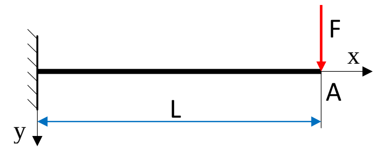
Esercizio N.1

La trave a mensola AB ha sezione trasversale costante e porta un carico F nella sua estremità libera A. Determinare l'equazione della linea elastica, lo spostamento e la rotazione in A.



Soluzione

Ricordiamo l'equazione della linea elastica: $E \cdot J_z \cdot \frac{d^2v(x)}{dx^2} = -M(x)$ dove l'asse x coincide con l'asse della trave, lo spostamento v(x) è orientato come l'asse y verso il basso e l'asse z è orizzontale e passa per il baricentro della sezione trasversale della trave. L'equazione del momento flettente è la seguente:

$$M(x) = F \cdot (x - L)$$

Integrando una prima volta l'equazione della linea elastica otteniamo:

$$E \cdot J_z \cdot \frac{dv(x)}{dx} = E \cdot J_z \cdot \vartheta(x) = -F \cdot \int (x - L) \cdot dx = -F \cdot \left(\frac{x^2}{2} - L \cdot x + c_1\right)$$

Integrando una seconda volta otteniamo:

$$E \cdot J_z \cdot v(x) = \int -F \cdot \left(\frac{x^2}{2} - L \cdot x + c_1\right) \cdot dx = -F \cdot \left(\frac{x^3}{6} - L \cdot \frac{x^2}{2} + c_1 \cdot x + c_2\right)$$

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

a) Per x = 0 $\quad y(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$

b) Per x = 0 $\quad \vartheta(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$

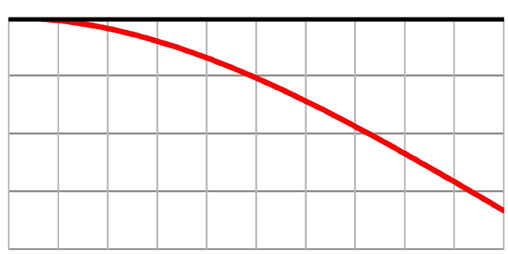
Di conseguenza, l'equazione della linea elastica è la seguente:

$$v(x) = \frac{-F \cdot \left(\frac{x^3}{6} - L \cdot \frac{x^2}{2}\right)}{E \cdot J_z} = \frac{-F \cdot x^2 \cdot (x - 3 \cdot L)}{6 \cdot E \cdot J_z}$$

Nel punto A lo spostamento e la rotazione valgono:

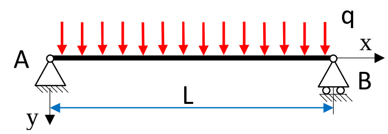
$$v(x = L) = \frac{-F \cdot \left(\frac{L^3}{6} - L \cdot \frac{L^2}{2}\right)}{E \cdot J_z} = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot J_z}$$

$$\vartheta(x = L) = \frac{-F \cdot \left(\frac{L^2}{2} - L \cdot L\right)}{E \cdot J_z} = \frac{F \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot J_z}$$



Linea elastica, scalata per la rappresentazione grafica

Esercizio N.2
La trave prismatica semplicemente appoggiata AB porta un carico uniformemente distribuito q per unità di lunghezza. Determinare l'equazione della linea elastica e lo spostamento massimo della trave.



Soluzione

Ricordiamo l'equazione della linea elastica: $E \cdot J_z \cdot \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -M(x)$ dove l'asse x coincide con l'asse della trave, lo spostamento v(x) è orientato come l'asse y verso il basso e l'asse z è orizzontale e passa per il baricentro della sezione trasversale della trave. La reazione verticale nel punto A vale ql/2 e l'equazione del momento flettente è la seguente:

$$M(x) = \frac{q \cdot L}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = \frac{q \cdot x}{2} \cdot (L - x)$$

Integrando una prima volta l'equazione della linea elastica otteniamo:

$$E \cdot J_z \cdot \frac{dv(x)}{dx} = E \cdot J_z \cdot \vartheta(x) = \frac{q}{2} \cdot \int (x^2 - L \cdot x) \cdot dx = \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - L \cdot \frac{x^2}{2} + c_1 \right)$$

Integrando una seconda volta otteniamo:

$$E \cdot J_z \cdot v(x) = \int \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - L \cdot \frac{x^2}{2} + c_1 \right) \cdot dx = \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{x^4}{12} - L \cdot \frac{x^3}{6} + c_1 \cdot x + c_2 \right)$$

