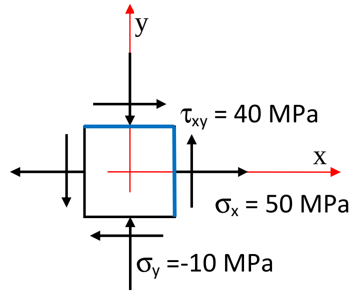
Esercizio N.1
Per lo stato di tensione piana mostrato in figura, determinare (a) i piani principali, (b) le tensioni principali, (c) la massima tensione tangenziale e la corrispondente tensione normale.

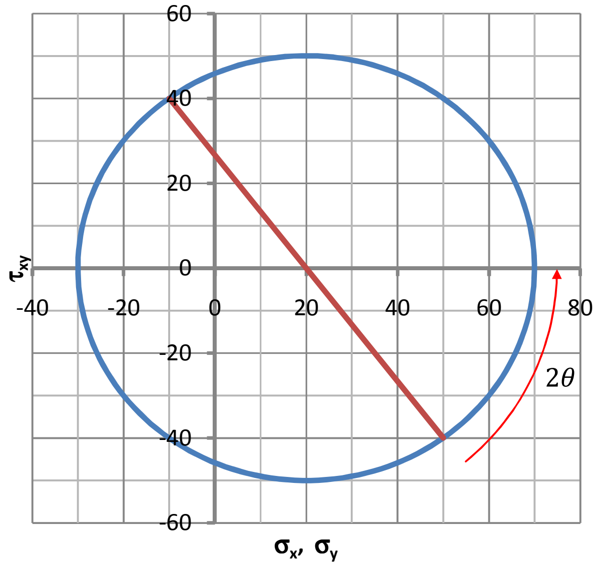


<u>Soluzione</u>
Prima di disegnare il cerchio di Mohr è necessario stabilire i segni da attribuire alle sollecitazioni che agiscono sul cubetto. Definiamo positivi gli sforzi che, sulle facce colorate di blu nel disegno al lato, agiscono nella direzione positiva degli assi coordinati x ed y.

Nel caso in esame, sulla faccia la cui normale è orientata come l'asse x, agiscono gli sforzi (50 ; 40);
sulla faccia la cui normale è orientata come l'asse y, agiscono gli sforzi (-10 ;40).
Il tensore degli sforzi che agisce sul cubetto è dunque il seguente:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 40 \\ 40 & -10 \end{bmatrix}$$

Per disegnare il cerchio di Mohr delle sollecitazioni riportiamo due punti nel diagramma (σ;τ), il primo di coordinate (σ_y;τ_{xy}) = (–10;40), il secondo di coordinate (σ_x;–τ_{xy}) = (50;–40): i due punti saranno disposti lungo un diametro del cerchio perché gli sforzi che rappresentano agiscono su due facce ortogonali.



Il centro del cerchio si trova nel punto di coordinate: $(\sigma;\tau)_c = \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2};0\right)_c = \left(\frac{50-10}{2};0\right)_c = (20;0)_c$

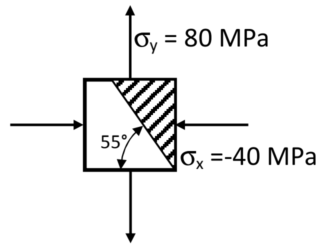
Il raggio del cerchio vale: $R = \tau_{xy}(max) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{50-(-10)}{2}\right)^2 + 40^2} = 50\ [MPa]$

Gli sforzi principali valgono: $\sigma_{1,2} = \sigma_c \pm R = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{Bmatrix} +70 \\ -30 \end{Bmatrix}\ [MPa]$

ed agiscono su due giaciture ruotate in senso antiorario (positivo) di $\theta = \frac{1}{2}\cdot arctan\left(\frac{2\cdot\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}\right) = 26.6°$ rispetto alle giaciture originali, perpendicolari rispettivamente all'asse x ed all'asse y.

