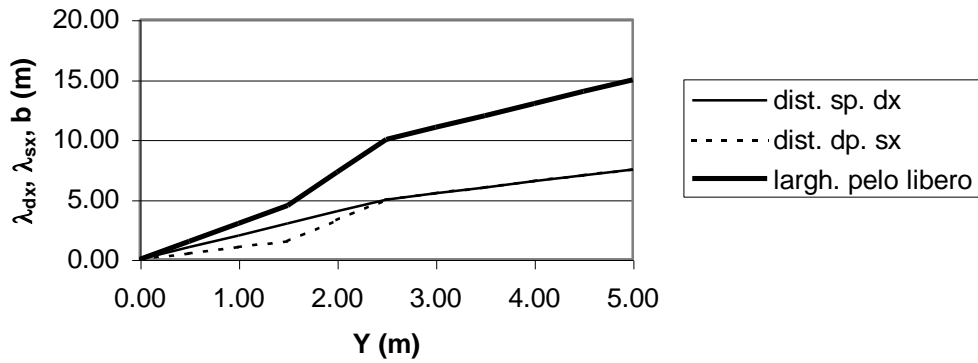


Figura 3.12. Dati descrittivi della sezione.

elementi caratteristici sezione

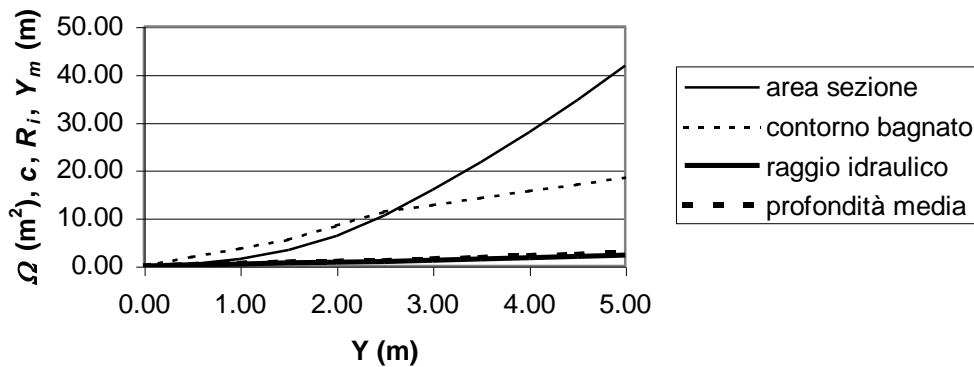


Figura 3.13. Elementi caratteristici della sezione.

Scale portate moto uniforme e altezze critiche

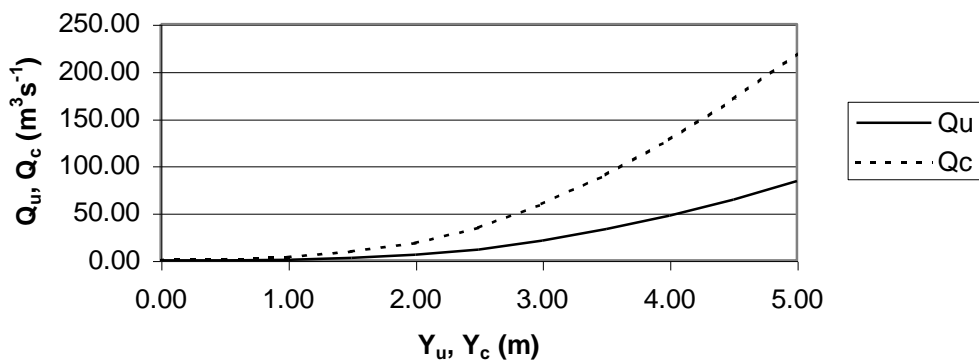


Figura 3.14. Scale delle portate di moto uniforme e delle altezze critiche.

Dalla Figura 3.14 si deduce che l'alveo è a debole pendenza in tutto l'intervallo di portate convogliabili dal canale, in quanto per qualunque valore fissato di portata di ha $Y_u > Y_c$.

Mediante la scala delle portate di moto uniforme (eventualmente delle portate ridotte) in forma grafica è ugualmente agevole determinare con quale profondità fluisce nel canale in oggetto una portata assegnata in condizioni di moto uniforme, come pure il quesito inverso: quale portata fluisca in moto permanente con una profondità assegnata.

Nonostante la rappresentazione grafica abbia il pregio dell'immediatezza della percezione all'occhio esperto (in particolare, dell'ingegnere) e sia perciò sempre conveniente esprimere sia i dati che i risultati anche in forma grafica, dal punto di vista pratico della effettuazione dei calcoli può essere oggi preferibile, anche per motivi di rapidità di esecuzione, il calcolo numerico.

La risoluzione dei due problemi ora accennati per via numerica presenta, al contrario del caso del calcolo grafico, una differenza significativa, la quale persiste anche nel caso di sezioni molto semplici, definibili non necessariamente per punti ma con un numero ridotto di parametri: ad esempio, una sezione rettangolare, definita dalla sola larghezza dell'alveo, o una sezione trapezoidale, definita dalla larghezza al fondo e dall'inclinazione delle pareti laterali. Anche per tali forme della sezione, per le quali tutte le grandezze di interesse possono essere espresse in forma compatta, l'operazione di calcolo della portata di moto permanente corrispondente ad un dato valore di profondità è più semplice dell'operazione inversa.

Consideriamo, a titolo di esempio, una sezione rettangolare di larghezza b assegnata. Le espressioni delle stesse grandezze calcolate per l'alveo di Figura 3.10 sono le seguenti per l'alveo rettangolare (non si rende più necessario l'indice i):

- $\lambda = b$ larghezza del pelo libero (m);
- $\Omega(Y) = bY$ area della sezione (m^2);
- $c(Y) = b + 2Y$ contorno bagnato (m);
- $R_i(Y) = \Omega / c = \frac{bY}{b + 2Y}$ raggio idraulico (m);
- $Y_m(Y) = \Omega / b = Y$ profondità media (m);
- $\chi(Y) = k_s \left(\frac{bY}{b + 2Y} \right)^{1/6}$ coefficiente di Chezy ($m^{1/2}s^{-1}$);
- $Q_u(Y_u) = \Omega \chi \sqrt{R_i i_f} = bY_u k_s \left(\frac{bY_u}{b + 2Y_u} \right)^{2/3} \sqrt{i_f}$ portata di moto uniforme (m^3s^{-1});
- $Q_c(Y_c) = b \sqrt{gY_c^3}$ portata per la quale $Y_c = Y_i$ (m^3s^{-1}).

L'espressione della portata di moto uniforme, esplicita in funzione della profondità Y_u , non è invertibile in forma analitica. Pertanto se la soluzione del problema della determinazione della portata di moto uniforme di profondità Y_u è facilmente risolvibile in modo diretto, lo stesso non può dirsi per il problema inverso, per la soluzione del quale è necessario ricorrere ad un procedimento iterativo. In linea generale un procedimento di questo tipo consiste nella determinazione di una successione di valori di portata calcolati mediante la formula di Chezy nella forma $Q_u = f(Y_u)$, il cui scarto rispetto al valore prefissato tenda a zero all'aumentare dell'indice della successione. L'analisi numerica insegna le tecniche più efficienti per la soluzione di un problema di questo tipo. Qui descriviamo un metodo elementare, del tutto adeguato per l'inversione di una curva dall'andamento regolare quale la scala delle portate di moto uniforme, che lo studente può facilmente implementare su un foglio di calcolo o con un linguaggio di programmazione, anche su calcolatrice programmabile. Nello schema del procedimento ε rappresenta una tolleranza prefissata (errore che si è disposti ad accettare sulla portata) e ΔY un incremento costante delle profondità utilizzato

(primo *loop*) per determinare due valori successivi Y_{i-1} ed Y_i tali che $Q_{i-1} < Q^*$ $Q_i > Q^*$, fra i quali viene cercata la soluzione con successivi raffinamenti della ricerca (secondo *loop*).

Il procedimento indicato si presta all'uso in molti altri problemi pratici dell'Idraulica, che richiedono la soluzione di equazioni o di sistemi di equazioni non lineari.

In alternativa, più semplicemente, potrà utilizzarsi un solutore automatico di un foglio di calcolo.

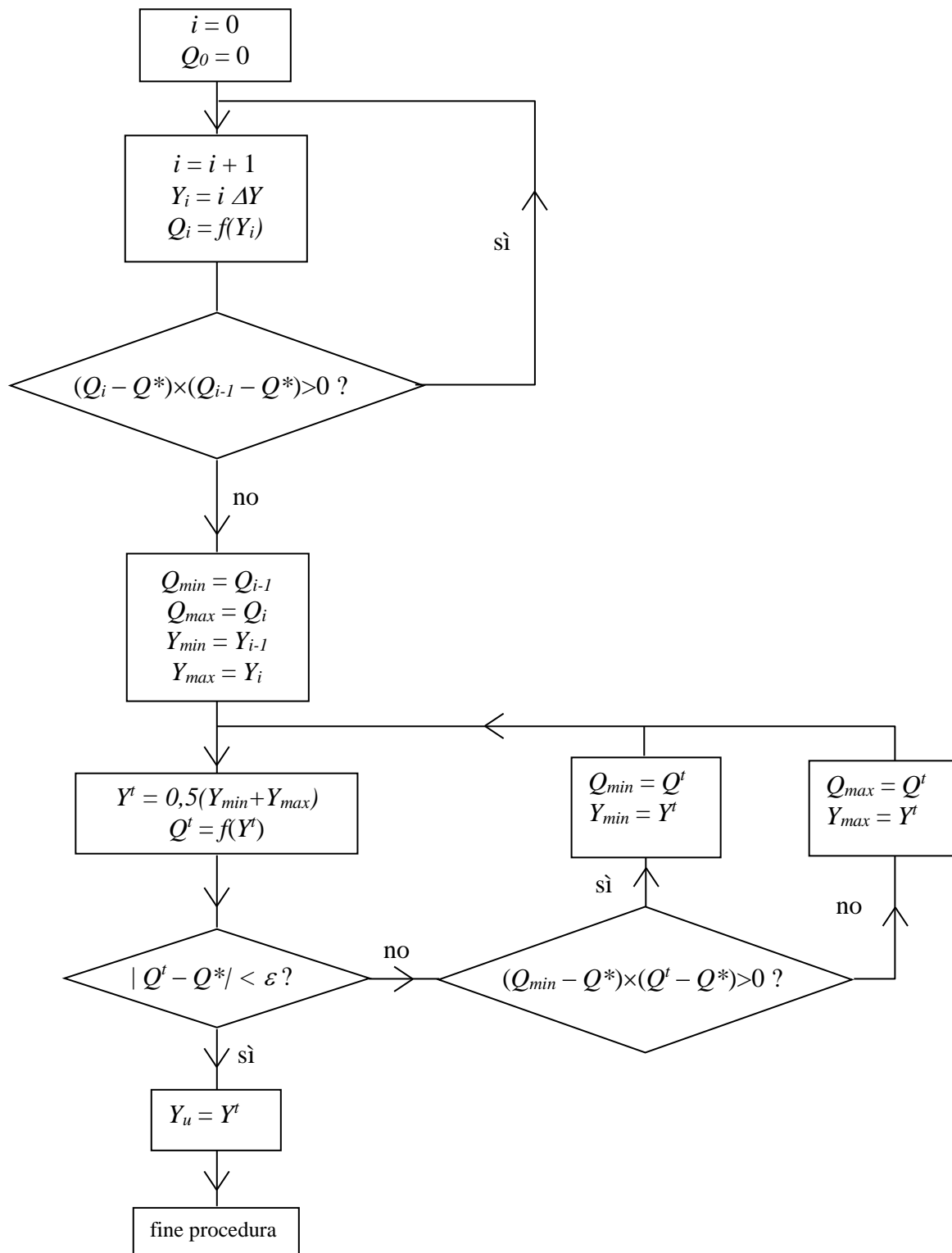


Figura 3.15. Diagramma di flusso di un procedimento iterativo per la determinazione della profondità di moto uniforme corrispondente ad una portata assegnata.

Esercizio 3.2

Determinare la scala delle portate di moto uniforme e la relazione fra portate e corrispondenti valori delle altezze critiche di un alveo avente la sezione rettangolare riportata in Figura 3.16 (misure in m).

Dati:

- scabrezza dell'alveo $k_s = 30 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ (Gauckler-Strickler);
- pendenza dell'alveo $i_f = 0,0015$.

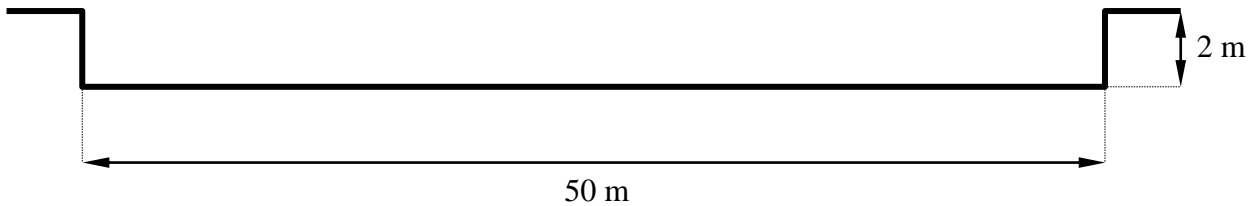


Figura 3.16. Sezione trasversale di un alveo rettangolare.

Le curve richieste possono essere tracciate sulla base delle relazioni analitiche fra gli elementi caratteristici della sezione e la profondità Y che è possibile definire, in generale, per un alveo rettangolare, come mostrato nell'Esercizio 3.1:

- $\lambda = b$ larghezza del pelo libero (m);
- $\Omega(Y) = bY$ area della sezione (m^2);
- $c(Y) = b + 2Y$ contorno bagnato (m);
- $R_i(Y) = \Omega / c = \frac{bY}{b + 2Y}$ raggio idraulico (m);
- $Y_m(Y) = \Omega / b = Y$ profondità media (m);
- $\chi(Y) = k_s \left(\frac{bY}{b + 2Y} \right)^{1/6}$ coefficiente di Chezy ($\text{m}^{1/2}\text{s}^{-1}$);
- $Q_u(Y_u) = \Omega \chi \sqrt{R_i i_f} = b Y_u k_s \left(\frac{b Y_u}{b + 2 Y_u} \right)^{2/3} \sqrt{i_f}$ portata di moto uniforme (m^3s^{-1});
- $Q_c(Y_c) = b \sqrt{g Y_c^3}$ portata per la quale $Y_c = Y_i$ (m^3s^{-1}).

Nel caso in questione la larghezza dell'alveo è relativamente grande in confronto alla massima profondità possibile in assenza di esondazione. È perciò possibile ottenere la scala delle portate di moto uniforme in forma monomia, esplicitabile rispetto alla profondità. Si ha infatti:

$$R_i(Y) = \Omega / c = \frac{bY}{b + 2Y} \cong \frac{bY}{b} = Y$$

da cui

$$Q_u(Y_u) = \Omega \chi \sqrt{R_i i_f} = b k_s \sqrt{i_f} Y_u^{5/3}$$

e, inversamente:

$$Y_u = \left(\frac{Q_u}{bk_s \sqrt{i_f}} \right)^{3/5} . \quad (3.7)$$

Nella Figura 3.17 sono riportate le scale delle portate di moto uniforme calcolate mediante le relazioni esatte per le varie grandezze caratteristiche e, in modo approssimato, mediante la (3.7), nonché la relazione fra portate e profondità critica. Si può osservare come la relazione approssimata fornisca valori di portata molto prossimi a quelli calcolati con la formula esatta. Anche in questo caso, l'alveo è a debole pendenza per tutti i valori di portata convogliabili dal canale in condizioni di moto uniforme ($0 \leq Y_u \leq 2$ m).

La forma particolarmente semplice che può assumersi per la scala delle portate di moto uniforme consente qualche ulteriore osservazione, che può essere senz'altro estesa al caso delle sezioni aperte, nelle quali cioè la funzione $b(Y)$ sia monotona crescente.

L'espressione della profondità critica in funzione della portata è data dalla:

$$Y_c = \left(\frac{Q^2}{gb^2} \right)^{1/3} . \quad (3.8)$$

Dal confronto fra la (3.7) e la (3.8) si evince che la profondità critica è infinitesimo di ordine superiore rispetto alla profondità di moto uniforme al tendere a zero della portata e infinito di ordine superiore al tendere all'infinito della portata. La circostanza deriva, evidentemente, dai valori dell'esponente della portata nelle rispettive espressioni, e non dipende perciò dai valori della pendenza, della scabrezza o della larghezza dell'alveo. Ciò significa che, qualunque siano le caratteristiche dell'alveo, si può sempre affermare che esso è a debole pendenza per portate sufficientemente piccole e a forte pendenza per portate sufficientemente grandi.

Il valore di portata che separa le due differenti proprietà dell'alveo si ottiene uguagliando le espressioni della profondità di moto uniforme e della profondità critica:

$$\left(\frac{Q^2}{gb^2} \right)^{1/3} = \left(\frac{Q}{bk_s \sqrt{i_f}} \right)^{3/5} \Rightarrow Q^* = \frac{g^5 b}{k_s^9 i_f^{9/2}} ,$$

Scala portate moto uniforme e altezze critiche

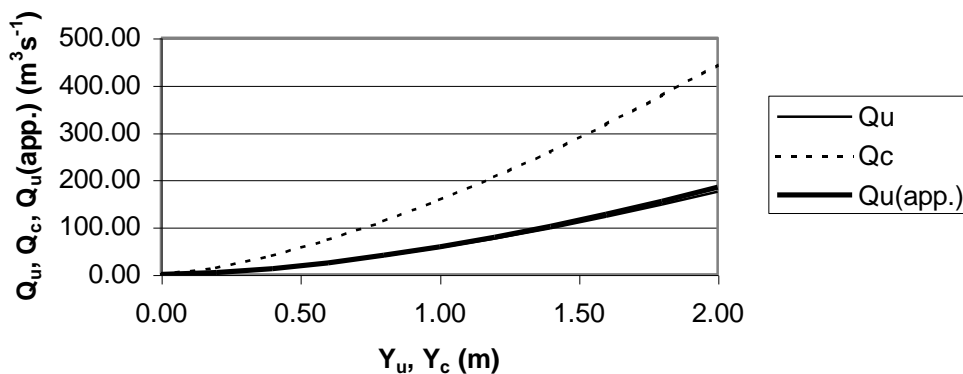


Figura 3.17. Scale delle portate di moto uniforme esatta ed approssimata e relazione fra portate ed altezza critica.

da cui, sostituendo i valori numerici:

$$Q^* = \frac{(9,81)^5 \times 50}{(30)^9 \times (0,0015)^{9/2}} = 1.177.099 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1},$$

che è un valore ben maggiore della massima portata convogliabile dal canale in condizioni di profondità massima $Y = 2 \text{ m}$.

Dalla condizione di uguaglianza fra profondità di moto uniforme e profondità critica si può anche dedurre l'espressione della *pendenza critica* del canale in funzione della portata:

$$\left(\frac{Q^2}{gb^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{Q}{bk_s \sqrt{i_f}}\right)^{3/5} \Rightarrow i_c = \frac{g^{10/9} b^{2/9}}{k_s^2 Q^{2/9}}.$$

Ad esempio, la pendenza critica del canale corrispondente ad una portata $Q = 200 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ è pari a:

$$i_c^* = \frac{(9,81)^{10/9} \times (50)^{2/9}}{(30)^2 \times (200)^{2/9}} = 0,0103,$$

cioè, a circa l'1 %. Se il canale avesse tale valore di pendenza, in corrispondenza della portata $Q = 200 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ si avrebbe l'intersezione della scala delle portate di moto uniforme con la curva $Y_c = f(Q)$, per una profondità della corrente:

$$Y_c = \left(\frac{Q^2}{gb^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{(200)^2}{9,81 \times (50)^2}\right)^{1/3} = 1,18 \text{ m}.$$

Pertanto, con tale valore di pendenza il canale può essere sia a forte che a debole pendenza per profondità di moto uniforme comprese nell'intervallo 0÷2 m, come riassunto nello schema seguente:

portata	profondità di moto uniforme	tipo di alveo
$Q < 200 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$	$Y_u < 1,18 \text{ m}$	a debole pendenza
$Q = 200 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$	$Y_u = 1,18 \text{ m}$	a pendenza critica
$Q > 200 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$	$Y_u > 1,18 \text{ m}$	a forte pendenza

In pratica, in casi come quello testè descritto, il fatto che gli esponenti delle portate nelle espressioni della profondità di moto uniforme e della profondità critica siano poco differenti ($3/5 = 9/15$ contro $2/3 = 10/15$ rispettivamente) fa sì che la scala delle portate di moto uniforme e la relazione fra portata e profondità critica siano due curve molto prossime in tutto l'intervallo di profondità 0÷2 m, come mostrato in Figura 3.18. Come conseguenza di ciò si ha anche che la stima della portata per cui $Y_u = Y_c$ è affetta da un errore relativamente grande, anche se, in pratica, la cosa non è di rilevante importanza.

Scala portate moto uniforme e profondità critiche

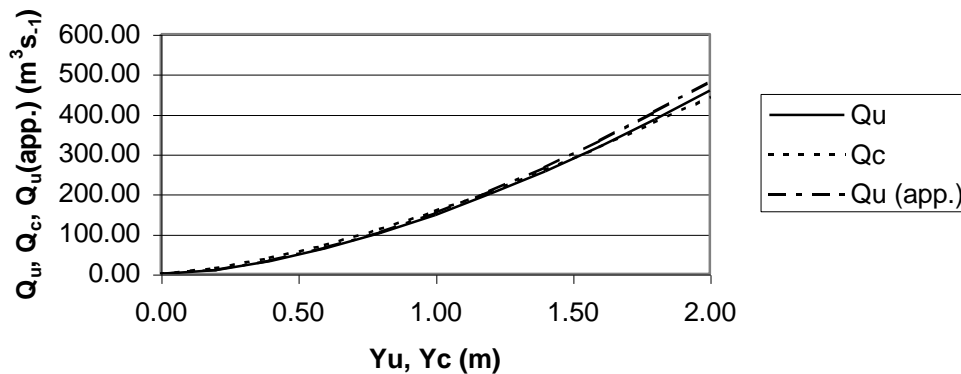


Figura 3.18. Scale delle portate di moto uniforme esatta ed approssimata e relazione fra portate ed altezza critica per $i_f = 0,0103$.

Esercizio 3.3

Determinare il profilo di moto permanente nell'alveo avente la sezione trasversale riportata in Figura 3.10 (Esercizio 3.1), il cui profilo longitudinale del fondo sia quello in Figura 3.19, indefinito sia verso monte che verso valle.

Dati:

- portata $Q = 50 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$;
- scabrezza dell'alveo $k_s = 30 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ (Gauckler-Strickler);
- pendenza dell'alveo $i_{f1} = 0,0015$;
- pendenza dell'alveo $i_{f2} = 0,015$.

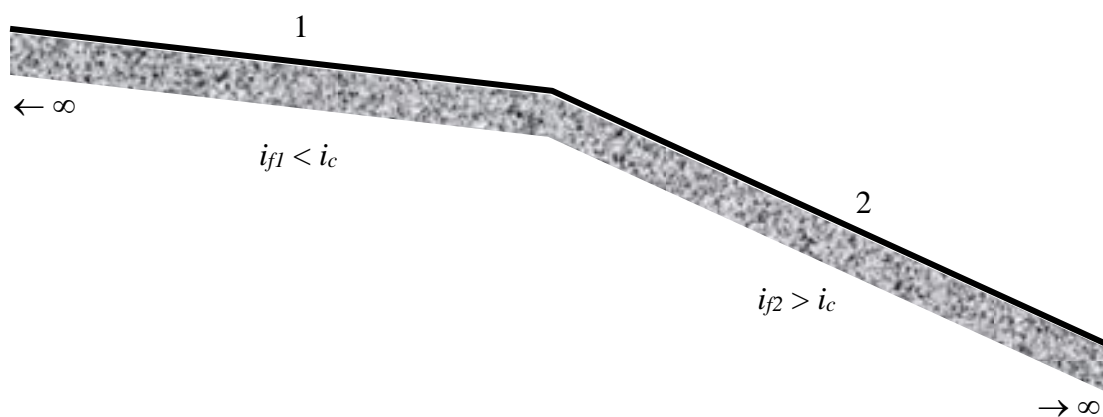


Figura 3.19. Profilo longitudinale del fondo di un canale.

Innanzitutto occorre determinare le caratteristiche di pendenza dei due tronchi del canale, aventi in comune la sezione trasversale, per la portata assegnata. Nella Figura 3.20 sono riportate le scale delle portate di moto uniforme relative ai due tratti del canale e la relazione fra portate e profondità critiche della sezione comune, tracciate con i valori calcolati in Tabella 3.1. Da tale figura si evince che, per la portata di $50 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$, il primo tratto è a debole pendenza ($Y_u > Y_c$, $i < i_c$), mentre il secondo

tratto è a forte pendenza ($Y_u < Y_c, i > i_c$). La profondità critica corrispondente alla portata di $50 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ può dedursi dal diagramma di Figura 3.20 o, con maggiore precisione, interpolando linearmente fra i valori di altezza critica calcolati nella Tabella 3.1, corrispondenti ai due valori successivi di portata che comprendono il valore di $50 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$.

$$\frac{Y_c - 2,50}{3,00 - 2,50} = \frac{50 - 34,30}{59,73 - 34,30} \Rightarrow Y_c = 2,50 + (3,00 - 2,50) \times \frac{50 - 34,30}{59,73 - 34,30} = 2,809 \text{ m}$$

In modo del tutto analogo si determinano i valori delle altezze di moto uniforme nei due tratti:

$$\frac{Y_{u1} - 4,00}{4,50 - 4,00} = \frac{50 - 47,70}{64,62 - 47,70} \Rightarrow Y_{u1} = 4,00 + (4,50 - 4,00) \times \frac{50 - 47,70}{64,62 - 47,70} = 4,068 \text{ m} ,$$

$$\frac{Y_{u2} - 2,50}{3,00 - 2,50} = \frac{50 - 37,35}{67,45 - 37,35} \Rightarrow Y_{u2} = 2,50 + (3,00 - 2,50) \times \frac{50 - 37,35}{67,45 - 37,35} = 2,710 \text{ m} .$$

Tabella 3.1. Elementi caratteristici della sezione dell'alveo.

y, Y (m)	λ_{dx} (m)	λ_{sx} (m)	λ, b (m)	Ω (m ²)	c (m)	R_i (m)	Y_m (m)	χ (m ^{1/2} s ⁻¹)	Q_{u1} (m ³ s ⁻¹)	Q_c (m ³ s ⁻¹)	Q_{u2} (m ³ s ⁻¹)
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.50	1.00	0.50	1.50	0.38	1.83	0.21	0.25	23.05	0.15	0.59	0.48
1.00	2.00	1.00	3.00	1.50	3.65	0.41	0.50	25.87	0.96	3.32	3.05
1.50	3.00	1.50	4.50	3.38	5.48	0.62	0.75	27.68	2.84	9.15	8.98
2.00	4.00	3.25	7.25	6.31	8.41	0.75	0.87	28.60	6.06	18.45	19.15
2.50	5.00	5.00	10.00	10.63	11.35	0.94	1.06	29.67	11.81	34.30	37.35
3.00	5.50	5.50	11.00	15.88	12.77	1.24	1.44	31.11	21.33	59.73	67.45
3.50	6.00	6.00	12.00	21.63	14.18	1.53	1.80	32.19	33.29	90.92	105.27
4.00	6.50	6.50	13.00	27.88	15.59	1.79	2.14	33.05	47.70	127.85	150.85
4.50	7.00	7.00	14.00	34.63	17.01	2.04	2.47	33.77	64.62	170.55	204.35
5.00	7.50	7.50	15.00	41.88	18.42	2.27	2.79	34.40	84.11	219.14	265.99

Scale portate moto uniforme e profondità critiche

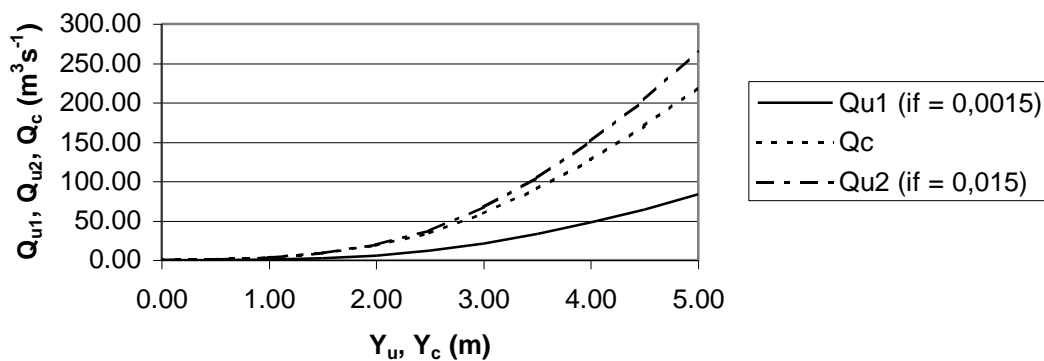


Figura 3.20. Scale delle portate di moto uniforme e profondità critiche per il canale dell'Esercizio 3.3.

Determinazione dei tipi di profilo di moto permanente

Una volta determinate le profondità caratteristiche della corrente, è possibile determinare i tipi dei profili di moto permanente.

Date le caratteristiche di pendenza dei due tratti, supposti di sviluppo indefinito e quindi privi di manufatti che possano costituire ostacoli per la corrente, il profilo deve essere composto da un tipo D_2 nel tratto 1 e da un tipo F_2 nel tratto 2, raccordati nella sezione ove avviene il cambiamento di pendenza, ove si ha il passaggio per lo stato critico. Infatti, in qualche zona del tratto 1 potrebbe aversi un tipo D_3 soltanto in presenza di un ostacolo posto a monte che forzi la corrente a diventare veloce verso valle, mentre un profilo D_1 necessiterebbe di un ostacolo posto a valle che imponga alla corrente di assumere una profondità maggiore di quella di moto uniforme verso monte. Analogamente, nel tratto 2 può aversi un profilo di tipo F_1 soltanto in presenza di un ostacolo posto a valle che costringa la corrente a diventare lenta a monte, mentre un profilo di tipo F_3 necessiterebbe di un ostacolo a monte che forzi la corrente a portarsi ad una profondità inferiore a quella di moto uniforme verso valle. L'unica possibilità compatibile con le condizioni dette di assenza di manufatti lungo i due tratti di sviluppo indefinito e con la necessità che il profilo 1 sia tutto in corrente lenta e il 2 tutto in corrente veloce è pertanto data dalla sequenza $D_2 - F_2$.

Come fatto di carattere generale che occorre tenere presente nella soluzione di problemi di moto permanente di correnti a pelo libero, si ha che il passaggio per lo stato critico da corrente lenta a corrente veloce nel senso del moto avviene *spontaneamente*¹² qualora si verificino determinate condizioni di tipo *puramente qualitativo*, quali la successione di un tratto a debole pendenza seguito da uno a forte pendenza. Infatti, in tal modo per effetto di una corrente lenta il profilo può infatti risentire verso monte della perturbazione causata, nella sezione in cui si ha la profondità critica, dal cambiamento dei parametri del canale, mentre una corrente veloce consente la propagazione verso valle della stessa perturbazione¹³.

Ciò significa, ad esempio, che, cambiando il valore della portata immessa, dopo un transitorio più o meno lungo si perviene ad una nuova situazione di moto permanente in cui si ha ancora la transizione per lo stato critico nella sezione di collegamento fra i due tratti, relativo al nuovo valore di portata, qualunque esso sia. Lo stesso avverrebbe, a parità di portata, se venissero variate le pendenze di uno dei tratti o anche di entrambi, purché si mantengano il tratto 1 a debole pendenza ed il tratto 2 a forte pendenza. Viceversa, apportando una variazione *casuale* alle condizioni del moto di una corrente per la quale sia stato imposto in precedenza il passaggio con continuità da veloce a lenta, tale situazione non può più conservarsi; il passaggio da corrente veloce a corrente lenta avverrà con la discontinuità costituita dal *risalto idraulico* (detto anche *salto di Bidone*, dal nome dell'idraulico che, fra i primi, ne studiò il comportamento).

Casi particolari di transizione spontanea per lo stato critico, con passaggio della corrente da lenta a veloce per cambiamento di pendenza da debole a forte, sono la presa da un bacino con un canale in forte pendenza (il bacino è assimilabile ad un alveo a pendenza nulla, cioè debole) o il termine di un tratto a debole pendenza con un salto di fondo (alveo a pendenza infinita, cioè forte, a valle del salto). Anche di questi casi verrà dato un esempio negli esercizi a seguire.

¹² A meno che situazioni diverse, con le relative condizioni al contorno non impongano variazioni della soluzione che possiamo dire canonica e che, in linea di massima, tenderemo spesso ad assumere realizzata, almeno in prima istanza (vedi Esercizi seguenti). Viceversa, la transizione con continuità per lo stato critico nel senso veloce-lenta, possibile soltanto teoricamente, richiede, oltre che particolari caratteristiche qualitative degli alvei, ben precisi valori numerici al contorno sia a monte che a valle, ed è pertanto da considerarsi, a tutti gli effetti, un evento *a probabilità nulla*.

¹³ Con riferimento alle proprietà delle correnti lente e veloci nei confronti della propagazione delle perturbazioni, si tratta qui dell'effetto della *seconda* condizione al contorno della soluzione asintotica del problema di moto vario, la prima, agente da monte, essendo determinata dal valore della portata immessa nel canale, comune ai due tronchi di corrente. Si conferma perciò che una corrente lenta è comandata da una condizione al contorno da monte e da una condizione al contorno da valle, mentre una corrente veloce è comandata da due condizioni al contorno da monte. Dal punto di vista strettamente matematico, una volta specificato il valore della portata, l'unica equazione differenziale, nell'unica incognita $Y(s)$ che descrive il profilo di moto uniforme necessita di una sola condizione: da valle se la corrente è lenta; da monte se la corrente è veloce.

Calcolo dei profili di moto permanente

Il calcolo dei profili di moto permanente si esegue integrando l'equazione differenziale (3.6):

$$\frac{dY}{ds} = \frac{i_f - j}{1 - \frac{Q^2 b}{g \Omega^3}}$$

nella quale la cadente dei carichi totali j viene espressa mediante la formula di Chezy:

$$j = \frac{U^2}{\chi^2 R_i}$$

che, dedotta sperimentalmente per il caso di moto *uniforme*, si assume valida anche per il moto permanente. L'equazione differenziale del profilo si può quindi scrivere:

$$\frac{dY}{ds} = \frac{i_f - \frac{Q^2}{\chi^2 R_i \Omega^2}}{1 - \frac{Q^2 b}{g \Omega^3}}, \tag{3.9}$$

in cui la portata Q è costante, mentre b , Ω , R_i e χ sono tutti funzione della profondità Y , secondo le relazioni graficate nelle Figura 3.12 e Figura 3.13.

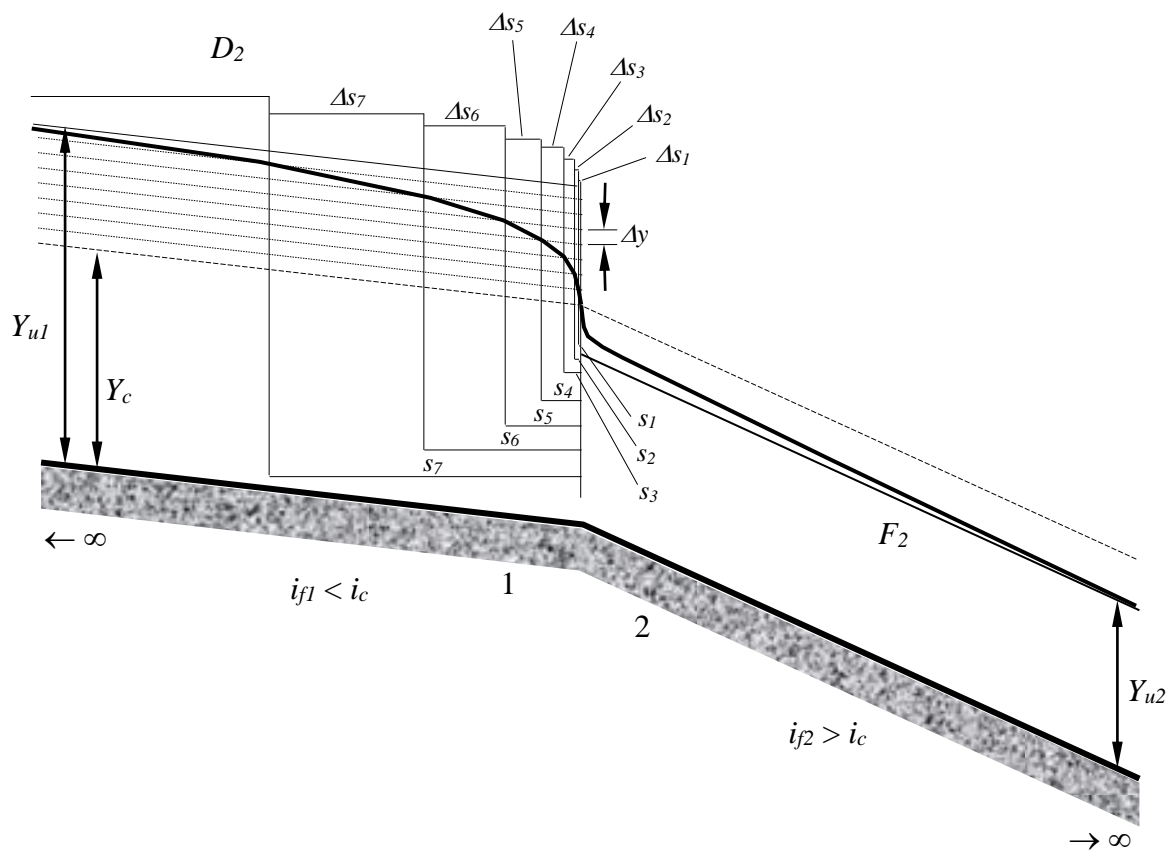


Figura 3.21. Schema di calcolo di un profilo di moto permanente.

Di seguito viene illustrata in dettaglio la procedura per il calcolo del profilo di corrente lenta D_2 .

L'equazione (3.9) è una equazione differenziale a variabili separabili, riconducibile ad una forma del tipo:

$$\frac{dY}{F(Y)} = ds ,$$

in cui la funzione $F(Y)$ è il secondo membro della equazione (3.9). L'integrale di tale equazione differenziale è:

$$\int_{Y_0}^Y \frac{dy}{F(y)} = s - s_0 , \quad (3.10)$$

ove i valori della coppia s_0, Y_0 determinano la condizione al contorno da imporre per il caso particolare. Per la determinazione dei valori della $Y(s)$ occorre pertanto risolvere l'integrale a primo membro della (3.10). Nel caso specifico, tale integrale, ovviamente, non è risolubile analiticamente, dal momento che la stessa $Y(s)$ non è data in forma analitica ma per punti. D'altro canto, in linea generale, la determinazione analitica dell'integrale non è possibile anche nel caso di sezioni più regolari: l'unico caso in cui l'equazione è integrabile analiticamente è quello della sezione rettangolare molto larga in confronto alla profondità, caso che, evidentemente, non può dirsi molto generale. A meno di questo ultimo particolare caso, si rende perciò sempre necessario risolvere l'integrale *numericamente*, con un metodo alle *differenze finite*, approssimandolo con la sommatoria seguente:

$$\int_{Y_0}^Y \frac{dy}{F(y)} \cong \sum_{i=1}^n \frac{\Delta y_i}{F(\bar{y}_i)} ,$$

nella quale $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, y_i è l' i -esimo valore della variabile y di un insieme discreto di $n+1$ punti assunti a rappresentare, in forma discreta, la funzione integranda nell'intervallo $[Y_0, Y]$ e \bar{y}_i è un qualunque valore compreso nell'intervallo $[y_i, y_{i-1}]$.

L'analisi insegna che, sotto condizioni molto generali, il limite della sommatoria al tendere a zero del massimo dei Δy_i esiste ed è unico: l'integrale è, per definizione, tale limite. In sostanza, ciò significa che si può ottenere, mediante il calcolo della sommatoria, una stima del valore dell'integrale della precisione voluta a patto di considerare una decomposizione dell'intervallo $[Y_0, Y]$ sufficientemente fine. Il calcolo numerico ha quindi come scopo la valutazione approssimata dell'integrale con un errore inferiore ad un valore prefissato.

Mentre i teoremi dell'Analisi Matematica assicurano l'esistenza e l'unicità del limite comunque venga scelto il valore medio \bar{y}_i in ciascun intervallo, la precisione del calcolo numerico dipende invece dal modo in cui tale valore medio viene scelto, variando in tal modo la rapidità di convergenza della sommatoria al limite univoco. L'Analisi numerica tratta, fra l'altro, dei vari metodi utilizzabili per la scelta di tale valore medio in ciascun intervallo $[y_i, y_{i-1}]$ in modo da ottenere errori rispetto al valore limite che siano infinitesimi del $\max\{\Delta y_i\}$ dell'ordine desiderato.

Senza addentrarci in questioni troppo specifiche, un metodo semplice sufficientemente accurato per la valutazione numerica dell'integrale consiste nel suddividere l'intervallo $[Y_0, Y]$ in un certo numero di parti uguali:

$$- \bar{F}_i = F(\bar{y}_i) = \frac{i_f - \frac{Q^2}{\bar{\chi}_i^2 \bar{R}_i \bar{\Omega}_i^2}}{1 - \frac{Q^2 \bar{b}_i}{g \bar{\Omega}_i^3}};$$

$$- s_i = s_{i-1} + \frac{\Delta y}{F(\bar{y}_i)},$$

in cui i valori di $\bar{b}_i, \bar{\Omega}_i, \bar{R}_i, \bar{\chi}_i$ sono dedotti dalle curve (graficamente o con il procedimento iterativo schematizzato in Figura 3.15) riportate nelle Figura 3.12 e Figura 3.13. Si esegue così per punti il tracciamento del profilo riportato in Figura 3.21. In modo del tutto analogo si procede per il tracciamento del profilo F_2 .

Naturalmente, procedendo nel modo descritto – in particolare, suddividendo l'intervallo $[Y_c, Y_{ul}]$ in parti uguali – capiterà in generale che i valori delle $y_i = i\Delta y$ non coincidano con i valori discreti di profondità considerati per la rappresentazione della sezione (Figura 3.11 o Tabella 3.1). Volendo ricondursi a questo caso, che consente di ridurre il numero di calcoli a parità di precisione del metodo, converrà porre $\Delta y_1 = y_1 - Y_c$, $\Delta y_N = Y_{ul} - y_{N-1}$ e tutti gli incrementi Δy_i intermedi presi uguali all'incremento di profondità utilizzato nella descrizione discretizzata della sezione, cosicché, a meno del primo e dell'ultimo punto del profilo, si possano utilizzare i valori delle grandezze già calcolati. Interpolando linearmente fra due valori discreti della profondità, si avrà – ad esempio, per la larghezza del pelo libero e similmente per le altre grandezze di interesse:

$$\bar{b}_i = b(\bar{y}_i) \cong \frac{b_i + b_{i-1}}{2},$$

in cui, a meno del primo e dell'ultimo punto del profilo, le b_i verranno calcolate nei punti già utilizzati per la descrizione della sezione.

Si può quindi implementare il procedimento visto su un foglio di calcolo (Tabella 3.2). Inserendo ordinatamente i valori di profondità estremi del profilo e calcolando per interpolazione lineare, per tali due punti, i valori delle varie grandezze riportate nel foglio di calcolo, si può successivamente procedere al calcolo delle grandezze medie del singolo intervallo, individuate in Tabella 3.2 con il pedice “p” e, infine, le ascisse corrispondenti ai valori di profondità imposti.

Tabella 3.2. Implementazione del calcolo di un profilo di moto permanente su foglio di calcolo.

y, Y	λ_{dx}	λ_{sx}	λ, b	Ω	c	R_i	χ	Y_p	b_p	Ω_p	R_{ip}	χ_p	F_p	s
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00							
0.50	1.00	0.50	1.50	0.38	1.83	0.21	23.05							
1.00	2.00	1.00	3.00	1.50	3.65	0.41	25.87							
1.50	3.00	1.50	4.50	3.38	5.48	0.62	27.68							
2.00	4.00	3.25	7.25	6.31	8.41	0.75	28.60							
2.50	5.00	5.00	10.00	10.63	11.35	0.94	29.67							
2.71	5.21	5.21	10.42	12.83	11.95	1.07	30.28	2.71						0.00
3.00	5.50	5.50	11.00	15.88	12.77	1.24	31.11	3.00	10.71	14.35	1.15	30.69	-0.125721	-2.31
3.50	6.00	6.00	12.00	21.63	14.18	1.53	32.19	3.50	11.50	18.75	1.38	31.65	-0.006534	-78.83
4.00	6.50	6.50	13.00	27.88	15.59	1.79	33.05	4.00	12.50	24.75	1.66	32.62	-0.001033	-562.80
4.07	6.57	6.57	13.14	28.79	15.79	1.82	33.15	4.07	13.07	28.33	1.80	33.10	-8.82E-05	-1333.38
4.50	7.00	7.00	14.00	34.63	17.01	2.04	33.77							
5.00	7.50	7.50	15.00	41.88	18.42	2.27	34.40							

Si osservi che, avendo assunto lo zero delle ascisse sul cambio di pendenza, il modello numerico fornisce valori dell'ascissa negativi, crescenti in modulo, congruentemente col fatto che, muovendosi nel senso delle profondità crescenti ci si sposta verso monte. Il fatto di ottenere il valore della profondità di moto uniforme ad una distanza finita è, ovviamente, una conseguenza della soluzione approssimata dell'equazione differenziale. Riducendo successivamente il passo di discretizzazione delle profondità, si otterrebbe, con un calcolo sempre più preciso, un valore della ascissa corrispondente all'altezza di moto uniforme che, effettivamente, tenderebbe a diminuire indefinitamente al diminuire del passo di integrazione.

L'implementazione mostrata in Tabella 3.2 è, ovviamente, soltanto un esempio relativamente semplice: è infatti verosimile che i soli quattro intervalli ottenuti con riferimento alla scansione originale di 0,5 m (a parte il primo e l'ultimo intervallo) non consentano di ottenere un profilo sufficientemente regolare ed preciso. Può quindi succedere che, nel momento in cui si effettua il calcolo, la rappresentazione discretizzata della sezione si riveli non sufficientemente fitta. In definitiva, il criterio secondo il quale viene scelto il passo delle profondità per la rappresentazione della sezione è duplice; gli incrementi devono essere abbastanza piccoli affinché:

- sia accettabile interpolare linearmente le funzioni fra due punti assegnati;
- siano sufficientemente precisi i calcoli alle differenze finite da eseguire su alcune grandezze (non soltanto per il calcolo del profilo, ma anche per il calcolo della sezione e del contorno bagnato, definiti da relazioni integrali, risolte anch'esse numericamente con un procedimento alle differenze finite).

A rigore, la conferma di aver utilizzato un passo di profondità sufficientemente piccolo si può ottenere soltanto infittendo progressivamente la discretizzazione e osservando le variazioni nei valori delle grandezze di interesse calcolate al variare del passo di discretizzazione. In pratica, l'uso dei fogli elettronici o di linguaggi di programmazione consente di considerare da subito passi molto piccoli (dell'ordine di pochi centimetri, o anche millimetri), senza grossi problemi dal punto di vista della mole di calcoli da effettuare e dei relativi tempi di calcolo.

Esercizio 3.4

Determinare il profilo di moto permanente nell'alveo avente la sezione trasversale riportata in Figura 3.10 (Esercizio 3.1), costituito da due tratti, entrambi a debole pendenza e di sviluppo indefinito (Figura 3.22).

Dati:

- portata $Q = 50 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$;
- scabrezza dell'alveo $k_s = 30 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ (Gauckler-Strickler);
- pendenza dell'alveo $i_{f1} = 0,0015$;
- pendenza dell'alveo $i_{f2} = 0,0010$.

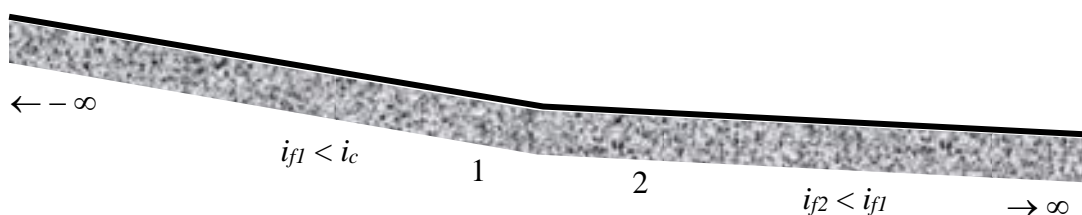


Figura 3.22. Profilo longitudinale del fondo di un canale.

Nel caso in questione, in cui entrambi i tronchi del canale sono a debole pendenza e di sviluppo indefinito, la condizione al contorno per il tracciamento dei profili va ricercata a valle, ma non in un punto definito, come invece è stato possibile fare per il profilo D_2 nel caso dell'Esercizio 3.3.

Posto che il caso di un alveo di sviluppo indefinito costituisce, ovviamente, una astrazione, e che il significato da attribuire al termine "indefinito" è in realtà quello proprio dell'Analisi Matematica ("lungo a piacere"), il profilo proveniente da $+\infty$ dovrà comunque essere uno dei soli tre possibili in un alveo a debole pendenza (Figura 3.5) ed avrà, in realtà, ad una distanza sufficientemente grande dalla sezione in cui avviene il cambio di pendenza (perché sia giustificato l'uso del termine "indefinito"), una sua condizione al contorno.

Rimane pertanto esclusa la possibilità che si tratti di un profilo di tipo D_3 , dal momento che, anche se, per ipotesi, in una sezione "abbastanza lontano" verso valle si avesse un tale tipo di profilo, esso avrebbe comunque uno sviluppo limitato da tale sezione verso monte, e non potrebbe perciò essere il tipo di profilo osservabile in prossimità della sezione in cui avviene il cambio di pendenza. In definitiva, sono ammessi unicamente i profili di tipo D_1 e D_2 – causati, ad esempio, dalla presenza di una paratoia o di un salto di fondo rispettivamente – entrambi i quali hanno sviluppo indefinito verso monte (potendo così protrarsi a qualunque distanza dalla sezione nella quale sono generati fino al cambio di pendenza) e tendono asintoticamente alla profondità di moto uniforme.

In definitiva, nel caso proposto e, più in generale, ogniqualevolta si abbia un canale, anche composto di più tronchi di caratteristiche differenti, il cui ultimo tronco verso valle sia a debole pendenza e di lunghezza indefinita, la condizione al contorno da assumere, da valle, per tale tronco è data dalla condizione di moto uniforme.

Calcolate quindi le profondità di moto uniforme e la profondità critica come visto nell'Esercizio 3.1, il profilo è parallelo al fondo nel tratto 2, ove il moto è uniforme. Anche in corrispondenza del cambio di pendenza si ha pertanto la profondità del moto uniforme del tronco 2, che, essendo quest'ultimo a pendenza minore del tronco 1, è maggiore della profondità di moto uniforme nel tronco 1. Il valore di profondità Y_{u2} è pertanto una condizione al contorno idonea per il tracciamento di un profilo di corrente lenta nel tronco 1, il quale, partendo da una profondità superiore a quella del moto uniforme nel tronco 1, sarà necessariamente di tipo D_1 (Figura 3.23).

Il passaggio dal tronco 1 al tronco 2 avviene con discontinuità della tangente al profilo. La derivata della quota del pelo libero rispetto ad una orizzontale di riferimento è data infatti da:

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{d(z_f + Y)}{dx} = -i_f + \frac{i_f - \frac{Q^2}{\bar{\chi}_i^2 \bar{R}_i \bar{\Omega}_i^2}}{1 - \frac{Q^2 \bar{b}_i}{g \bar{\Omega}_i^3}} = \frac{i_f \frac{Q^2 \bar{b}_i}{g \bar{\Omega}_i^3} - \frac{Q^2}{\bar{\chi}_i^2 \bar{R}_i \bar{\Omega}_i^2}}{1 - \frac{Q^2 \bar{b}_i}{g \bar{\Omega}_i^3}} .$$

A parità delle altre quantità contenute nella espressione della derivata della quota del pelo libero, calcolate immediatamente a monte ed a valle del cambio di pendenza del fondo, si evince che la pendenza della quota del pelo libero a monte è maggiore della pendenza a valle, essendo maggiore il valore della pendenza del fondo a monte.

Nel caso in cui, di due alvei indefiniti a debole pendenza, il tronco a valle avesse pendenza superiore rispetto al tronco a monte, nel tracciamento del profilo si partirebbe ancora da valle con il relativo valore della altezza di moto uniforme, che si manterrebbe fino al cambio di pendenza. Essendo ora tale valore inferiore alla profondità di moto uniforme del tronco a monte, in quest'ultimo si svilupperebbe un profilo di tipo D_2 , dal momento che, al cambio di pendenza, si dovrebbe imporre come condizione al contorno per il tratto di monte una altezza che è maggiore del valore critico e inferiore alla profondità di moto uniforme a monte. Il profilo D_2 è quindi "incompleto", nel senso che non si sviluppa a partire dallo stato critico come avveniva nel caso di transizione da corrente lenta a corrente veloce, esaminato nell'Esercizio 3.1.

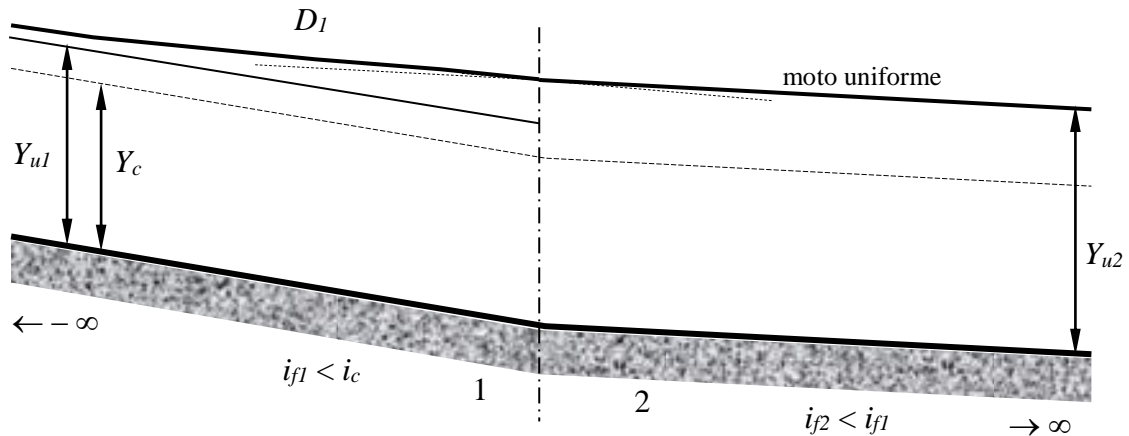


Figura 3.23. Profilo di moto permanente in una sequenza di due canali indefiniti a debole pendenza.

Con ragionamento del tutto analogo a quello esposto per il caso dell'alveo a debole pendenza indefinito verso valle, nel caso di un alveo a forte pendenza indefinito verso monte la condizione al contorno per tale tronco va imposta da monte ed è data, anche in questo caso, dal moto uniforme, dovendo avere la corrente necessariamente un profilo di tipo F_2 o F_3 . Il profilo F_1 di corrente lenta è infatti escluso dovendo esso essere, in ogni caso, limitato verso valle dall'ostacolo che ne è la causa e non potendo quindi far risentire la sua presenza ad una distanza infinita.

Nel caso di due tronchi indefiniti entrambi a forte pendenza, il tronco a monte sarebbe sempre interessato dal moto uniforme fino al cambiamento della pendenza del fondo. Nel tronco di valle si stabilirebbe una corrente di profilo F_2 se il tronco di monte ha una pendenza minore del tronco di valle (e la corrispondente profondità di moto uniforme è quindi superiore alla profondità di moto uniforme nel tronco di valle); una corrente F_3 se la pendenza diminuisce dal tronco di monte al tronco di valle.

Esercizio 3.5

Determinare il profilo di moto permanente nell'alveo avente la sezione trasversale riportata in Figura 3.10 (Esercizio 3.1), costituito da due tronchi, entrambi di sviluppo indefinito, di cui quello di monte a forte pendenza e quello di valle a debole pendenza (Figura 3.24).

Dati:

- portata $Q = 50 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$;
- scabrezza dell'alveo $k_s = 30 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ (Gauckler-Strickler);
- pendenza dell'alveo $i_{f1} = 0,015$;
- pendenza dell'alveo $i_{f2} = 0,0015$.

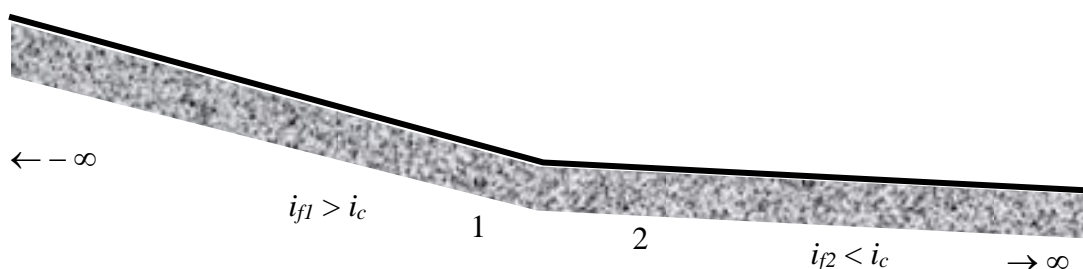


Figura 3.24.

Come discusso nell'Esercizio 3.4, i profili nei due tronchi vanno tracciati assumendo le condizioni al contorno da monte per il tronco a forte pendenza e da valle per il tronco a debole pendenza, costituite dalle relative profondità di moto permanente. Dovendo quindi la corrente passare dallo stato di veloce a quello di lenta nel senso del moto, non essendo possibile la transizione con continuità per lo stato critico, il raccordo dei profili tracciati da monte e da valle deve avvenire necessariamente con la discontinuità costituita da un risalto idraulico. La soluzione del problema richiede pertanto, fra l'altro, la localizzazione del risalto.

La teoria insegna che in corrispondenza del risalto, immediatamente a monte e a valle dello stesso, le correnti lenta e veloce assumono il medesimo valore della *spinta totale*, grandezza definita dalla relazione:

$$S = |\vec{I}| + |\vec{M}| = \gamma \zeta_G \Omega + \beta \rho \frac{Q^2}{\Omega} , \quad (3.11)$$

nella quale ζ_G è l'affondamento del baricentro della sezione in considerazione rispetto alla superficie libera e β è il coefficiente di ragguglio della quantità di moto (detto anche secondo coefficiente di Coriolis), che supporremo unitario. Il primo termine rappresenta la spinta reale, idrostatica, esercitata sulla sezione liquida dalla corrente adiacente; il secondo termine, il flusso di quantità di moto attraverso la sezione, riguardabile come una spinta di origine inerziale.

L'andamento della spinta totale ridotta (S/γ) nell'alveo assegnato in funzione della profondità della corrente per la portata di $50 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ è riportato in Figura 3.25.

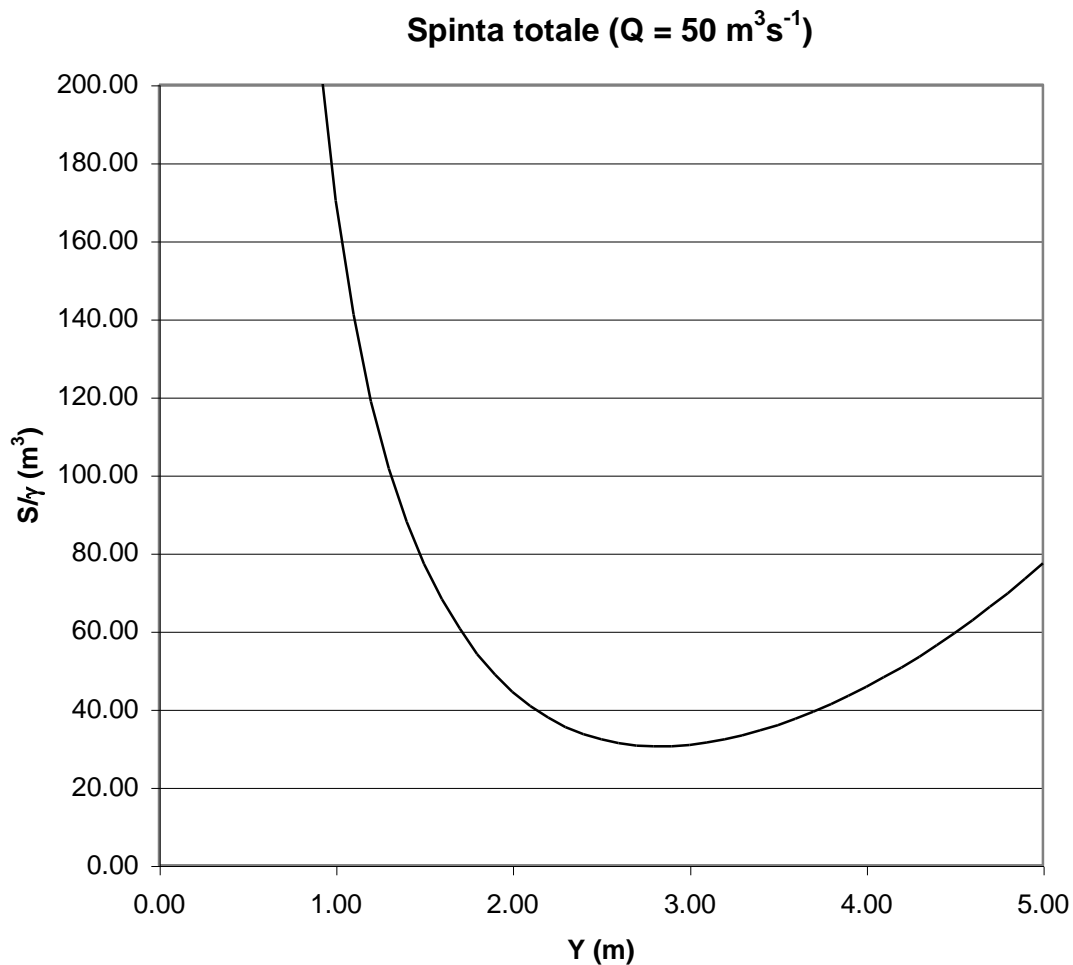


Figura 3.25. Diagramma della spinta totale ridotta per l'alveo di cui all'Esercizio 3.5.

Il diagramma è stato ottenuto tramite implementazione su foglio di calcolo della relazione (3.11), infittendo la discretizzazione con un passo della profondità pari a 0.1 m, come mostrato nella Tabella 3.3.

I dati del problema sono i medesimi dell'Esercizio 3.3. Si calcolano pertanto i medesimi valori delle profondità di moto uniforme per le pendenze corrispondenti e della profondità critica:

$$Y_{u1} = 4,068 \text{ m} \quad ; \quad Y_{u2} = 2,710 \text{ m} \quad ; \quad Y_c = 2,809 \text{ m}$$

Tabella 3.3. Implementazione del calcolo della curva delle spinte totali su foglio di calcolo.

y, Y	λ_{dx}	λ_{sx}	λ, b	Ω	c	R_f	Y_m	χ	Q_{u1}	Q_c	Q_{u2}	ζ_g	E_{50}	S_{50}
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	---	---
0.10	0.20	0.10	0.30	0.02	0.37	0.04	0.05	17.62	0.00	0.01	0.01	0.03	566316	16989.5
0.20	0.40	0.20	0.60	0.06	0.73	0.08	0.10	19.78	0.01	0.06	0.04	0.07	35394.9	4247.37
0.30	0.60	0.30	0.90	0.14	1.10	0.12	0.15	21.16	0.04	0.16	0.12	0.10	6991.85	1887.73
0.40	0.80	0.40	1.20	0.24	1.46	0.16	0.20	22.20	0.08	0.34	0.26	0.13	2212.57	1061.87
0.50	1.00	0.50	1.50	0.38	1.83	0.21	0.25	23.05	0.15	0.59	0.48	0.17	906.605	679.641
0.60	1.20	0.60	1.80	0.54	2.19	0.25	0.30	23.76	0.25	0.93	0.78	0.20	437.572	472.038
0.70	1.40	0.70	2.10	0.74	2.56	0.29	0.35	24.37	0.37	1.36	1.18	0.23	236.567	346.895
0.80	1.60	0.80	2.40	0.96	2.92	0.33	0.40	24.92	0.53	1.90	1.68	0.27	139.061	265.716
0.90	1.80	0.90	2.70	1.22	3.29	0.37	0.45	25.42	0.73	2.55	2.30	0.30	87.2154	210.111
1.00	2.00	1.00	3.00	1.50	3.65	0.41	0.50	25.87	0.96	3.32	3.05	0.33	57.6316	170.395
1.10	2.20	1.10	3.30	1.82	4.02	0.45	0.55	26.28	1.24	4.22	3.93	0.37	39.7801	141.074
1.20	2.40	1.20	3.60	2.16	4.38	0.49	0.60	26.67	1.57	5.24	4.95	0.40	28.5107	118.846
1.30	2.60	1.30	3.90	2.54	4.75	0.53	0.65	27.02	1.94	6.40	6.13	0.43	21.1283	101.628
1.40	2.80	1.40	4.20	2.94	5.11	0.58	0.70	27.36	2.36	7.70	7.47	0.47	16.1417	88.053
1.50	3.00	1.50	4.50	3.38	5.48	0.62	0.75	27.68	2.84	9.15	8.98	0.50	12.6865	77.1962
1.60	3.20	1.85	5.05	3.85	6.06	0.64	0.76	27.82	3.31	10.54	10.46	0.53	10.1853	68.1982
1.70	3.40	2.20	5.60	4.39	6.65	0.66	0.78	27.99	3.86	12.15	12.21	0.56	8.32677	60.5766
1.80	3.60	2.55	6.15	4.97	7.24	0.69	0.81	28.18	4.50	14.00	14.22	0.59	6.95337	54.1775
1.90	3.80	2.90	6.70	5.62	7.83	0.72	0.84	28.39	5.23	16.10	16.53	0.62	5.94149	48.8421
2.00	4.00	3.25	7.25	6.31	8.41	0.75	0.87	28.60	6.06	18.45	19.15	0.64	5.1977	44.4231
2.10	4.20	3.60	7.80	7.07	9.00	0.78	0.91	28.81	6.98	21.06	22.09	0.67	4.6528	40.7916
2.20	4.40	3.95	8.35	7.87	9.59	0.82	0.94	29.03	8.02	23.94	25.36	0.69	4.25596	37.8381
2.30	4.60	4.30	8.90	8.74	10.18	0.86	0.98	29.25	9.17	27.10	28.99	0.72	3.97	35.4716
2.40	4.80	4.65	9.45	9.65	10.76	0.90	1.02	29.46	10.43	30.55	32.98	0.75	3.76761	33.6174
2.50	5.00	5.00	10.00	10.63	11.35	0.94	1.06	29.67	11.81	34.30	37.35	0.77	3.62871	32.2143
2.60	5.10	5.10	10.20	11.64	11.63	1.00	1.14	30.00	13.52	38.92	42.75	0.80	3.54126	31.2451
2.70	5.20	5.20	10.40	12.67	11.92	1.06	1.22	30.31	15.32	43.77	48.46	0.83	3.49438	30.6786
2.80	5.30	5.30	10.60	13.72	12.20	1.12	1.29	30.59	17.23	48.86	54.48	0.87	3.47741	30.4569
2.90	5.40	5.40	10.80	14.79	12.48	1.18	1.37	30.86	19.23	54.18	60.81	0.90	3.48291	30.537
3.00	5.50	5.50	11.00	15.88	12.77	1.24	1.44	31.11	21.33	59.73	67.45	0.93	3.50561	30.8864
3.10	5.60	5.60	11.20	16.99	13.05	1.30	1.52	31.35	23.53	65.51	74.40	0.97	3.54168	31.4801
3.20	5.70	5.70	11.40	18.12	13.33	1.36	1.59	31.57	25.82	71.52	81.65	1.01	3.5883	32.299
3.30	5.80	5.80	11.60	19.27	13.61	1.42	1.66	31.79	28.21	77.76	89.22	1.04	3.64332	33.3281
3.40	5.90	5.90	11.80	20.44	13.90	1.47	1.73	31.99	30.70	84.23	97.09	1.08	3.70513	34.5555
3.50	6.00	6.00	12.00	21.63	14.18	1.53	1.80	32.19	33.29	90.92	105.27	1.12	3.77248	35.9721
3.60	6.10	6.10	12.20	22.84	14.46	1.58	1.87	32.37	35.97	97.85	113.76	1.16	3.84436	37.5705
3.70	6.20	6.20	12.40	24.07	14.75	1.63	1.94	32.55	38.76	105.00	122.57	1.19	3.92002	39.3449
3.80	6.30	6.30	12.60	25.32	15.03	1.68	2.01	32.72	41.64	112.39	131.68	1.23	3.99883	41.2908
3.90	6.40	6.40	12.80	26.59	15.31	1.74	2.08	32.89	44.62	120.00	141.11	1.27	4.08029	43.4048
4.00	6.50	6.50	13.00	27.88	15.59	1.79	2.14	33.05	47.70	127.85	150.85	1.31	4.16399	45.684
4.10	6.60	6.60	13.20	29.19	15.88	1.84	2.21	33.20	50.88	135.92	160.91	1.35	4.2496	48.1265
4.20	6.70	6.70	13.40	30.52	16.16	1.89	2.28	33.35	54.17	144.23	171.29	1.39	4.33684	50.7307
4.30	6.80	6.80	13.60	31.87	16.44	1.94	2.34	33.50	57.55	152.77	181.99	1.43	4.42549	53.4957
4.40	6.90	6.90	13.80	33.24	16.73	1.99	2.41	33.64	61.03	161.54	193.01	1.47	4.51536	56.4209
4.50	7.00	7.00	14.00	34.63	17.01	2.04	2.47	33.77	64.62	170.55	204.35	1.51	4.60628	59.5059
4.60	7.10	7.10	14.20	36.04	17.29	2.08	2.54	33.91	68.31	179.79	216.02	1.55	4.69813	62.7507
4.70	7.20	7.20	14.40	37.47	17.57	2.13	2.60	34.03	72.10	189.27	228.01	1.58	4.79078	66.1556
4.80	7.30	7.30	14.60	38.92	17.86	2.18	2.67	34.16	76.00	198.99	240.34	1.62	4.88414	69.721
4.90	7.40	7.40	14.80	40.39	18.14	2.23	2.73	34.28	80.00	208.95	253.00	1.66	4.97813	73.4475
5.00	7.50	7.50	15.00	41.88	18.42	2.27	2.79	34.40	84.11	219.14	265.99	1.70	5.07267	77.3358

Per interpolazione lineare fra i due valori più prossimi in tabella si calcolano pertanto i valori della spinta totale ridotta corrispondenti alle due profondità di moto uniforme:

$$\frac{S_{u1} - 30,679}{30,457 - 30,679} = \frac{2,710 - 2,70}{2,80 - 2,70} \Rightarrow S_{u1} = 30,679 + (30,457 - 30,679) \times \frac{2,710 - 2,70}{2,80 - 2,70} = 30,657 \text{ m}^3,$$

$$\frac{S_{u2} - 45,684}{48,127 - 45,684} = \frac{4,068 - 4,00}{4,10 - 4,00} \Rightarrow S_{u2} = 45,684 + (48,127 - 45,684) \times \frac{4,068 - 4,00}{4,10 - 4,00} = 47,345 \text{ m}^3.$$

Esaminiamo le due possibilità riguardo alla posizione del risalto, se a monte o a valle del cambio di pendenza.

Ipotizzando che il risalto si trovi a monte, questo dovrebbe collegare la corrente veloce di moto uniforme proveniente da monte con un profilo F_1 di corrente lenta generato, a monte del cambio di pendenza, dalla condizione al contorno di moto uniforme proveniente da valle: $Y = Y_{u2}$. Seguendo il profilo F_1 verso monte, a partire dal cambio di pendenza, le profondità decrescono. Conseguentemente (v. Figura 3.25) la spinta totale decresce, assumendo il valore minimo compatibile con la portata assegnata in corrispondenza dello stato critico. Esiste pertanto un valore intermedio di profondità del profilo F_1 , Y^* , per il quale si ha $S^* = S_{u1}$: il risalto si posizionerà in tale sezione.

In pratica, tale valore di profondità si determina nel diagramma di Figura 3.25 come *profondità coniugata* della Y_{u1} , ossia il valore di profondità di corrente lenta al quale compete il medesimo valore della spinta totale S_{u1} , relativa alla profondità Y_{u1} . Il profilo F_1 verrà pertanto tracciato a ritroso fino alla sezione nella quale si raggiunge il valore di profondità coniugata.

La soluzione è unica, nel senso che non esiste la possibilità di trovare, date le condizioni al contorno, una seconda sezione in cui si verifichi l'uguaglianza della spinta totale fra la corrente proveniente da monte e la corrente proveniente da valle. Nell'ipotetico caso che, in luogo della soluzione individuata, si stabilisse un profilo di rigurgito a valle del cambio di pendenza, questo sarebbe un profilo di tipo D_3 , e pertanto, crescente nel senso del moto. Ma dall'esame della Figura 3.25 è evidente che, in corrente veloce, all'aumentare della profondità si ha una diminuzione della spinta totale. Essa pertanto tende ad allontanarsi dal valore di riferimento che, in tal caso, sarebbe dato dalla profondità di moto uniforme a valle, Y_{u2} .

La conclusione è di validità generale, nel senso che, dovendo individuare il tronco in cui avviene la formazione del risalto, esso si trova sempre sul tronco sede della corrente avente, nella sezione di controllo di collegamento fra i due tronchi, il minore valore di spinta totale.

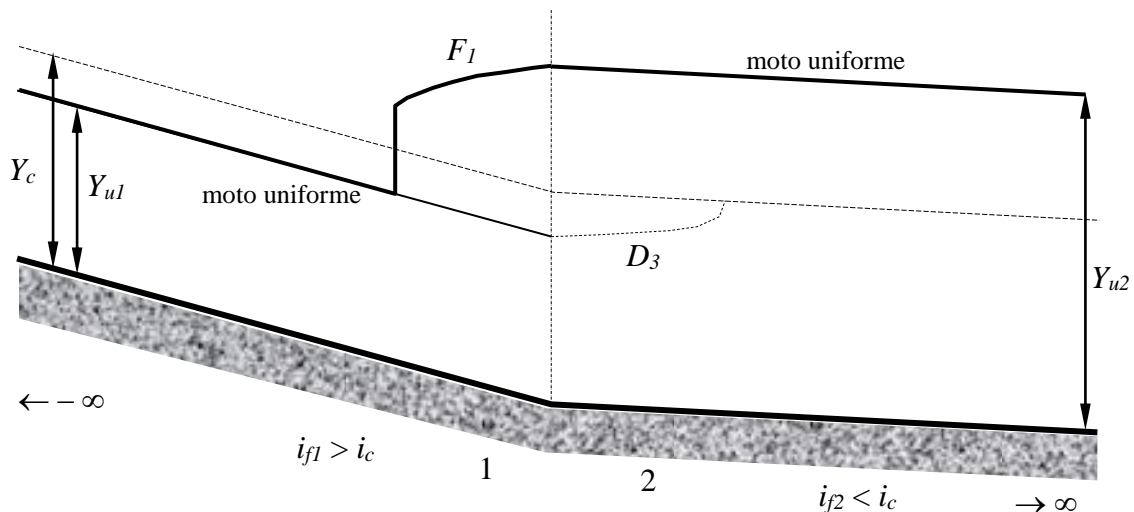


Figura 3.26. Profilo di moto permanente in una sequenza di alvei a forte e a debole pendenza.

Esercizio 3.6

Determinare il profilo di moto permanente nel canale di Figura 3.24, il cui alveo ha la sezione trasversale riportata in Figura 3.10 (Esercizio 3.1). Il canale è costituito da un primo tronco a forte pendenza per la derivazione da una bacino di livello assegnato e da un secondo tronco a debole pendenza, al termine del quale è posto uno stramazzo Francis di altezza e larghezza della lama sfiorante assegnate. A valle dello stramazzo è posto un salto di fondo che assicura la disconnessione idraulica fra i tratti di corrente a monte e a valle dello stramazzo. Si suppongano trascurabili le perdite di carico localizzate all'imbocco del canale dal bacino.

Dati:

- livello nel bacino relativo alla quota del fondo della sezione di imbocco $H = 3.50$ m;
- scabrezza dell'alveo $k_s = 30 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$ (Gauckler-Strickler);
- pendenza dell'alveo $i_{f1} = 0,015$;
- pendenza dell'alveo $i_{f2} = 0,008$;
- altezza del petto dello stramazzo $h_p = 2.50$ m;
- larghezza della lama sfiorante $l_s = 10.00$ m;
- lunghezza del primo tronco $L_1 = 300$ m;
- lunghezza del secondo tronco $L_2 = 250$ m;

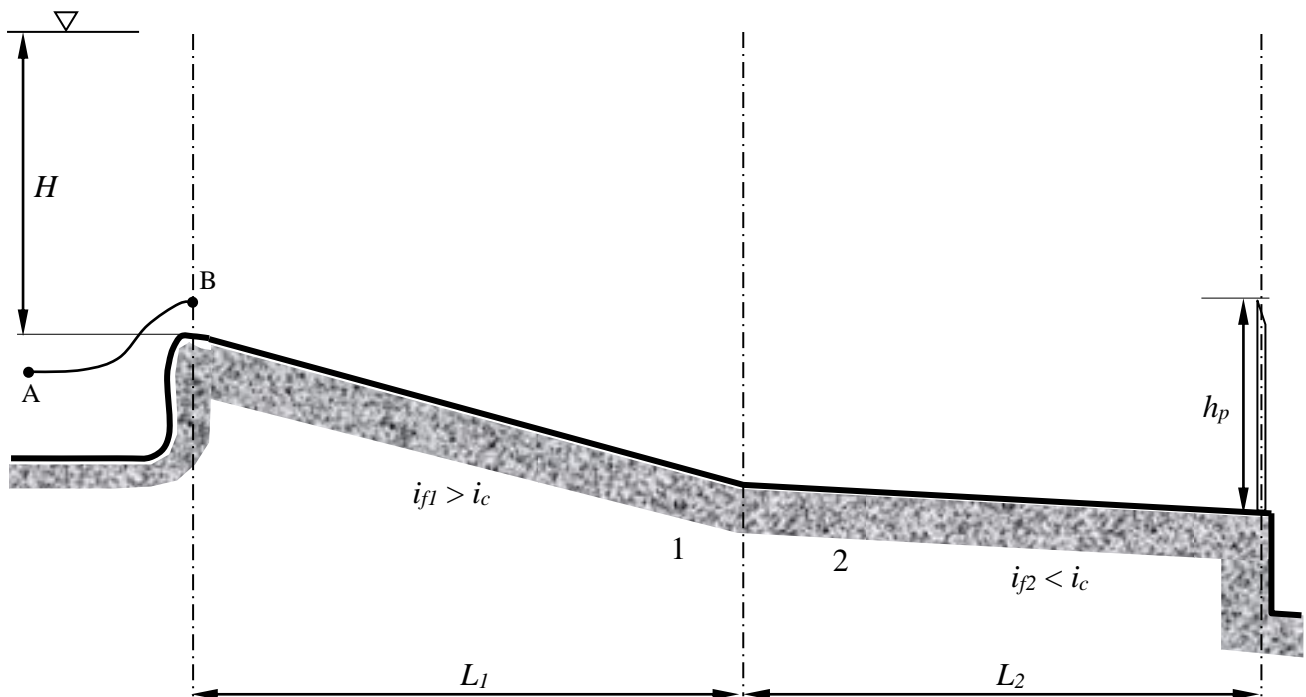


Figura 3.27. Derivazione da bacino con alveo a forte pendenza, seguito da alveo a debole pendenza.

Come rilevato in sede di commento all'Esercizio 3.3, nel caso di una presa da un bacino in quiete con un canale a *forte* pendenza, sulla sezione di imbocco del canale si ha transizione per lo stato critico. Per il profilo di corrente veloce F_2 che si formerà nel primo tronco, tale condizione è, evidentemente, proveniente da monte. Tuttavia, a differenza del caso dell'esercizio Esercizio 3.3, nel presente caso non è assegnata la portata di moto permanente, ma il livello del pelo libero del bacino. Non è quindi assegnata esplicitamente una condizione al contorno di monte che, in tutti gli

esercizi precedenti, era rappresentata proprio dal valore della portata. La seconda condizione al contorno da monte da accoppiare al passaggio per lo stato critico è tuttavia facilmente individuabile nella assegnazione del carico rispetto al fondo nella sezione iniziale, determinata dall'ipotesi che le perdite di carico localizzate all'imbocco possano ritenersi trascurabili.

Applicando il teorema di Bernoulli ad una traiettoria, fra un punto A interno al bacino, sufficientemente lontano dall'imbocco del canale perché sia lecito trascurarne la velocità e un punto B posto sulla sezione di imbocco, la quale, inoltre, è una sezione regolare come da ipotesi generali della teoria delle correnti a pelo libero, si ha:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g},$$

in cui, per essere il bacino in quiete e la corrente gradualmente variata nella sezione di imbocco, la quote piezometriche in A ed in B sono pari alle quote dei relativi peli liberi. Dall'essere la corrente in B gradualmente variata, e quindi la distribuzione di pressione nella sezione di tipo idrostatico, deriva anche il fatto che tale valore di quota piezometrica si mantenga costante da punto a punto e pari, in particolare, ad un punto sul fondo o, comunque, ad esso molto prossimo¹⁴. Con riferimento a tale punto, considerando che l'altezza piezometrica p_B/γ è in tal caso pari alla profondità della corrente Y , si ha in definitiva:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} - z_{fB} = H = Y_B + \frac{V_B^2}{2g} = E_B.$$

La condizione al contorno da monte cercata è pertanto costituita dalla relazione fra profondità della corrente e portata a carico specifico fissato:

$$H = Y_B + \frac{Q^2}{2g\Omega_B^2},$$

che, esplicitata rispetto alla portata, si scrive:

$$Q = \Omega_B \sqrt{2g(H - Y_B)}.$$

Inserendo il valore $H = 50$ m, la curva delle portate a carico specifico costante si calcola, come già visto, con l'ausilio di un foglio elettronico, in funzione dei valori prefissati della Y_B . (Tabella 3.4)

La rappresentazione grafica della curva è riportata in Figura 3.28. La curva ha un massimo di portata in corrispondenza dello stato critico. Si osservi che, non volendo utilizzare interpolazioni di ordine maggiore di quella lineare, il calcolo della profondità critica effettuato con riferimento al massimo di portata individuabile nella Tabella 3.4 è relativamente poco preciso. Per una maggiore precisione è preferibile determinare la profondità condizioni critica con la relazione:

$$Y_c + \frac{Y_{mc}}{2} = E,$$

¹⁴ Nello schema di fluido ideale, l'avere tutti i punti della sezione la medesima quota piezometrica implica l'uniformità della velocità nell'intera sezione. Naturalmente, nella realtà in prossimità del fondo le velocità tendono a ridursi, per annullarsi alla parete. Ammettiamo tuttavia che la distribuzione di velocità possa considerarsi sensibilmente uniforme essendo il moto turbolento completamente sviluppato, come del resto già implicitamente fatto assumendo unitario il coefficiente di ragguglio delle altezze cinetiche nell'espressione del carico totale della corrente.

Portata a carico specifico costante

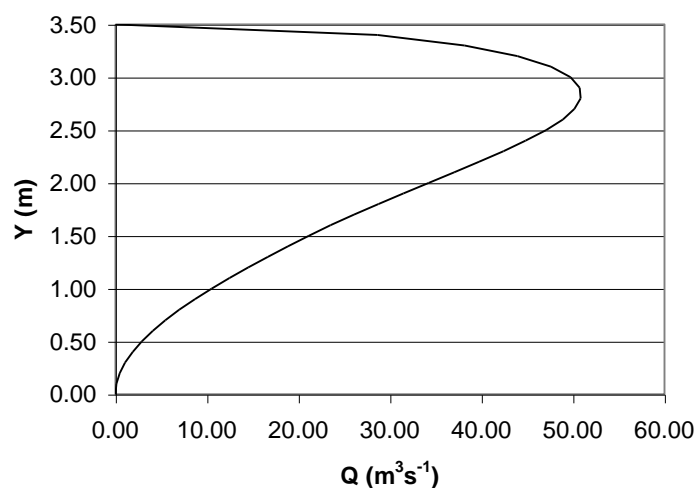


Figura 3.28. Andamento della portata a carico specifico costante.

Tabella 3.4. Implementazione del calcolo della curva delle portate a carico specifico costante su foglio di calcolo.

y, Y	λ_{dx}	λ_{sx}	λ, b	Ω	c	R_f	Y_m	χ	Q_{u1}	Q_c	Q_{u2}	Q_H	$Y+Y_m/2$
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000	0.00
0.10	0.20	0.10	0.30	0.02	0.37	0.04	0.05	17.62	0.00	0.01	0.01	0.123	0.13
0.20	0.40	0.20	0.60	0.06	0.73	0.08	0.10	19.78	0.01	0.06	0.04	0.483	0.25
0.30	0.60	0.30	0.90	0.14	1.10	0.12	0.15	21.16	0.04	0.16	0.12	1.070	0.38
0.40	0.80	0.40	1.20	0.24	1.46	0.16	0.20	22.20	0.08	0.34	0.26	1.872	0.50
0.50	1.00	0.50	1.50	0.38	1.83	0.21	0.25	23.05	0.15	0.59	0.48	2.877	0.63
0.60	1.20	0.60	1.80	0.54	2.19	0.25	0.30	23.76	0.25	0.93	0.78	4.073	0.75
0.70	1.40	0.70	2.10	0.74	2.56	0.29	0.35	24.37	0.37	1.36	1.18	5.448	0.88
0.80	1.60	0.80	2.40	0.96	2.92	0.33	0.40	24.92	0.53	1.90	1.68	6.987	1.00
0.90	1.80	0.90	2.70	1.22	3.29	0.37	0.45	25.42	0.73	2.55	2.30	8.678	1.13
1.00	2.00	1.00	3.00	1.50	3.65	0.41	0.50	25.87	0.96	3.32	3.05	10.505	1.25
1.10	2.20	1.10	3.30	1.82	4.02	0.45	0.55	26.28	1.24	4.22	3.93	12.455	1.38
1.20	2.40	1.20	3.60	2.16	4.38	0.49	0.60	26.67	1.57	5.24	4.95	14.510	1.50
1.30	2.60	1.30	3.90	2.54	4.75	0.53	0.65	27.02	1.94	6.40	6.13	16.655	1.63
1.40	2.80	1.40	4.20	2.94	5.11	0.58	0.70	27.36	2.36	7.70	7.47	18.872	1.75
1.50	3.00	1.50	4.50	3.38	5.48	0.62	0.75	27.68	2.84	9.15	8.98	21.142	1.88
1.60	3.20	1.85	5.05	3.85	6.06	0.64	0.76	27.82	3.31	10.54	10.46	23.522	1.98
1.70	3.40	2.20	5.60	4.39	6.65	0.66	0.78	27.99	3.86	12.15	12.21	26.059	2.09
1.80	3.60	2.55	6.15	4.97	7.24	0.69	0.81	28.18	4.50	14.00	14.22	28.718	2.20
1.90	3.80	2.90	6.70	5.62	7.83	0.72	0.84	28.39	5.23	16.10	16.53	31.460	2.32
2.00	4.00	3.25	7.25	6.31	8.41	0.75	0.87	28.60	6.06	18.45	19.15	34.245	2.44
2.10	4.20	3.60	7.80	7.07	9.00	0.78	0.91	28.81	6.98	21.06	22.09	37.028	2.55
2.20	4.40	3.95	8.35	7.87	9.59	0.82	0.94	29.03	8.02	23.94	25.36	39.759	2.67
2.30	4.60	4.30	8.90	8.74	10.18	0.86	0.98	29.25	9.17	27.10	28.99	42.384	2.79
2.40	4.80	4.65	9.45	9.65	10.76	0.90	1.02	29.46	10.43	30.55	32.98	44.842	2.91
2.50	5.00	5.00	10.00	10.63	11.35	0.94	1.06	29.67	11.81	34.30	37.35	47.063	3.03
2.60	5.10	5.10	10.20	11.64	11.63	1.00	1.14	30.00	13.52	38.92	42.75	48.892	3.17
2.70	5.20	5.20	10.40	12.67	11.92	1.06	1.22	30.31	15.32	43.77	48.46	50.176	3.31
2.80	5.30	5.30	10.60	13.72	12.20	1.12	1.29	30.59	17.23	48.86	54.48	50.827	3.45
2.90	5.40	5.40	10.80	14.79	12.48	1.18	1.37	30.86	19.23	54.18	60.81	50.728	3.58
3.00	5.50	5.50	11.00	15.88	12.77	1.24	1.44	31.11	21.33	59.73	67.45	49.722	3.72
3.10	5.60	5.60	11.20	16.99	13.05	1.30	1.52	31.35	23.53	65.51	74.40	47.582	3.86
3.20	5.70	5.70	11.40	18.12	13.33	1.36	1.59	31.57	25.82	71.52	81.65	43.949	3.99
3.30	5.80	5.80	11.60	19.27	13.61	1.42	1.66	31.79	28.21	77.76	89.22	38.162	4.13
3.40	5.90	5.90	11.80	20.44	13.90	1.47	1.73	31.99	30.70	84.23	97.09	28.624	4.27
3.50	6.00	6.00	12.00	21.63	14.18	1.53	1.80	32.19	33.29	90.92	105.27	0.000	4.40

in cui $E = H$. Interpolando fra i due valori del termine $Y + Y_m/2$ in tabella che comprendono il valore $H = 3.5$ m, si ha:

$$\frac{Y_c - 2,80}{2,90 - 2,80} = \frac{3,50 - 3,45}{3,58 - 3,45} \Rightarrow Y_c = 2,80 + (2,90 - 2,80) \times \frac{3,50 - 3,45}{3,58 - 3,45} = 2,839 \text{ m} ,$$

cui corrispondono, calcolati sempre per interpolazione lineare, i valori di area e profondità media critiche:

$$\Omega_c = 14,125 \text{ m}^2 \quad ; \quad Y_{mc} = 1,323 \text{ m} ,$$

da cui, infine, si calcola il valore della portata massima:

$$Q_{max} = \Omega_c \sqrt{g Y_{mc}} = 14,125 \times \sqrt{9,81 \times 1,323} = 50,89 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} .$$

Si osservi che, mentre il valore della profondità critica, quantunque non eccessivamente differente dal valore 2,80 m che sarebbe stato determinato con riferimento al massimo di portata letto in tabella, differisce dalla valutazione più accurata di circa 4 cm, alla terza cifra significativa, la portata massima, in quanto corrispondente ad un punto di stazionarietà della funzione portata, si calcola con la stessa precisione alla terza cifra significativa.

In funzione del valore di portata ottenuto, si determinano, sempre per interpolazione lineare dai dati in tabella, i valori delle profondità di moto uniforme nei due tronchi:

$$Y_{u1} = 2,740 \text{ m} \quad ; \quad Y_{u2} = 3,032 \text{ m} .$$

Il passaggio per lo stato critico sulla sezione di imbocco del canale comporta la formazione di un profilo di tipo F_2 nel primo tronco, di sviluppo effettivo non ancora determinabile. Per le valutazioni necessarie a determinarne lo sviluppo, occorrerà comunque eseguirne il tracciamento fino alla sezione in cui interviene il cambio di pendenza, con i metodi illustrati nell'Esercizio 3.5.

La presenza dell'ostacolo costituito dallo stramazzo impone una condizione al contorno nella relativa sezione, rappresentata dalla relazione esistente fra la portata fluente ed il carico sulla lama sfiorante, ζ , per uno stramazzo con contrazione laterale (Francis). Ammettendo trascurabile l'altezza cinetica a monte dello stramazzo tale relazione è data dalla:

$$Q = \mu(l_s - 0,2\zeta)\zeta \sqrt{2g\zeta} , \quad (3.12)$$

ove $\mu \cong 0,4$ è il coefficiente di efflusso.

Il valore del carico corrispondente alla portata $Q = 50,89 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ si può determinare graficamente tracciando per punti la scala delle portate dello stramazzo sulla base di una tabella di valori calcolati mediante la (3.12), ovvero direttamente mediante la tabella, per interpolazione lineare. La scala delle portate dello stramazzo con contrazione laterale avente larghezza della lama sfiorante pari a 10 m è riportata in Figura 3.29.

Per interpolazione si calcola il valore di carico sullo stramazzo:

$$\zeta = 2,078 \text{ m} .$$

Sommando il carico sullo stramazzo all'altezza del petto dello stesso, si ottiene la profondità della corrente a monte dell'area prossima allo stramazzo che risente dell'effetto di richiamo:

$$Y_{2v} = 2,078 + 2,50 = 4,578 \text{ m} .$$

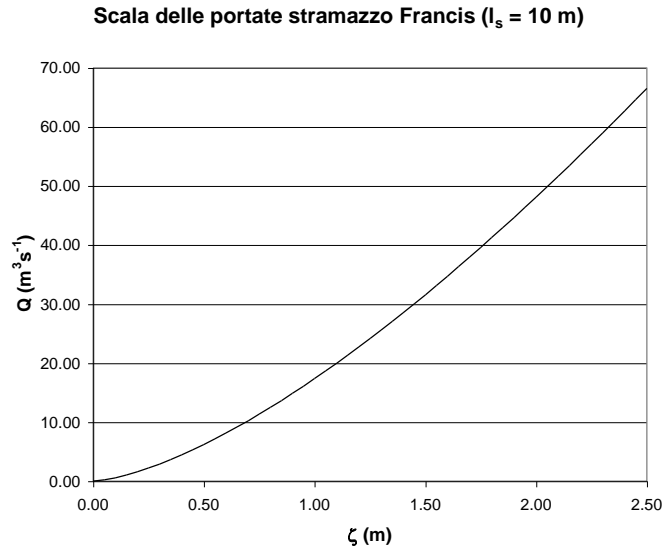


Figura 3.29. Scala delle portate dello stramazzo con contrazione laterale (Francis) avente larghezza della lama sfiorante pari a 10 m.

Tale valore di portata costituisce la condizione al contorno da valle per il tracciamento del profilo di corrente lenta che si sviluppa a monte dello stramazzo. Essendo $Y_{2v} > Y_{u2}$, il profilo è di tipo D_1 .

I profili si calcolano come mostrato nell'Esercizio 3.5, con l'avvertenza di associare, nel foglio elettronico – ma anche eseguendo il calcolo mediante la scrittura di un codice di calcolo ad hoc – il verso corretto dell'ascissa del canale alla direzione nella quale il procedimento viene sviluppato.

In particolare, nel caso in questione, data la scrittura generale alle differenze finite:

$$s_i - s_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{F(\bar{y}_i)},$$

nella quale l'ascissa s è crescente nel senso del flusso, nel caso del profilo F_2 , di corrente veloce e pertanto da calcolarsi procedendo da monte verso valle, si determineranno successivamente le ascisse:

$$s_i = s_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{F(\bar{y}_i)},$$

alle quali corrispondono profondità decrescenti, mentre per il profilo D_1 , da calcolarsi da valle verso monte, si procederà a calcolare successivamente le ascisse:

$$s_{i-1} = s_i - \frac{y_i - y_{i-1}}{F(\bar{y}_i)},$$

alle quali pure corrispondono profondità decrescenti¹⁵.

Dai risultati riportati in Tabella 3.5 si evince che il profilo F_2 raggiunge condizioni molto prossime a quelle del moto uniforme già a grande distanza dal termine del tronco a forte pendenza.

¹⁵ Naturalmente, il verso di esecuzione della procedura di calcolo implementata nel foglio elettronico dipende dalla modalità di variazione della variabile indipendente y . Pertanto, pur corrispondendo i due calcoli a percorsi di verso opposto in termini di ascissa, nel foglio di calcolo si procede nello stesso verso: dal basso verso l'alto.

Tabella 3.5. Implementazione del calcolo dei profili di moto permanente nel canale di cui all'Esercizio 3.6

y, Y	λ_{dx}	λ_{sx}	λ, b	Ω	c	R_i	χ	ζ_g	E_{50}	S_{50}	Y_{p1}	b_{p1}	Ω_{p1}	R_{ip1}	χ_{p1}	F_{p1}	S_{p1}
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	---	---							
0.10	0.20	0.10	0.30	0.02	0.37	0.04	17.62	0.03	586591	17598							
0.20	0.40	0.20	0.60	0.06	0.73	0.08	19.78	0.07	36662	4399.4							
0.30	0.60	0.30	0.90	0.14	1.10	0.12	21.16	0.10	7242.2	1955.3							
0.40	0.80	0.40	1.20	0.24	1.46	0.16	22.20	0.13	2291.8	1099.9							
0.50	1.00	0.50	1.50	0.38	1.83	0.21	23.05	0.17	939.05	703.97							
0.60	1.20	0.60	1.80	0.54	2.19	0.25	23.76	0.20	453.22	488.93							
0.70	1.40	0.70	2.10	0.74	2.56	0.29	24.37	0.23	245.01	359.31							
0.80	1.60	0.80	2.40	0.96	2.92	0.33	24.92	0.27	144.01	275.22							
0.90	1.80	0.90	2.70	1.22	3.29	0.37	25.42	0.30	90.31	217.62							
1.00	2.00	1.00	3.00	1.50	3.65	0.41	25.87	0.33	59.66	176.48							
1.10	2.20	1.10	3.30	1.82	4.02	0.45	26.28	0.37	41.16	146.10							
1.20	2.40	1.20	3.60	2.16	4.38	0.49	26.67	0.40	29.49	123.07							
1.30	2.60	1.30	3.90	2.54	4.75	0.53	27.02	0.43	21.84	105.23							
1.40	2.80	1.40	4.20	2.94	5.11	0.58	27.36	0.47	16.67	91.16							
1.50	3.00	1.50	4.50	3.38	5.48	0.62	27.68	0.50	13.09	79.90							
1.60	3.20	1.85	5.05	3.85	6.06	0.64	27.82	0.53	10.49	70.57							
1.70	3.40	2.20	5.60	4.39	6.65	0.66	27.99	0.56	8.56	62.66							
1.80	3.60	2.55	6.15	4.97	7.24	0.69	28.18	0.59	7.14	56.01							
1.90	3.80	2.90	6.70	5.62	7.83	0.72	28.39	0.62	6.09	50.47							
2.00	4.00	3.25	7.25	6.31	8.41	0.75	28.60	0.64	5.31	45.87							
2.10	4.20	3.60	7.80	7.07	9.00	0.78	28.81	0.67	4.74	42.08							
2.20	4.40	3.95	8.35	7.87	9.59	0.82	29.03	0.69	4.33	39.00							
2.30	4.60	4.30	8.90	8.74	10.18	0.86	29.25	0.72	4.03	36.52							
2.40	4.80	4.65	9.45	9.65	10.76	0.90	29.46	0.75	3.82	34.56							
2.50	5.00	5.00	10.00	10.63	11.35	0.94	29.67	0.77	3.67	33.07							
2.60	5.10	5.10	10.20	11.64	11.63	1.00	30.00	0.80	3.57	32.03							
2.70	5.20	5.20	10.40	12.67	11.92	1.06	30.31	0.83	3.52	31.40							
2.74	5.24	5.24	10.48	13.08	12.03	1.09	30.42	0.85	3.51	31.25							
2.74	5.24	5.24	10.48	13.09	12.03	1.09	30.42	0.85	3.51	31.25	2.74	10.49	13.14	1.09	30.44	-0.000673	23.69
2.75	5.25	5.25	10.50	13.19	12.06	1.09	30.45	0.85	3.51	31.22	2.75	10.51	13.24	1.10	30.46	-0.002514	9.27
2.76	5.26	5.26	10.52	13.29	12.09	1.10	30.48	0.85	3.51	31.19	2.76	10.53	13.35	1.10	30.49	-0.004903	5.29
2.77	5.27	5.27	10.54	13.40	12.12	1.11	30.51	0.86	3.51	31.17	2.77	10.55	13.45	1.11	30.52	-0.008054	3.25
2.78	5.28	5.28	10.56	13.50	12.15	1.11	30.53	0.86	3.50	31.15	2.78	10.57	13.56	1.11	30.55	-0.012403	2.01
2.79	5.29	5.29	10.58	13.61	12.17	1.12	30.56	0.86	3.50	31.14	2.79	10.59	13.66	1.12	30.58	-0.018809	1.20
2.80	5.30	5.30	10.60	13.72	12.20	1.12	30.59	0.87	3.50	31.12	2.80	10.61	13.77	1.13	30.60	-0.029155	0.67
2.81	5.31	5.31	10.62	13.82	12.23	1.13	30.62	0.87	3.50	31.11	2.81	10.63	13.87	1.13	30.63	-0.048645	0.33
2.82	5.32	5.32	10.64	13.93	12.26	1.14	30.65	0.87	3.50	31.11	2.82	10.65	13.98	1.14	30.66	-0.099326	0.12
2.83	5.33	5.33	10.66	14.03	12.29	1.14	30.67	0.88	3.50	31.10	2.83	10.67	14.08	1.14	30.68	-0.431252	0.02
2.84	5.34	5.34	10.68	14.13	12.31	1.15	30.70	0.88	3.50	31.10	2.84						0
2.90	5.40	5.40	10.80	14.79	12.48	1.18	30.86	0.90	3.50	31.15							
3.00	5.50	5.50	11.00	15.88	12.77	1.24	31.11	0.93	3.52	31.46							
3.03	5.53	5.53	11.06	16.23	12.86	1.26	31.19	0.95	3.53	31.61	3.03	11.13	16.61	1.28	31.27	0.001412	-274.96
3.10	5.60	5.60	11.20	16.99	13.05	1.30	31.35	0.97	3.56	32.02	3.10	11.30	17.55	1.33	31.46	0.003592	-226.80
3.20	5.70	5.70	11.40	18.12	13.33	1.36	31.57	1.01	3.60	32.80	3.20	11.50	18.69	1.39	31.68	0.0049887	-198.96
3.30	5.80	5.80	11.60	19.27	13.61	1.42	31.79	1.04	3.66	33.80	3.30	11.70	19.85	1.44	31.89	0.0058094	-178.91
3.40	5.90	5.90	11.80	20.44	13.90	1.47	31.99	1.08	3.72	35.00	3.40	11.90	21.03	1.50	32.09	0.0063397	-161.70
3.50	6.00	6.00	12.00	21.63	14.18	1.53	32.19	1.12	3.78	36.39	3.50	12.10	22.23	1.55	32.28	0.0067045	-145.92
3.60	6.10	6.10	12.20	22.84	14.46	1.58	32.37	1.16	3.85	37.97	3.60	12.30	23.45	1.61	32.46	0.0069667	-131.01
3.70	6.20	6.20	12.40	24.07	14.75	1.63	32.55	1.19	3.93	39.72	3.70	12.50	24.69	1.66	32.64	0.0071617	-116.66
3.80	6.30	6.30	12.60	25.32	15.03	1.68	32.72	1.23	4.01	41.65	3.80	12.70	25.95	1.71	32.81	0.0073103	-102.69
3.90	6.40	6.40	12.80	26.59	15.31	1.74	32.89	1.27	4.09	43.75	3.90	12.90	27.23	1.76	32.97	0.0074261	-89.01
4.00	6.50	6.50	13.00	27.88	15.59	1.79	33.05	1.31	4.17	46.01	4.00	13.10	28.53	1.81	33.13	0.0075177	-75.55
4.10	6.60	6.60	13.20	29.19	15.88	1.84	33.20	1.35	4.25	48.44	4.10	13.30	29.85	1.86	33.28	0.0075914	-62.24
4.20	6.70	6.70	13.40	30.52	16.16	1.89	33.35	1.39	4.34	51.03	4.20	13.50	31.19	1.91	33.43	0.0076512	-49.07
4.30	6.80	6.80	13.60	31.87	16.44	1.94	33.50	1.43	4.43	53.78	4.30	13.70	32.55	1.96	33.57	0.0077004	-36.00
4.40	6.90	6.90	13.80	33.24	16.73	1.99	33.64	1.47	4.52	56.70	4.40	13.90	33.93	2.01	33.71	0.0077412	-23.02
4.50	7.00	7.00	14.00	34.63	17.01	2.04	33.77	1.51	4.61	59.77	4.50	14.08	35.18	2.05	33.83	0.0077719	-10.10
4.58	7.08	7.08	14.16	35.73	17.23	2.07	33.88	1.54	4.68	62.29	4.58						0
4.60	7.10	7.10	14.20	36.04	17.29	2.08	33.91	1.55	4.70	63.00							

Il profilo D_I , invece, sulla sezione del cambio di pendenza assume valori ancora sensibilmente differenti da quelli caratteristici del moto uniforme¹⁶.

Confrontando i valori di spinta totale corrispondenti alle altezze dei profili F_2 e D_I nella sezione ove avviene il cambio di pendenza fra i due tronchi, si verifica che la spinta totale della corrente lenta da valle è superiore alla spinta totale della corrente veloce da monte. Il risalto dovrà perciò formarsi a monte del cambio di pendenza e congiungerà il profilo F_2 da monte con un profilo F_I avente origine dall'estremo di valle del primo tronco, la cui condizione al contorno è rappresentata dalla profondità del profilo D_I calcolata in tale sezione.

I dati relativi al calcolo del profilo F_I sono riportati in Tabella 3.6, ove sono state introdotte le ascisse progressive misurate a partire dalla sezione di imbocco del primo tronco. Una volta verificato che la profondità del profilo D_I calcolata nel cambio di pendenza ($s = 300$ m) è sensibilmente differente dal valore di moto uniforme, il valore di profondità in tale sezione è stato ottenuto, per tentativi, inserendo nell'ultima sezione di calcolo del profilo un valore di profondità tale da ottenere, con il calcolo alle differenze finite, una ascissa pari a quella della sezione del cambio di pendenza. La profondità all'estremo di monte del profilo D_I è pertanto pari a 3,06 m.

Tabella 3.6. Implementazione del calcolo del profilo di moto permanente F_I di cui all'Esercizio 3.6.

F2															
E	S	Y_p	b_p	Ω_p	R_{ip}	χ_p	F_p	s_p	Y_p	b_p	Ω_p	R_{ip}	χ_p	F_p	s_p
3.51	31.25	2.74	10.49	13.14	1.09	30.44	-0.000673	23.69							
3.51	31.22	2.75	10.51	13.24	1.10	30.46	-0.002514	9.27							
3.51	31.19	2.76	10.53	13.35	1.10	30.49	-0.004903	5.29							
3.51	31.17	2.77	10.55	13.45	1.11	30.52	-0.008054	3.25							
3.50	31.15	2.78	10.57	13.56	1.11	30.55	-0.012403	2.01							
3.50	31.14	2.79	10.59	13.66	1.12	30.58	-0.018809	1.20							
3.50	31.12	2.80	10.61	13.77	1.13	30.60	-0.029155	0.67							
3.50	31.11	2.81	10.63	13.87	1.13	30.63	-0.048645	0.33							
3.50	31.11	2.82	10.65	13.98	1.14	30.66	-0.099326	0.12							
3.50	31.10	2.83	10.67	14.08	1.14	30.68	-0.431252	0.02							
3.50	31.10	2.84						0	2.84	10.74	14.46	1.17	30.78	0.0593599	292.71
3.50	31.15						Qmax =	50.887174	2.90	10.90	15.33	1.21	30.98	0.0272962	293.74
3.52	31.46								3.00	11.06	16.19	1.26	31.18	0.0220972	297.40
3.54	31.75	3.06	11.16	16.75	1.29	31.30	0.0018407	300.00	3.06						300.00
3.56	32.02	3.10	11.30	17.55	1.33	31.46	0.003592	323.20							
3.60	32.80	3.20	11.50	18.69	1.39	31.68	0.0049887	351.04							
3.66	33.80	3.30	11.70	19.85	1.44	31.89	0.0058094	371.09							
3.72	35.00	3.40	11.90	21.03	1.50	32.09	0.0063397	388.30							
3.78	36.39	3.50	12.10	22.23	1.55	32.28	0.0067045	404.08							
3.85	37.97	3.60	12.30	23.45	1.61	32.46	0.0069667	418.99							
3.93	39.72	3.70	12.50	24.69	1.66	32.64	0.0071617	433.34							
4.01	41.65	3.80	12.70	25.95	1.71	32.81	0.0073103	447.31							
4.09	43.75	3.90	12.90	27.23	1.76	32.97	0.0074261	460.99							
4.17	46.01	4.00	13.10	28.53	1.81	33.13	0.0075177	474.45							
4.25	48.44	4.10	13.30	29.85	1.86	33.28	0.0075914	487.76							
4.34	51.03	4.20	13.50	31.19	1.91	33.43	0.0076512	500.93							
4.43	53.78	4.30	13.70	32.55	1.96	33.57	0.0077004	514.00							
4.52	56.70	4.40	13.90	33.93	2.01	33.71	0.0077412	526.98							
4.61	59.77	4.50	14.08	35.18	2.05	33.83	0.0077719	539.90							
4.68	62.29	4.58						550							
4.70	63.00														

¹⁶ Riguardo la verifica della convergenza dell'integrazione alle differenze finite vale quanto detto in sede di commento dell'Esercizio 3.3 (pag. 21). Per motivi di spazio qui omettiamo sia la verifica diretta della convergenza che, in alternativa, l'uso di un passo di integrazione molto piccolo. È evidente che il fatto è del tutto irrilevante ai fini della descrizione dell'implementazione del procedimento sia su foglio elettronico che con un linguaggio di programmazione. In seguito assumeremo sempre la convergenza dell'integrazione numerica senza specificarlo ulteriormente.

La posizione del risalto si determina dai valori di spinta totale riportati in Tabella 3.6, assumendo, come discusso in precedenza, che il profilo F_2 si trovi, già ad una distanza relativamente grande dalla ascissa $s = 300$ m, praticamente in condizioni di moto uniforme. Il risalto si localizza pertanto fra le ascisse $s = 293.74$ m e $s = 297.40$ m, in corrispondenza delle quali la spinta totale (ridotta) del profilo F_1 assume valori rispettivamente minore (31.15 m³) e maggiore (31.46 m³) del valore di spinta relativo al moto uniforme nel primo tronco (31.25 m³). La posizione del risalto si ottiene per interpolazione fra tali valori:

$$s_R = 293,74 + (297,40 - 293,74) \times \frac{31,25 - 31,15}{31,46 - 31,15} = 294,65 \text{ m} .$$

La profondità del profilo F_1 alla quale avviene la formazione del risalto, coniugata della profondità di moto uniforme nel primo tronco, è data da:

$$Y_{vR} = 2,90 + (3,00 - 2,90) \times \frac{294,65 - 293,74}{297,40 - 293,74} = 2,925 \text{ m}$$

In Figura 3.30 sono riportati i profili di moto permanente in forma qualitativa, con evidenziati i punti caratteristici dei profili, quali risalto, altezza critica e altezze di moto uniforme.

Una rappresentazione in scala, per il resto più schematica, è riportata in Figura 3.31. Si osservi, in particolare, come il profilo F_2 possa effettivamente considerarsi in condizioni di moto uniforme su quasi tutta l'estesa del primo tronco, risultando quasi impercettibile il raccordo alla profondità critica nella sezione iniziale.

Rilevando dalla Tabella 3.5 il valore dell'area della sezione liquida corrispondente al moto uniforme nel tronco 1 ($\Omega_{u1} = 13,09$ m²) e valutando per interpolazione la stessa grandezza nella sezione a valle del risalto:

$$\Omega_{vR} = 14,79 + (15,88 - 14,79) \times \frac{294,65 - 293,74}{297,40 - 293,74} = 15,06 \text{ m}^2$$

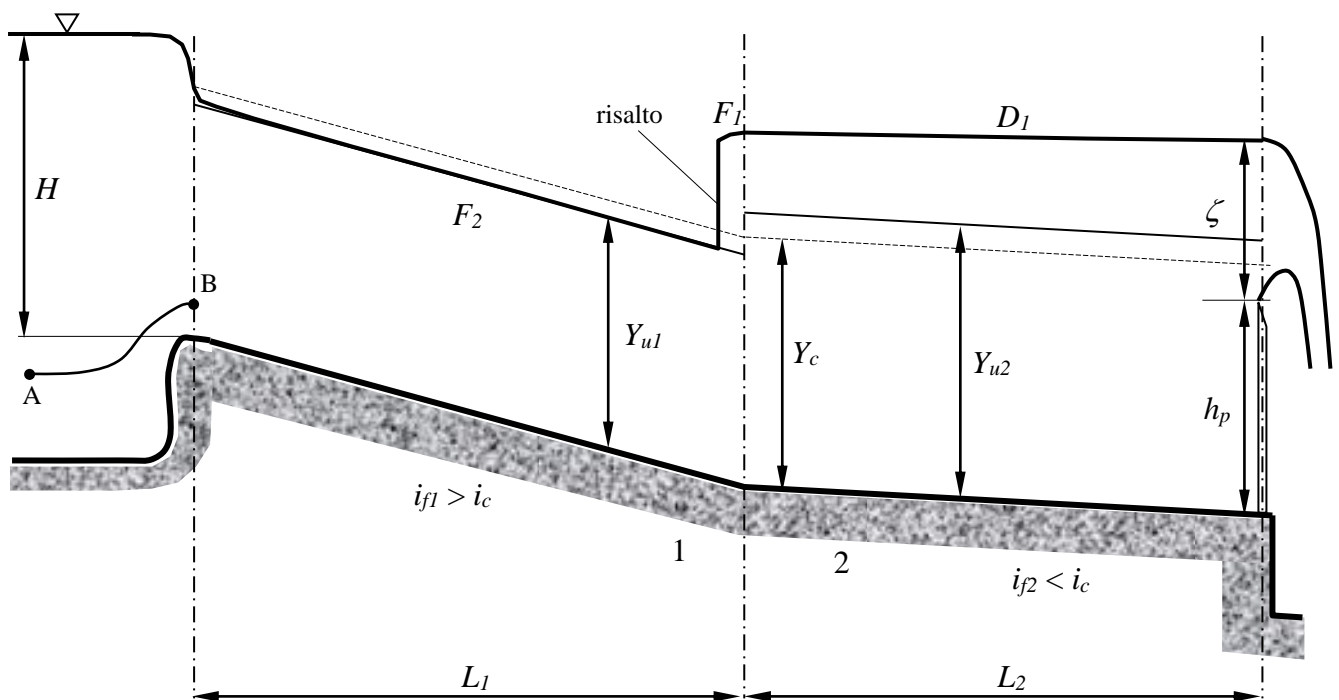


Figura 3.30. Profili di moto permanente nel canale di cui all'Esercizio 3.6 (qualitativo).

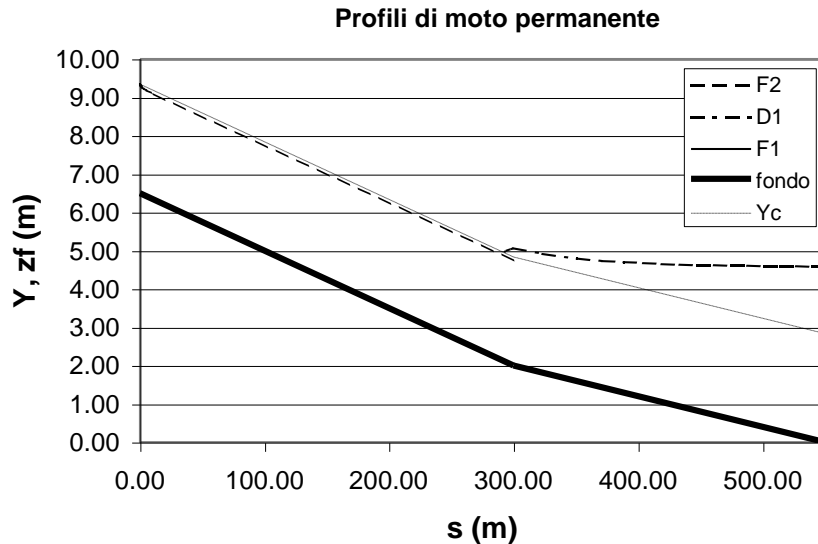


Figura 3.31. Profili di moto permanente nel canale di cui all'Esercizio 3.6.

si calcolano le altezze cinetiche medie della corrente a monte ed a valle del risalto ed i corrispondenti valori di energia specifica:

$$E_{u1} = Y_{u1} + \frac{Q^2}{2g\Omega_{u1}^2} = 2,839 + \frac{(50,89)^2}{2 \times 9,81 \times (13,09)^2} = 3,609 \text{ m}$$

$$E_{u1} = Y_{vR} + \frac{Q^2}{2g\Omega_{vR}^2} = 2,925 + \frac{(50,89)^2}{2 \times 9,81 \times (15,06)^2} = 3,507 \text{ m} .$$

La perdita di energia specifica (per unità di peso di liquido) risultante è data da:

$$\Delta E = 3,609 - 3,507 = 0,102 \text{ m} ,$$

mentre la perdita di potenza della corrente vale:

$$\Delta P = \gamma Q \Delta E = 9806 \times 50,89 \times 0,102 = 50,90 \text{ W} .$$

Esercizio 3.7

Determinare il profilo di moto permanente nel canale indefinito a debole pendenza di Figura 3.32, il cui alveo ha la sezione trasversale riportata in Figura 3.10 (Esercizio 3.1). Si suppongano trascurabili le perdite di carico localizzate all'imbocco del canale dal bacino.

Dati:

- livello nel bacino relativo alla quota del fondo della sezione di imbocco $H = 3.50 \text{ m}$;
- scabrezza dell'alveo $k_s = 30 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ (Gauckler-Strickler);
- pendenza dell'alveo $i_f = 0,005$;

La portata che fluisce nel canale si determina imponendo una condizione da monte ed una da valle per la corrente lenta che deve svilupparsi in alveo indefinito a debole pendenza:

- da monte, il valore del carico specifico della corrente sulla sezione di imbocco del canale; sotto l'ipotesi che le perdite di imbocco siano trascurabili, tale valore è dato dalla quota del pelo libero del bacino rispetto al fondo della sezione stessa (vedi Esercizio 3.6);
- da valle, le condizioni di moto uniforme (condizioni asintotiche di un profilo D_1 o D_2 in alveo a debole pendenza indefinito verso valle, vedi Esercizio 3.4 e Esercizio 3.5).

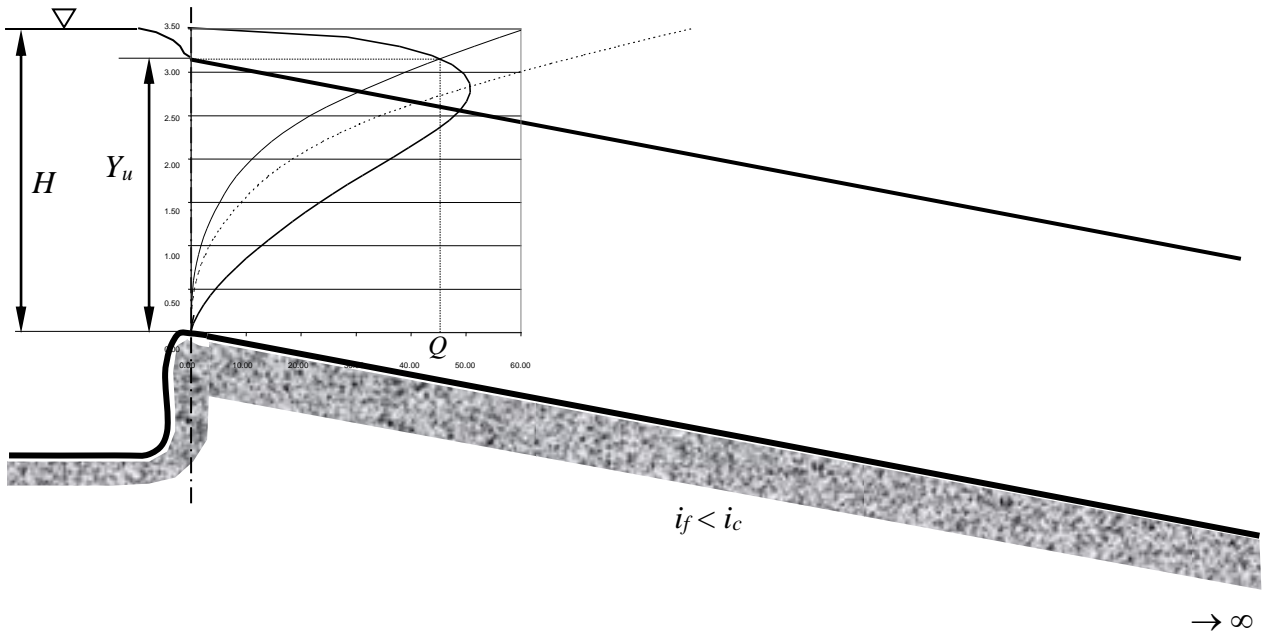


Figura 3.32. Derivazione da bacino con canale a debole pendenza di sviluppo indefinito.

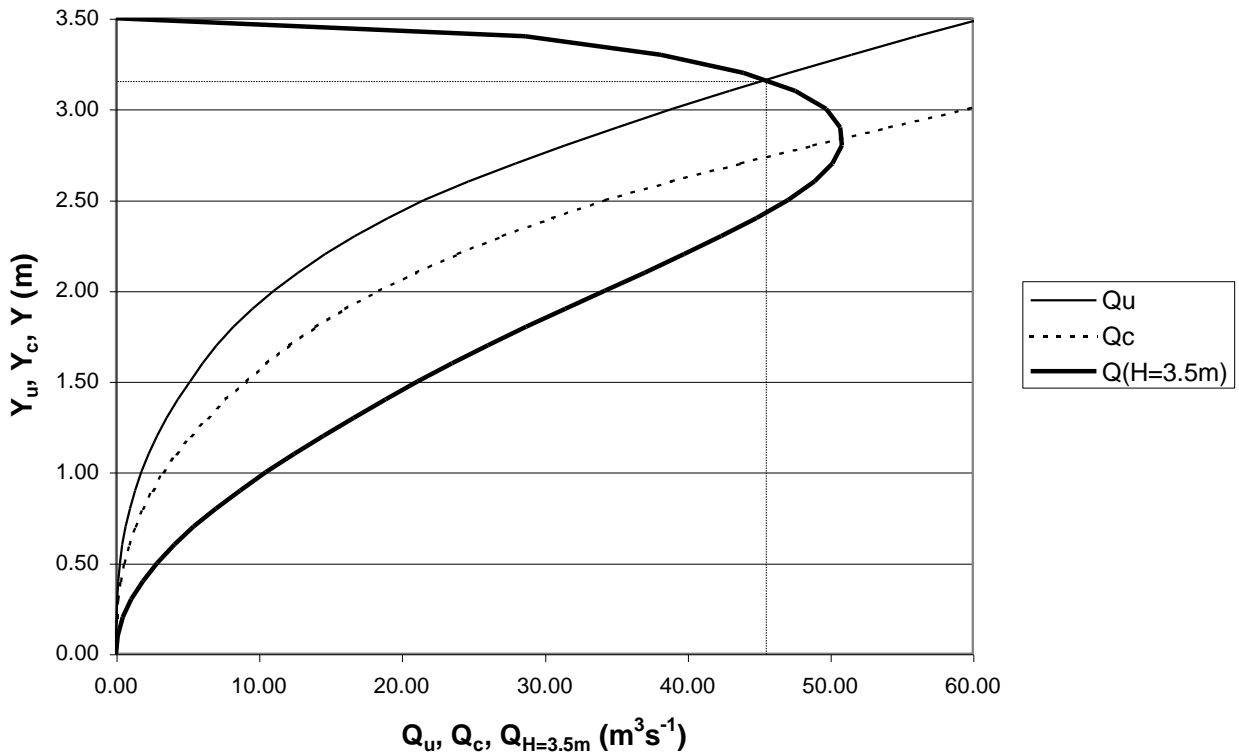


Figura 3.33. Curve delle portate di moto uniforme, portate critiche e portate a carico specifico fissato ($H=3,5$ m).

Tabella 3.7. Determinazione della portata e dell'altezza di moto uniforme per il problema dell'Esercizio 3.7. Sono evidenziati i valori calcolati infittendo la scansione rispetto al valore iniziale di 10 cm.

y, Y	λ_{dx}	λ_{sx}	λ, b	Ω	c	R_i	Y_m	χ	Q_{u1}	Q_c	Q_H	$Y+Y_m/2$
3.00	5.50	5.50	11.00	15.88	12.77	1.24	1.44	31.11	38.94	59.73	49.72	3.72
3.10	5.60	5.60	11.20	16.99	13.05	1.30	1.52	31.35	42.95	65.51	47.58	3.86
3.11	5.61	5.61	11.22	17.10	13.08	1.31	1.52	31.37	43.37	66.10	47.29	3.87
3.12	5.62	5.62	11.24	17.21	13.11	1.31	1.53	31.39	43.78	66.70	46.99	3.89
3.13	5.63	5.63	11.26	17.32	13.13	1.32	1.54	31.42	44.19	67.29	46.67	3.90
3.14	5.64	5.64	11.28	17.43	13.16	1.32	1.55	31.44	44.61	67.89	46.34	3.91
3.15	5.65	5.65	11.30	17.55	13.19	1.33	1.55	31.46	45.03	68.49	45.98	3.93
3.16	5.66	5.66	11.32	17.66	13.22	1.34	1.56	31.48	45.45	69.09	45.61	3.94
3.161	5.66	5.66	11.32	17.67	13.22	1.34	1.56	31.49	45.488	69.15	45.576	3.94
3.162	5.66	5.66	11.32	17.68	13.22	1.34	1.56	31.49	45.530	69.21	45.538	3.94
3.163	5.66	5.66	11.33	17.69	13.23	1.34	1.56	31.49	45.573	69.27	45.499	3.94
3.164	5.66	5.66	11.33	17.71	13.23	1.34	1.56	31.49	45.615	69.33	45.461	3.95
3.165	5.67	5.67	11.33	17.72	13.23	1.34	1.56	31.50	45.657	69.39	45.422	3.95
3.166	5.67	5.67	11.33	17.73	13.24	1.34	1.56	31.50	45.699	69.45	45.383	3.95
3.167	5.67	5.67	11.33	17.74	13.24	1.34	1.57	31.50	45.741	69.51	45.344	3.95
3.168	5.67	5.67	11.34	17.75	13.24	1.34	1.57	31.50	45.783	69.57	45.305	3.95
3.169	5.67	5.67	11.34	17.76	13.24	1.34	1.57	31.50	45.826	69.63	45.266	3.95
3.17	5.67	5.67	11.34	17.77	13.25	1.34	1.57	31.51	45.87	69.70	45.23	3.95
3.18	5.68	5.68	11.36	17.89	13.27	1.35	1.57	31.53	46.29	70.30	44.82	3.97
3.19	5.69	5.69	11.38	18.00	13.30	1.35	1.58	31.55	46.72	70.91	44.39	3.98
3.20	5.70	5.70	11.40	18.12	13.33	1.36	1.59	31.57	47.14	71.52	43.95	3.99
3.30	5.80	5.80	11.60	19.27	13.61	1.42	1.66	31.79	51.51	77.76	38.16	4.13
3.40	5.90	5.90	11.80	20.44	13.90	1.47	1.73	31.99	56.05	84.23	28.62	4.27
3.50	6.00	6.00	12.00	21.63	14.18	1.53	1.80	32.19	60.78	90.92	0.00	4.40

In termini grafici si tratta di trovare il punto di intersezione della curva delle portate a carico specifico costante ($H = 3,5$ m) e della scala delle portate di moto uniforme (Figura 3.33). Le coordinate di tale punto sono la portata fluente nel canale e la corrispondente altezza di moto uniforme.

Mediante il foglio elettronico la determinazione può essere eseguita facilmente ricercando il punto di inversione del segno della funzione $Q_{H=3,5m} - Q_u$. Nell'esempio riportato in Tabella 3.7, trovata una prima coppia di altezze, calcolate secondo la scansione inizialmente adottata, fra le quali si verifica l'inversione ($Y_1 = 3,10$ m, $Y_2 = 3,20$ m), si può determinare il punto cercato cercando il punto di intersezione delle due rette che interpolano le funzioni fra i due valori di profondità determinati o, più semplicemente, infittendo progressivamente la scansione delle altezze per identificare il punto di inversione con la precisione desiderata.

Nel caso specifico, adottando il secondo procedimento la seconda coppia di valori fra i quali è compreso il punto di inversione, determinata con una scansione delle profondità di 1 cm, è data da ($Y_1' = 3,16$ m, $Y_2' = 3,17$ m). Infittendo ulteriormente la scansione portandola ad 1 mm, si determina la profondità $Y = 3,162$ m, in corrispondenza della quale si calcolano due valori di portata $Q_{H=3,5m} = 45,538$ m³s⁻¹ e $Q_u = 45,530$ m³s⁻¹ ritenuti sufficientemente prossimi. Si assume pertanto tale profondità come profondità di moto uniforme, mentre come portata corrispondente si assume la media aritmetica dei due valori determinati:

$$Y_u = 3,162 \text{ m} \quad ; \quad Q_u = \frac{45,538 + 45,530}{2} = 45,534 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

Il profilo di moto permanente è quello del moto uniforme fin dall'imbocco, con estensione, teoricamente indefinita quale è supposta essere l'estensione del canale.

In linea generale ogniqualvolta si ha una derivazione con un alveo a debole pendenza di sviluppo che non possa a priori considerarsi indefinito, lo stesso schema di calcolo può essere utilizzato, almeno come prima approssimazione. In tale caso, sulla base del valore di portata determinato e delle condizioni al contorno nelle altre sezioni di controllo si provvede a tracciare il profilo di moto permanente fino all'imbocco del canale. L'approssimazione sarà accettabile se il valore di profondità che si calcola all'imbocco differisce in misura inferiore della tolleranza prefissata per i calcoli.

In caso contrario, dovrà abbandonarsi l'ipotesi di moto uniforme fin dall'imbocco; il calcolo dovrà essere ripetuto assumendo, come nuovo valore della portata, quello che si legge sulla curva delle portate a carico specifico costante (tale condizione rimane infatti immutata) in corrispondenza del valore di profondità calcolato al termine del primo tracciamento del profilo. Eventualmente si ripeterà il procedimento quante volte serve per ottenere un risultato della precisione desiderata, ogni volta assumendo come nuovo valore della portata quello letto sulla curva delle portate a carico specifico costante in corrispondenza della profondità all'imbocco determinata nel tentativo precedente.

Esercizio 3.8

Determinare il profilo di moto permanente nel canale di Figura 3.34. Il canale, a pendenza nulla, è alimentato da un serbatoio attraverso una paratoia piana e termina con un salto di fondo. Un primo tratto a valle della paratoia ha sezione rettangolare. Il tratto successivo, ben raccordato al canale a sezione rettangolare, ha la sezione trasversale riportata in Figura 3.10 (Esercizio 3.1). Si suppongano trascurabili le perdite di carico localizzate al raccordo fra i due alvei.

Dati:

- livello nel bacino $H = 5.00$ m;
- luce della paratoia $a = 1,00$ m;
- coefficiente di contrazione efflusso paratoia $C_c = 0,61$;
- scabrezza dell'alveo $k_s = 20 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ (Gauckler-Strickler);
- pendenza dell'alveo $i_f = 0$;
- larghezza della sezione rettangolare $b = 10.00$ m;
- lunghezza del tronco a sezione rettangolare $L_1 = 10$ m;
- lunghezza del secondo tronco $L_2 = 100$ m;

Nell'ipotesi che l'efflusso dalla paratoia non sia rigurgitato, la portata fluente si determina applicando il teorema di Bernoulli fra un punto A interno al bacino, sufficientemente lontano dalla luce della paratoia perché se ne possa trascurare l'altezza cinetica, ed un punto B della sezione contratta (regolare) a valle della paratoia:

$$H = z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g} = Y_B + \frac{v_B^2}{2g} = C_c a + \frac{v_B^2}{2g}$$

da cui si ricava l'espressione della portata:

$$Q = \Omega_c v_B = b C_c a \sqrt{2g(H - C_c a)},$$

e infine:

$$Q = 10 \times 0,61 \times 0,5 \sqrt{2 \times 9,81 (5,0 - 0,61 \times 1,0)} = 56,61 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

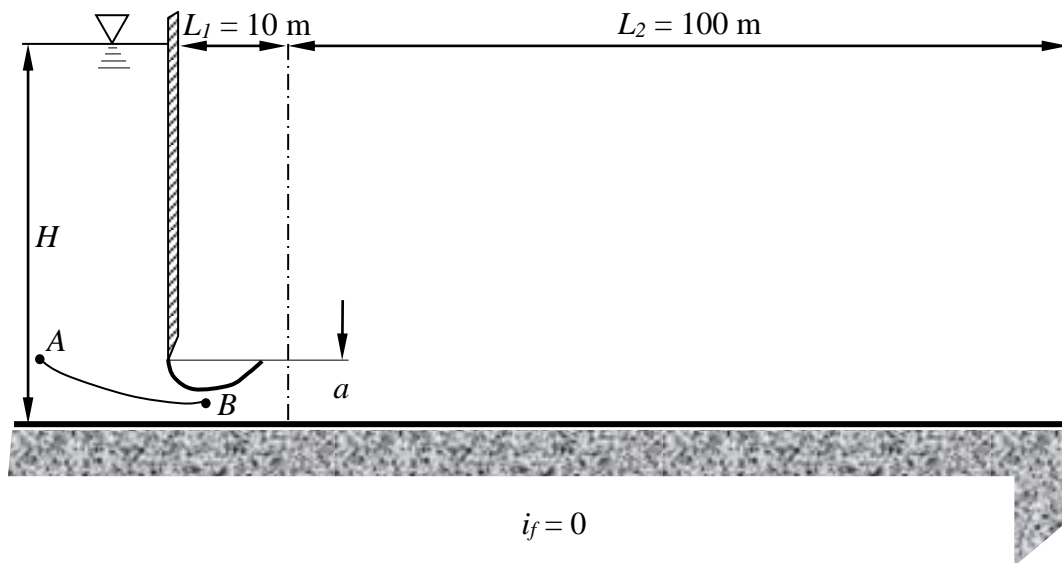


Figura 3.34. Canale di presa da bacino tramite paratoia piana.

La profondità critica per l'alveo rettangolare è pari a:

$$Y_{c1} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb_0^2}} = \sqrt[3]{\frac{(56,612)^2}{9,81 \times (10)^2}} = 1,484 \text{ m}$$

Dalla sezione contratta ($Y_B = 0,61 \text{ m}$) si sviluppa un profilo di corrente veloce ritardata in alveo a pendenza nulla (O_3 secondo la classificazione richiamata precedentemente).

Nell'ipotesi che la sezione contratta si trovi ad una distanza dalla paratoia pari all'altezza della luce (1,00 m), si calcola il profilo alle differenze finite come illustrato in Tabella 3.8.

In particolare, alla progressiva $s = 10 \text{ m}$, alla quale si ha il raccordo della sezione rettangolare con la successiva, si calcolano una profondità ed un corrispondente valore di carico specifico:

Tabella 3.8. Implementazione del calcolo del profilo O_3 di cui all'Esercizio 3.8.

ALVEO RETTANGOLARE								O3					
Y	Ω	c	R_i	χ	ζ_g	E_Q	S_Q	Ω_p	R_{ip}	χ_p	F_p	s_p	$S_Q/10$
0.61	1.83	4.22	0.43	17.40	0.31	---	---						1.00
0.65	1.95	4.30	0.45	17.53	0.33	4.516	15.712	1.89	0.44	17.47	0.0495	1.81	1.5712
0.70	2.10	4.40	0.48	17.68	0.35	4.034	14.737	2.03	0.47	17.61	0.0507	2.80	1.4737
0.75	2.25	4.50	0.50	17.82	0.38	3.654	13.912	2.18	0.49	17.75	0.0523	3.75	1.3912
0.80	2.40	4.60	0.52	17.94	0.40	3.352	13.211	2.33	0.51	17.88	0.0543	4.67	1.3211
0.85	2.55	4.70	0.54	18.06	0.43	3.111	12.614	2.48	0.53	18.00	0.0567	5.55	1.2614
0.90	2.70	4.80	0.56	18.17	0.45	2.917	12.105	2.63	0.55	18.12	0.0595	6.39	1.2105
0.95	2.85	4.90	0.58	18.27	0.48	2.760	11.671	2.78	0.57	18.22	0.063	7.19	1.1671
1.00	3.00	5.00	0.60	18.37	0.50	2.634	11.301	2.93	0.59	18.32	0.0673	7.93	1.1301
1.05	3.15	5.10	0.62	18.46	0.53	2.532	10.988	3.08	0.61	18.41	0.0727	8.62	1.0988
1.10	3.30	5.20	0.63	18.54	0.55	2.450	10.725	3.23	0.63	18.50	0.0794	9.25	1.0725
1.15	3.45	5.30	0.65	18.62	0.58	2.385	10.506	3.38	0.64	18.58	0.0882	9.82	1.0506
1.168	3.50	5.34	0.66	18.65	0.58	2.365	10.438	3.48	0.65	18.63	0.0957	10.00	1.0438
1.20	3.60	5.40	0.67	18.69	0.60	2.334	10.328	3.55	0.66	18.67	0.1024	10.32	1.0328
1.30	3.90	5.60	0.70	18.83	0.65	2.267	10.074	3.75	0.68	18.76	0.1271	11.10	1.0074
1.40	4.20	5.80	0.72	18.95	0.70	2.233	9.941	4.05	0.71	18.89	0.2116	11.58	0.9941
1.484	4.45	5.97	0.75	19.05	0.74	2.226	9.908	4.33	0.74	19.00	0.6472	11.70	0.9908

$$Y_{s=10mO3} = 1,168 \text{ m} \quad ; \quad E_{Q_{s=10mO3}} = 2,365 \text{ m} .$$

La presenza di un salto di fondo al termine del secondo tronco implica il passaggio per lo stato critico in tale sezione. A monte di tale sezione si svilupperà pertanto un profilo di corrente lenta accelerata, che può essere tracciato imponendo a valle la condizione al contorno costituita dalla profondità critica per il secondo tronco. Tale profondità, per definizione, è quel valore per il quale è minima l'energia specifica della corrente di portata assegnata e costante. Tracciando il diagramma dell'energia specifica, o procedendo per tentativi sul foglio elettronico si ottiene:

$$Y_{c2} = 1,954 \text{ m} .$$

In alternativa, la determinazione può eseguirsi cercando il valore di profondità per il quale si ha:

$$\frac{\Omega^3}{b} = \frac{Q^2}{g} ,$$

sia graficamente che numericamente.

Si può quindi tracciare il profilo O_2 nel secondo tronco, come riportato nella Tabella 3.9, fino alla progressiva $s = 10 \text{ m}$, ove si calcola il valore di energia rispetto al fondo:

$$E_{s=10mO2} = 2,748 \text{ m}$$

Tabella 3.9. Implementazione del calcolo del profilo O_2 nel secondo tronco di cui all'Esercizio 3.8.

SECONDO TRONCO																		
Y	λ_{dx}	λ_{sx}	λ, b	Ω	c	R_f	χ	ζ_g	E_o	S_o	Y_p	b_p	Ω_p	R_{fp}	χ_p	F_p	s_p	
1.60	3.20	1.85	5.05	3.85	6.06	0.64	27.82	0.53	2.591	9.68								
1.70	3.40	2.20	5.60	4.39	6.65	0.66	27.99	0.56	2.465	9.17								
1.80	3.60	2.55	6.15	4.97	7.24	0.69	28.18	0.59	2.395	8.84								
1.90	3.80	2.90	6.70	5.62	7.83	0.72	28.39	0.62	2.366	8.69								
1.954	3.91	3.09	7.00	5.98	8.14	0.73	28.50	0.63	2.364	8.68	1.954							110.00
2.00	4.00	3.25	7.25	6.31	8.41	0.75	28.60	0.64	2.369	8.71	2.00	7.12	6.15	0.74	28.55	-0.1273991	109.64	
2.10	4.20	3.60	7.80	7.07	9.00	0.78	28.81	0.67	2.395	8.88	2.10	7.53	6.69	0.77	28.71	-0.0391125	107.08	
2.20	4.40	3.95	8.35	7.87	9.59	0.82	29.03	0.69	2.437	9.20	2.20	8.08	7.47	0.80	28.92	-0.0179002	101.50	
2.30	4.60	4.30	8.90	8.74	10.18	0.86	29.25	0.72	2.493	9.66	2.30	8.63	8.30	0.84	29.14	-0.0105334	92.00	
2.40	4.80	4.65	9.45	9.65	10.76	0.90	29.46	0.75	2.558	10.26	2.40	9.18	9.19	0.88	29.35	-0.0069134	77.54	
2.50	5.00	5.00	10.00	10.63	11.35	0.94	29.67	0.77	2.630	11.00	2.50	9.73	10.14	0.92	29.57	-0.0048277	56.82	
2.60	5.10	5.10	10.20	11.64	11.63	1.00	30.00	0.80	2.709	11.87	2.60	10.10	11.13	0.97	29.84	-0.003444	27.79	
2.648	5.15	5.15	10.30	12.13	11.77	1.03	30.15	0.82	2.748	12.34	2.648	10.25	11.88	1.02	30.08	-0.0027118	10.00	

Dall'ipotesi che si possano trascurare le perdite di carico localizzate dovute al cambiamento di sezione consegue che, nel cambio di sezione, non si abbia discontinuità nella linea dei carichi totali. Pertanto, avendo gli alvei la stessa quota del fondo, consegue che nelle due diverse sezioni immediatamente a monte ed a valle del cambio la corrente possenga anche la stessa energia rispetto al fondo.

La quota del profilo di corrente lenta immediatamente a monte del cambio di sezione, generato dal profilo O_2 nel tronco di valle si determina quindi cercando il valore di profondità nell'alveo rettangolare, in corrente lenta (perché si sta trattando di una perturbazione proveniente da valle), alla quale corrisponde il valore di energia specifica calcolato. Si determina così (Tabella 3.10):

$$Y_{s=10mO2rett} = 2,483 \text{ m} .$$

Tabella 3.10. Implementazione del calcolo del profilo O_2 nell'alveo rettangolare di cui all'Esercizio 3.8.

ALVEO RETTANGOLARE													
Y	Ω	c	R_i	χ	ζ_g	E_Q	S_Q	Ω_p	R_{ip}	χ_p	F_p	s_p	$S_Q/10$
2.3	6.90	7.60	0.91	19.68	1.15	2.609	12.196						
2.4	7.20	7.80	0.92	19.73	1.20	2.684	12.724						
2.483	7.45	7.97	0.94	19.78	1.24	2.748	13.195					10.00	1.3195
2.5	7.50	8.00	0.94	19.79	1.25	2.761	13.295	7.47	0.94	19.78	-0.018	9.05	1.3295
2.55	7.65	8.10	0.94	19.81	1.28	2.801	13.597	7.58	0.94	19.80	-0.017	6.12	1.3597
2.6	7.80	8.20	0.95	19.83	1.30	2.842	13.910	7.73	0.95	19.82	-0.016	3.01	1.391
2.646	7.94	8.29	0.96	19.85	1.32	2.879	14.203	7.87	0.95	19.84	-0.015	0.00	1.4203
2.7	8.10	8.40	0.96	19.88	1.35	2.924	14.565						
2.80	8.40	8.60	0.98	19.92	1.40	3.008	15.260						
2.9	8.70	8.80	0.99	19.96	1.45	3.094	15.995						
2.9	8.70	8.80	0.99	19.96	1.45	3.094	15.995	8.70	0.99	19.96	-0.011	9.05	
2.943	8.83	8.89	0.99	19.98	1.47	3.132	16.324	8.76	0.99	19.97	-0.011	5.10	

Tale valore è maggiore della profondità critica dell'alveo rettangolare, pertanto il punto così determinato appartiene ad un eventuale profilo O_2 in tale alveo, *discontinuo* rispetto all' O_2 da valle.

A questo punto è possibile stabilire se il risalto, che necessariamente deve collegare il profilo di corrente veloce O_3 al profilo di corrente lenta da valle, si stabilisce a monte o a valle del cambio di sezione, confrontando i valori di spinta totale che si ottengono, a monte del cambio di sezione, con i due profili O_3 ed O_2 . Tale confronto può essere fatto indifferente anche a valle del cambio di sezione. In tal caso, partendo dal carico specifico ottenuto per il profilo O_3 alla ascissa $s = 10$ m, ($E = 2,365$ m) si sarebbe dovuto determinare, nel secondo tronco, immediatamente a valle del cambio di sezione, il valore di profondità per il quale si ottiene lo stesso valore di carico specifico. La relativa spinta totale avrebbe dovuto essere confrontata con il valore corrispondente alla profondità del profilo O_2 del secondo tronco sulla stessa sezione¹⁷.

Dalle Tabella 3.8 e Tabella 3.10 si ricavano i valori delle spinte totali ridotte sul lato di monte della sezione $s = 10$ m dovute rispettivamente al profilo O_3 ed al profilo O_2 (relativi ai profili provenienti da monte e da valle rispettivamente):

$$S_{s=10m_m} = 10,438 \text{ m}^3 \quad ; \quad S_{s=10m_v} = 13,195 \text{ m}^3 .$$

Il risalto deve pertanto formarsi a monte della sezione, nell'alveo rettangolare. Si può quindi calcolare il profilo O_2 nell'alveo rettangolare, come mostrato nella Tabella 3.10. Tutti i profili presenti sono riportati in scala in Figura 3.35 e, qualitativamente, in Figura 3.36.

Rimane da determinare la posizione del risalto. Come è noto, il risalto si disporrà in una sezione in cui le spinte totali delle correnti provenienti da monte e da valle assumono lo stesso valore. Diversamente dal caso degli Esercizio 3.6 e Esercizio 3.7, nel quale il valore della spinta della corrente veloce era predeterminato, potendosi essa considerare praticamente in condizioni di moto uniforme, nel caso presente si tratta di effettuare la stessa determinazione su due profili entrambi non uniformi, nei quali, perciò, la spinta totale non può considerarsi, nemmeno approssimativamente, costante.

A tale scopo si tracciano i diagrammi delle spinte totali delle due correnti in funzione della

¹⁷ Non va commesso l'errore di eseguire il confronto delle spinte totali fra due sezioni fra le quali sia interposta una discontinuità, quale, in questo caso, il cambio di sezione. Concettualmente, con riferimento al criterio per l'individuazione della posizione del risalto ottenuto tramite applicazione dell'equazione globale del moto, ciò equivarrebbe a trascurare, nel computo delle spinte, la componente assiale della spinta esercitata dalla parete dell'alveo sul volume di controllo, valutabile come spinta idrostatica sulla proiezione della parete bagnata dell'alveo sul piano della sezione, in direzione perpendicolare all'asse della corrente.

ascissa s . In Figura 3.35 sono riportati, sullo stesso grafico dei profili di moto permanente, le curve delle spinte totali ridotte, ulteriormente scalate per consentirne l'inserimento nel grafico. Il punto di intersezione delle due curve rappresenta la sezione nella quale si forma il risalto¹⁸

Graficamente, si suole anche rappresentare, o anche eseguire la determinazione della posizione del risalto, mediante il tracciamento del *profilo coniugato* ad uno dei due profili reali, definito come quel profilo che ha per profondità, sezione per sezione, la profondità o altezza coniugata del profilo considerato. La posizione del risalto sarà pertanto costituita dalla sezione nella quale il profilo coniugato interseca il secondo profilo, poiché in tale sezione, per costruzione, ai due profili fra i quali è interposto il risalto compete lo stesso valore della spinta totale (vedi Figura 3.36).

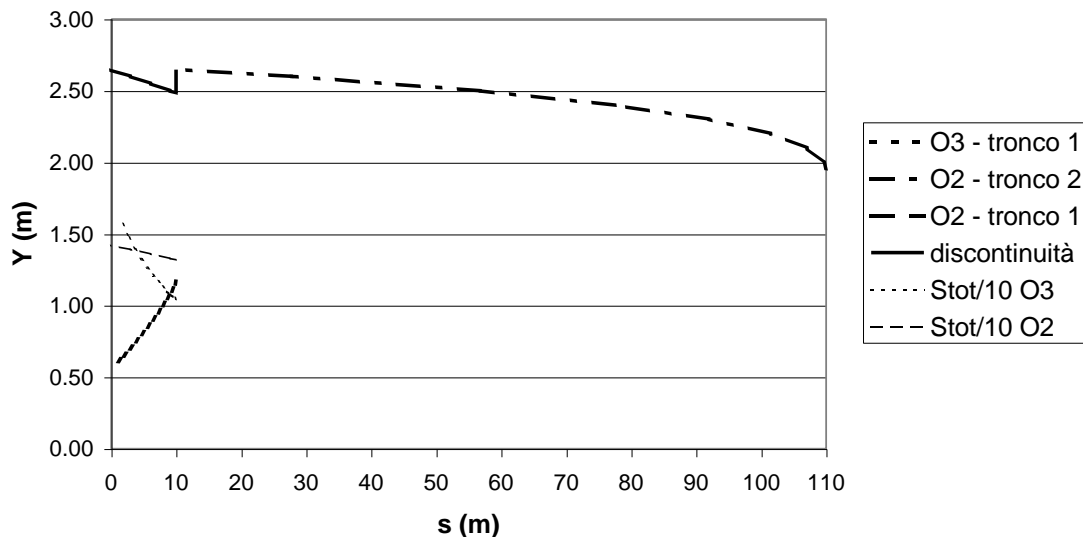


Figura 3.35. Profili di moto permanente nel canale di cui all'Esercizio 3.8.

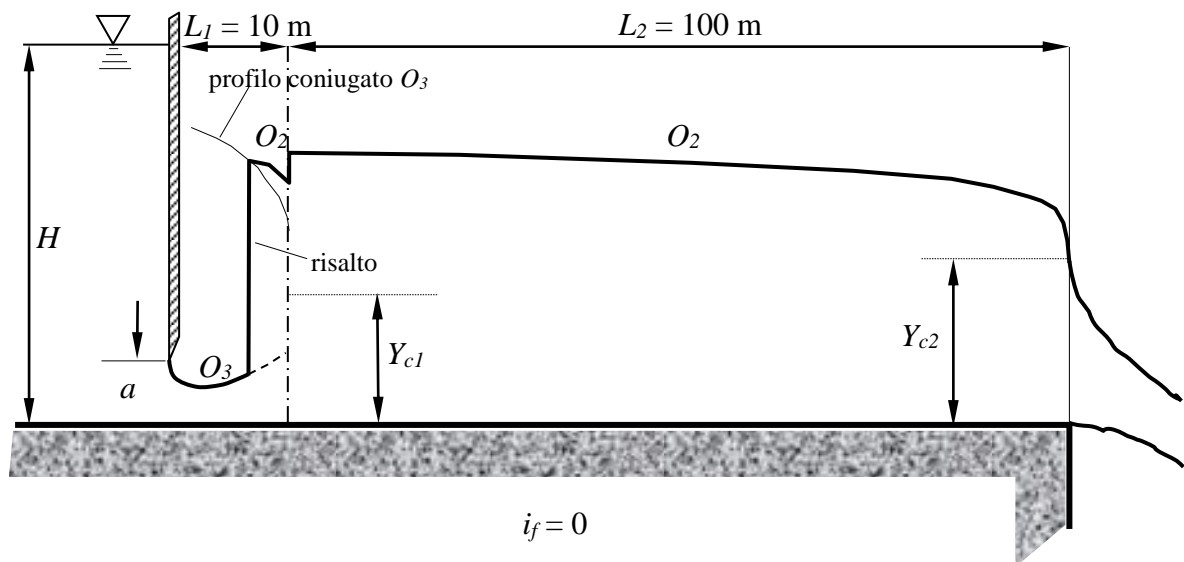


Figura 3.36. Profili di moto permanente nel canale di cui all'Esercizio 3.8 (qualitativo).

¹⁸ Il lettore più attento osserverà che, nel caso in questione, si ha a che fare, dati i valori di profondità della corrente, con un risalto il cui sviluppo longitudinale è paragonabile con lo sviluppo longitudinale dell'alveo rettangolare, per cui la localizzazione precisa della sezione in cui si forma il risalto può sembrare velleitaria, e in effetti lo è. Tuttavia, quello illustrato è solo un esempio di un procedimento valido per la generalità dei casi possibili. Nel caso in cui il risalto fosse interposto fra correnti che si sviluppano per estese dell'ordine delle decine o centinaia di metri, parlare di localizzazione precisa del risalto (sottinteso: rispetto alle dimensioni longitudinali caratteristiche della corrente) avrebbe un significato più concreto e sostanziale.

Esercizio 3.9

Determinare il profilo di moto permanente nel canale a sezione rettangolare il cui profilo del fondo è riportato in Figura 3.37. Si assumano trascurabili le perdite di carico localizzate in corrispondenza del sovrizzo.

Dati:

- portata $Q = 50 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$;
- altezza del sovrizzo $a = 0.4 \text{ m}$;
- lunghezza del sovrizzo $L = 100 \text{ m}$;
- scabrezza dell'alveo $k_s = 50 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ (Gauckler-Strickler);
- pendenza dell'alveo $i_f = 0,001$;
- larghezza della sezione rettangolare $b = 10.00 \text{ m}$;

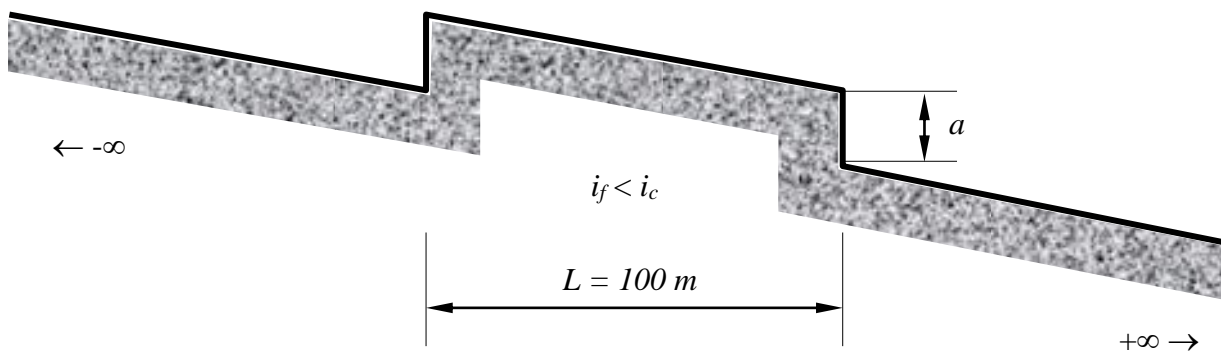


Figura 3.37.

Dalla scala delle portate di moto uniforme, in forma grafica (Figura 3.38) o numerica, si determinano la profondità di moto uniforme ed il corrispondente valore di energia specifica:

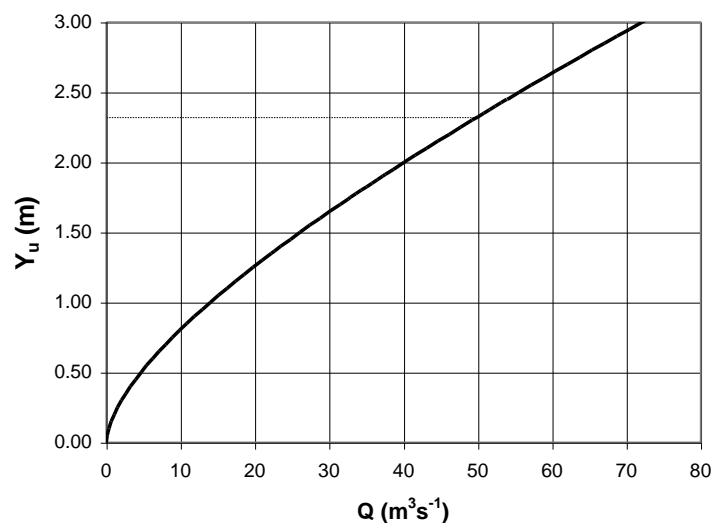


Figura 3.38. Scala delle portate di moto uniforme dell'alveo di cui all'Esercizio 3.9.

$$Y_u = 2,324 \text{ m} ; \quad E_u = 2,560 \text{ m} .$$

La profondità critica è data da:

$$Y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}} = \sqrt[3]{\frac{(50)^2}{9,81 \times (10)^2}} = 1,366 \text{ m} ,$$

dal che si evince che l'alveo è a debole pendenza.

Essendo l'alveo a debole pendenza indefinito sia a monte che a valle, nello studio del profilo si parte da valle con le condizioni di moto uniforme, che, almeno in prima ipotesi, supporremo si mantengano fino all'estremità di valle del sovrizzo.

Nell'ipotesi che il sovrizzo sia ben raccordato al resto del canale, tanto a monte quanto a valle, si possono trascurare le perdite di carico localizzate nelle due sezioni estreme. Conseguenza di ciò che, in assenza di discontinuità della linea dei carichi totali, il carico specifico (rispetto al fondo) differisca esattamente dell'altezza del sovrizzo fra le sezioni immediatamente precedente e successiva a quest'ultimo.

In particolare, il valore del carico specifico immediatamente a monte dell'estremo di valle del sovrizzo, sarà dato da (Figura 3.39):

$$E_{v-} = E_{v+} - a = E_u - a = 2,560 - 0,40 = 2,160 \text{ m} .$$

Il valore della corrispondente profondità, $Y_{v-} = 1,738 \text{ m}$, si può determinare utilizzando due tipi di diagrammi (e relative implementazioni numeriche):

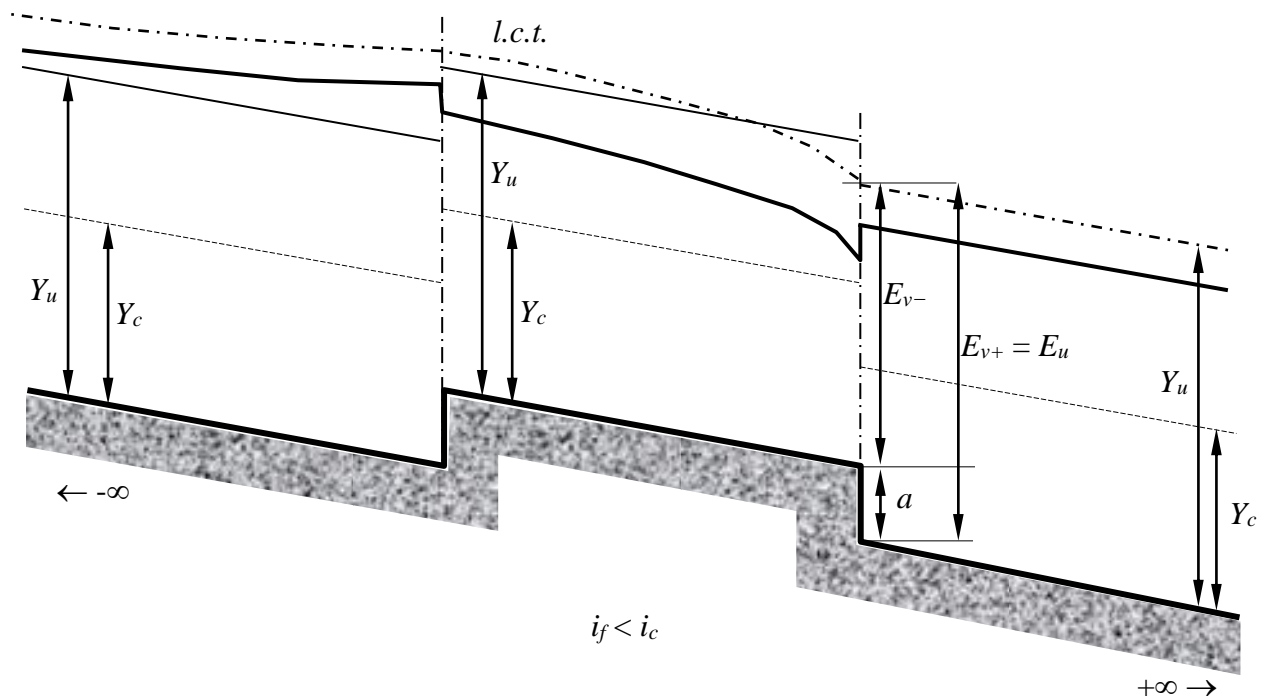


Figura 3.39. Andamento qualitativo del profilo del pelo libero e della linea dei carichi totali.

a) diagramma dell'energia specifica a portata costante:

il punto rappresentativo delle condizioni sull'estremo di valle del sovrizzo, al di sopra di questo (sezione $v-$), si determina individuando il punto di corrente lenta avente energia specifica

diminuita di a rispetto al valore caratteristico del moto uniforme (sezione $v+$). Lavorando del ramo delle correnti lente del diagramma, avente per asintoto la bisettrice del quadrante, si ha necessariamente $\Delta Y > a$, per cui il livello nella sezione $v-$ è inferiore rispetto al livello in $v+$;

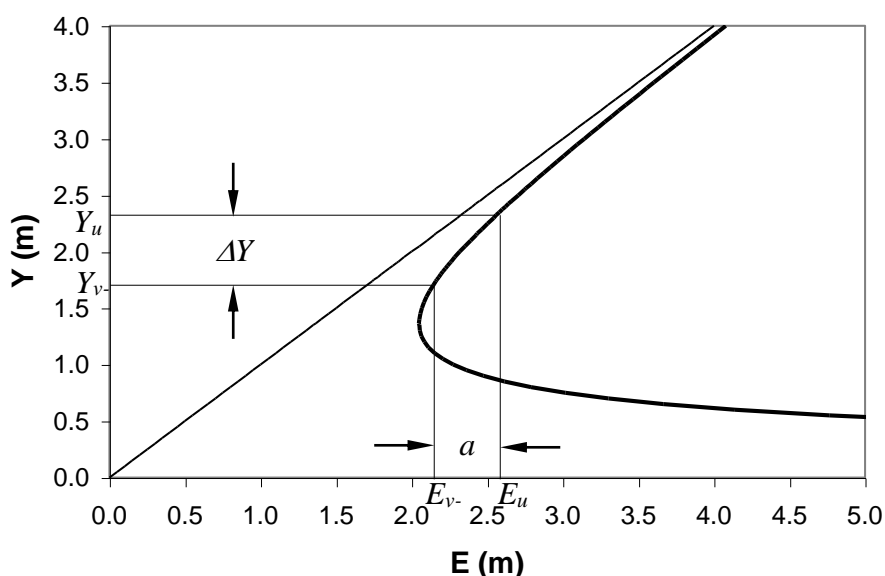


Figura 3.40. Calcolo della profondità nella sezione $v-$ mediante il diagramma dell'energia specifica a portata costante.

b) diagrammi delle portate a energie specifiche costanti:

si tracciano i diagrammi delle portate ad energia specifica costante relativi ai valori del moto uniforme e a quest'ultimo diminuito di a . In particolare, in Figura 3.41 le due curve sono state tracciate aventi in comune l'estremo superiore che, se le curve venissero riportate nella stessa scala del profilo del fondo su quest'ultimo, coinciderebbe con il punto della linea dei carichi totali nelle sezioni $v-$ e $v+$. La profondità nella sezione $v-$ si legge pertanto con riferimento al livello del fondo sul sovrizzo: $a = 0,40$ m, in corrispondenza del valore di portata assegnato.

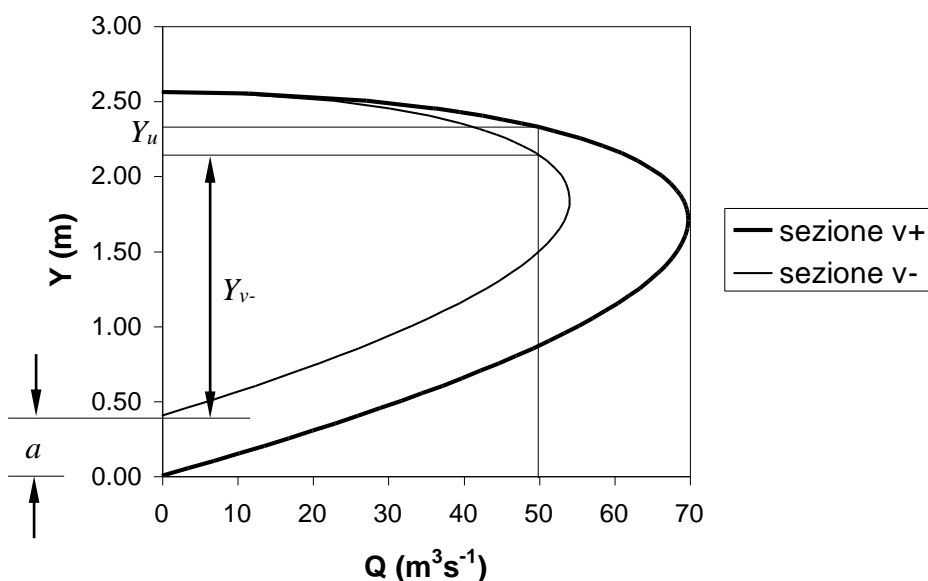


Figura 3.41. Calcolo della profondità nella sezione $v-$ mediante le curve delle portate ad energia specifica costante.

Essendo la profondità nella sezione v - compresa fra le profondità critica e di moto uniforme, sul sovrizzo si forma un profilo D_2 di corrente lenta accelerata, tracciabile a partire dalla sezione v - e dal relativo valore di profondità (Tabella 3.11).

Tabella 3.11. Implementazione del calcolo dei profili di moto permanente D_1 e D_2 nel canale di cui all'Esercizio 3.9.

Y	Ω	c	R_i	χ	Qu	E_o	S_o	Ω_p	R_{ip}	χ_p	F_p	S_p
1.55	15.50	13.10	1.18	51.42	27.42	2.08	28.45			#####	1.82	
1.60	16.00	13.20	1.21	51.63	28.76	2.10	28.73					
1.65	16.50	13.30	1.24	51.83	30.12	2.12	29.06			D2	sul sovrizzo	
1.70	17.00	13.40	1.27	52.02	31.50	2.14	29.44	Ω_p	R_{ip}	χ_p	F_p	S_p
1.738	17.38	13.48	1.29	52.17	32.56	2.16						100
1.75	17.50	13.50	1.30	52.21	32.90	2.17	29.87	17.44	1.29	52.19	-0.00257	95.33
1.775	17.75	13.55	1.31	52.30	33.60	2.18	30.11	17.63	1.30	52.26	-0.00236	84.73
1.80	18.00	13.60	1.32	52.39	34.31	2.19	30.36	17.88	1.32	52.35	-0.00211	72.89
1.825	18.25	13.65	1.34	52.48	35.02	2.21	30.62	18.13	1.33	52.44	-0.00189	59.65
1.85	18.50	13.70	1.35	52.57	35.74	2.22	30.89	18.38	1.34	52.52	-0.00169	44.89
1.875	18.75	13.75	1.36	52.65	36.46	2.24	31.17	18.63	1.36	52.61	-0.00152	28.41
1.90	19.00	13.80	1.38	52.74	37.18	2.25	31.46	18.88	1.37	52.69	-0.00136	10.02
1.913	19.13	13.83	1.38	52.78	37.54	2.26	31.61	19.06	1.38	52.76	-0.00125	0.00
1.95	19.50	13.90	1.40	52.90	38.64	2.29	32.08				Esm=	2.661
2.00	20.00	14.00	1.43	53.06	40.11	2.32	32.74					
2.05	20.50	14.10	1.45	53.22	41.60	2.35	33.44					
2.10	21.00	14.20	1.48	53.37	43.10	2.39	34.19					
2.15	21.50	14.30	1.50	53.52	44.61	2.43	34.97					
2.16	21.60	14.32	1.51	53.55	44.93	2.43	35.13					
2.20	22.00	14.40	1.53	53.66	46.14	2.46	35.78					
2.25	22.50	14.50	1.55	53.80	47.68	2.50	36.64			D1	a monte sovrizzo	
2.30	23.00	14.60	1.58	53.93	49.24	2.54	37.53	Ω_p	R_{ip}	χ_p	F_p	S_p
2.324	23.24	14.65	1.587	54.00	50.00	2.560	37.98	Esv =	2.160			
2.35	23.50	14.70	1.60	54.07	50.80	2.58	38.46	23.75	1.61	54.13	7.5E-05	-890.35
2.375	23.75	14.75	1.61	54.13	51.59	2.60	38.93	24.00	1.62	54.19	0.00011	-556.16
2.40	24.00	14.80	1.62	54.20	52.38	2.62	39.42	24.24	1.63	54.26	0.00014	-326.27
2.425	24.25	14.85	1.63	54.26	53.17	2.64	39.91	24.38	1.64	54.29	0.00016	-147.18
2.448	24.48	14.90	1.64	54.32	53.90	2.66	40.37	Esm=	2.661			0
2.45	24.50	14.90	1.64	54.32	53.97	2.66	40.41					
2.50	25.00	15.00	1.67	54.44	55.57	2.70	41.44					

All'estremo superiore del sovrizzo si calcolano i valori di profondità ed energia specifica:

$$Y_{m+} = 1,913 \text{ m} \quad ; \quad E_{m+} = 2,260 \text{ m} .$$

Procedendo in modo analogo a quanto fatto per l'estremo di valle (Figura 3.42), si determinano i valori di profondità ed energia specifica immediatamente a monte (sezione m -):

$$Y_{m-} = 2,448 \text{ m} \quad ; \quad E_{m-} = 2,660 \text{ m} ,$$

corrispondenti ad un livello in m - maggiore del livello in m +. A partire dalla sezione m - si traccia pertanto un profilo D_1 di corrente lenta ritardata (Tabella 3.11).

L'andamento qualitativo dei profili di moto permanente e della linea dei carichi totali sono riportati in Figura 3.39. I profili del pelo libero sono riportati in scala in Figura 3.1.

La soluzione descritta si verifica ogniqualvolta, nella determinazione delle condizioni nella sezione v -, si ottiene per tale sezione un valore di energia specifica maggiore o uguale del minimo compatibile con la portata assegnata, ovvero, equivalentemente, con riferimento ai diagrammi di

Figura 3.41, quando la retta $Q = \text{cost}$ ha intersezioni con la curva corrispondente al valore di energia calcolato per tale sezione.

In altri termini, per i valori dei parametri assegnati, ciò accade per valori del sovrizzo minori o uguali di:

$$a_{lim} = E_u - E_{min} = 2,560 - 2,049 = 0,511 \text{ m} .$$

Assumendo, a titolo di esempio, un sovrizzo $a = 0,70 \text{ m}$, si verificherebbe l'impossibilità della portata assegnata di fluire nella sezione v^- . Il conseguente accumulo di liquido a monte di tale sezione (rimanendo costante la portata immessa da monte) determina perciò un innalzamento dell'energia specifica della corrente, fino al raggiungimento del valore minimo compatibile con la portata assegnata, corrispondente alle condizioni critiche in v^- . In tali condizioni la corrente, che non è più influenzata da valle, può nuovamente fluire con la portata assegnata.

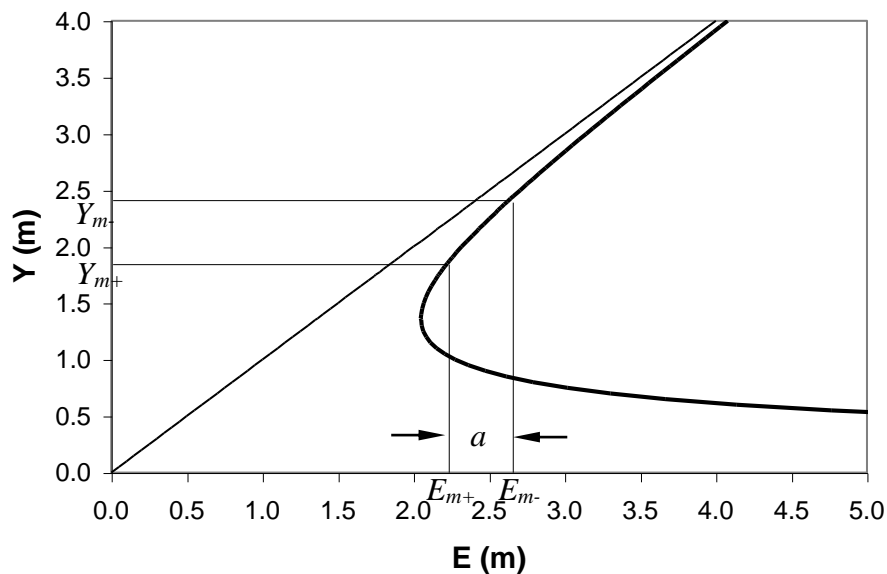


Figura 3.42. Diagramma dell'energia specifica a portata costante.

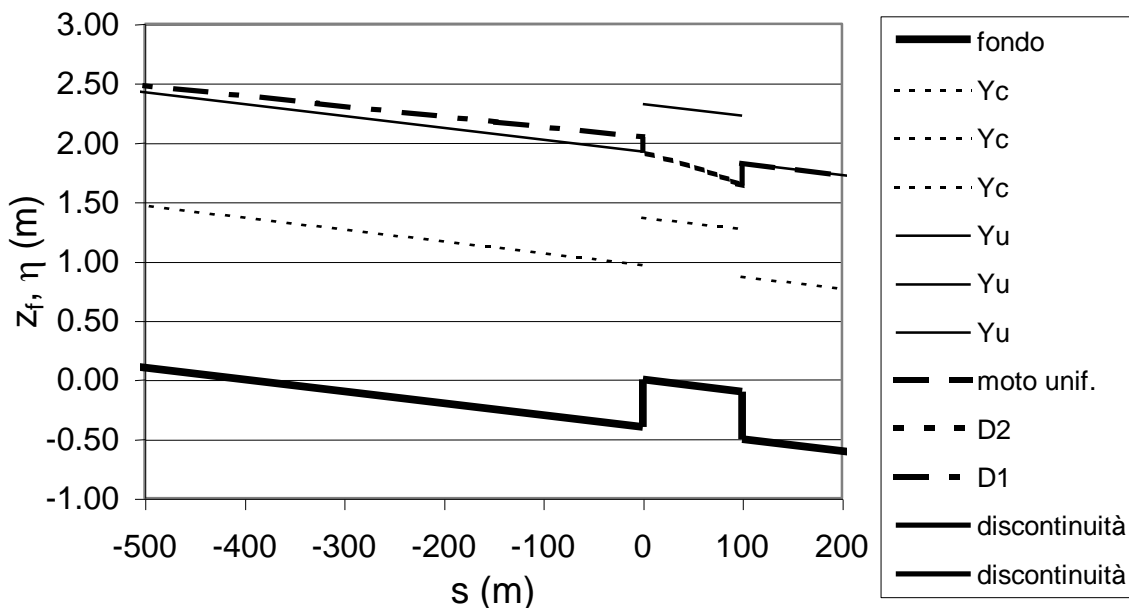


Figura 3.43. Profili di moto permanente nel canale di cui all'Esercizio 3.9 (in scala).

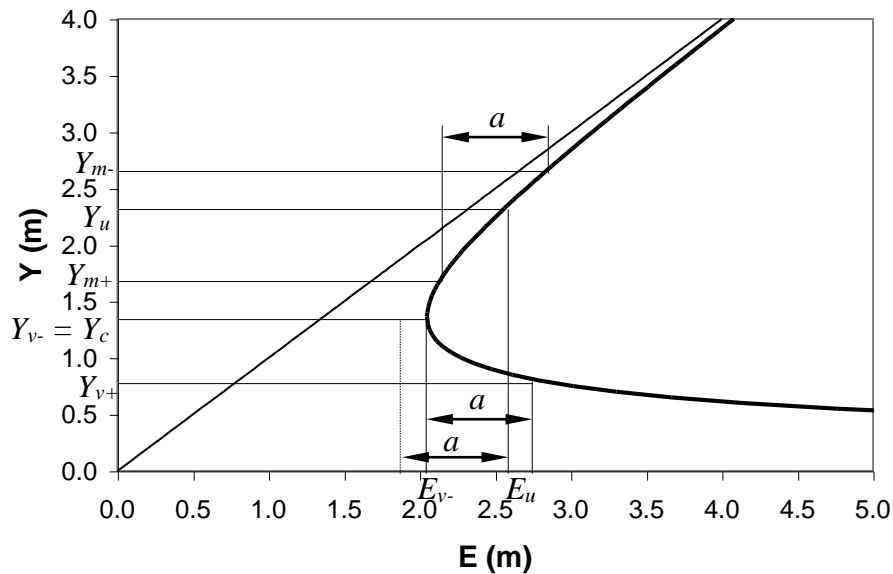


Figura 3.44. Soluzione del problema del sovrizzo con transizione per lo stato critico.

Per l'assenza di perdite di carico localizzate, nella sezione $v+$ si deve sempre ottenere un valore di energia specifica incrementato di a rispetto alla sezione $v-$. Dovendo essere in tale sezione la corrente influenzata dalle condizioni critiche a monte, essa dovrà essere veloce. La relativa profondità si determina sul ramo corrispondente del diagramma dell'energia specifica a portata costante in corrispondenza di un valore di energia $E_{v+} = E_{v-} + a$ (Figura 3.44). A valle di tale sezione si svilupperà un profilo di corrente veloce ritardata D_3 , che si estenderà fino alla sezione nella quale la spinta totale della corrente eguaglia il valore relativo alle condizioni di moto uniforme, ove un risalto collegherà il profilo D_3 al profilo di moto uniforme (quest'ultimo rappresenta sempre la condizione ultima da valle, essendo il canale indefinito in tale direzione).

Dalla sezione $v-$ verso monte si sviluppa ancora un profilo D_2 , tracciando il quale si può determinare il valore della profondità e dell'energia specifica nella sezione $m+$. Sottraendo il valore a all'energia in $m+$ si ottiene il valore della profondità nella sezione $m-$, maggiore del valore di moto uniforme (Figura 3.44) con livello in $m-$ maggiore del livello in $m+$. Da tale sezione si sviluppa pertanto ancora un profilo D_1 tendente asintoticamente verso monte all'altezza di moto uniforme.

Il profilo qualitativo del pelo libero risultante è riportato in Figura 3.45.

- ✓ Siamo ora in grado di definire in maniera più appropriata il salto di fondo, introdotto in precedenza semplicemente intendendolo, intuitivamente, come abbastanza alto perché la corrente a monte di esso non potesse essere influenzata dallo stato della corrente a valle. Si tratta cioè di un caso come quello proposto nel presente esercizio, in cui l'altezza della discontinuità del fondo a sia superiore al valore massimo compatibile con il mantenimento di condizioni di corrente lenta ovunque in un canale a debole pendenza.

Situazioni analoghe, trattabili pertanto con gli stessi ragionamenti descritti per il caso in questione, possono verificarsi all'estremo di monte di un sovrizzo in un alveo a forte pendenza.

- ✓ Si dice stramazzo a larga soglia un sovrizzo del fondo di un canale, di sviluppo longitudinale modesto, ma sufficiente perché la vena liquida si adagi sullo stesso, nel quale, per il meccanismo descritto in precedenza, si abbia transizione per lo stato critico. In questo modo, essendo la corrente a monte dello stramazzo non influenzata dallo stato della corrente a valle, è possibile stabilire un legame univoco fra la portata della corrente ed il suo livello ad una distanza verso monte sufficiente perché essa non risenta dell'effetto di richiamo prodotto dalla formazione dello stato critico.

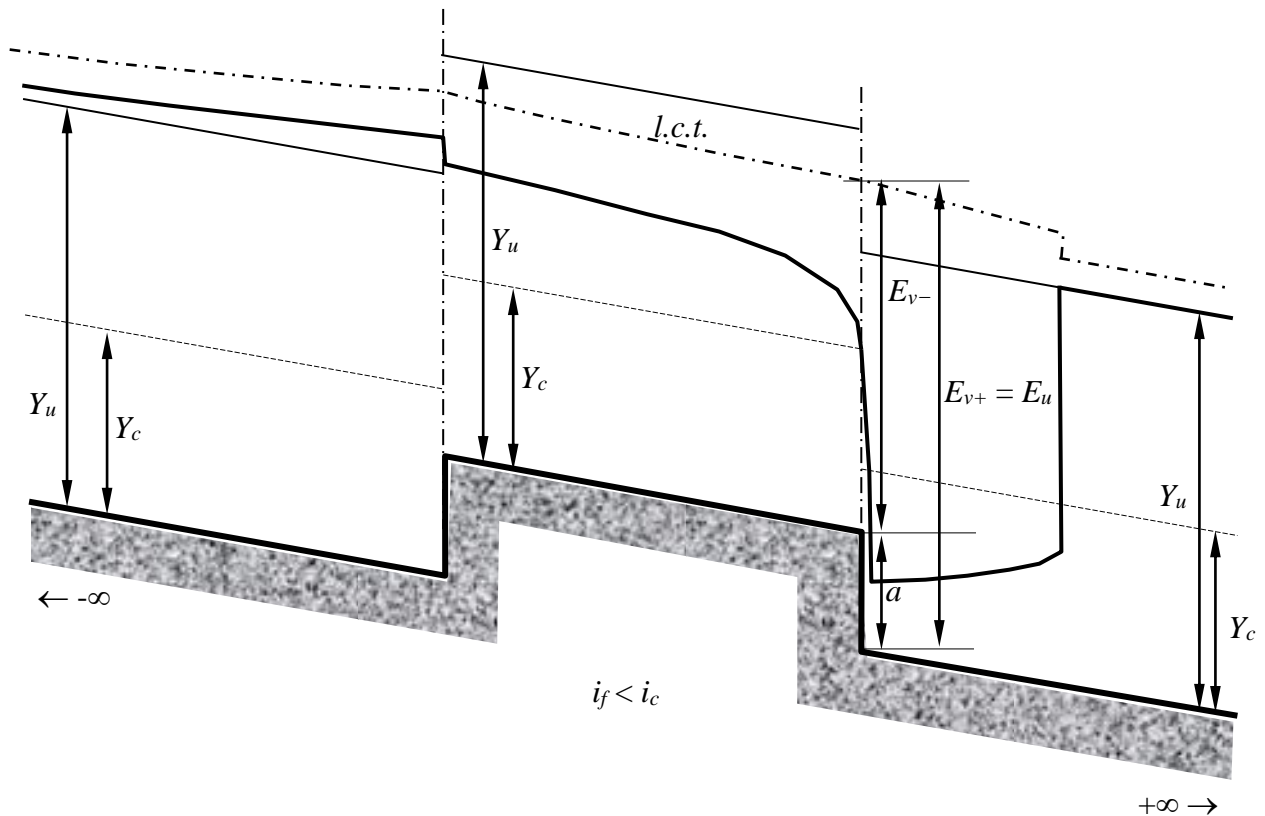


Figura 3.45. Profili qualitativi di moto permanente con transizione per lo stato critico sul sovralzo.

Applicando il teorema di Bernoulli fra un punto a monte dello stramazzo, nel quale supponiamo trascurabile l'altezza cinetica, e un punto posto sulla sezione dello stramazzo sulla quale si hanno le condizioni critiche, si ha, per una sezione rettangolare:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} = Y_A = z_C + \frac{p_C}{\gamma} + \frac{v_C^2}{2g} = h_s + Y_C + \frac{v_C^2}{2g} .$$

in cui h_s rappresenta l'altezza della soglia. Nell'ipotesi di poter trascurare l'altezza cinetica a monte e le perdite di carico, il carico sullo stramazzo $\zeta = Y_A - h_s$ rappresenta anche il carico specifico della corrente nella sezione critica. Tenendo presente che, per una sezione rettangolare, la profondità critica è pari ai due terzi del corrispondente carico minimo, si ha:

$$\zeta = Y_A - h_s = Y_C + \frac{v_C^2}{2g} = \frac{2}{3}\zeta + \frac{v_C^2}{2g} ,$$

da cui si ricava l'espressione della velocità nella sezione critica;

$$v_C = \sqrt{2g \frac{\zeta}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{2g\zeta}$$

e, moltiplicando per l'area della sezione critica, l'espressione della portata in funzione del carico sullo stramazzo:

$$Q = \ell \frac{2}{3} \zeta \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{2g\zeta} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \ell \zeta \sqrt{2g\zeta} = \mu \ell \zeta \sqrt{2g\zeta}$$

nella quale il coefficiente di afflusso è pari a:

$$\mu = \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0,385 \text{ ,}$$

ossia, di poco inferiore al valore 0,4 determinato per lo stramazzo Bazin.

Esercizio 3.10

Determinare il profilo di moto permanente nel canale a sezione rettangolare indefinito i cui profilo del fondo e planimetria sono riportati in Figura 3.46. Si assumano trascurabili le perdite di carico localizzate in corrispondenza del restringimento di sezione e lo sviluppo longitudinale dello stesso.

Dati:

- portata $Q = 50 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$;
- scabrezza dell'alveo $k_s = 50 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ (Gauckler-Strickler);
- pendenza dell'alveo $i_f = 0,001$;
- larghezza della sezione rettangolare $b = 10,00 \text{ m}$;
- larghezza della sezione rettangolare nel restringimento di sezione $b' = 8,00 \text{ m}$;

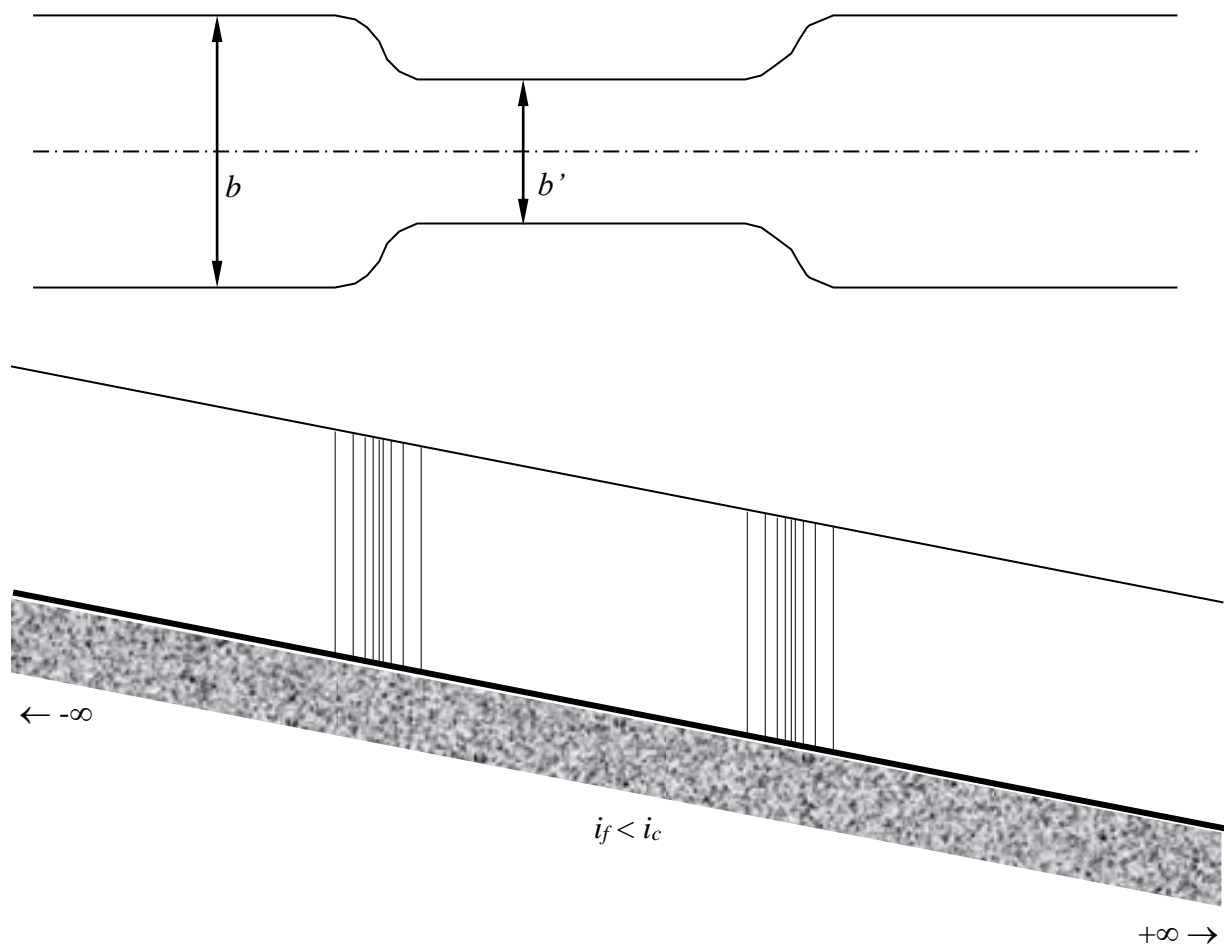


Figura 3.46. Profilo longitudinale e veduta planimetrica di un canale a sezione rettangolare con restringimento.

I dati di portata, pendenza e larghezza degli estremi indefiniti del canale sono i medesimi dell'Esercizio 3.9, per cui, a parte la zona del restringimento, il canale è a debole pendenza ed ha profondità ed energia specifica di moto uniforme e profondità critica pari rispettivamente a:

$$Y_u = 2,324 \text{ m} \quad ; \quad E_u = 2,560 \text{ m} \quad ; \quad Y_{cQ} = 1,366 \text{ m} .$$

in cui si è specificato che la profondità critica è quella cui corrisponde, alla portata costante di $50 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$, la minima energia specifica.

Similmente, l'analisi comincia da valle, ove le condizioni al contorno sono quelle del moto uniforme. A partire da tali condizioni, sotto la medesima ipotesi di trascurabilità delle perdite di carico localizzate nella zona del cambiamento di sezione, la determinazione della profondità della corrente nel restringimento si determina mediante l'ausilio della curva delle portate ad energia specifica costante, la cui espressione per alveo rettangolare può essere scritta, più utilmente per il problema in esame:

$$\frac{Q}{b} = Y \sqrt{2g(E - Y)} ,$$

in cui a primo membro compare la *portata per unità di larghezza*, o *portata specifica*¹⁹

Nel caso in questione il valore dell'energia specifica che si mantiene costante fra l'esterno e l'interno del restringimento è il valore di moto uniforme E_u , mentre la portata specifica, pari a:

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{50}{10} = 5 \frac{\text{m}^3\text{s}^{-1}}{\text{m}}$$

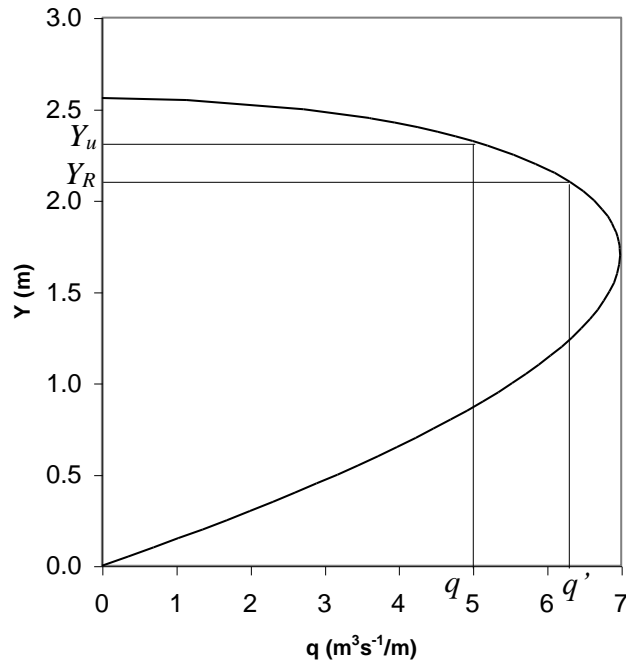


Figura 3.47. Curva delle portate specifiche ad energia specifica costante.

¹⁹ Il lettore non confonda la “specificità” dell’energia rispetto alla quota del fondo con la “specificità” della portata per unità di larghezza. Le terminologie simili non sottintendono una caratteristica fisica comune, essendo utilizzate in senso generico, con riferimento all’unità di grandezze differenti. Talvolta, il termine “specifico” viene anche utilizzato con riferimento alle portate per designare la scala delle portate di moto uniforme per pendenza unitaria $Q/\sqrt{i_f} = \chi \Omega R_i$: a dispetto del nome si tratta evidentemente di tutt’altra grandezza che la portata per unità di larghezza.

all'esterno del restringimento, assume, all'interno dello stesso il valore:

$$q' = \frac{Q}{b'} = \frac{50}{8} = 6,250 \frac{m^3 s^{-1}}{m}$$

Il valore della profondità all'interno del restringimento Y_R si ottiene come ordinata corrispondente della curva delle portate specifiche ad energia specifica costante, letta sul ramo delle correnti lente (in quanto dipendente da condizioni al contorno da valle: il moto uniforme):

$$Y_R = 2,116 \text{ m} .$$

Nell'ipotesi che il restringimento sia di sviluppo limitato, per cui si possa ammettere che le perdite continue al suo interno non siano molto differenti da quelle all'esterno, relative al moto uniforme, con analogo ragionamento si conclude che a monte del restringimento si ripristina la profondità di moto uniforme. Nel caso il restringimento non avesse sviluppo trascurabile, le relative perdite continue saranno, ovviamente, maggiori di quelle del moto uniforme (in quanto corrispondenti, a parità di portata, ad un valore di velocità maggiore) e a monte del restringimento si formerà un profilo di tipo D_I .

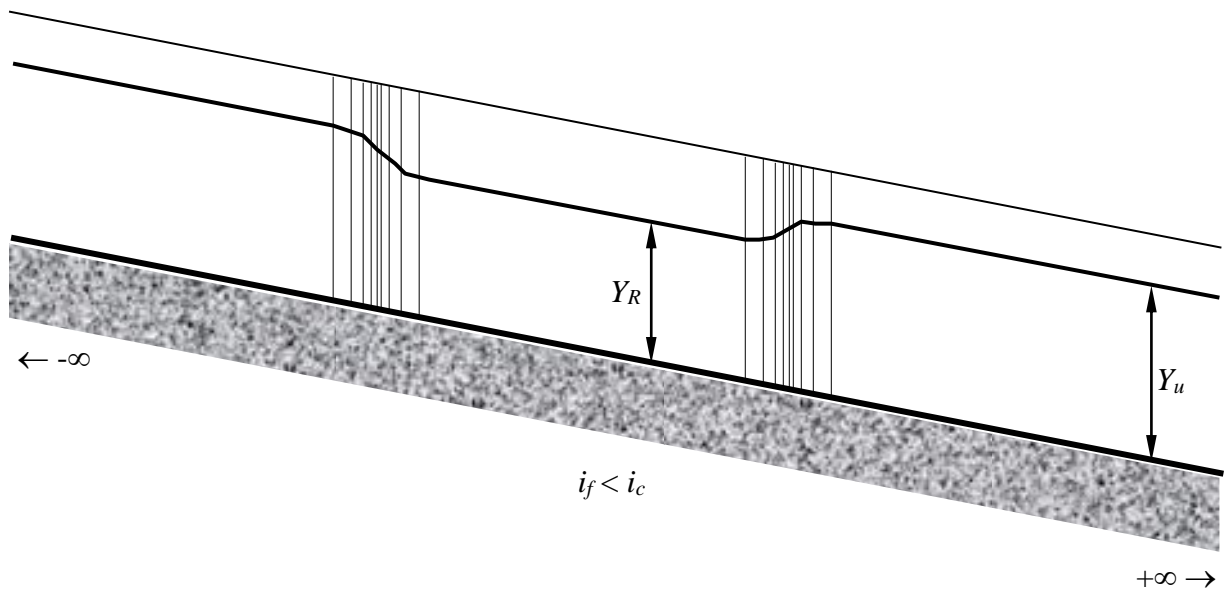


Figura 3.48. Soluzione del problema del restringimento senza transizione per lo stato critico.

Similmente al caso del sovrizzo, anche in questo caso è possibile individuare un valore minimo della larghezza del restringimento, al di sotto del quale la portata specifica che si calcola all'interno del restringimento non è compatibile con il valore di energia E_u che la corrente dovrebbe possedere assumendo la presenza del moto uniforme fino all'estremo di valle del restringimento. Tale valore è dato da:

$$b_{min} = \frac{Q}{q_{max}} ,$$

in cui q_{max} è il valore di portata specifica massima della curva di Figura 3.47, dato da:

$$\frac{2}{3} E_u = Y_{cE} = \sqrt[3]{\frac{q_{max}^2}{g}} \Rightarrow q_{max} = \sqrt{\frac{8}{27} g E_u^3} = \sqrt{\frac{8}{27} \times 9,81 \times (2,560)^3} = 6,981 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} / \text{m}$$

ove con Y_{cE} si intende la profondità per la quale si ha il valore massimo della portata specifica ad energia specifica costante:

$$Y_{cE} = \frac{2}{3} E_u = \frac{2}{3} \times 2,560 = 1,707 \text{ m} .$$

Nel caso specifico tale valore minimo del restringimento è pari a:

$$b_{min} = \frac{Q}{q_{max}} = \frac{50}{6,981} = 7,162 \text{ m} .$$

Al di sotto di tale valore la corrente regolerà il proprio profilo in modo che il valore della portata specifica all'interno del restringimento sia il massimo compatibile con il valore di energia rispetto al fondo, il quale, in tal caso sarà necessariamente differente (maggiore) da quello del moto uniforme inizialmente assunto.

Se, ad esempio, fosse dato $b' = 6 \text{ m}$, all'interno del restringimento si calcolerebbe il valore di portata specifica:

$$q'' = \frac{50}{6} = 8,333 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} / \text{s} ,$$

che fluirà attraverso il restringimento in condizioni critiche, e pertanto con un carico rispetto al fondo:

$$E^* = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{q_{max}^2}{g}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{(8,333)^2}{9,81}} = 2,880 \text{ m}$$

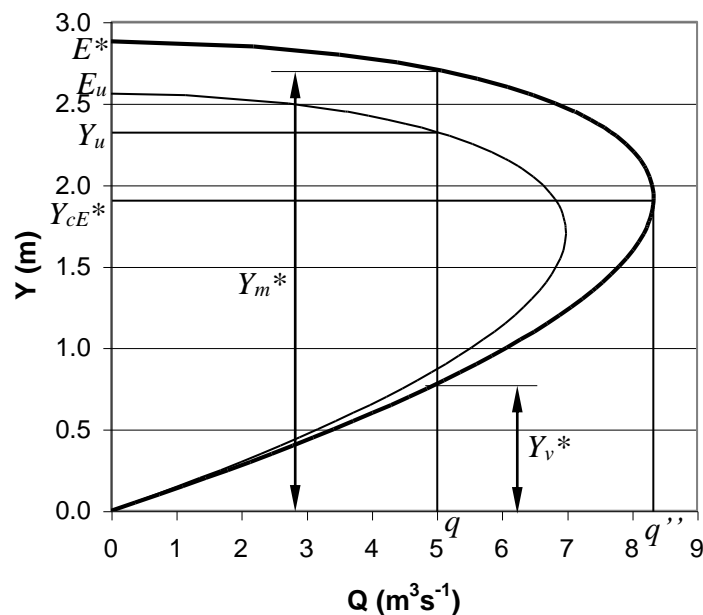


Figura 3.49. Curva delle portate specifiche ad energia specifica costante per il problema del restringimento d'alveo con transizione per lo stato critico.

cui corrisponde la profondità critica:

$$Y_{cE}^* = \frac{2}{3} E^* = \frac{2}{3} \times 2,880 = 1,920 \text{ m} .$$

Le profondità nell'alveo a larghezza piena in prossimità del restringimento si leggono sul diagramma calcolato per l'energia E^* , per il valore di portata specifica proprio dell'alveo a larghezza piena ($5 \text{ m}^3\text{s}^{-1}/\text{s}$), in corrispondenza dei due rami di corrente lenta e corrente veloce. Il primo valore fornirà la profondità a monte del restringimento, Y_m^* maggiore della profondità di moto uniforme, mentre il secondo valore sarà pari alla profondità a valle del restringimento, Y_v^* .

Pertanto, a monte si avrà lo sviluppo di un profilo D_1 , mentre a valle si avrà un profilo D_3 raccordato al profilo di moto uniforme verso valle mediante un risalto.

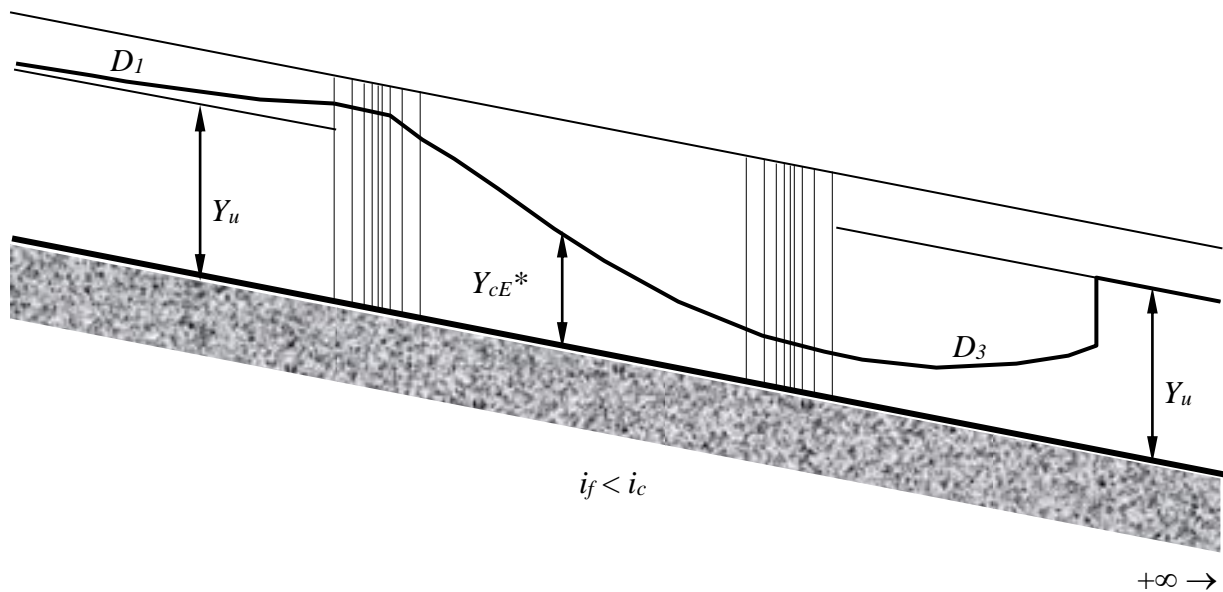


Figura 3.50. Profilo di moto permanente in alveo a sezione rettangolare con restringimento, per il caso di transizione per lo stato critico.

I casi di sovrizzo e restringimento in alveo a forte pendenza si trattano in modo del tutto analogo. In particolare, nel caso in cui non avvenga transizione per lo stato critico, sul sovrizzo o nel restringimento si ha un incremento sia della profondità che del livello del pelo libero; nel caso di transizione per lo stato critico si ha la formazione di un profilo F_1 a monte e di un profilo F_3 a valle.