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

a) Per x = 0 $\qquad v(x = 0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$

b) Per x = L $\qquad v(x = L) = 0 \rightarrow \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{L^4}{12} - L \cdot \frac{L^3}{6} + c_1 \cdot L \right) = 0$

da cui: $\qquad c_1 = \frac{L^3}{6} - \frac{L^3}{12} = \frac{L^3}{12}$

Di conseguenza, l'equazione della linea elastica è la seguente:

$$v(x) = \frac{\frac{q}{2} \cdot \left(\frac{x^4}{12} - L \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{L^3}{12} \cdot x \right)}{E \cdot J_z}$$

Lo spostamento massimo della trave si ha nel punto in cui la tangente alla curva elastica è nulla:

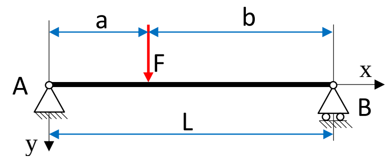
$$\frac{dv(x)}{dx} = \vartheta(x) = \frac{\frac{q}{2} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - L \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{L^3}{12} \right)}{E \cdot J_z} = 0$$

E' necessario trovare gli zeri del polinomio: $\quad y = 4 \cdot x^3 - 6 \cdot L \cdot x^2 + L^3$
Uno degli zeri si trova in x = L/2, gli altri sono fuori dalla trave e quindi non hanno alcun significato fisico.
Di conseguenza lo spostamento massimo della trave vale:

$$v(x) = \frac{\frac{q}{2} \cdot \left[\frac{\left(\frac{L}{2}\right)^4}{12} - L \cdot \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^3}{6} + \frac{L^3}{12} \cdot \left(\frac{L}{2}\right) \right]}{E \cdot J_z} = \frac{\frac{q}{2} \cdot \left[\frac{L^4}{192} - \frac{L^4}{48} + \frac{L^4}{24} \right]}{E \cdot J_z} = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot J_z}$$

Esercizio N.3

La trave prismatica semplicemente appoggiata AB mostrata in figura, determinare lo spostamento e la rotazione nel punto di applicazione del carico.



<u>Soluzione</u>

Applicando le equazioni cardiali della statica possiamo calcolare le reazioni verticali negli appoggi A e B:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_B \cdot L - F \cdot a = 0 \rightarrow V_B = \frac{a}{L} \cdot F$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_A + V_B - F = 0 \rightarrow V_A = F - \frac{a}{L} \cdot F = \frac{b}{L} \cdot F$$

Nel tratto: $0 \leq x \leq a$ l'equazione del momento flettente è la seguente:

$$M_z = V_A \cdot x = \frac{b}{L} \cdot F \cdot x$$

Poniamo in B l'origine di un sistema di riferimento orientato verso sinistra, di coordinate t-y.
Nel tratto: $0 \leq t \leq b$ l'equazione del momento flettente è la seguente:

$$M_z = V_B \cdot t = \frac{a}{L} \cdot F \cdot t$$

Integrando una prima volta l'equazione della linea elastica nel tratto $0 \leq x \leq a$ otteniamo:

$$E \cdot J_z \cdot \frac{dv(x)}{dx} = E \cdot J_z \cdot \vartheta(x) = -\frac{b}{L} \cdot F \cdot \int x \cdot dx = -\frac{b}{L} \cdot F \cdot \left(\frac{x^2}{2} + c_1\right)$$

Integrando una seconda volta otteniamo:

$$E \cdot J_z \cdot v(x) = -\frac{b}{L} \cdot F \cdot \int \left(\frac{x^2}{2} + c_1\right) \cdot dx = -\frac{b}{L} \cdot F \cdot \left(\frac{x^3}{6} + c_1 \cdot x + c_2\right)$$

Integrando una prima volta l'equazione della linea elastica nel tratto $0 \leq t \leq b$ otteniamo:

$$E \cdot J_z \cdot \frac{dv(t)}{dt} = E \cdot J_z \cdot \vartheta(t) = -\frac{a}{L} \cdot F \cdot \int t \cdot dt = -\frac{a}{L} \cdot F \cdot \left(\frac{t^2}{2} + c_3\right)$$

Integrando una seconda volta otteniamo:

$$E \cdot J_z \cdot v(t) = -\frac{a}{L} \cdot F \cdot \int \left(\frac{t^2}{2} + c_3\right) \cdot dt = -\frac{a}{L} \cdot F \cdot \left(\frac{t^3}{6} + c_3 \cdot t + c_4\right)$$

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

a) Per x = 0 $\quad v(x=0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$

b) Per t = 0 $\quad v(t=0) = 0 \rightarrow c_4 = 0$

c) Per x = a e t = b $\quad v(x=a) = y(t=b)$ da cui $-\frac{b}{L} \cdot F \cdot \left(\frac{a^3}{6} + c_1 \cdot a\right) = -\frac{a}{L} \cdot F \cdot \left(\frac{b^3}{6} + c_3 \cdot b\right)$

d) Per x = a e t = b $\quad \vartheta(x=a) = -\vartheta(t=b)$ da cui $-\frac{b}{L} \cdot F \cdot \left(\frac{a^2}{2} + c_1\right) = \frac{a}{L} \cdot F \cdot \left(\frac{b^2}{2} + c_3\right)$

Semplificando, possiamo scrivere:

$$\frac{a^2}{6} + c_1 = \frac{b^2}{6} + c_3 \qquad ; \qquad -\frac{a^2 \cdot b}{2} - c_1 \cdot b = \frac{a \cdot b^2}{2} + c_3 \cdot a$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{(b-a)\cdot L}{6} \\ -\frac{a\cdot b\cdot L}{2} \end{Bmatrix}$$

Da cui risulta:

$$c_1 = \frac{\begin{Vmatrix} \frac{(b-a)\cdot L}{6} & -1 \\ -\frac{a\cdot b\cdot L}{2} & a \end{Vmatrix}}{a+b} = \frac{(b-a)\cdot a}{6} - \frac{a\cdot b}{2} = -\frac{a}{6}\cdot(a+2\cdot b)$$

$$c_3 = \frac{\begin{Vmatrix} 1 & \frac{(b-a)\cdot L}{6} \\ b & -\frac{a\cdot b\cdot L}{2} \end{Vmatrix}}{a+b} = -\frac{a\cdot b}{2} - \frac{(b-a)\cdot b}{6} = -\frac{b}{6}\cdot(2\cdot a+b)$$

L'equazione della linea elastica risulta quindi la seguente:

a) per $0 \leq x \leq a$

$$v(x) = \frac{-F\cdot b\cdot x\cdot[x^2-2\cdot a\cdot b-a^2]}{6\cdot L\cdot E\cdot J_z} \quad ; \quad \vartheta(x) = \frac{-F\cdot b\cdot(3\cdot x^2-2\cdot a\cdot b-a^2)}{6\cdot L\cdot E\cdot J_z}$$

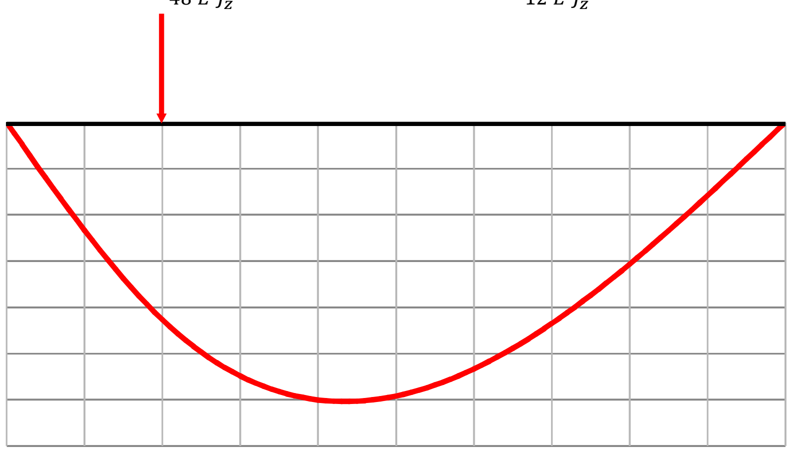
b) per $0 \leq t \leq b$

$$v(t) = \frac{-F\cdot a\cdot t\cdot(t^2-2\cdot a\cdot b-b^2)}{6\cdot L\cdot E\cdot J_z} \quad ; \quad \vartheta(t) = \frac{-F\cdot a\cdot(3\cdot t^2-2\cdot a\cdot b-b^2)}{6\cdot L\cdot E\cdot J_z}$$

In x = a la freccia e la rotazione valgono:

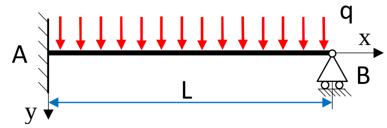
$$y(x=a) = \frac{F\cdot a^2\cdot b^2}{3\cdot L\cdot E\cdot J_z} \quad ; \quad \vartheta(x=a) = \frac{F\cdot a\cdot b}{3\cdot E\cdot J_z}$$

Se a = b = L/2 allora: $y(x=a) = \frac{F\cdot L^3}{48\cdot E\cdot J_z}$; $\vartheta(x=a) = \frac{F\cdot L^2}{12\cdot E\cdot J_z}$



Linea elastica, scalata per la rappresentazione grafica

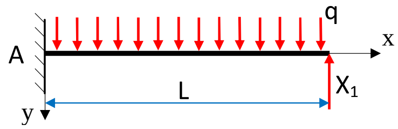
Esercizio N.4
Determinare le reazioni nei vincoli per la trave prismatica di figura.



Soluzione
La trave è una volta iperstatica: per calcolare le reazioni a terra non possiamo considerarla indeformabile.

Possiamo immaginare di eliminare i vincoli sovrabbondanti (in questo caso uno solo) rendendo la struttura isostatica: eseguendo questa operazione è necessario evitare di renderla labile. Dove sono stati eliminati i vincoli è necessario aggiungere le corrispondenti reazioni incognite X_i. Non esiste una sola procedura: per esempio in questo esercizio possiamo eliminare il carrello nel punto B, oppure possiamo consentire la rotazione in A sostituendo all'incastro una cerniera a terra. Chiaramente la soluzione finale sarà identica.

Vediamo la prima procedura.
Calcoliamo le reazioni a terra utilizzando le equazioni cardinali della statica:



$$\sum F_x = H_A = 0$$
$$\sum F_y = q \cdot L - V_A - X_1 = 0$$

da cui ricaviamo:

$$V_A = q \cdot L - X_1 \text{diretta verso l'alto}$$

$$\sum M = M_A - \frac{q \cdot L^2}{2} + X_1 \cdot L = 0 \quad \text{, (con } M_A \text{ antioraria)}$$

da cui ricaviamo: $M_A = \frac{q \cdot L^2}{2} - X_1 \cdot L$

Calcoliamo l'equazione dei momenti flettenti: $M(x) + \frac{q \cdot x^2}{2} + M_A - V_A \cdot x = 0$
da cui:

$$M(x) = -\frac{q \cdot x^2}{2} - M_A + V_A \cdot x = -\frac{q \cdot x^2}{2} - \left(\frac{q \cdot L^2}{2} - X_1 \cdot L\right) + (q \cdot L - X_1) \cdot x$$

In x = 0 il momento flettente vale :

$$M(x=0) = -\left(\frac{q \cdot L^2}{2} - X_1 \cdot L\right) = M_A$$

In x = L il momento flettente vale :

$$M(x=L) = -\frac{q \cdot L^2}{2} - \frac{q \cdot L^2}{2} + X_1 \cdot L + q \cdot L^2 - X_1 \cdot L = 0$$

L'equazione della linea elastica è la seguente:

$$E \cdot J_z \cdot \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -M(x) = +\frac{q \cdot x^2}{2} + \left(\frac{q \cdot L^2}{2} - X_1 \cdot L\right) - (q \cdot L - X_1) \cdot x$$

Integrando una prima volta otteniamo:

$$E \cdot J_z \cdot \frac{dv(x)}{dx} = E \cdot J_z \cdot \vartheta(x) = \frac{q \cdot x^3}{6} + \left(\frac{q \cdot L^2}{2} - X_1 \cdot L\right) \cdot x - (q \cdot L - X_1) \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$$

Integrando una seconda volta otteniamo:

$$E \cdot J_z \cdot v(x) = \frac{q \cdot x^4}{24} + \left(\frac{q \cdot L^2}{2} - X_1 \cdot L\right) \cdot \frac{x^2}{2} - (q \cdot L - X_1) \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2$$

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

a) Per x = 0 $\quad v(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$

b) Per x = 0 $\quad \vartheta(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$

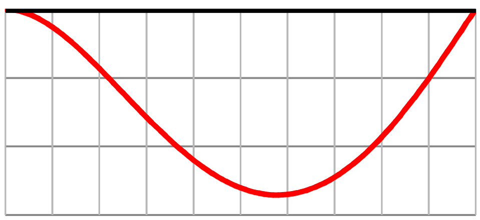
c) Per x = L $\quad E \cdot J_z \cdot v(L) = \frac{q \cdot L^4}{24} + \left(\frac{q \cdot L^2}{2} - X_1 \cdot L\right) \cdot \frac{L^2}{2} - (q \cdot L - X_1) \cdot \frac{L^3}{6} = 0$

Grazie a l'ultima equazione possiamo calcolare l'iperstatica X_1:

$$X_1 = \frac{3}{8} \cdot q \cdot L$$

Di conseguenza, l'equazione della linea elastica è la seguente:

$$v(x) = \frac{2 \cdot q \cdot x^4 - 5 \cdot q \cdot L \cdot x^3 + 3 \cdot q \cdot L^2 \cdot x^2}{48 \cdot E \cdot J_z}$$



Linea elastica, scalata per la rappresentazione grafica

Le reazioni nei vincoli valgono:

$$V_A = q \cdot L - X_1 = \frac{5}{8} \cdot q \cdot L \qquad M_A = \frac{q \cdot L^2}{8}$$

La freccia massima si trova nel punto, tra A e B, in cui si annulla la derivata prima:

$$E \cdot J_z \cdot \vartheta(x) = \frac{q \cdot x^3}{6} + \frac{q \cdot L^2}{8} \cdot x - \frac{5}{16} \cdot q \cdot L \cdot x^2 = 0$$

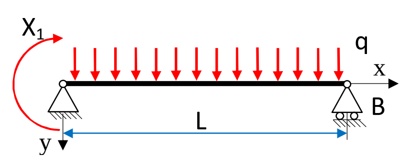
Risolvendo l'equazione troviamo:

$$x(v_{\max}) = \frac{+15 - \sqrt{33}}{16} L \cong 0.5785 \cdot L$$

In corrispondenza di tale coordinata la freccia raggiunge il valore massimo che vale circa: $v_{max} \cong \frac{q \cdot L^4}{184.6 \cdot E \cdot J_z}$

Vediamo la seconda procedura.

Calcoliamo le reazioni a terra utilizzando le equazioni cardinali della statica:



$$\sum F_x = H_A = 0$$

$$\sum M = X_1 + \frac{q \cdot L^2}{2} - V_B \cdot L = 0$$

da cui ricaviamo:

$$V_B = \frac{q \cdot L}{2} + \frac{X_1}{L} \qquad \text{diretta verso l'alto}$$

$$\sum F_y = q \cdot L - V_A - V_B = 0$$

da cui ricaviamo:

$$V_A = q \cdot L - V_B = \frac{q \cdot L}{2} - \frac{X_1}{L}$$

Calcoliamo l'equazione dei momenti flettenti:

$$M(x) + \frac{q \cdot x^2}{2} - X_1 - V_A \cdot x = 0$$

da cui:

$$M(x) = -\frac{q \cdot x^2}{2} + X_1 + V_A \cdot x = -\frac{q \cdot x^2}{2} + X_1 + \left(\frac{q \cdot L}{2} - \frac{X_1}{L}\right) \cdot x$$

In x = 0 il momento flettente vale :

$$M(x=0) = X_1$$

In x = L il momento flettente vale :

$$M(x=L) = -\frac{q \cdot L^2}{2} + X_1 + \left(\frac{q \cdot L}{2} - \frac{X_1}{L}\right) \cdot L \ = 0$$

L'equazione della linea elastica è la seguente:

$$E \cdot J_z \cdot \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -M(x) = +\frac{q \cdot x^2}{2} - X_1 - \left(\frac{q \cdot L}{2} - \frac{X_1}{L}\right) \cdot x$$

Integrando una prima volta otteniamo:

$$E \cdot J_z \cdot \frac{dv(x)}{dx} = E \cdot J_z \cdot \vartheta(x) = \frac{q \cdot x^3}{6} - X_1 \cdot x - \left(\frac{q \cdot L}{2} - \frac{X_1}{L}\right) \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$$

Integrando una seconda volta otteniamo:

$$E \cdot J_z \cdot v(x) = \frac{q \cdot x^4}{24} - X_1 \cdot \frac{x^2}{2} - \left(\frac{q \cdot L}{2} - \frac{X_1}{L}\right) \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2$$

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

a) Per x = 0 $\qquad v(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$

b) Per x = 0 $\qquad \vartheta(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$

c) Per x = L $\qquad v(L) = \frac{q \cdot L^4}{24} - X_1 \cdot \frac{L^2}{2} - \left(\frac{q \cdot L}{2} - \frac{X_1}{L}\right) \cdot \frac{L^3}{6} = 0$

Grazie a l'ultima equazione possiamo calcolare l'iperstatica X_1:

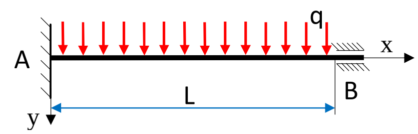
$$X_1 = -\frac{q \cdot L^2}{8}$$

Di conseguenza, l'equazione della linea elastica è la seguente:

$$v(x) = \frac{2 \cdot q \cdot x^4 - 5 \cdot q \cdot L \cdot x^3 + 3 \cdot q \cdot L^2 \cdot x^2}{48 \cdot E \cdot J_z} = \frac{q \cdot x^2 \cdot [2 \cdot x^2 - 5 \cdot L \cdot x + 3 \cdot L^2]}{48 \cdot E \cdot J_z}$$

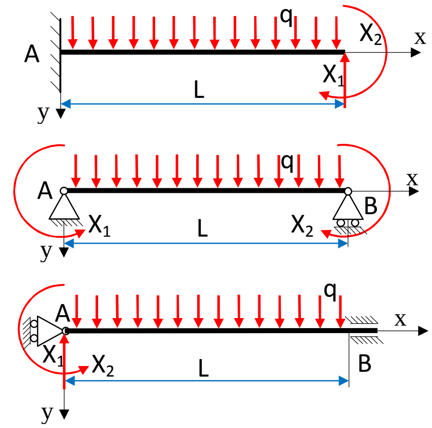
Soluzione identica a quella trovata con la prima procedura.

Esercizi N.5
Per il carico mostrato, determinare (a) l'equazione della linea elastica per la trave a mensola AB, (b) lo spostamento dell'estremità libera, (c) la rotazione dell'estremità libera.



<u>Soluzione</u>
La trave è due volte iperstatica: per calcolare le reazioni a terra non possiamo considerarla indeformabile.

Possiamo immaginare di eliminare i vincoli sovrabbondanti (in questo caso due) rendendo la struttura isostatica: eseguendo questa operazione è necessario evitare di renderla labile. Osservando il terzo schema (in basso a destra), vediamo che se avessimo inserito il carrello nel nodo A ruotato di 90°, la struttura sarebbe risultata isostatica, ma labile, in quanto non sarebbero impediti gli spostamenti orizzontali.
Dove sono stati eliminati i vincoli è necessario aggiungere le corrispondenti reazioni incognite X_i. Non esiste una sola procedura: per esempio in questo esercizio possiamo utilizzare i tre schemi statici mostrati nelle figure a lato. Chiaramente le tre soluzioni finali dovranno essere identiche.



<u>Vediamo la prima procedura</u>, relativa al primo schema statico mostrato in figura.
Calcoliamo le reazioni a terra utilizzando le equazioni cardinali della statica:

$$\sum F_x = H_A = 0$$
$$\sum F_y = q \cdot L - V_A - X_1 = 0$$
$$\sum M = \frac{q \cdot L^2}{2} - X_1 \cdot L + X_2 - M_A = 0$$

da cui ricaviamo:

$$V_A = q \cdot L - X_1 \qquad \text{diretta verso l'alto}$$
$$M_A = \frac{q \cdot L^2}{2} - X_1 \cdot L + X_2 \qquad \text{diretta in senso antiorario}$$

Calcoliamo l'equazione dei momenti flettenti: $M(x) + \frac{q \cdot x^2}{2} + M_A - V_A \cdot x = 0$ da cui:

$$M(x) = -\frac{q \cdot x^2}{2} - M_A + V_A \cdot x$$

In x = 0 il momento flettente vale : $M(x=0) = M_A$
In x = L il momento flettente vale :

$$M(x=L) = -\frac{q \cdot L^2}{2} - M_A + V_A \cdot L = -\frac{q \cdot L^2}{2} - \left(\frac{q \cdot L^1}{2} - X_1 \cdot L + X_2\right) + (q \cdot L - X_1) \cdot L = X_2$$

L'equazione della linea elastica è la seguente:

$$E \cdot J_z \cdot \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -M(x) = \frac{q \cdot x^2}{2} - V_A \cdot x + M_A$$

Integrando una prima volta otteniamo: $E \cdot J_z \cdot \frac{dv(x)}{dx} = E \cdot J_z \cdot \vartheta(x) = \frac{q \cdot x^3}{6} - V_A \cdot \frac{x^2}{2} + M_A \cdot x + C_1$

Integrando una seconda volta otteniamo: $E \cdot J_z \cdot v(x) = \frac{q \cdot x^4}{24} - V_A \cdot \frac{x^3}{6} + M_A \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

a) Per x = 0 $v(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$

b) Per x = 0 $\vartheta(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$

c) Per x = L $E \cdot J_z \cdot v(L) = \frac{q \cdot L^4}{24} - V_A \cdot \frac{L^3}{6} + M_A \cdot \frac{L^2}{2} = 0$

d) Per x = L $E \cdot J_z \cdot \frac{dv(L)}{dx} = E \cdot J_z \cdot \vartheta(L) = \frac{q \cdot L^3}{6} - V_A \cdot \frac{L^2}{2} + M_A \cdot L = 0$

Semplificando le ultime due equazioni, possiamo scrivere il seguente sistema di due equazioni e due incognite:

$$4 \cdot L \cdot V_A - 12 \cdot M_A = q \cdot L^2$$
$$3 \cdot L \cdot V_A - 6 \cdot M_A = q \cdot L^2$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 4 \cdot L & -12 \\ 3 \cdot L & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_A \\ M_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q \cdot L^2 \\ q \cdot L^2 \end{Bmatrix}$$

da cui:

$$V_A = \frac{\begin{Vmatrix} q \cdot L^2 & -12 \\ q \cdot L^2 & -6 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} 4 \cdot L & -12 \\ 3 \cdot L & -6 \end{Vmatrix}} = \frac{6 \cdot q \cdot L^2}{12 \cdot L} = \frac{q \cdot L}{2} \qquad ; \qquad M_A = \frac{\begin{Vmatrix} 4 \cdot L & q \cdot L^2 \\ 3 \cdot L & q \cdot L^2 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} 4 \cdot L & -12 \\ 3 \cdot L & -6 \end{Vmatrix}} = \frac{q \cdot L^3}{12 \cdot L} = \frac{q \cdot L^2}{12}$$

Ricordando che:

$$V_A = q \cdot L - X_1$$

$$M_A = \frac{q \cdot L^2}{2} - X_1 \cdot L + X_2$$

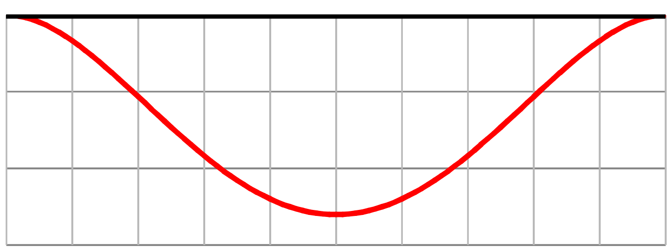
possiamo calcolare le reazioni iperstatiche X_1 e X_2:

$$X_1 = q \cdot L - V_A = q \cdot L - \frac{q \cdot L}{2} = \frac{q \cdot L}{2}$$

$$X_2 = M_A - \frac{q \cdot L^2}{2} + X_1 \cdot L = \frac{q \cdot L^2}{12} - \frac{q \cdot L^2}{2} + \frac{q \cdot L}{2} \cdot L = \frac{q \cdot L^2}{12}$$

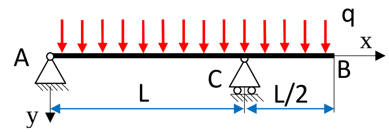
L'equazione della linea elastica risulta la seguente:

$$v(x) = \frac{q \cdot x^4 - 4 \cdot V_A \cdot x^3 + 12 \cdot M_A \cdot x^2}{24 \cdot E \cdot J_z} = \frac{q \cdot x^2}{24 \cdot E \cdot J_z}(x^2 - 2 \cdot L \cdot x + L^2)$$



Linea elastica, scalata per la rappresentazione grafica

Esercizi N.6
Per il carico mostrato, determinare (a) l'equazione della linea elastica per la trave AB, (b) lo spostamento dell'estremità libera, (c) la rotazione dell'estremità libera.



Soluzione
Applicando le equazioni cardiali della statica possiamo calcolare le reazioni verticali negli appoggi A e C:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_C \cdot L - q \cdot \frac{(L+L/2)^2}{2} = 0 \;\rightarrow V_C = \frac{9}{8} \cdot q \cdot L$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_A + V_C - q \cdot (L + L/2) = 0 \rightarrow V_A = \frac{3}{2} \cdot q \cdot L - \frac{9}{8} \cdot q \cdot L = \frac{3}{8} \cdot q \cdot L$$

Nel tratto: $0 \leq x \leq L$ l'equazione del momento flettente è la seguente:

$$M_z = V_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = \frac{3}{8} \cdot q \cdot L \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

Poniamo in B l'origine di un sistema di riferimento orientato verso sinistra, di coordinate t-y.
Nel tratto: $0 \leq t \leq L/2$ l'equazione del momento flettente è la seguente:

$$M_z = -\frac{q \cdot t^2}{2}$$

Integrando una prima volta l'equazione della linea elastica nel tratto $0 \leq x \leq L$ otteniamo:

$$E \cdot J_z \cdot \frac{dv(x)}{dx} = E \cdot J_z \cdot \vartheta(x) = \int \left(\frac{q \cdot x^2}{2} - \frac{3}{8} \cdot q \cdot L \cdot x \right) \cdot dx = \frac{q \cdot x^3}{6} - \frac{3}{16} \cdot q \cdot L \cdot x^2 + C_1$$

Integrando una seconda volta otteniamo:

$$E \cdot J_z \cdot v(x) = \frac{q \cdot x^4}{24} - \frac{1}{16} \cdot q \cdot L \cdot x^3 + C_1 \cdot x + C_2$$

Integrando una prima volta l'equazione della linea elastica nel tratto $0 \leq t \leq L/2$ otteniamo:

$$E \cdot J_z \cdot \frac{dv(t)}{dt} = E \cdot J_z \cdot \vartheta(t) = \frac{q \cdot t^3}{6} + C_3$$

Integrando una seconda volta otteniamo:

$$E \cdot J_z \cdot v(t) = \frac{q \cdot t^4}{24} + C_3 \cdot t + C_4$$

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

a) Per x = 0 $\quad v(x = 0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$

b) Per x = L $\quad v(x = L) = 0 \rightarrow \frac{q \cdot L^4}{24} - \frac{q \cdot L^4}{16} + C_1 \cdot L = 0 \rightarrow C_1 = \frac{q \cdot L^3}{48}$

c) Per t = L/2 $\quad v(t = L/2) = 0 \rightarrow \frac{q \cdot L^4}{24 \cdot 16} + C_3 \cdot \frac{L}{2} + C_4 = 0 \rightarrow C_4 = -\frac{q \cdot L^4}{24 \cdot 16} - C_3 \cdot \frac{L}{2}$

d) Per x = L e t = L/2 $\quad \vartheta(x = L) = -\vartheta(t = L/2)$ da cui $\frac{q \cdot L^3}{6} - \frac{3 \cdot q \cdot L^3}{16} + \frac{q \cdot L^3}{48} = -\frac{q \cdot L^3}{48} - C_3$

Dalle ultime due equazioni risulta:

$$C_3 = \frac{-q \cdot L^3}{48} \quad ; \quad C_4 = \frac{q \cdot L^4}{128}$$

L'equazione della linea elastica risulta quindi la seguente:

a) per $0 \leq x \leq L$

$$v(x) = \frac{2 \cdot q \cdot x^4 - 3 \cdot q \cdot L \cdot x^3 + q \cdot L^3 \cdot x}{48 \cdot E \cdot J_z} \quad ; \quad \vartheta(x) = \frac{8 \cdot q \cdot x^3 - 9 \cdot q \cdot L \cdot x^2 + q \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot J_z}$$

b) per $0 \leq t \leq L/2$

$$v(t) = \frac{16 \cdot q \cdot t^4 - 8 \cdot q \cdot L^3 \cdot t + 3 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot J_z} \quad ; \quad \vartheta(t) = \frac{8 \cdot q \cdot t^3 - q \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot J_z}$$

Nel punto A, dove x = 0 abbiamo:

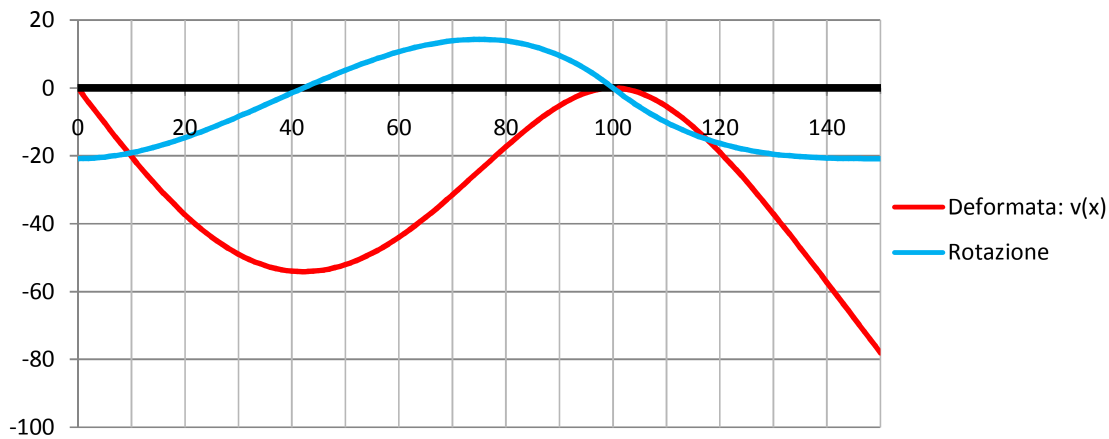
$$v(x=0) = 0 \quad ; \quad \vartheta(x=0) = \frac{q \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot J_z}$$

Nel punto B, dove t = 0 abbiamo:

$$v(t=0) = \frac{q \cdot L^4}{128 \cdot E \cdot J_z} \quad ; \quad \vartheta(t=0) = -\frac{q \cdot L^3}{16 \cdot E \cdot J_z}$$

Nel punto C, dove x = L e t = L/2 abbiamo:

$$v(x=L) = 0 = v(t=L/2) \quad ; \quad \vartheta(x=L) = 0 \quad ; \quad \vartheta(t=L/2) = 0$$



Linea elastica e rotazione, scalate per la rappresentazione grafica