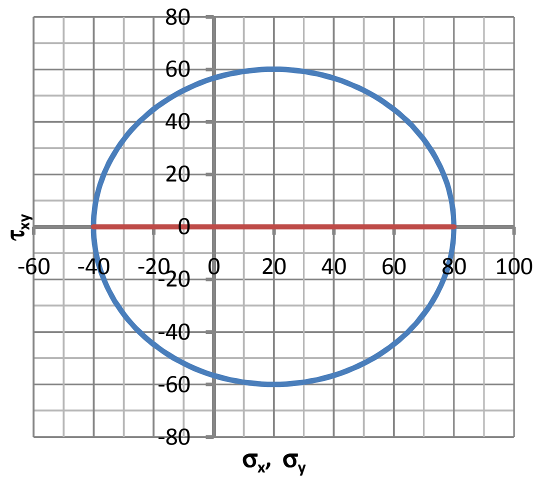
Esercizio N.2

Per lo stato tensionale dato, determinare le tensioni normali e tangenziali esercitate sulla faccia obliqua dell'elemento triangolare evidenziato.



Soluzione

Disegniamo il cerchio di Mohr delle sollecitazioni riportando nel piano degli sforzi due punti, disposti lungo un suo diametro, di coordinate rispettivamente (-40; 0) e (80; 0).



Il centro del cerchio si trova nel punto di coordinate:

$$(\sigma;\tau)_c = \left(\frac{-40+80}{2};0\right)_c = (20;0)_c$$

mentre il suo raggio vale:

$$R = \sqrt{\left(\frac{-40-80}{2}\right)^2} = 60\ [MPa]$$

Per sapere quanto valgono gli sforzi su una qualsiasi giacitura la cui normale è inclinata di θ gradi rispetto all'asse x è necessario applicare la formula seguente:

$$\sigma_n(\theta) = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot cos(2\cdot\theta) + \tau_{xy}\cdot sin(2\cdot\theta)$$

$$\tau_{nt}(\theta) = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot sin(2\cdot\theta) + \tau_{xy}\cdot cos(2\cdot\theta)$$

Nel caso specifico, in cui risulta θ = 90° – 55° = 35°, antiorario, abbiamo:

$$\sigma_n(\theta) = \frac{-40+80}{2} + \frac{-40-80}{2}\cdot cos(2\cdot 35°) = -0.521\ [MPa]$$

$$\tau_{nt}(\theta) = -\frac{-40-80}{2}\cdot sin(2\cdot 35°) = 56.38\ [MPa]$$

In alternativa, possiamo lavorare sul tensore degli sforzi e calcolare l'azione sul piano inclinato che deve poi essere proiettata in direzione della normale al piano inclinato per avere le $\sigma_n(\theta)$ e in direzione parallela al piano inclinato per avere le $\tau_{nt}(\theta)$.

Il versore normale al piano inclinato indicato in figura ha coordinate: $\bar{n} = \begin{Bmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} cos(35) \\ sin(35) \end{Bmatrix}$

Il tensore degli sforzi è il seguente: $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix}$

Le sollecitazioni che agiscono sul piano inclinato valgono:

$$\{\sigma\}_n = [\sigma] \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} cos(35) \\ sin(35) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -40 \cdot cos(35) \\ 80 \cdot sin(35) \end{Bmatrix}$$

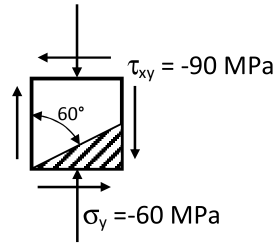
La tensione normale al piano inclinato vale:

$$\sigma_n = \bar{n}^T \cdot [\sigma] \cdot \bar{n} = \{cos(\theta) \quad sin(\theta)\} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{Bmatrix} = -40 \cdot cos^2(35) + 80 \cdot sin^2(35)$$
$$= -0.521\ [MPa]$$

Per calcolare la tensione tangenziale, bisogna premoltiplicare il vettore $\{\sigma\}_n$ per la trasposta del versore normale a $\bar{n}$:

$$\tau_{nt} = \bar{n}_p^T \cdot [\sigma] \cdot \bar{n} = \{-sin(\theta) \quad cos(\theta)\} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{Bmatrix}$$
$$= 40 \cdot sin(35) \cdot cos(35) + 80 \cdot sin(35) \cdot cos(35) = 56.38\ [MPa]$$

Esercizio N.3
Per lo stato tensionale dato, determinare le tensioni normali e tangenziali esercitate sulla faccia obliqua dell'elemento triangolare evidenziato.



