

Marco Gilli

Dipartimento di Elettronica
Politecnico di Torino

Esercizi svolti di Elettrotecnica

POLITECNICO DI TORINO

TORINO

MAGGIO 2003

Indice

1	Leggi di Kirchhoff	5
2	Legge di Ohm e partitori	15
3	Resistenze equivalenti	21
4	Metodo dei nodi	33
5	Sovrapposizione degli effetti	53
6	Circ. eq. di Thevenin e Norton	61
7	Fasori	71
8	Reti dinamiche	75

$$V_2 = V_5 - V_4 = 9V - 7V = 2V$$

$$V_3 = V_4 - V_6 = 7V - 8V = -1V$$

$$V_1 = V_2 + V_6 = 2V + 8V = 10V$$

Applicando la legge Kirchhoff delle correnti rispettivamente ai nodi B , C e D si ottiene

$$I_4 = I_5 + I_3 = 8A + 6A = 14A$$

$$I_1 = I_6 + I_5 = 7A - 6A = 1A$$

$$I_2 = I_1 - I_5 = 1A - 8A = -7A$$

Esercizio 1.2

Con riferimento al circuito di Fig. 1.2 e facendo uso della legge di Kirchhoff delle correnti, si calcolino le correnti incognite. Siano dati $I_a = 8 A$, $I_b = -2 A$, $I_c = 5 A$, $I_d = -6 A$, $I_e = 8 A$, ed $I_f = 10 A$.

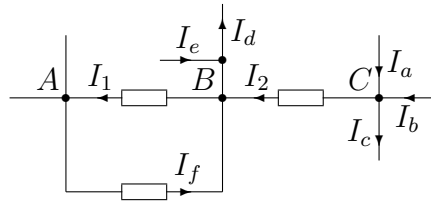


Figura 1.2: Circuito dell'esercizio 1.2

Soluzione

Applicando la legge Kirchhoff delle correnti rispettivamente ai nodi C e B si ottiene

$$I_2 = I_a + I_b - I_c = 8 A - 2 A - 5 A = 1 A$$

$$I_1 = I_2 - I_d + I_e + I_f = 1 A - (-6) A + 8 A + 10 A = 25 A$$

Esercizio 1.3

Con riferimento al circuito di Fig. 1.3 e facendo uso della legge di Kirchhoff delle correnti, si calcolino le correnti incognite. Siano dati $I_a = 4 A$, $I_b = -3 A$, $I_c = 2 A$, $I_d = 5 A$ ed $I_e = -6 A$.

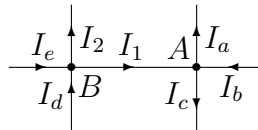


Figura 1.3: Circuito dell'esercizio 1.3

Soluzione

Applicando la legge Kirchhoff delle correnti rispettivamente ai nodi A e B si ottiene

$$I_1 = I_a - I_b + I_c = 4 A - (-3) A + 2 A = 9 A$$

$$I_2 = I_d + I_e - I_1 = 5 A + (-6) A - 9 A = -10 A$$

Esercizio 1.4

Con riferimento al circuito di Fig. 1.4 e facendo uso della legge di Kirchhoff delle correnti, si calcolino le correnti incognite. Siano dati $I_a = -3 A$, $I_b = 5 A$, $I_c = 1 A$ ed $I_d = -5 A$.

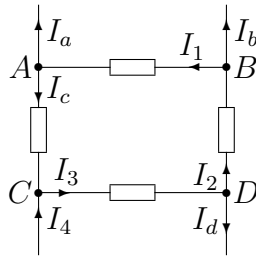


Figura 1.4: Circuito dell'esercizio 1.4

Soluzione

Applicando la legge Kirchhoff delle correnti rispettivamente ai nodi A , B , D e C si ottiene

$$I_1 = I_a + I_c = -3 A + 1 A = -2 A$$

$$I_2 = I_1 + I_b = -2 A + 5 A = 3 A$$

$$I_3 = I_2 + I_d = 3 A - 5 A = -2 A$$

$$I_4 = I_3 - I_c = -2 A - 1 A = -3 A$$

Esercizio 1.5

Dato il circuito di Figura calcolare le tensioni V_1 , V_2 e V_3 . Siano dati $V_a = 8\text{ V}$, $V_b = -11\text{ V}$, $V_c = 10\text{ V}$, $V_d = 14\text{ V}$ e $V_e = 15\text{ V}$.

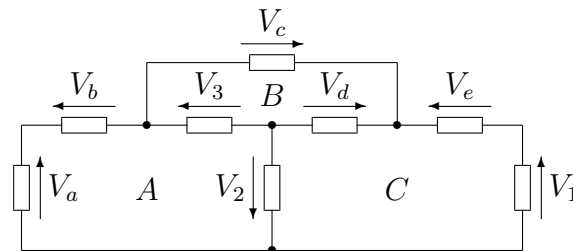


Figura 1.5: Circuito dell'esercizio 1.5

Soluzione

Applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni rispettivamente alle maglie B , A e C si ottiene:

$$V_3 = V_d - V_c = 14\text{ V} - 10\text{ V} = 4\text{ V}$$

$$V_2 = V_3 + V_b - V_a = 4\text{ V} - 11\text{ V} - 8\text{ V} = -15\text{ V}$$

$$V_1 = V_d - V_e - V_2 = 14\text{ V} - 15\text{ V} + 15\text{ V} = 14\text{ V}$$

Esercizio 1.6

Dato il circuito di Fig. 1.6, calcolare le correnti I_1 , I_2 ed I_3 . Siano dati $I_a = 12\text{ mA}$, $I_b = 8\text{ mA}$ ed $I_c = 9\text{ mA}$.

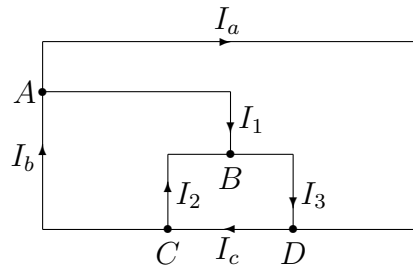


Figura 1.6: Circuito dell'esercizio 1.6

Soluzione

Applicando la legge di Kirchhoff delle correnti rispettivamente ai nodi A , C e D si ottiene:

$$I_1 = I_b - I_a = 8\text{ mA} - 12\text{ mA} = -4\text{ mA}$$

$$I_2 = I_c - I_b = 9\text{ mA} - 8\text{ mA} = 1\text{ mA}$$

$$I_3 = I_c - I_a = 9\text{ mA} - 12\text{ mA} = -3\text{ mA}$$

Volendo si può scrivere un'ulteriore equazione come verifica dei calcoli appena svolti: la somma delle correnti entranti nel nodo B deve essere uguale a zero

$$I_1 + I_2 - I_3 = -4\text{ mA} + 1\text{ mA} - (-3\text{ mA}) = 0$$

Esercizio 1.7

Dato il circuito di Fig. 1.7, calcolare le correnti I_1 , I_2 ed I_3 . Siano dati $I_a = 1 A$, $I_b = 2 A$, $I_c = 10 A$ ed $I_d = 3 A$.

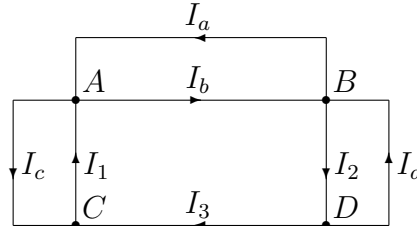


Figura 1.7: Circuito dell'esercizio 1.7

Soluzione

Applicando la legge di Kirchhoff delle correnti rispettivamente ai nodi A , B e C si ottiene:

$$I_1 = I_b + I_c - I_a = 2 A + 10 A - 1 A = 11 A$$

$$I_2 = I_b + I_d - I_a = 2 A + 3 A - 1 A = 4 A$$

$$I_3 = I_1 - I_c = 11 A - 10 A = 1 A$$

Volendo si può scrivere un'ulteriore equazione come verifica dei calcoli appena svolti: la somma delle correnti entranti nel nodo D deve essere uguale a zero

$$I_2 - I_3 - I_d = 4 A - 1 A - 3 A = 0$$

Esercizio 1.8

Dato il circuito di Fig.1.8, calcolare le tensioni V_1 , V_2 e V_3 . Siano dati $V_a = 20\text{ V}$, $V_b = 25\text{ V}$, $V_c = 10\text{ V}$ e $V_d = 15\text{ V}$.

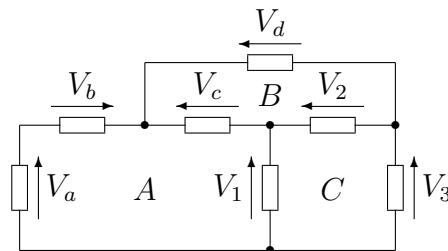


Figura 1.8: Circuito dell'esercizio 1.8

Soluzione

Applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni rispettivamente alle maglie A , B e C si ottiene:

$$V_1 = V_a + V_b - V_c = 20\text{ V} + 25\text{ V} - 10\text{ V} = 35\text{ V}$$

$$V_2 = V_d - V_c = 15\text{ V} - 10\text{ V} = 5\text{ V}$$

$$V_3 = V_1 - V_2 = 35\text{ V} - 5\text{ V} = 30\text{ V}$$

Esercizio 1.9

Dato il circuito di Fig. 1.9, calcolare le tensioni V_1 , V_2 e V_3 . Siano dati $E_1 = 10\text{ V}$, $E_2 = 12\text{ V}$ e $E_3 = 10\text{ V}$.

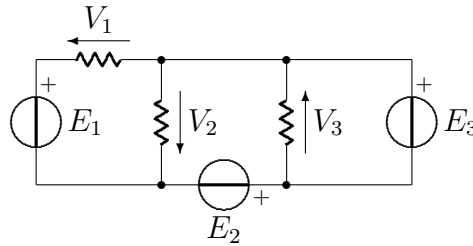


Figura 1.9: Circuito dell'esercizio 1.9

Soluzione

Osservando la maglia di destra si vede subito che

$$V_3 = E_3 = 10\text{ V}$$

Applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni rispettivamente alla maglia esterna ed alla maglia di sinistra si ottiene

$$V_1 = E_1 - E_2 - E_3 = 24\text{ V} - 12\text{ V} - 10\text{ V} = 2\text{ V}$$

$$V_2 = V_1 - E_1 = 2\text{ V} - 24\text{ V} = -22\text{ V}$$

Come verifica dei calcoli appena svolti si può scrivere l'equazione delle tensioni alla maglia centrale

$$V_3 = -E_2 - V_2 = -12\text{ V} - (-22\text{ V}) = 10\text{ V}$$

che è lo stesso valore ottenuto in precedenza.

Capitolo 2

Legge di Ohm e partitori

Esercizio 2.1

Dato il circuito di Fig. 2.1, calcolare la corrente I , la potenza dissipata dal resistore R e le potenze fornite dai singoli generatori. Siano dati $V_a = 10\text{ V}$, $V_b = 12\text{ V}$, $V_c = -8\text{ V}$ ed $R = 3\ \Omega$.

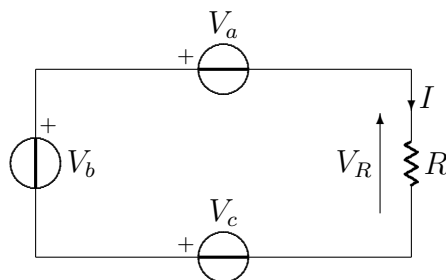


Figura 2.1: Circuito dell'esercizio 2.1

Soluzione

Applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni all'unica maglia presente nel circuito si ottiene

$$V_a - V_b - V_c + R \cdot I = 0$$

da cui

$$I = \frac{-V_a + V_b + V_c}{R} = \frac{-10\text{ V} + 12\text{ V} - 8\text{ V}}{3\ \Omega} = -2\text{ A}$$

Essendo la potenza dissipata da un resistore pari alla corrente per la tensione ai suoi capi (nella convenzione di utilizzatore), si ha che la potenza dissipata da R è pari a

$$P_R = V_R \cdot I = R \cdot I^2 = 3\ \Omega \cdot (2\text{ A})^2 = 12\text{ W}$$

La potenza fornita dai generatori è ancora pari al prodotto della tensione ai capi del generatore per la corrente che lo attraversa, ma nelle convenzioni di utilizzatore, per cui si ottiene

$$P_a = -V_a \cdot I = -10 \text{ V} \cdot (-2 \text{ A}) = 20 \text{ W}$$

$$P_b = V_b \cdot I = 12 \text{ V} \cdot (-2 \text{ A}) = -24 \text{ W}$$

$$P_c = V_c \cdot I = -8 \text{ V} \cdot (-2 \text{ A}) = 16 \text{ W}$$

Si verifica infine che la somma algebrica delle potenze fornite dai generatori al circuito è uguale a alla somma algebrica delle potenze dissipate dai resistori del circuito

$$P_a + P_b + P_c = 20 \text{ W} - 24 \text{ W} + 16 \text{ W} = 12 \text{ W} = P_R$$

Esercizio 2.2

Dato il circuito di Fig. 2.2, trovare i valori di i_1 , i_2 , i_3 e i_4 . Siano dati $R_1 = 60 \Omega$, $R_2 = 40 \Omega$, $R_3 = 80 \Omega$, $R_4 = 20 \Omega$ e $J = 10 A$.

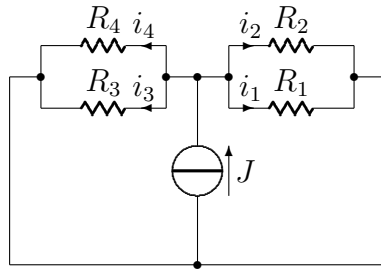


Figura 2.2: Circuito dell'esercizio 2.28

Soluzione

Le quattro resistenze sono in parallelo. Per calcolare le correnti incognite basta applicare la regola del partitore di corrente.

$$i_1 = J \frac{R_2 \parallel R_3 \parallel R_4}{R_1 + (R_2 \parallel R_3 \parallel R_4)} = 10 A \frac{40 \Omega \parallel 80 \Omega \parallel 20 \Omega}{60 \Omega + (40 \Omega \parallel 80 \Omega \parallel 20 \Omega)} = 1.6 A$$

$$i_2 = J \frac{R_1 \parallel R_3 \parallel R_4}{R_2 + (R_1 \parallel R_3 \parallel R_4)} = 10 A \frac{60 \Omega \parallel 80 \Omega \parallel 20 \Omega}{40 \Omega + (60 \Omega \parallel 80 \Omega \parallel 20 \Omega)} = 2.4 A$$

$$i_3 = J \frac{R_1 \parallel R_2 \parallel R_4}{R_3 + (R_1 \parallel R_2 \parallel R_4)} = 10 A \frac{60 \Omega \parallel 40 \Omega \parallel 20 \Omega}{80 \Omega + (60 \Omega \parallel 40 \Omega \parallel 20 \Omega)} = 1.2 A$$

$$i_4 = J \frac{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3}{R_4 + (R_1 \parallel R_2 \parallel R_3)} = 10 A \frac{60 \Omega \parallel 40 \Omega \parallel 80 \Omega}{20 \Omega + (60 \Omega \parallel 40 \Omega \parallel 80 \Omega)} = 4.8 A$$

Esercizio 2.3

Dato il circuito di Fig. 2.3, trovare i valori di i_0 e V_0 . Siano dati $R_1 = 70 \Omega$, $R_2 = 30 \Omega$, $R_3 = 40 \Omega$, $R_4 = 10 \Omega$ e $E = 58 V$.

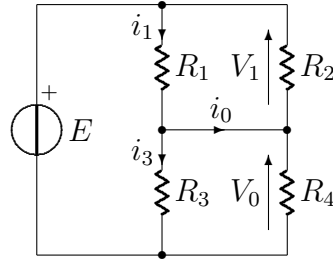


Figura 2.3: Circuito dell'esercizio 2.31

Soluzione

Le resistenze R_1 ed R_2 sono in parallelo, così come R_3 ed R_4 . La tensione incognita V_0 si calcola con la regola del partitore di tensione.

$$V_0 = E \frac{R_3 \parallel R_4}{(R_1 \parallel R_2) + (R_3 \parallel R_4)} = 58 V \frac{40 \Omega \parallel 10 \Omega}{(70 \Omega \parallel 30 \Omega) + (40 \Omega \parallel 10 \Omega)} = 16 V$$

Per trovare il valore di i_0 bisogna prima calcolare il valore di i_1 ed i_3

$$i_1 = \frac{E - V_0}{R_1} = \frac{58 V - 16 V}{70 \Omega} = 0.6 A$$

$$i_3 = \frac{V_0}{R_3} = \frac{16 V}{40 \Omega} = 0.4 A$$

da cui

$$i_0 = i_1 - i_3 = 0.6 A - 0.4 A = 0.2 A$$

Esercizio 2.4

Dato il circuito di Fig. 2.4, trovare i valori di i_0 e V_0 . Siano dati $R_1 = 80 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$, $R_4 = 60 \Omega$, $R_5 = 10 \Omega$ e $E = 20 V$.

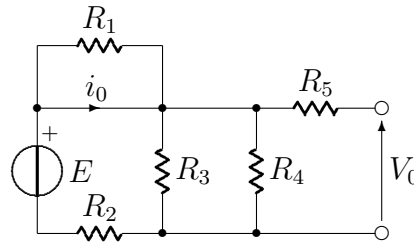


Figura 2.4: Circuito dell'esercizio 2.32

Soluzione

La resistenza R_1 è in corto circuito, quindi la corrente i_0 è uguale alla corrente erogata dal generatore di tensione.

$$i_0 = \frac{E}{R_2 + (R_3 \parallel R_4)} = \frac{20 V}{20 \Omega + (30 \Omega \parallel 60 \Omega)} = 0.5 A$$

Visto che sulla resistenza R_5 non scorre corrente, la tensione V_0 è uguale alla tensione sul parallelo tra R_3 ed R_4 .

$$V_0 = i_0(R_3 \parallel R_4) = 0.5 A \cdot (30 \Omega \parallel 60 \Omega) = 10 V$$

Capitolo 3

Resistenze equivalenti

Esercizio 3.1

Dato il circuito di Fig. 3.1, determinare la resistenza equivalente R_{ab} tra i morsetti a e b .

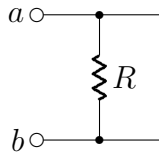


Figura 3.1: Circuito dell'esercizio 3.1

Soluzione

La resistenza R è in parallelo ad un corto circuito, quindi

$$R_{ab} = 0$$

Esercizio 3.2

Dato il circuito di Fig. 3.2, determinare la resistenza equivalente R_{ab} tra i morsetti a e b .

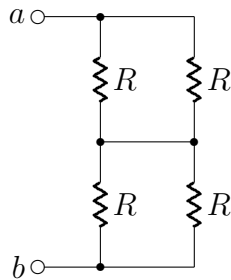


Figura 3.2: Circuito dell'esercizio 3.2

Soluzione

$$R_{ab} = (R\|R) + (R\|R) = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$$

Esercizio 3.3

Dato il circuito di Fig. 3.3, determinare la resistenza equivalente R_{ab} tra i morsetti a e b .

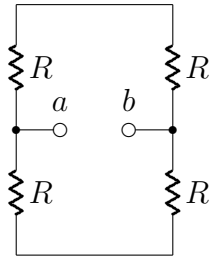


Figura 3.3: Circuito dell'esercizio 3.3

Soluzione

$$R_{ab} = (R + R) \parallel (R + R) = (2R) \parallel (2R) = R$$

Esercizio 3.4

Dato il circuito di Fig. 3.4, determinare la resistenza equivalente R_{ab} tra i morsetti a e b .

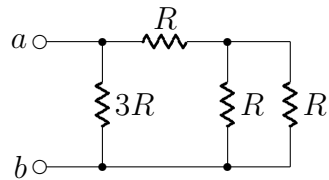


Figura 3.4: Circuito dell'esercizio 3.4

Soluzione

$$R_{ab} = [(R\|R) + R] \|(3R) = \left(\frac{R}{2} + R\right) \|(3R) = R$$

Esercizio 3.5

Dato il circuito di Fig. 3.5, determinare la resistenza equivalente R_{ab} tra i morsetti a e b .

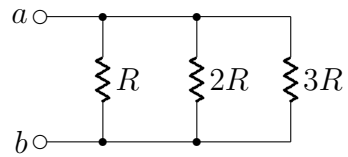


Figura 3.5: Circuito dell'esercizio 3.5

Soluzione

$$R_{ab} = (3R) \parallel (2R) \parallel (R) = \frac{1}{\frac{1}{3R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R}} = \frac{6}{11}R$$

Esercizio 3.6

Dato il circuito di Fig. 3.6, calcolare la corrente I e la resistenza R_{eq} vista ai capi del generatore di tensione E . Siano dati $E = 10\text{ V}$, $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$, $R_4 = 6\ \Omega$, $R_5 = 1\ \Omega$ ed $R_6 = 2\ \Omega$.

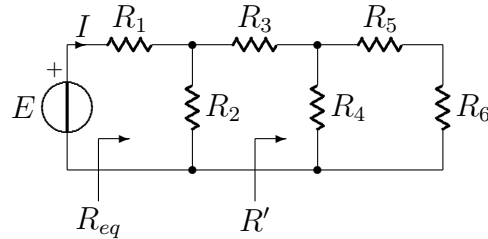


Figura 3.6: Circuito dell'esercizio 3.6

Soluzione

Per il calcolo della resistenza equivalente vista dal generatore di tensione conviene prima calcolare la resistenza R'

$$R' = (R_6 + R_5) \parallel R_4 = (2\ \Omega + 1\ \Omega) \parallel (6\ \Omega) = 2\ \Omega$$

La R_{eq} è ora data da

$$R_{eq} = [(R' + R_3) \parallel R_2] + R_1 = [(2\ \Omega + 2\ \Omega) \parallel (4\ \Omega)] + 3\ \Omega = 5\ \Omega$$

La corrente I è la corrente erogata dal generatore di tensione e vale

$$I = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{10\text{ V}}{5\ \Omega} = 2\text{ A}$$

Esercizio 3.7

Dato il circuito di Fig. 3.7, determinare la resistenza equivalente R_{ab} tra i morsetti a e b . Siano dati $R_1 = 60 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$ ed $R_4 = 60 \Omega$.

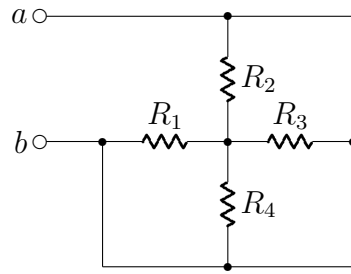


Figura 3.7: Circuito dell'esercizio 3.7

Soluzione

I terminali a e b appartengono allo stesso nodo, quindi

$$R_{ab} = 0$$

Esercizio 3.8

Dato il circuito di Fig. 3.8, determinare la resistenza equivalente R_{ab} tra i morsetti a e b . Siano dati $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = 15\ \Omega$, $R_4 = 6\ \Omega$, $R_5 = 20\ \Omega$, $R_6 = 10\ \Omega$, $R_7 = 8\ \Omega$, $R_8 = 4\ \Omega$, $R_9 = 5\ \Omega$, $R_{10} = 9\ \Omega$ ed $R_{11} = 11\ \Omega$.

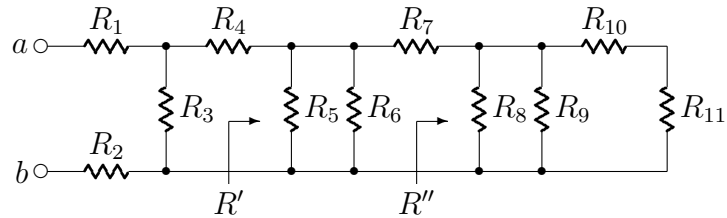


Figura 3.8: Circuito dell'esercizio 3.8

Soluzione

Per semplicità conviene calcolare R' ed R''

$$R'' = (R_{11} + R_{10}) \parallel R_9 \parallel R_8 = (11\ \Omega + 9\ \Omega) \parallel (5\ \Omega) \parallel (4\ \Omega) = 2\ \Omega$$

$$R' = (R'' + R_7) \parallel R_6 \parallel R_5 = (2\ \Omega + 8\ \Omega) \parallel (10\ \Omega) \parallel (20\ \Omega) = 4\ \Omega$$

La resistenza vista tra i due morsetti vale

$$R_{ab} = [(R' + R_4) \parallel R_3] + R_2 + R_1 = [(4\ \Omega + 6\ \Omega) \parallel (15\ \Omega)] + 4\ \Omega + 5\ \Omega = 15\ \Omega$$

Esercizio 3.9

Dato il circuito di Fig. 3.9, determinare la resistenza equivalente R_{ab} tra i morsetti a e b . Siano dati $R_1 = 70 \Omega$, $R_2 = 30 \Omega$, $R_3 = 60 \Omega$, $R_4 = 20 \Omega$ ed $R_5 = 40 \Omega$.

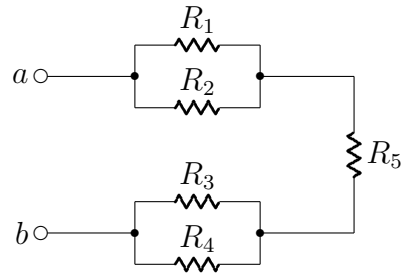


Figura 3.9: Circuito dell'esercizio 3.9

Soluzione

$$R_{ab} = (R_1 \parallel R_2) + (R_3 \parallel R_4) + R_5 = (70 \Omega \parallel 30 \Omega) + (60 \Omega \parallel 20 \Omega) + 40 \Omega = 76 \Omega$$

Esercizio 3.10

Dato il circuito di Fig. 3.10, determinare la resistenza equivalente R_{ab} tra i morsetti a e b . Siano dati $R_1 = 8\ \Omega$, $R_2 = 30\ \Omega$, $R_3 = 20\ \Omega$, $R_4 = 40\ \Omega$, $R_5 = 60\ \Omega$, $R_6 = 4\ \Omega$, $R_7 = 10\ \Omega$, $R_8 = 50\ \Omega$, $R_9 = 70\ \Omega$, $R_{10} = 80\ \Omega$ ed $R_{11} = 6\ \Omega$.