<u>Soluzione</u>
In questo caso θ =-60° quindi il versore normale al piano inclinato ha coordinate:

$$\bar{n} = \begin{Bmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} cos(-60) \\ sin(-60) \end{Bmatrix}$$

Il tensore degli sforzi è il seguente: $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -90 \\ -90 & -60 \end{bmatrix}$

Le sollecitazioni che agiscono sul piano inclinato valgono:

$$\{\sigma\}_n = [\sigma] \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} 0 & -90 \\ -90 & -60 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} cos(-60) \\ sin(-60) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -90 \cdot sin(-60) \\ -90 \cdot cos(-60) - 60 \cdot sin(-60) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 45 \cdot \sqrt{3} \\ -45 + 30 \cdot \sqrt{3} \end{Bmatrix}$$

La tensione normale al piano inclinato vale:

$$\sigma_n = \bar{n}^T \cdot [\sigma] \cdot \bar{n} = \{cos(\theta) \quad sin(\theta)\} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 45 \cdot \sqrt{3} \\ -45 + 30 \cdot \sqrt{3} \end{Bmatrix} =$$
$$= 22.5 \cdot \sqrt{3} + 22.5 \cdot \sqrt{3} - 30 \cdot \frac{3}{2} = 32.9\ [MPa]$$

Per calcolare la tensione tangenziale, bisogna premoltiplicare il vettore $\{\sigma\}_n$ per la trasposta del versore normale a $\bar{n}$:

$$\tau_{nt} = \bar{n}_p^T \cdot [\sigma] \cdot \bar{n} = \{-sin(\theta) \quad cos(\theta)\} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 45 \cdot \sqrt{3} \\ -45 + 30 \cdot \sqrt{3} \end{Bmatrix} =$$
$$= 45 \cdot \frac{3}{2} - 22.5 + 15 \cdot \sqrt{3} = 71\ [MPa]$$

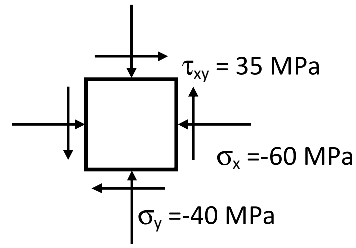
In altri termini le equazioni da applicare sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \sigma_n = \bar{n}^T \cdot [\sigma] \cdot \bar{n} &= \{cos(\theta) \quad sin(\theta)\} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{Bmatrix} \\ &= \{cos(\theta) \quad sin(\theta)\} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \cdot cos(\theta) + \tau_{xy} \cdot sin(\theta) \\ \tau_{xy} \cdot cos(\theta) + \sigma_y \cdot sin(\theta) \end{Bmatrix} \\ &= \sigma_x \cdot cos^2(\theta) + \sigma_y \cdot sin^2(\theta) + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot sin(\theta) \cdot cos(\theta) \\ &= -60 \cdot sin^2(-60) - 2 \cdot 90 \cdot sin(-60) \cdot cos(-60) = -60 \cdot \frac{3}{4} + 180 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= 32.9\ [MPa] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{nt} = \bar{n}_p^T \cdot [\sigma] \cdot \bar{n} &= \{-sin(\theta) \quad cos(\theta)\} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{Bmatrix} \\ &= \{-sin(\theta) \quad cos(\theta)\} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \cdot cos(\theta) + \tau_{xy} \cdot sin(\theta) \\ \tau_{xy} \cdot cos(\theta) + \sigma_y \cdot sin(\theta) \end{Bmatrix} \\ &= (\sigma_y - \sigma_x) \cdot sin(\theta) \cdot cos(\theta) + \tau_{xy} \cdot [cos^2(\theta) - sin^2(\theta)] \\ &= -60 \cdot sin(-60) \cdot cos(-60) - 90 \cdot [cos^2(-60) - sin^2(-60)] \\ &= 60 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - 90 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = 15 \cdot \sqrt{3} + 45 = 71\ [MPa] \end{aligned}$$