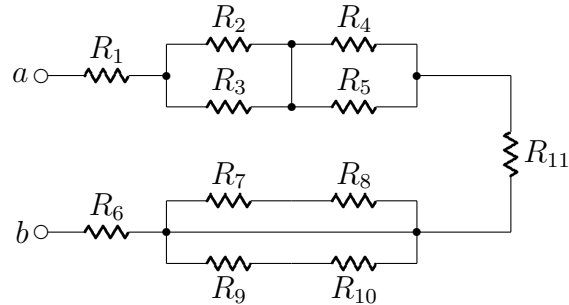


Figura 3.10: Circuito dell'esercizio 3.10

Soluzione

Le resistenze R_7 , R_8 , R_9 ed R_{10} non intervengono nel calcolo della R_{ab} perché sono in parallelo ad un corto circuito. La resistenza vista tra i due morsetti vale quindi

$$\begin{aligned} R_{ab} &= R_1 + (R_2 \parallel R_3) + (R_4 \parallel R_5) + R_6 + R_{11} = \\ &= 8\ \Omega + (30\ \Omega \parallel 20\ \Omega) + (40\ \Omega \parallel 60\ \Omega) + 4\ \Omega + 6\ \Omega = 54\ \Omega \end{aligned}$$

Esercizio 3.11

Dato il circuito di Fig. 3.11, determinare la resistenza equivalente R_{ab} tra i morsetti a e b . Siano dati $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, $R_4 = 8\ \Omega$, $R_5 = 20\ \Omega$ ed $R_6 = 3\ \Omega$.

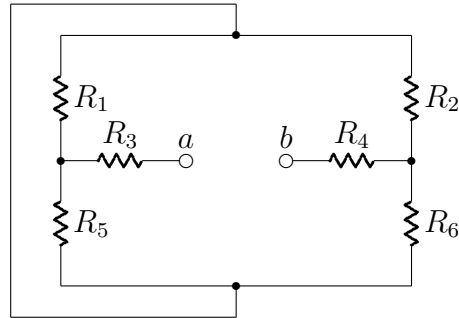


Figura 3.11: Circuito dell'esercizio 3.11

Soluzione

$$\begin{aligned}
 R_{ab} &= (R_1 \parallel R_5) + (R_2 \parallel R_6) + R_3 + R_4 = \\
 &= (5\ \Omega \parallel 20\ \Omega) + (6\ \Omega \parallel 3\ \Omega) + 10\ \Omega + 8\ \Omega = 24\ \Omega
 \end{aligned}$$

Capitolo 4

Metodo dei nodi

Esercizio 4.1

Dato il circuito di Fig. 4.1, trovare i valori di V_1 e V_2 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 50 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$, $R_4 = 40 \Omega$, $J_1 = 6 A$ e $J_2 = 3 A$.

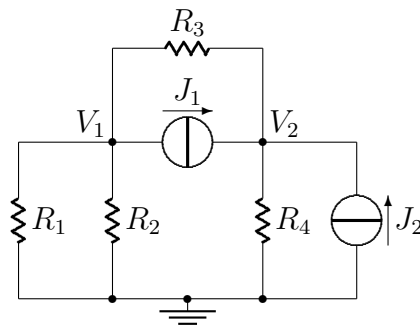


Figura 4.1: Circuito dell'esercizio 4.1

Soluzione

Scriviamo le equazioni delle correnti uscenti dai nodi di V_1 e V_2 :

$$\begin{cases} \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} + \frac{V_1 - V_2}{R_3} + J_1 = 0 \\ \frac{V_2}{R_4} + \frac{V_2 - V_1}{R_3} - J_1 - J_2 = 0 \end{cases}$$

Le uniche due incognite sono V_1 e V_2 . Riordinando il sistema e ponendolo in forma matriciale si ha:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_1 \\ J_1 + J_2 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici e risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{100\ \Omega} + \frac{1}{50\ \Omega} + \frac{1}{20\ \Omega} & -\frac{1}{20\ \Omega} \\ -\frac{1}{20\ \Omega} & \frac{1}{20\ \Omega} + \frac{1}{40\ \Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\ A \\ 6\ A + 3\ A \end{bmatrix}$$

da cui

$$V_1 = 0 \quad \text{e} \quad V_2 = 120\ V$$

Esercizio 4.2

Dato il circuito di Fig. 4.2, trovare il valore di V_0 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $R_1 = 40 \Omega$, $R_2 = 60 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$, $E_1 = 12 V$ ed $E_2 = 10 V$.

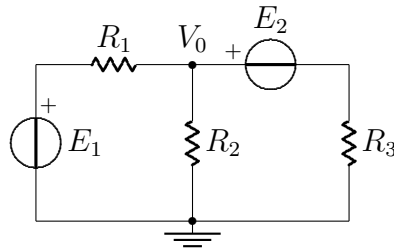
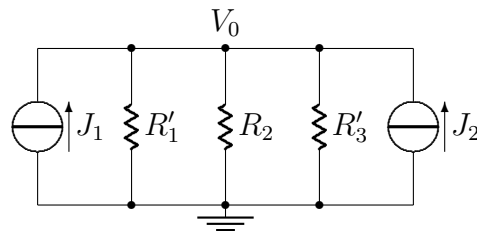


Figura 4.2: Circuito dell'esercizio 4.2

Soluzione

Prima di procedere con i calcoli si trasformano i rami contenenti generatori di tensione in serie a resistenze nei loro equivalenti Norton:



con $J_1 = \frac{E_1}{R_1} = 300 \text{ mA}$, $J_2 = \frac{E_2}{R_3} = 500 \text{ mA}$, $R'_1 = R_1 = 40 \Omega$ e $R'_3 = R_3 = 20 \Omega$.

Scrivendo l'equazione delle correnti uscenti dal nodo di V_0 si ha:

$$\frac{V_0}{R'_1} + \frac{V_0}{R_2} + \frac{V_0}{R'_3} - J_1 - J_2 = 0$$

Risolvendo l'equazione si ottiene

$$V_0 \simeq 8.73 \text{ V}$$

Esercizio 4.3

Dato il circuito di Fig. 4.3, trovare i valori di V_1 e V_2 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 40\ \Omega$, $R_4 = 80\ \Omega$, $E_1 = 40\ V$, $E_2 = 20\ V$ e $J = 5\ A$.

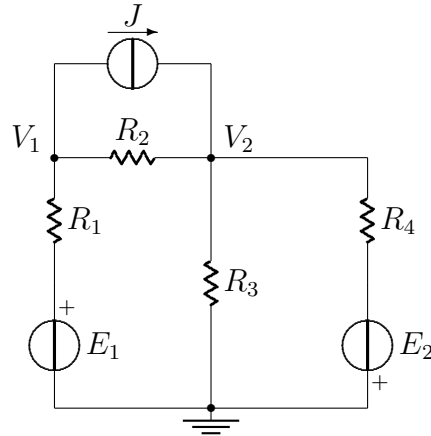
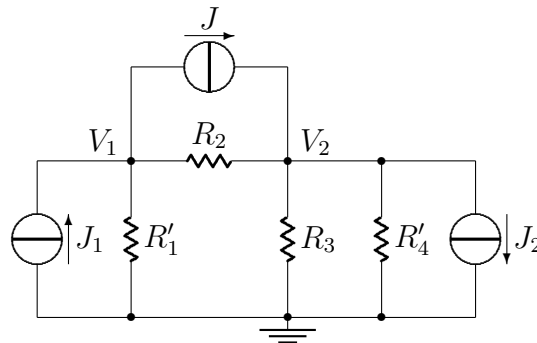


Figura 4.3: Circuito dell'esercizio 4.3

Soluzione

Prima di procedere con i calcoli si trasformano i rami contenenti generatori di tensione in serie a resistenze nei loro equivalenti Norton:



con $J_1 = \frac{E_1}{R_1} = 4\ A$, $J_2 = \frac{E_2}{R_4} = 250\ mA$, $R'_1 = R_1 = 10\ \Omega$ e $R'_4 = R_4 = 80\ \Omega$.

Impostando il sistema in forma matriciale nelle incognite V_1 e V_2 si ha:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 - J \\ J - J_2 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{20\Omega} & -\frac{1}{20\Omega} \\ -\frac{1}{20\Omega} & \frac{1}{20\Omega} + \frac{1}{40\Omega} + \frac{1}{80\Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4A - 5A \\ 5A - 0.25A \end{bmatrix}$$

Il sistema di equazioni ha come soluzioni

$$V_1 \simeq 14.12V \quad \text{e} \quad V_2 \simeq 62.35V$$

Esercizio 4.4

Dato il circuito di Fig. 4.4, trovare i valori di V_1 , V_2 e V_3 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $G_1 = 1 S$, $G_2 = 2 S$, $G_3 = 4 S$, $G_4 = 8 S$, $E = 13 V$ e $J = 1 A$.

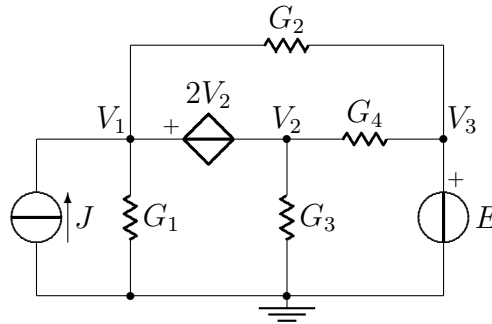


Figura 4.4: Circuito dell'esercizio 4.4

Soluzione

I nodi di V_1 e V_2 vanno considerati come un unico supernodo. Inoltre bisogna aggiungere al sistema l'equazione costitutiva del generatore dipendente di tensione ed il valore di V_3 che è noto. Le equazioni del sistema sono:

$$\begin{cases} V_1 G_1 + (V_1 - V_3) G_2 + V_2 G_3 + (V_1 - V_3) G_4 = J \\ V_1 - V_2 = 2V_2 \\ V_3 = E \end{cases}$$

Riordinando i termini e ponendo il tutto in forma matriciale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & G_3 + G_4 & -G_2 - G_4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \\ E \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1S + 2S & 4S + 8S & -2S - 8S \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1A \\ 0 \\ 13V \end{bmatrix}$$

Il sistema di equazioni ha come soluzioni

$$V_1 \simeq 18.71 V$$

$$V_2 \simeq 6.24 V$$

$$V_3 = 13 V$$

Esercizio 4.5

Dato il circuito di Fig. 4.5, trovare il valore di I_0 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $R_4 = 8\Omega$ ed $E = 30V$.

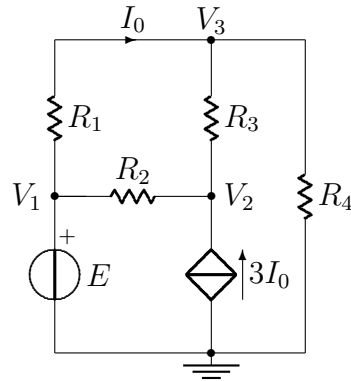


Figura 4.5: Circuito dell'esercizio 4.5

Soluzione

Alle equazioni dei nodi di V_1 , V_2 e V_3 bisogna aggiungere l'equazione del generatore dipendente di corrente in funzione delle altre variabili:

$$I_0 = \frac{V_1 - V_3}{R_1}$$

Il sistema risultante è il seguente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} & -3 \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & 0 & \frac{1}{R_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10\Omega} & \frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{2\Omega} & -\frac{1}{2\Omega} & -3 \\ -\frac{1}{4\Omega} & -\frac{1}{10\Omega} & \frac{1}{4\Omega} + \frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{8\Omega} & 0 \\ -\frac{1}{4\Omega} & 0 & \frac{1}{4\Omega} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30\text{ V} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema di equazioni ha come soluzioni

$$V_1 = 30\text{ V}$$

$$V_2 \simeq 37.16\text{ V}$$

$$V_3 \simeq 12.82\text{ V}$$

$$I_0 \simeq 4.925\text{ A}$$

Esercizio 4.6

Dato il circuito di Fig. 4.6, trovare i valori di V_1 e V_2 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = 8\ \Omega$, $R_4 = 1\ \Omega$, $E = 6\ V$ e $J = 3\ A$.

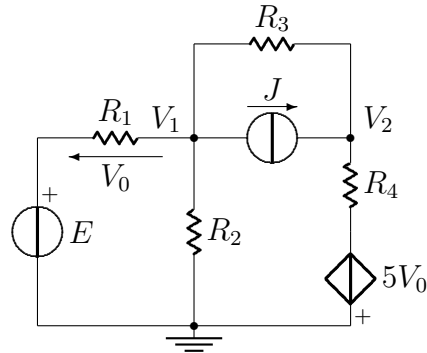


Figura 4.6: Circuito dell'esercizio 4.6

Soluzione

Scriviamo le equazioni delle correnti uscenti dai nodi di V_1 e V_2 :

$$\begin{cases} \frac{V_1 - E}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} + \frac{V_1 - V_2}{R_3} + J = 0 \\ \frac{V_2 - V_1}{R_3} + \frac{V_2 + 5V_0}{R_4} - J = 0 \end{cases}$$

A queste due equazioni bisogna aggiungere l'equazione costitutiva del generatore dipendente di tensione in funzione dei potenziali ai nodi:

$$V_0 = E - V_1$$

Mettendo insieme le tre equazioni e riordinando i termini si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} & 0 \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & \frac{5}{R_4} \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{R_1} - J \\ J \\ E \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici e risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{4\Omega} + \frac{1}{8\Omega} & -\frac{1}{8\Omega} & 0 \\ -\frac{1}{8\Omega} & \frac{1}{8\Omega} + \frac{1}{1\Omega} & \frac{5}{1\Omega} \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6V}{1\Omega} - 3A \\ 3A \\ 6V \end{bmatrix}$$

da cui

$$V_1 = 0V$$

$$V_2 = -24V$$

$$V_0 = 6V$$

Esercizio 4.7

Dato il circuito di Fig. 4.7, trovare i valori di V_1 , V_2 e V_3 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $G_1 = 2 S$, $G_2 = 1 S$, $G_3 = 4 S$, $G_4 = 4 S$, $G_5 = 1 S$, $G_6 = 2 S$, $J_1 = 4 A$ e $J_2 = 8 A$.

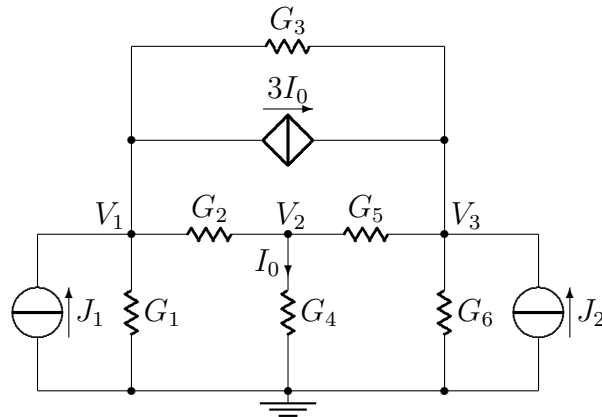


Figura 4.7: Circuito dell'esercizio 4.7

Soluzione

Considerando le equazioni delle correnti uscenti dai nodi di V_1 , V_2 e V_3 , e tenendo conto che la corrente che pilota il generatore dipendente vale

$$I_0 = V_2 G_4$$

si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 & -G_3 & 3 \\ -G_2 & G_2 + G_4 + G_5 & -G_5 & 0 \\ -G_3 & -G_5 & G_3 + G_5 + G_6 & -3 \\ 0 & G_4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ 0 \\ J_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici e risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 2S + 1S + 4S & -1S & -4S & 3 \\ -1S & 1S + 4S + 1S & -1S & 0 \\ -4S & -1S & 4S + 1S + 2S & -3 \\ 0 & 4S & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4A \\ 0 \\ 8A \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$V_1 = 1.25 V$$

$$V_2 = 0.75 V$$

$$V_3 = 3.25 V$$

$$I_0 = 3 A$$

Esercizio 4.8

Dato il circuito di Fig. 4.8, trovare i valori di V_0 ed I_0 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 40\ \Omega$, $R_4 = 80\ \Omega$, $E_1 = 10\ V$ ed $E_2 = 12\ V$.

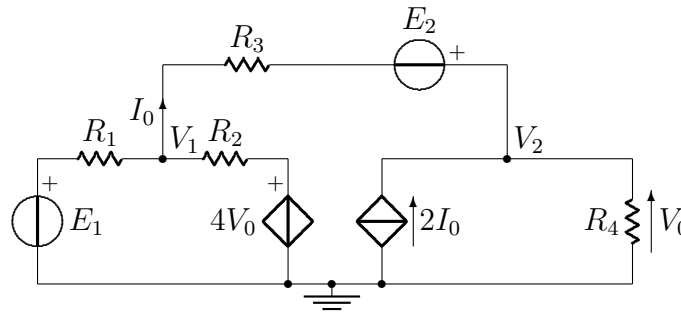


Figura 4.8: Circuito dell'esercizio 4.8

Soluzione

Si nota subito che

$$V_0 = V_2$$

Scriviamo quindi le equazioni delle correnti uscenti dai nodi di V_1 e V_2 :

$$\begin{cases} \frac{V_1 - E_1}{R_1} + \frac{V_1 - 4V_2}{R_2} + \frac{V_1 - V_2 + E_2}{R_3} = 0 \\ \frac{V_2}{R_4} + \frac{V_2 - V_1 - E_2}{R_3} - 2I_0 = 0 \end{cases}$$

Le equazioni sono 2 ma le incognite sono 3, bisogna perciò aggiungere un'altra equazione:

$$I_0 = \frac{V_1 - V_2 + E_2}{R_3}$$

Mettendo insieme le tre equazioni e riordinando i termini si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} - \frac{4}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -2 \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{R_1} - \frac{E_2}{R_3} \\ \frac{E_2}{R_3} \\ \frac{E_2}{R_3} \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici e risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{20\Omega} + \frac{1}{40\Omega} & -\frac{1}{40\Omega} - \frac{4}{20\Omega} & 0 \\ -\frac{1}{40\Omega} & \frac{1}{40\Omega} + \frac{1}{80\Omega} & -2 \\ -\frac{1}{40\Omega} & \frac{1}{40\Omega} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10V}{10\Omega} - \frac{12V}{40\Omega} \\ \frac{12V}{40\Omega} \\ \frac{12V}{40\Omega} \end{bmatrix}$$

da cui

$$V_1 = -168.8 V$$

$$V_2 = V_0 = -134.4 V$$

$$I_0 = -0.56 A$$

Esercizio 4.9

Dato il circuito di Fig. 4.9, trovare i valori di V_1 , V_2 e V_3 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$, $R_3 = 1\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$, $R_5 = 2\ \Omega$, $E = 5\ V$ e $J = 1\ A$.

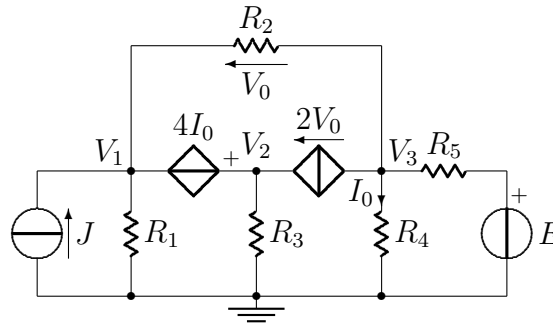
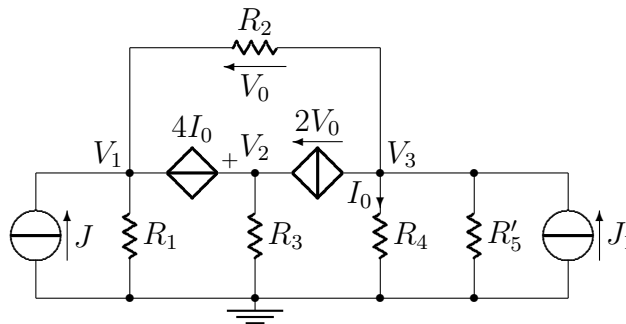


Figura 4.9: Circuito dell'esercizio 4.9

Soluzione

Come prima operazione conviene trasformare il ramo di destra nel suo equivalente Norton:



$$\text{dove } J_1 = \frac{E}{R_5} = 2.5\ A \text{ ed } R'_5 = R_5$$

Considerando il ramo contenente il generatore dipendente di tensione come un unico supernodo, ed aggiungendo le equazioni che legano le incognite V_0 ed I_0 alle tensioni nodali, si giunge al seguente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1 - V_3}{R_3} + \frac{V_2}{R_2} - 2V_0 - J = 0 \\ \frac{V_3}{R_4} + \frac{V_3}{R'_5} + \frac{V_3 - V_1}{R_3} + 2V_0 - J_1 = 0 \\ V_2 - V_1 = 4I_0 \\ V_0 = V_1 - V_3 \\ I_0 = \frac{V_3}{R_4} \end{array} \right.$$

Riordinando i termini e ponendo il tutto in forma matriciale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3} & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ -\frac{1}{R_3} & 0 & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R'_5} & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_0 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \\ J_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici e risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4\Omega} + \frac{1}{1\Omega} & \frac{1}{1\Omega} & -\frac{1}{1\Omega} & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ -\frac{1}{1\Omega} & 0 & \frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{4\Omega} + \frac{1}{2\Omega} & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4\Omega} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_0 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 A \\ 0 \\ 2.5 A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$V_1 \simeq 2.545 V$$

$$V_2 \simeq 2.727 V$$

$$V_3 \simeq 0.182 V$$

$$V_0 \simeq 2.364 V$$

$$I_0 \simeq 45.45 mA$$

Esercizio 4.10

Dato il circuito di Fig. 4.10, trovare i valori di V_1 , V_2 e V_3 . Siano dati $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 8\ \Omega$, $E_1 = 10\ V$, $E_2 = 12\ V$, $E_3 = 20\ V$ e $J = 1\ A$.

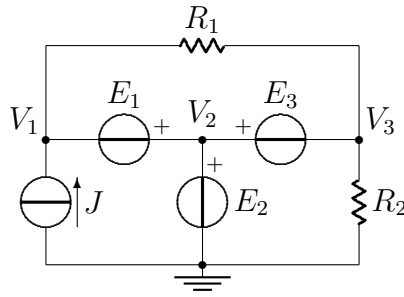


Figura 4.10: Circuito dell'esercizio 4.10

Soluzione

Dall'analisi del circuito si vede immediatamente che

$$V_1 = E_2 - E_1 = 2\ V$$

$$V_2 = E_2 = 12\ V$$

$$V_3 = E_2 - E_3 = -8\ V$$

Capitolo 5

Sovrapposizione degli effetti

Esercizio 5.1

Dato il circuito di Fig. 5.1, trovare il valore di i_x e la potenza P_x dissipata su R_2 usando il metodo della sovrapposizione degli effetti. Siano dati $R_1 = 24\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 80\ \Omega$, $E = 30\ V$ e $J = 2\ A$.

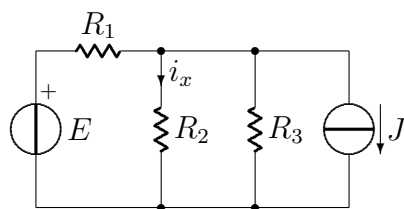
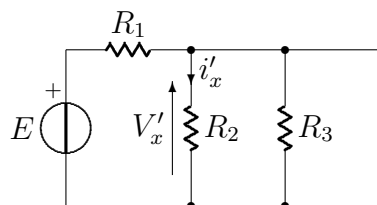


Figura 5.1: Circuito dell'esercizio 4.7

Soluzione

Per calcolare la i_x dovuta al generatore di tensione E si spegne il generatore di corrente J . Il circuito risultante è il seguente



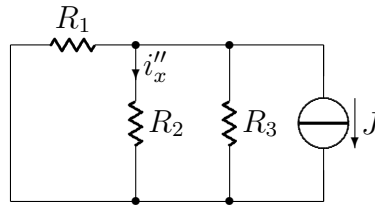
Per il calcolo di i'_x conviene prima trovare la tensione ai capi del parallelo tra R_2 ed R_3

$$V'_x = E \frac{R_2 \parallel R_3}{R_1 + (R_2 \parallel R_3)} = 30 \text{ V} \frac{20 \Omega \parallel 80 \Omega}{24 \Omega + (20 \Omega \parallel 80 \Omega)} = 12 \text{ V}$$

da cui

$$i'_x = \frac{V'_x}{R_2} = \frac{12 \text{ V}}{20 \Omega} = 0.6 \text{ A}$$

Per calcolare la i_x dovuta al generatore di corrente J si spegne il generatore di tensione E . Il circuito risultante è il seguente



Il valore di i''_x è dato da un semplice partitore di corrente.

$$i''_x = -J \frac{R_1 \parallel R_3}{R_2 + (R_1 \parallel R_3)} = -2 \text{ A} \frac{24 \Omega \parallel 80 \Omega}{20 \Omega + (24 \Omega \parallel 80 \Omega)} = -0.96 \text{ A}$$

Mettendo insieme i due risultati si ha

$$i_x = i'_x + i''_x = 0.6 \text{ A} - 0.96 \text{ A} = -0.36 \text{ A}$$

e

$$P_x = R_2 \cdot i_x^2 = 20 \Omega \cdot (-0.36 \text{ A})^2 = 2.592 \text{ W}$$

Esercizio 5.2

Dato il circuito di Fig. 5.2, trovare il valore di i_x e la potenza P_x dissipata su R_3 usando il metodo della sovrapposizione degli effetti. Siano dati $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 6\ \Omega$, $R_4 = 8\ \Omega$, $E_1 = 40\ V$, $E_2 = 32\ V$ e $J = 2\ A$.

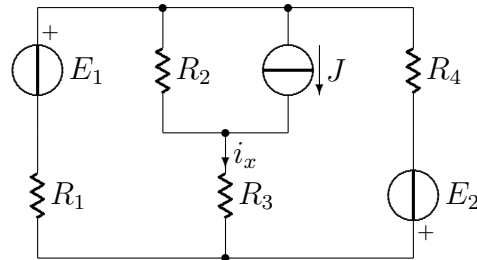
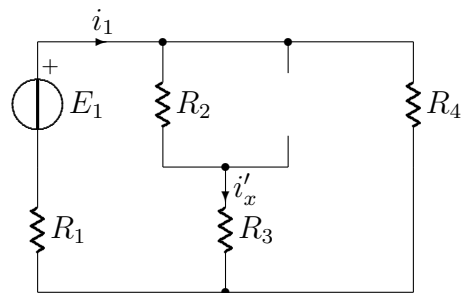


Figura 5.2: Circuito dell'esercizio 4.12

Soluzione

Primo effetto

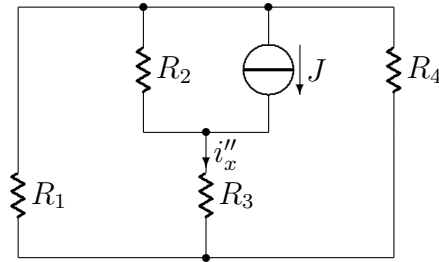


Per calcolare i'_x conviene prima calcolare i_1 :

$$i_1 = \frac{E_1}{R_1 + [(R_2 + R_3) \parallel R_4]} = \frac{40\ V}{4\ \Omega + [(2\ \Omega + 6\ \Omega) \parallel 8\ \Omega]} = 5\ A$$

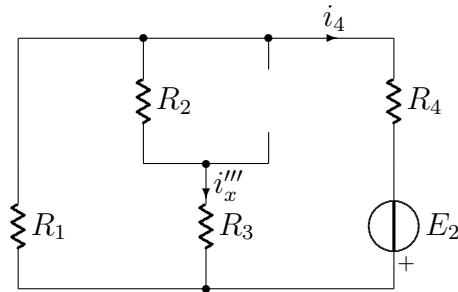
Il valore di i'_x si ricava facendo un partitore di corrente:

$$i'_x = i_1 \frac{R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = 5\ A \frac{8\ \Omega}{2\ \Omega + 6\ \Omega + 8\ \Omega} = 2.5\ A$$

Secondo effetto

Il parallelo delle resistenze R_1 e R_4 è in serie ad R_3 , quindi i''_x si trova con un partitore di corrente:

$$i''_x = J \frac{R_2}{R_2 + R_3 + (R_4 \parallel R_1)} = 2 \text{ A} \frac{2 \Omega}{2 \Omega + 6 \Omega + (4 \Omega \parallel 8 \Omega)} = 0.375 \text{ A}$$

Terzo effetto

Per calcolare i'''_x conviene prima calcolare i_4 :

$$i_4 = \frac{E_2}{R_4 + [(R_3 + R_2) \parallel R_1]} = \frac{32 \text{ V}}{8 \Omega + [(6 \Omega + 2 \Omega) \parallel 4 \Omega]} = 3 \text{ A}$$

Il valore di i'''_x si ricava facendo un partitore di corrente:

$$i'''_x = -i_4 \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = -3 \text{ A} \frac{4 \Omega}{4 \Omega + 2 \Omega + 6 \Omega} = -1 \text{ A}$$

Complessivo

La corrente i_x vale

$$i_x = i'_x + i''_x + i'''_x = 2.5 A + 0.375 A - 1 A = 1.875 A$$

mentre P_x vale

$$P_x = R_3 \cdot i_x^2 \simeq 21.1 W$$

Esercizio 5.3

Dato il circuito di Fig. 5.3, trovare il valore di i_0 usando il metodo della sovrapposizione degli effetti. Siano dati $R_1 = 8 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$, $R_5 = 10 \Omega$, $E = 24 V$, $J_1 = 4 A$ e $J_2 = 2 A$.

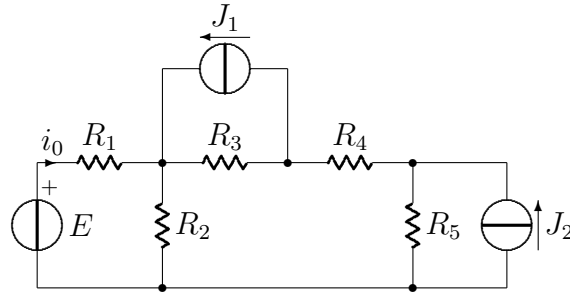
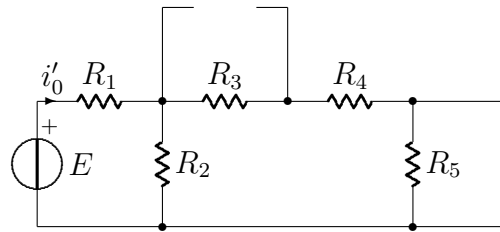


Figura 5.3: Circuito dell'esercizio 4.13

Soluzione**Primo effetto**

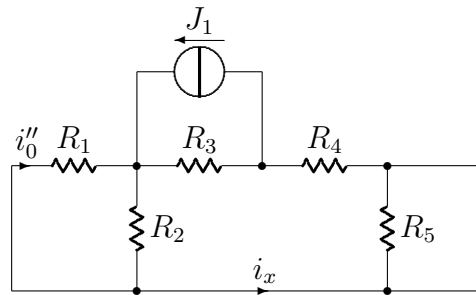
La corrente i'_0 è la corrente erogata dal generatore di tensione E

$$i'_0 = \frac{E}{R_1 + [R_2 \parallel (R_3 + R_4 + R_5)]} = \frac{24 V}{8 \Omega + [20 \Omega \parallel (6 \Omega + 4 \Omega + 10 \Omega)]} \simeq 1.33 A$$

Secondo effetto

Calcoliamo prima i_x con un partitore di corrente

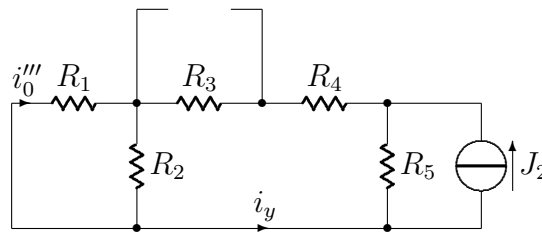
$$i_x = J_1 \frac{R_3}{R_3 + R_4 + R_5 + (R_1 \parallel R_2)} = 4 A \frac{6 \Omega}{6 \Omega + 4 \Omega + 10 \Omega + (8 \Omega \parallel 20 \Omega)} \simeq 0.93 A$$



da cui

$$i''_0 = -i_x \frac{R_2}{R_2 + R_1} = -0.93 \text{ A} \frac{20 \Omega}{20 \Omega + 8 \Omega} \simeq -0.67 \text{ A}$$

Terzo effetto



Calcoliamo prima i_y con un partitore di corrente

$$i_y = J_2 \frac{R_5}{R_5 + R_4 + R_3 + (R_1 \parallel R_2)} = 2 \text{ A} \frac{10 \Omega}{10 \Omega + 4 \Omega + 6 \Omega + (8 \Omega \parallel 20 \Omega)} \simeq 0.78 \text{ A}$$

da cui

$$i'''_0 = -i_y \frac{R_2}{R_2 + R_1} = -0.78 \text{ A} \frac{20 \Omega}{20 \Omega + 8 \Omega} \simeq -0.55 \text{ A}$$

Complessivo

La corrente i_0 vale

$$i_0 = i'_0 + i''_0 + i'''_0 = 1.33 \text{ A} - 0.67 \text{ A} - 0.55 \text{ A} \simeq 0.11 \text{ A}$$

Capitolo 6

Circuiti equivalenti di Thevenin e Norton

Esercizio 6.1

Dato il circuito di Fig. 6.1, trovare il circuito equivalente di Thevenin tra i morsetti a e b . Siano dati $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$, $R_4 = 2\ \Omega$, $R_5 = 1\ \Omega$, $R_6 = 1\ \Omega$, $E_1 = 3\text{ V}$, $E_2 = 2\text{ V}$ e $J = 5\text{ A}$.

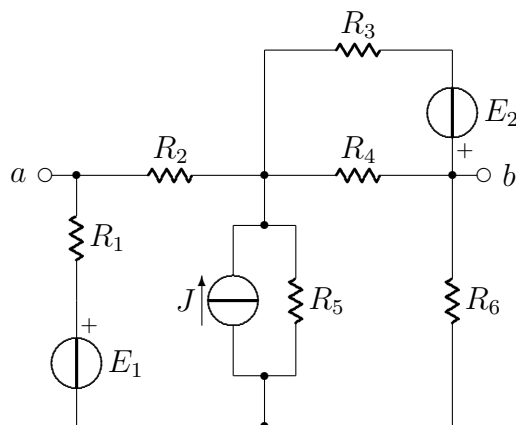
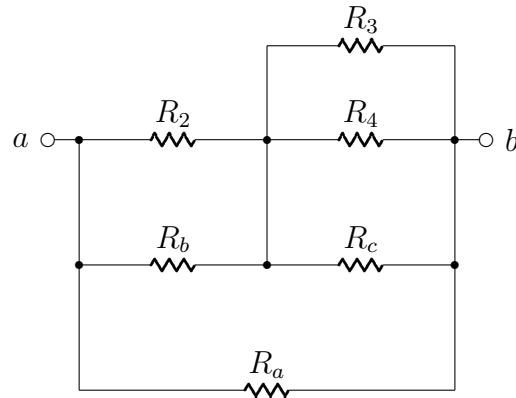


Figura 6.1: Circuito dell'esercizio 4.48

Soluzione

Resistenza equivalente

Spegnendo i generatori di corrente e di tensione e trasformando in triangolo la stella costituita dai resistori R_1 , R_5 ed R_6 , si ha

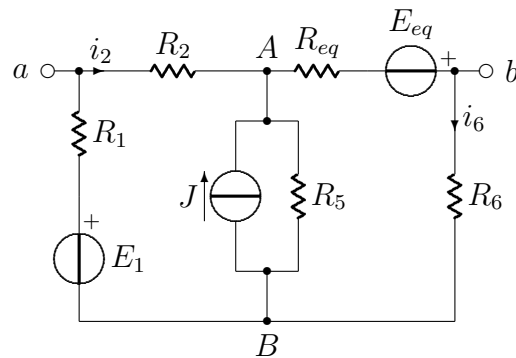


dove $R_a = R_b = R_c = 3\ \Omega$, da cui

$$R_{ab} = R_a \parallel [(R_b \parallel R_2) + (R_3 \parallel R_4 \parallel R_c)] = 3\ \Omega \parallel [(3\ \Omega \parallel 1\ \Omega) + (2\ \Omega \parallel 2\ \Omega \parallel 3\ \Omega)] = 1\ \Omega$$

Tensione a vuoto

Il metodo più veloce consiste nel trasformare il gruppo R_3 - R_4 - E_2 nel suo equivalente Thevenin:



dove

$$R_{eq} = R_3 \parallel R_4 = 2\ \Omega \parallel 2\ \Omega = 1\ \Omega$$

$$E_{eq} = E_2 \frac{R_4}{R_4 + R_3} = 1\ \text{V}$$

La tensione a vuoto V_{ab} è data da

$$V_{ab} = R_2 \cdot i_2 + R_{eq} \cdot i_6 - E_{eq}$$

Per calcolare le correnti incognite conviene applicare il teorema di Millman ai nodi A e B :

$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1+R_2} + J - \frac{E_{eq}}{R_{eq}+R_6}}{\frac{1}{R_1+R_2} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_{eq}+R_6}} = 3V$$

da cui

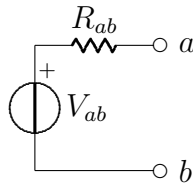
$$i_2 = \frac{E_1 - V_{AB}}{R_1 + R_2} = 0A$$

$$i_6 = \frac{V_{AB} + E_{eq}}{R_{eq} + R_6} = \frac{3V + 1V}{1\Omega + 1\Omega} = 2A$$

e quindi

$$V_{ab} = R_2 \cdot i_2 + R_{eq} \cdot i_6 - E_{eq} = 1V$$

Circuito equivalente di Thevenin



Esercizio 6.2

Dato il circuito di Fig. 6.2, trovare il circuito equivalente di Thevenin tra i morsetti a e b , e tra i morsetti b e c . Siano dati $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 8\Omega$, $R_4 = 10\Omega$, $R_5 = 2\Omega$, $E = 48V$ e $J = 2A$.

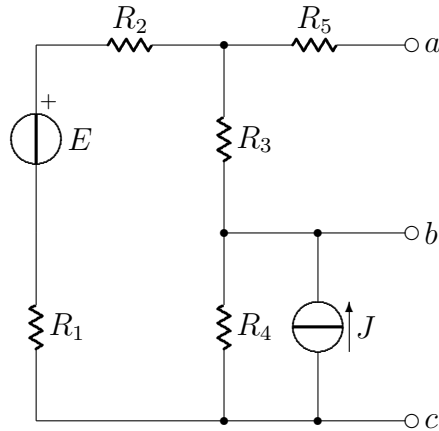


Figura 6.2: Circuito dell'esercizio 4.35

Soluzione**Resistenze equivalenti**

Spegnendo i generatori di corrente e di tensione si ha

$$R_{ab} = (R_1 + R_2 + R_4) \parallel R_3 + R_5 = (4\Omega + 6\Omega + 10\Omega) \parallel 8\Omega + 2\Omega \simeq 7.71\Omega$$

$$R_{bc} = (R_1 + R_2 + R_3) \parallel R_4 = (4\Omega + 6\Omega + 8\Omega) \parallel 10\Omega \simeq 6.43\Omega$$

Tensioni a vuoto

Per semplificare i conti conviene trasformare il gruppo R_4 - J nel suo equivalente Thevenin:

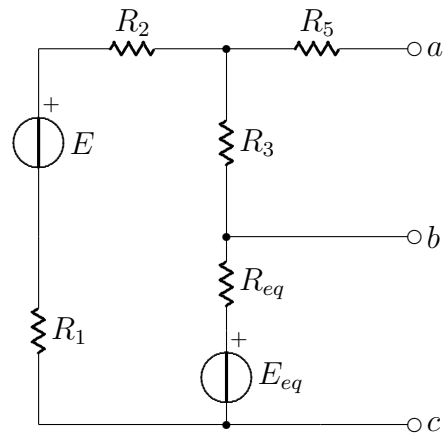
dove

$$R_{eq} = R_4 = 10\Omega$$

$$E_{eq} = J \cdot R_4 = 20V$$

La tensione a vuoto V_{ab} è data da

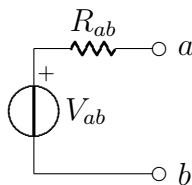
$$V_{ab} = (E - E_{eq}) \frac{R_3}{R_3 + R_1 + R_2 + R_{eq}} = (48V - 20V) \frac{8\Omega}{8\Omega + 4\Omega + 6\Omega + 10\Omega} = 8V$$



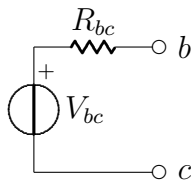
mentre la tensione V_{bc} è data da

$$V_{bc} = \frac{\frac{E}{R_1+R_2+R_3} + \frac{E_{eq}}{R_4}}{\frac{1}{R_1+R_2+R_3} + \frac{1}{R_4}} = 30 \text{ V}$$

Circuito equivalente di Thevenin tra i morsetti a e b



Circuito equivalente di Thevenin tra i morsetti b e c



Esercizio 6.3

Dato il circuito di Fig. 6.3, trovare il circuito equivalente di Norton tra i morsetti a e b . Siano dati $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $E = 4V$ e $J = 3A$.

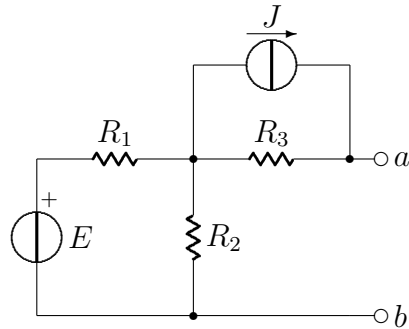


Figura 6.3: Circuito dell'esercizio 4.39

Soluzione

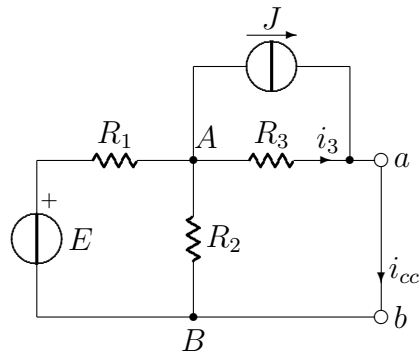
Resistenza equivalente

Spegnendo i generatori di corrente e di tensione si ha

$$R_{ab} = (R_1 \parallel R_2) + R_3 = (1\Omega \parallel 4\Omega) + 2\Omega = 2.8\Omega$$

Corrente di corto circuito

Il circuito diventa:



La corrente di corto circuito è data da

$$i_{cc} = i_3 + J$$

Per calcolare la corrente i_3 conviene applicare il teorema di Millman tra i nodi A e B :

$$V_{AB} = \frac{\frac{E}{R_1} - J}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \simeq 0.57 \text{ V}$$

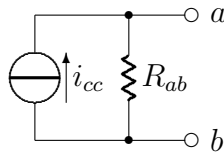
da cui

$$i_3 = \frac{V_{AB}}{R_3} = \frac{0.57 \text{ V}}{2 \Omega} = 0.285 \text{ A}$$

e quindi

$$i_{cc} = i_3 + J = 0.285 \text{ A} + 3 \text{ A} = 3.285 \text{ A}$$

Circuito equivalente di Norton



Esercizio 6.4

Dato il circuito di Fig. 6.4, trovare i circuiti equivalenti di Thevenin e Norton tra i morsetti a e b . Siano dati $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$ e $J = 8\ A$.

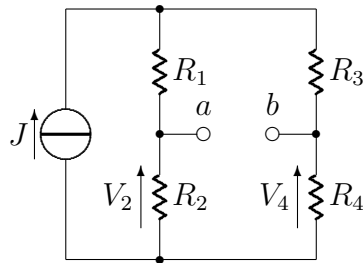


Figura 6.4: Circuito dell'esercizio 4.48

Soluzione**Resistenza equivalente**

Spegnendo il generatore di corrente J si ha

$$R_{eq} = (R_1 + R_3) \parallel (R_2 + R_4) = (1\ \Omega + 2\ \Omega) \parallel (5\ \Omega + 4\ \Omega) = 2.25\ \Omega$$

Tensione a vuoto

La tensione a vuoto V_{ab} è data da

$$V_{ab} = V_2 - V_4$$

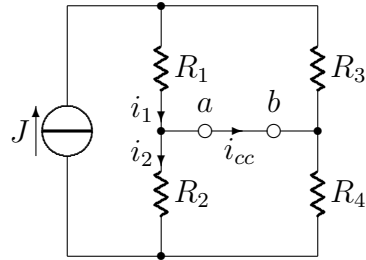
inoltre

$$V_2 = R_2 \cdot J \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 5\ \Omega \cdot 8\ A \frac{2\ \Omega + 4\ \Omega}{1\ \Omega + 5\ \Omega + 2\ \Omega + 4\ \Omega} = 20\ V$$

$$V_4 = R_4 \cdot J \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 4\ \Omega \cdot 8\ A \frac{1\ \Omega + 5\ \Omega}{1\ \Omega + 5\ \Omega + 2\ \Omega + 4\ \Omega} = 16\ V$$

e quindi

$$V_{ab} = V_2 - V_4 = 20\ V - 16\ V = 4\ V$$



Corrente di corto circuito

Il circuito diventa così

La corrente i_{cc} è data da

$$i_{cc} = i_1 - i_2$$

dove

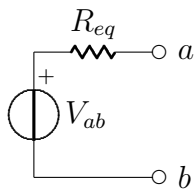
$$i_1 = J \frac{R_3}{R_3 + R_1} = 8 \text{ A} \frac{2\Omega}{2\Omega + 1\Omega} \simeq 5.33 \text{ A}$$

$$i_2 = J \frac{R_4}{R_4 + R_2} = 8 \text{ A} \frac{4\Omega}{4\Omega + 5\Omega} \simeq 3.55 \text{ A}$$

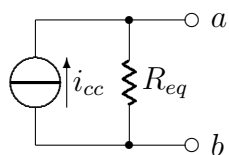
da cui

$$i_{cc} = i_1 - i_2 = 5.33 \text{ A} - 3.55 \text{ A} \simeq 1.78 \text{ A}$$

Circuito equivalente di Thevenin



Circuito equivalente di Norton



Capitolo 7

Fasori

Esercizio 7.1

Calcolare i numeri complessi risultanti dalle seguenti espressioni ed esprimerli in forma cartesiana.

$$(a) \frac{15\angle 45^\circ}{3 - j4} + j2$$

$$(b) \frac{8\angle(-20^\circ)}{(2 + j)(3 - j4)} + \frac{10}{-5 + j12}$$

$$(c) 10 + (8\angle 50^\circ)(5 - j12)$$

$$(d) 2 + \frac{3 + j4}{5 - j8}$$

$$(e) 4\angle(-10^\circ) + \frac{1 - j2}{3\angle 6^\circ}$$

$$(f) \frac{8\angle 10^\circ + 6\angle(-20^\circ)}{9\angle 80^\circ - 4\angle 50^\circ}$$

Soluzione

$$(a) \frac{15\angle 45^\circ}{3 - j4} + j2 = \frac{10.6 + j10.6}{3 - j4} + j2 = -0.42 + j2.97 + j2 = -0.42 + j4.97$$

$$(b) \frac{8\angle(-20^\circ)}{(2 + j)(3 - j4)} + \frac{10}{-5 + j12} = \frac{7.52 - j2.74}{10 - j5} - 0.3 - j0.71 = \\ = 0.71 + j0.08 - 0.3 - j0.71 = 0.41 - j0.63$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad 10 + (8\angle 50^\circ)(5 - j12) &= 10 + (5.14 + j6.13)(5 - j12) = 10 + 99.25 - j31.07 = \\ &= 109.25 - j31.07 \end{aligned}$$

$$\text{(d)} \quad 2 + \frac{3 + j4}{5 - j8} = 2 - 0.19 + j0.49 = 1.81 + j0.49$$

$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad 4\angle(-10^\circ) + \frac{1 - j2}{3\angle 6^\circ} &= 3.94 - j0.69 + \frac{1 - j2}{2.98 + j0.31} = \\ &= 3.94 - j0.69 + 0.26 - j0.7 = 4.2 - j1.39 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(f)} \quad \frac{8\angle 10^\circ + 6\angle(-20^\circ)}{9\angle 80^\circ - 4\angle 50^\circ} &= \frac{7.88 + j1.39 + 5.64 - j2.05}{1.56 + j8.86 - 2.57 - j3.06} = \frac{13.52 - j0.66}{-1.01 + j5.8} = \\ &= -0.5 - j2.24 \end{aligned}$$

Esercizio 7.2

Calcolare le sinusoidi corrispondenti a ciascuno dei seguenti fasori.

(a) $V_1 = 60\angle 15^\circ$, $\omega = 1 \text{ rad/s}$

(b) $V_2 = 6 + j8$, $\omega = 40 \text{ rad/s}$

(c) $I_1 = 2.8e^{-j\pi/3}$, $\omega = 377 \text{ rad/s}$

(d) $I_2 = -0.5 - j1.2$, $\omega = 1000 \text{ rad/s}$

Soluzione

(a) $v_1 = 60 \cos(t + 15^\circ) \text{ V}$

(b) $V_2 = 6 + j8 = 10\angle 53.1^\circ \Rightarrow v_2 = 10 \cos(40t + 53.1^\circ) \text{ V}$

(c) $I_1 = 2.8e^{-j\pi/3} = 2.8\angle(-60^\circ) \Rightarrow i_1 = 2.8 \cos(377t - 60^\circ) \text{ A}$

(d) $I_2 = -0.5 - j1.2 = 1.3\angle(-112.6^\circ) \Rightarrow i_2 = 1.3 \cos(1000t - 112.6^\circ) \text{ A}$

Esercizio 7.3

Calcolare le seguenti espressioni utilizzando i fasori.

(a) $3 \cos(50t + 10^\circ) - 5 \cos(50t - 30^\circ)$

(b) $40 \sin 30t + 30 \cos(30t - 45^\circ)$

(c) $20 \sin 100t + 10 \cos(100t + 60^\circ) - 5 \sin(100t - 20^\circ)$

Soluzione

(a) Passando ai fasori si ha

$$3\angle 10^\circ - 5\angle(-30^\circ) = 2.95 + j0.52 - 4.33 + j2.5 = -1.38 + j3.02 = 3.32\angle 114^\circ$$

e quindi

$$3 \cos(50t + 10^\circ) - 5 \cos(50t - 30^\circ) = 3.32 \cos(50t + 114^\circ)$$

(b) Passando ai fasori si ha

$$-j40 + 30\angle(-45^\circ) = -j40 + 21.21 - j21.21 = 21.21 - j61.21 = 64.78\angle(-70.9^\circ)$$

e quindi

$$40 \sin 30t + 30 \cos(30t - 45^\circ) = 64.78 \cos(30t - 70.9^\circ)$$

(c) Passando ai fasori si ha

$$-j20 + 10\angle 60^\circ - 5\angle(-110^\circ) = -j20 + 5 + j8.66 + 1.71 + j4.7 = 9.44\angle(-44.7^\circ)$$

e quindi

$$20 \sin 100t + 10 \cos(100t + 60^\circ) - 5 \sin(100t - 20^\circ) = 9.44 \cos(100t - 44.7^\circ)$$

Capitolo 8

Reti dinamiche

Esercizio 8.1

Dato il circuito di Fig. 8.1, trovare il valore di I_0 . Siano dati $Z_1 = 4\Omega$, $Z_2 = -j4\Omega$, $Z_3 = j8\Omega$, $Z_4 = -j4\Omega$, $Z_5 = 4\Omega$ e $J = 5 A$.

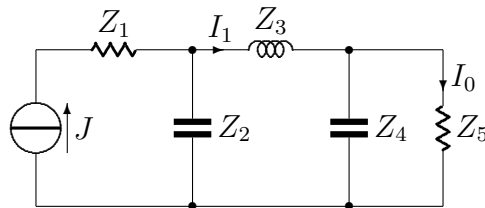


Figura 8.1: Circuito dell'esercizio 9.38

Soluzione

Con un primo partitore di corrente si calcola la corrente I_1 :

$$I_1 = J \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3 + (Z_4 \parallel Z_5)} = 5 A \frac{-j4\Omega}{-j4\Omega + j8\Omega + (-j4\Omega \parallel 4\Omega)} = -2 - j A$$

e con un secondo partitore si trova la corrente I_0 :

$$I_0 = I_1 \frac{Z_4}{Z_4 + Z_5} = (-2 - j) A \frac{-j4\Omega}{-j4\Omega + 4\Omega} = -1.5 + j0.5 A$$

Esercizio 8.2

Dato il circuito di Fig. 8.2, trovare il valore di Z . Siano dati $Z_1 = 12\Omega$, $Z_2 = -j4\Omega$, $Z_3 = j8\Omega$, $E = 10\angle(-90^\circ)V$ e $V_0 = 4\angle 0V$.

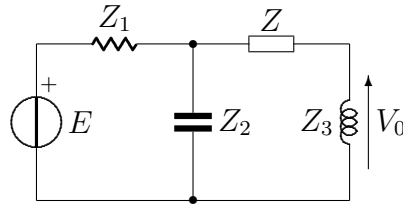
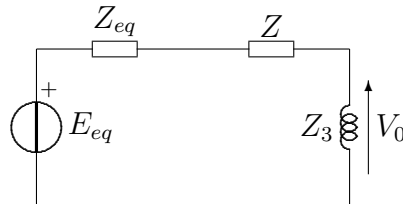


Figura 8.2: Circuito dell'esercizio 9.44

Soluzione

Prima di procedere con i calcoli conviene trasformare il lato sinistro del circuito nel suo equivalente Thevenin:



con

$$V_{eq} = E \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = 10\angle(-90^\circ)V \frac{-j4\Omega}{12\Omega - j4\Omega} = (-3 - j)V$$

$$Z_{eq} = Z_1 \parallel Z_2 = 12\Omega \parallel (-j4\Omega) = (1.2 - j3.6)\Omega$$

A questo punto basta scrivere una relazione che leghi la tensione V_0 agli altri parametri del circuito:

$$V_0 = V_{eq} \frac{Z_3}{Z_{eq} + Z + Z_3}$$

da cui

$$Z = Z_3 \frac{V_{eq}}{V_0} - Z_{eq} - Z_3 = (0.8 - j10.4)\Omega$$

Esercizio 8.3

Dato il circuito di Fig. 8.3, trovare il valore di Z_{eq} . Siano dati $Z_1 = (2+j6) \Omega$, $Z_2 = (2 - j2) \Omega$, $Z_3 = j10 \Omega$ e $Z_4 = (2 + j4) \Omega$.

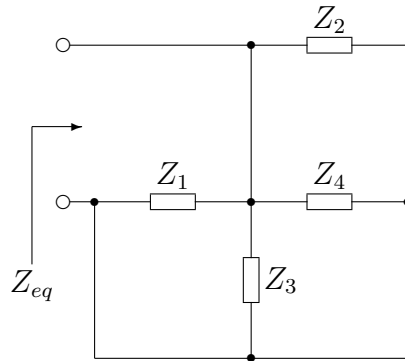


Figura 8.3: Circuito dell'esercizio 9.47

Soluzione

Le quattro impedenze sono tutte in parallelo tra di loro:

$$Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4}} = (2 + j) \Omega$$

Esercizio 8.4

Dato il circuito di Fig. 8.4, calcolare i valori di Z e di I . Siano dati $Z_1 = 2\ \Omega$, $Z_2 = 4\ \Omega$, $Z_3 = -j6\ \Omega$, $Z_4 = 3\ \Omega$, $Z_5 = j4\ \Omega$ ed $E = 60\angle 10^\circ\ V$.

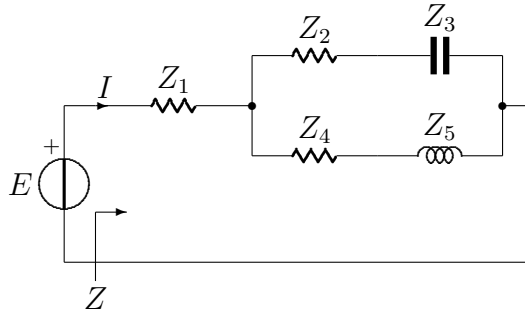


Figura 8.4: Circuito dell'esercizio 9.49

Soluzione

Il valore di Z è dato da:

$$Z = Z_1 + (Z_2 + Z_3) \parallel (Z_4 + Z_5) = 2\ \Omega + (4\ \Omega - j6\ \Omega) \parallel (3\ \Omega + j4\ \Omega) = (6.83 + j1.094)\ \Omega$$

Il valore di I è invece dato da:

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{60\angle 10^\circ\ V}{(6.83 + j1.094)\ \Omega} = (8.67 + j0.136)\ A$$

Esercizio 8.5

Dato il circuito di Fig. 8.5, calcolare lo scostamento di fase tra ingresso ed uscita, determinare se lo scostamento di fase è in anticipo o in ritardo (uscita rispetto ingresso), e calcolare il valore dell'uscita se l'ingresso V_i vale 60 V. Siano dati $Z_1 = 20 \Omega$, $Z_2 = j10 \Omega$, $Z_3 = 40 \Omega$, $Z_4 = j30 \Omega$, $Z_5 = 30 \Omega$ e $Z_6 = j60 \Omega$.

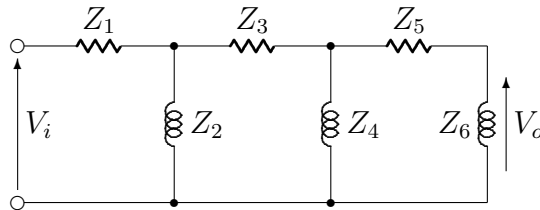


Figura 8.5: Circuito dell'esercizio 9.61

Soluzione

Il circuito è un filtro passa-alto. Attraverso una serie di partitori di tensione si può giungere ad una relazione che lega V_o a V_i :

$$V_o = V_i \left[\frac{Z_2 \parallel (Z_3 + Z_4 \parallel (Z_5 + Z_6))}{Z_1 + Z_2 \parallel (Z_3 + Z_4 \parallel (Z_5 + Z_6))} \right] \left[\frac{Z_4 \parallel (Z_5 + Z_6)}{Z_3 + Z_4 \parallel (Z_5 + Z_6)} \right] \left[\frac{Z_6}{Z_5 + Z_6} \right]$$

sostituendo i valori numerici si ha:

$$\frac{V_o}{V_i} = (0.206 + j0.328)(0.249 + j0.367)(0.8 + j0.4) = -0.118 + j0.098$$

Lo scostamento di fase è dato dall'argomento del numero complesso appena calcolato:

$$\Delta\varphi = \arctan\left(\frac{0.098}{-0.118}\right) = 140.2^\circ$$

Questo scostamento di fase è positivo, quindi è in anticipo.

Per calcolare il valore dell'uscita con un ingresso di 60 V si utilizza la relazione calcolata in precedenza:

$$V_o = V_i(-0.118 + j0.098) = 60 V(-0.118 + j0.098) = 9.2 \angle 140.2^\circ V$$

Esercizio 8.6

Dato il circuito di Fig. 8.6, calcolare il valore di i_0 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $C = 50\ \mu F$, $L = 10\ mH$ e $j = 10 \sin(1000t)\ A$.

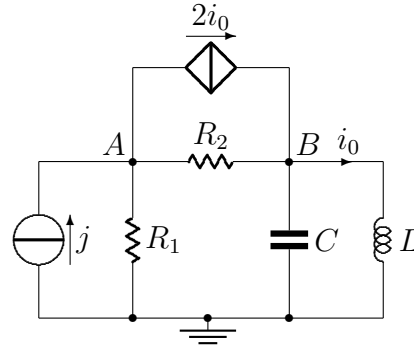
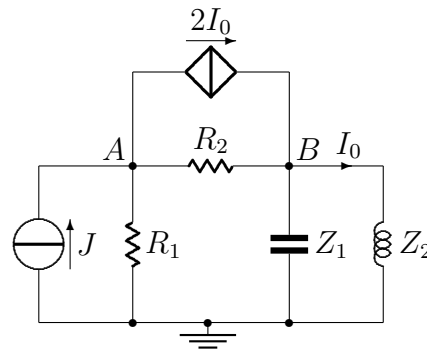


Figura 8.6: Circuito dell'esercizio 10.7

Soluzione

Passiamo ai fasori:



dove

$$\omega = 1000\ rad/s$$

$$J = -j10\ A$$

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C} = -j20\ \Omega$$

$$Z_2 = j\omega L = j10\ \Omega$$

inoltre

$$I_0 = \frac{V_B}{Z_2}$$

Il nodo di riferimento è il nodo di massa. Scriviamo le equazioni delle tensioni ai nodi A e B :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & 2 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} & -2 \\ 0 & -\frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{20\Omega} + \frac{1}{10\Omega} & -\frac{1}{10\Omega} & 2 \\ -\frac{1}{10\Omega} & \frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{-j20\Omega} + \frac{1}{j10\Omega} & -2 \\ 0 & -\frac{1}{j10\Omega} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j10A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$V_A = (-160 + j280) V$$

$$V_B = (80 + j160) V$$

$$I_0 = (16 - j8) A$$

e quindi

$$i_0 = 17.89 \cos(1000t - 26.56^\circ) A$$

Esercizio 8.7

Dato il circuito di Fig. 8.7, calcolare il valore di I_0 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $Z_1 = j4\Omega$, $Z_2 = 3\Omega$, $Z_3 = 2\Omega$, $Z_4 = 1\Omega$, $Z_5 = -j2\Omega$ ed $E = 50\angle 20^\circ V$.

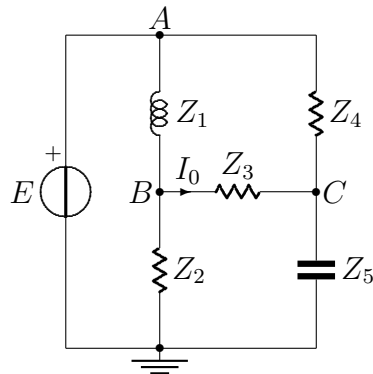


Figura 8.7: Circuito dell'esercizio 10.11

Soluzione

Il nodo di riferimento è il nodo di massa. Scriviamo le equazioni delle tensioni ai nodi A , B e C :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{Z_1} & \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} & -\frac{1}{Z_3} \\ -\frac{1}{Z_4} & -\frac{1}{Z_3} & \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{j4\Omega} & \frac{1}{j4\Omega} + \frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{2\Omega} & -\frac{1}{2\Omega} \\ -\frac{1}{1\Omega} & -\frac{1}{2\Omega} & \frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{-j2\Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50\angle 20^\circ V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$V_A = (46.98 + j17.1) V$$

$$V_B = (31.53 - j7.33) V$$

$$V_C = (40.34 - j4.49) V$$

e quindi

$$I_0 = \frac{V_B - V_C}{Z_3} = (-4.4 - j1.42) A = 4.63 \angle (-162.1^\circ) A$$

Esercizio 8.8

Dato il circuito di Fig. 8.8, calcolare la potenza media assorbita da ogni elemento. Siano dati $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $L = 1\ H$, $C = 0.25\ F$ ed $e = 20\cos(2t + 30^\circ)\ V$.

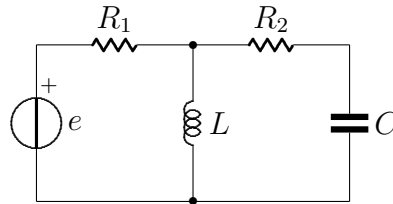
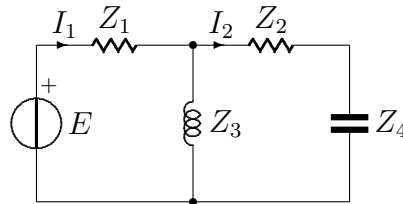


Figura 8.8: Circuito dell'esercizio 11.3

Soluzione

Passiamo al dominio dei fasori:



dove

$$E = 20\angle 30^\circ\ V = 17.32 + j10\ V$$

$$Z_1 = R_1 = 4\ \Omega$$

$$Z_2 = R_2 = 2\ \Omega$$

$$Z_3 = j\omega L = j2\ \Omega$$

$$Z_4 = \frac{1}{j\omega C} = -j2\ \Omega$$

Calcoliamo le correnti I_1 ed I_2 :

$$I_1 = \frac{E}{Z_1 + (Z_3 \parallel (Z_2 + Z_4))} = \frac{17.32 + j10 V}{4 \Omega + (j2 \Omega \parallel (2 \Omega - j2 \Omega))} = 3.1 + j0.63 A$$

$$I_2 = I_1 \frac{Z_3}{Z_3 + Z_2 + Z_4} = (3.1 + j0.63) A \frac{j2 \Omega}{j2 \Omega + 2 \Omega - j2 \Omega} = -0.63 + j3.1 A$$

La potenza media assorbita dagli elementi reattivi è nulla, mentre la potenza media assorbita dagli elementi resistivi vale:

$$P_1 = \frac{1}{2} R_1 |I_1|^2 = \frac{1}{2} 4 \Omega (3.16 A)^2 = 20 W$$

$$P_2 = \frac{1}{2} R_2 |I_2|^2 = \frac{1}{2} 2 \Omega (3.16 A)^2 = 10 W$$

Esercizio 8.9

Dato il circuito di Fig. 8.9, calcolare la potenza media assorbita dalla resistenza R_2 . Siano dati $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $Z_1 = j2\ \Omega$, $Z_2 = -j\ \Omega$ e $J = 8\angle 60^\circ\ \text{A}$.

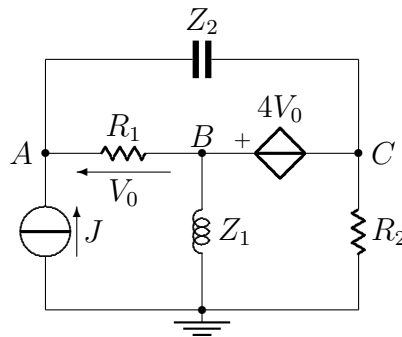


Figura 8.9: Circuito dell'esercizio 11.5

Soluzione

Per risolvere il problema conviene applicare il metodo dei nodi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{Z_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{Z_2} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{Z_1} & \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{-j\Omega} & -\frac{1}{2\Omega} & -\frac{1}{-j\Omega} & 0 \\ -\frac{1}{2\Omega} - \frac{1}{-j\Omega} & \frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{j2\Omega} & \frac{1}{-j\Omega} + \frac{1}{4\Omega} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\angle 60^\circ A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$V_A = (-4.22 + j13.08) V$$

$$V_B = (-5.68 + j13.74) V$$

$$V_C = (-11.48 + j16.36) V$$

$$V_0 = (1.45 - j0.65) V$$

A questo punto la potenza media assorbita da R_2 è data da:

$$P = \frac{|V_C|^2}{2R_2} = \frac{(20 V)^2}{2 \cdot 4 \Omega} = 2.5 W$$

Esercizio 8.10

Dato il circuito di Fig. 8.10, calcolare il valore del carico Z che assorbe la massima potenza media. Calcolare inoltre la massima potenza media assorbita. Siano dati $Z_1 = 8 \Omega$, $Z_2 = j10 \Omega$, $Z_3 = -j4 \Omega$ e $J = 3 \angle 20^\circ A$.

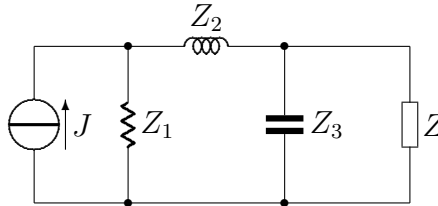


Figura 8.10: Circuito dell'esercizio 11.12

Soluzione

Determiniamo il circuito equivalente Thevenin visto dall'impedenza Z .

Calcolo di Z_{eq} :

$$Z_{eq} = (Z_1 + Z_2) \parallel (Z_3) = (8 \Omega + j10 \Omega) \parallel (-j4 \Omega) = 1.28 - j4.96 \Omega$$

Calcolo di V_{eq} :

$$V_{eq} = Z_3 \cdot J \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2 + Z_3} = -j4 \Omega \cdot 3 \angle 20^\circ A \frac{8 \Omega}{8 \Omega + j10 \Omega - j4 \Omega} = -2.79 - j9.19 V$$

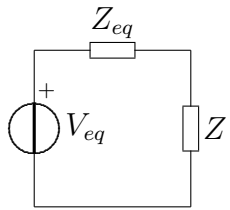
Il circuito risultante è il seguente:

Il valore di impedenza che massimizza la potenza assorbita è pari a:

$$Z = Z_{eq}^* = 1.28 + j4.96 \Omega$$

In questo caso la massima potenza assorbita vale:

$$P_{max} = \frac{|V_{eq}|^2}{8 \Re(Z)} = \frac{(9.6 V)^2}{8 \cdot 1.28 \Omega} = 9 W$$



Esercizio 8.11

Dato il circuito di Fig. 8.11, calcolare il valore del carico Z che assorbe la massima potenza media. Calcolare inoltre la massima potenza media assorbita. Siano dati $Z_1 = 1 \Omega$, $Z_2 = j\Omega$, $Z_3 = -j\Omega$ ed $E = 6\angle 0^\circ V$.

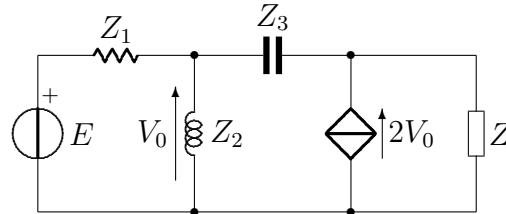
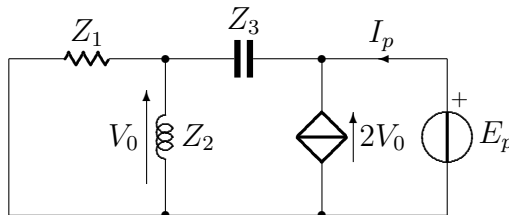


Figura 8.11: Circuito dell'esercizio 11.13

Soluzione

Determiniamo il circuito equivalente Thevenin visto dall'impedenza Z .

Calcolo di Z_{eq} :



$$Z_{eq} = \frac{E_p}{I_p} = \frac{Z_1 \parallel Z_2 + Z_3}{1 - 2(Z_1 \parallel Z_2)} = \frac{(1\Omega \parallel j\Omega) - j\Omega}{1 - 2(1\Omega \parallel j\Omega)} = 0.5 + j0.5 \Omega$$

Calcolo di V_{eq} :

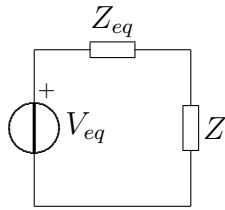
$$V_0 = \frac{\frac{E}{Z_1} + 2V_0}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}}$$

da cui

$$V_0 = -3 - j3 \Omega$$

$$V_{eq} = V_0 + 2V_0 \cdot Z_3 = -9 + j9 V$$

Il circuito risultante è il seguente:



Il valore di impedenza che massimizza la potenza assorbita è pari a:

$$Z = Z_{eq}^* = 0.5 - j0.5 \Omega$$

In questo caso la massima potenza assorbita vale:

$$P_{max} = \frac{|V_{eq}|^2}{8 \Re(Z)} = \frac{(12.73 V)^2}{8 \cdot 0.5 \Omega} = 40.5 W$$

Esercizio 8.12

Dato il circuito di Fig. 8.12, determinare la potenza complessa assorbita da ognuno dei cinque elementi. Siano dati $Z_1 = -j2\Omega$, $Z_2 = 2\Omega$, $Z_3 = j\Omega$, $E_1 = 40\angle 0^\circ V_{eff}$ ed $E_2 = 50\angle 90^\circ V_{eff}$.

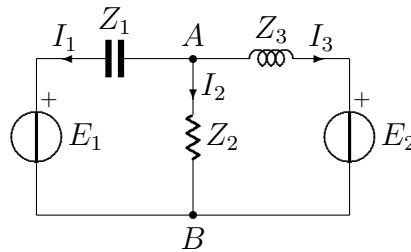


Figura 8.12: Circuito dell'esercizio 11.40

Soluzione

NOTA: tutte le tensioni e tutte le correnti sono espresse rispettivamente in Volt efficaci ed in Ampere efficaci.

Per prima cosa può risultare utile determinare il valore di V_{AB} applicando il teorema di Millman.

$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{Z_1} + \frac{E_2}{Z_3}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}} = 30 + j70 \text{ V}$$

A questo punto si possono facilmente calcolare le correnti che scorrono nei tre rami del circuito:

$$I_1 = \frac{V_{AB} - E_1}{Z_1} = -35 - j5 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{V_{AB}}{Z_2} = 15 + j35 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{V_{AB} - E_2}{Z_3} = 20 - j30 \text{ A}$$

Le potenze complesse assorbite da ogni elemento valgono:

$$P_{E_1} = E_1 \cdot I_1^* = -1400 + j200 \text{ VA}$$

$$P_{E_2} = E_2 \cdot I_3^* = -1500 + j1000 \text{ VA}$$

$$P_{Z_1} = Z_1 \cdot |I_1|^2 = -j2500 \text{ VAR}$$

$$P_{Z_2} = Z_2 \cdot |I_2|^2 = 2900 \text{ W}$$

$$P_{Z_3} = Z_3 \cdot |I_3|^2 = j1300 \text{ VAR}$$

Esercizio 8.13

Dato il circuito di Fig. 8.13, determinare la potenza complessa fornita dal generatore di corrente. Siano dati $Z_1 = 5\ \Omega$, $Z_2 = 3\ \Omega$, $Z_3 = j4\ \Omega$, $Z_4 = -j2\ \Omega$, $Z_5 = 6\ \Omega$ e $J = 4\angle 30^\circ\ \text{A}$.

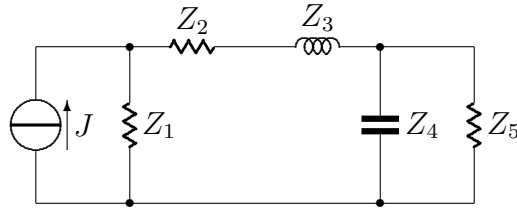


Figura 8.13: Circuito dell'esercizio 11.41

Soluzione

Per risolvere l'esercizio basta determinare la tensione ai capi del generatore di corrente. Per fare questo si calcola l'impedenza ai capi del generatore stesso:

$$Z = Z_1 \parallel (Z_2 + Z_3 + (Z_4 \parallel Z_5)) = 2.27 + j0.698\ \Omega$$

La tensione ai capi del generatore vale:

$$V_g = J \cdot Z = 6.47 + j6.96\ \text{V}$$

mentre la potenza fornita dal generatore vale:

$$P = \frac{1}{2} V_g \cdot J^* = 18.17 + j5.58\ \text{VA}$$

Esercizio 8.14

Dato il circuito di Fig. 8.14, determinare le potenze attiva, reattiva e complessa fornite dal generatore di tensione. Siano dati $Z_1 = 4\ \Omega$, $Z_2 = 1\ \Omega$, $Z_3 = -j\ \Omega$, $Z_4 = j2\ \Omega$, $Z_5 = 2\ \Omega$ ed $E = 12\angle 0^\circ\ V$.

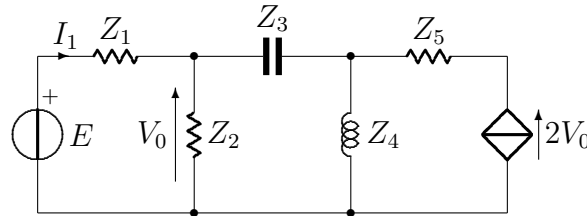
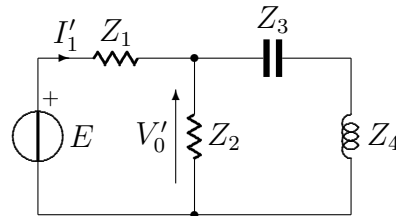


Figura 8.14: Circuito dell'esercizio 11.42

Soluzione

Per risolvere l'esercizio bisogna determinare la corrente I_1 . Per fare questo si può applicare il metodo della sovrapposizione degli effetti.

Primo effetto

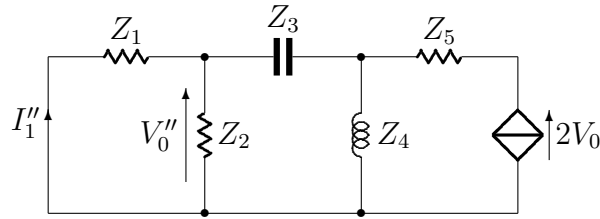


Dall'esame del circuito si ha:

$$I'_1 = \frac{E}{Z_1 + (Z_2 \parallel (Z_3 + Z_4))} = \frac{12\ V}{4\ \Omega + (1\ \Omega \parallel (-j\ \Omega + j2\ \Omega))} = 2.63 - j0.29\ A$$

$$V'_0 = E - I'_1 Z_1 = 1.48 + j1.16\ V$$

Secondo effetto



Dall'esame del circuito si ha:

$$I_1'' = -2V_0 \frac{Z_4}{Z_4 + Z_3 + (Z_2 \parallel Z_1)} \frac{Z_2}{Z_2 + Z_1} = -V_0(0.49 + j0.39) A$$

$$V_0'' = 2V_0 \frac{Z_4}{Z_4 + Z_3 + (Z_2 \parallel Z_1)} \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = V_0(1.95 + j1.56) V$$

Mettendo insieme il tutto si ha:

$$V_0 = V_0' + V_0'' = 1.48 + j1.16 V + V_0(1.95 + j1.56) V$$

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 2.63 - j0.29 A - V_0(0.49 + j0.39) A$$

da cui

$$V_0 = -0.96 + j0.36 V$$

$$I_1 = 3.24 - j0.09 A$$

Le potenze fornite dal generatore valgono:

$$P_a = \frac{1}{2} \Re(EI_1^*) = 19.44 W$$

$$P_r = \frac{1}{2} \Im(EI_1^*) = 0.54 VAR$$

$$P_c = \frac{1}{2} (EI_1^*) = 19.44 + j0.54 VA$$