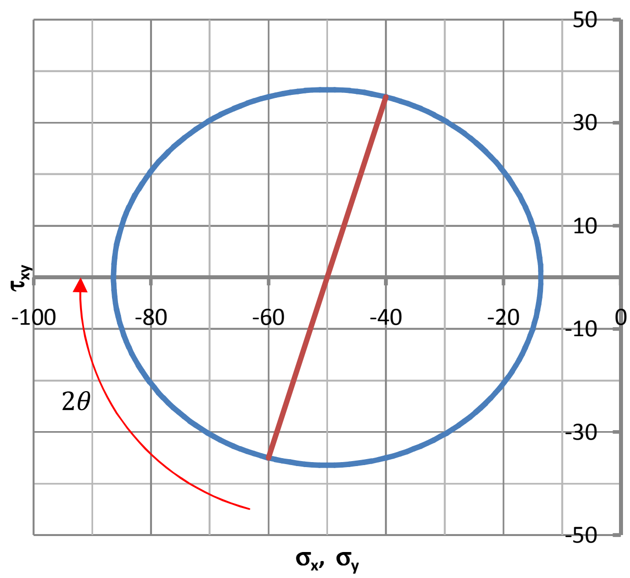
Esercizio N.4

Per il dato stato di tensione, determinare (a) i piani principali, (b) le tensioni principali, (c) l'orientamento dei piani di massima tensione tangenziale "nel piano", (d) la massima tensione tangenziale "nel piano", (e) la tensione normale corrispondente.



Soluzione

Disegniamo il cerchio di Mohr delle sollecitazioni riportando nel piano degli sforzi due punti, disposti lungo un suo diametro, di coordinate rispettivamente $(\sigma_y;\tau_{xy}) = (-40; +35)$ e $(\sigma_x;-\tau_{xy}) = (-60; -35)$.



Il centro del cerchio si trova nel punto di coordinate:

$$(\sigma;\tau)_c = \left(\frac{-60-40}{2};0\right)_c = (-50;0)_c$$

mentre il suo raggio vale:

$$R = \sqrt{\left(\frac{-60-(-40)}{2}\right)^2 + 35^2} = 36.4\ [MPa]$$

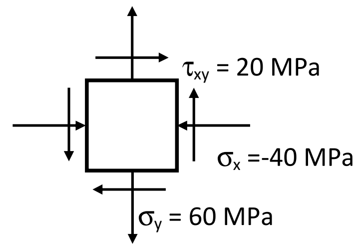
Gli sforzi principali valgono: $\sigma_{1,2} = \sigma_c \pm R = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{Bmatrix} -13.6 \\ -86.4 \end{Bmatrix}\ [MPa]$

ed agiscono su due giaciture ruotate in senso orario (negativo) di $\theta = \frac{1}{2}\cdot arctan\left(\frac{2\cdot\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}\right) = -37.03°$ rispetto alle giaciture originali, perpendicolari rispettivamente all'asse x ed all'asse y.

La massima tensione tangenziale "nel piano" x-y vale: $R = \tau_{xy}(max) = 36.4\ [MPa]$ e la corrispondente tensione normale vale: $\sigma_c = -50\ [MPa]$

Esercizio N.5

Per il dato stato di tensione, determinare le tensioni normali e tangenziali dopo che l'elemento mostrato sia stato fatto ruotare di
(a) 25° in senso orario,
(b) 10° in senso antiorario.



Soluzione

Nel caso in cui θ sia uguale a -25° abbiamo:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x \cdot cos^2(\theta) + \sigma_y \cdot sin^2(\theta) + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot sin(\theta) \cdot cos(\theta) \\ &= -40 \cdot cos^2(-25°) + 60 \cdot sin^2(-25°) + 2 \cdot 20 \cdot sin(-25°) \cdot cos(-25°) \\ &= -37.46[MPa]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{nt} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cdot sin(\theta) \cdot cos(\theta) + \tau_{xy} \cdot [cos^2(\theta) - sin^2(\theta)] \\ &= [60 - (-40)] \cdot sin(-25°) \cdot cos(-25°) + 20 \cdot [cos^2(-25°) - sin^2(-25°)] \\ &= -25.45\ [MPa]\end{aligned}$$

Nel caso in cui θ sia uguale a 10° abbiamo:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x \cdot cos^2(\theta) + \sigma_y \cdot sin^2(\theta) + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot sin(\theta) \cdot cos(\theta) \\ &= -40 \cdot cos^2(10°) + 60 \cdot sin^2(10°) + 2 \cdot 20 \cdot sin(10°) \cdot cos(10°) = -30.1\ [MPa]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{nt} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cdot sin(\theta) \cdot cos(\theta) + \tau_{xy} \cdot [cos^2(\theta) - sin^2(\theta)] \\ &= [60 - (-40)] \cdot sin(10°) \cdot cos(10°) + 20 \cdot [cos^2(10°) - sin^2(10°)] = 35.9\ [MPa]\end{aligned}$$

Il cerchio di Mohr risulta il seguente: