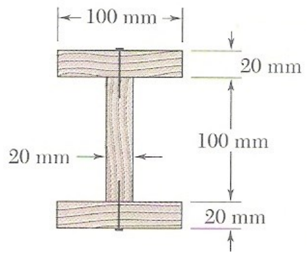
Esercizio N.1
Una trave è fabbricata con tre tavole di legno di sezione trasversale 20 mm x 100 mm, inchiodate l'una all'altra. Sapendo che lo spazio tra i chiodi è di 25 mm e che il taglio verticale nella trave è T = 500 N, determinare la forza di taglio in ciascun chiodo.



Soluzione
Ricordiamo la formula che lega la forza verticale di taglio alla distribuzione degli sforzi di taglio:

$$\tau_{xy} = \frac{T \cdot S_z(y)}{b(y) \cdot I_z}$$

dove $S_z(y)$ indica il momento statico dell'area al di sopra della coordinata y, calcolato rispetto all'asse neutro z; b(y) indica la larghezza della trave alla coordinata y, I_z indica il momento principale d'inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse orizzontale z.

Poiché l'ala è unita all'anima della trave per mezzo dei chiodi, è necessario calcolarne il momento statico rispetto all'asse neutro.

$$S_z(y = \pm 50) = A(ala) \cdot y_g(ala) = (100 \cdot 20) \cdot (50 + 10) = 120000\ [mm^3]$$

Il momento principale d'inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse orizzontale z vale:

$$I_z = 2 \cdot [I_z(ala) + A(ala) \cdot d^2] + I_z(anima)$$

Il momento principale d'inerzia dell'ala rispetto al proprio asse baricentrico orizzontale vale:

$$I_z(ala) = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{100 \cdot 20^3}{12} = 66666.\overline{6}\ [\mathrm{mm}^4]$$

Il momento principale d'inerzia dell'anima rispetto al proprio asse baricentrico orizzontale (che coincide con l'asse baricentrico dell'intera sezione) vale:

$$I_z(anima) = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{20 \cdot 100^3}{12} = 1666666.\overline{6}\ [\mathrm{mm}^4]$$

Il momento principale d'inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse orizzontale z vale:

$$I_z = 2 \cdot [I_z(ala) + A(ala) \cdot d^2] + I_z(anima) = 2 \cdot [66666.\overline{6} + (100 \cdot 20) \cdot (50 + 10)^2] + 1666666.\overline{6} = 16200000\ [mm^4]$$

Di conseguenza lo sforzo di taglio all'altezza del passaggio tra anima e ala, dove agiscono i chiodi, vale:

$$\tau_{xy} = \frac{T \cdot S_z(y)}{b(y) \cdot I_z} = \frac{500 \cdot 120000}{20 \cdot 16200000} = 0.185\ [MPa]$$

Poiché, per l'equilibrio alla rotazione, il tensore degli sforzi è simmetrico, risulta: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

Quindi in direzione x, cioè dell'asse della trave, agisce una forza per unità di lunghezza pari a:

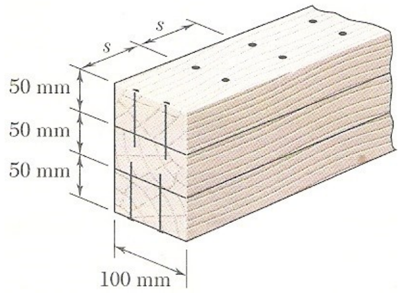
$$H = \tau_{yx} \cdot b(y) = 0.185 * 20 = 3.704\ [N/mm]$$

Poiché tra un chiodo e l'altro ci sono 25 mm, ogni chiodo deve essere in grado di resistere ad una forza pari a:

$$F = H \cdot passo = 3.704 \cdot 25 = 92.6\ [N]$$

Esercizio N.2

Tre tavole da 50 mm x 100 mm sono inchiodate tra loro a formare una trave soggetta ad un taglio verticale di 1500 N. Sapendo che la forza di taglio ammissibile in ciascun chiodo è pari a 400 N, determinare il massimo spazio longitudinale che può essere usato tra ogni paio di chiodi.



Soluzione

Ricordiamo la formula che lega la forza verticale di taglio alla distribuzione degli sforzi di taglio:

$$\tau_{xy} = \frac{T \cdot S_z(y)}{b(y) \cdot I_z}$$

dove $S_z(y)$ indica il momento statico dell'area al di sopra della coordinata y, calcolato rispetto all'asse neutro z; b(y) indica la larghezza della trave alla coordinata y, I_z indica il momento principale d'inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse orizzontale z.

Poiché la tavola superiore è unita per mezzo dei chiodi, è necessario calcolarne il momento statico rispetto all'asse neutro.

$$S_z(y = \pm 25) = A(tavola) \cdot y_g(tavola) = (100 \cdot 50) \cdot (25 + 25) = 250000\ [mm^3]$$

Il momento principale d'inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse orizzontale z vale:

$$I_z = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{100 \cdot 150^3}{12} = 28125000\ [\mathrm{mm}^4]$$

Di conseguenza lo sforzo di taglio all'altezza del passaggio tra le due tavole, dove agiscono i chiodi, vale:

$$\tau_{xy} = \frac{T \cdot S_z(y)}{b(y) \cdot I_z} = \frac{1500 \cdot 250000}{100 \cdot 28125000} = 0.1\overline{3}\ [MPa] = \frac{2}{15}\ [MPa]$$

Poiché, per l'equilibrio alla rotazione, il tensore degli sforzi è simmetrico, risulta: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

Quindi in direzione x, cioè dell'asse della trave, agisce una forza per unità di lunghezza pari a:

$$H = \tau_{yx} \cdot b(y) = \frac{2}{15} * 100 = \frac{40}{3}\ [N/mm]$$

Poiché in ogni fila ci sono due chiodi e tra un chiodo e l'altro c'è una distanza pari a p, ogni chiodo subisce una forza pari a:

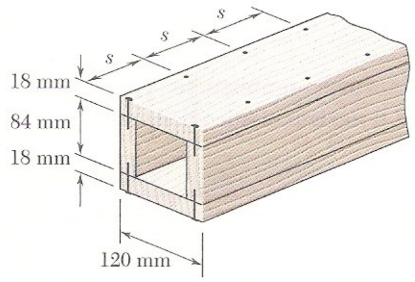
$$F = \frac{H \cdot passo}{N.chiodi} = \frac{(40/3) \cdot p}{2} [N] \leq F_{am} = 400\ [N]$$

da cui

$$p \leq \frac{2 \cdot 400}{(40/3)} = 60\ [mm]$$

Esercizio N.3

Una trave scatolare quadrata è fabbricata con due tavole di 18 mm x 84 mm e due di 18 mm x 120 mm inchiodate tra loro come mostrato. Sapendo che lo spazio tra i chiodi è s = 50 mm e che la forza di taglio ammissibile in ciascun chiodo è di 340 N, determinare (a) il massimo valore ammissibile del taglio verticale nella trave, (b) la corrispondente massima tensione tangenziale nella trave.



Soluzione

Ricordiamo la formula che lega la forza verticale di taglio alla distribuzione degli sforzi di taglio:

$$\tau_{xy} = \frac{T \cdot S_z(y)}{b(y) \cdot I_z}$$

dove $S_z(y)$ indica il momento statico dell'area al di sopra della coordinata y, calcolato rispetto all'asse neutro z; b(y) indica la larghezza della trave alla coordinata y, I_z indica il momento principale d'inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse orizzontale z.

Poiché la tavola superiore è unita per mezzo dei chiodi, è necessario calcolarne il momento statico rispetto all'asse neutro.

$$S_z(y = 42) = A(tavola) \cdot y_g(tavola) = (120 \cdot 18) \cdot (42 + 9) = 110160\ [mm^3]$$

Il momento principale d'inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse orizzontale z vale:

$$I_z = 2 \cdot [I_z(tavola) + A(tavola) \cdot d^2] + 2 \cdot I_z(anima)$$

Il momento principale d'inerzia della tavola rispetto al proprio asse baricentrico orizzontale vale:

$$I_z(tavola) = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{120 \cdot 18^3}{12} = 58320\ [\mathrm{mm}^4]$$

Il momento principale d'inerzia di una delle due anime rispetto al proprio asse baricentrico orizzontale (che coincide con l'asse baricentrico dell'intera sezione) vale:

$$I_z(anima) = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{18 \cdot 84^3}{12} = 889056\ [\mathrm{mm}^4]$$

Il momento principale d'inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse orizzontale z vale:

$$\begin{aligned} I_z &= 2 \cdot [I_z(tavola) + A(tavola) \cdot d^2] + 2 \cdot I_z(anima) \\ &= 2 \cdot [58320 + (120 \cdot 18) \cdot (42 + 9)^2] + 2 \cdot 889056 = 13131072\ [mm^4] \end{aligned}$$

Poiché in ogni sezione trasversale all'asse della trave, nel punto in cui è presente l'unione della tavola superiore alle due anime, agiscono due chiodi, la forza da trasmettere vale:

$$F = \frac{\tau_{yx} \cdot b \cdot s}{N.chiodi} = \frac{\frac{T \cdot S_z(y)}{b(y) \cdot I_z} \cdot b(y) \cdot s}{2} [N] \leq F_{am} = 340\ [N]$$

Di conseguenza il massimo valore ammissibile del taglio verticale nella trave vale:

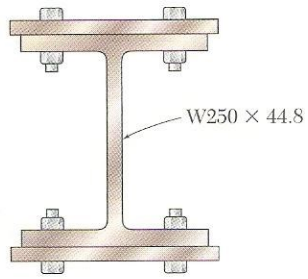
$$T \leq \frac{2 \cdot F_{am} \cdot I_z}{s \cdot S_z(y)} = \frac{2 \cdot 340 \cdot 13131072}{50 \cdot 110160} = 1621\ [N]$$

La corrispondente massima tensione tangenziale nella trave vale:

$$\tau_{xy} = \frac{T \cdot S_z(y)}{b(y) \cdot I_z} = \frac{1621 \cdot 110160}{2 \cdot 18 \cdot 13131072} = 0.378\ [MPa] = \frac{340}{50 \cdot 18}\ [MPa]$$

Esercizio N.4

La trave mostrata è stata rinforzata con due piastre da 12 mm x 175 mm, usando bulloni da 18 mm di diametro, distanziati longitudinalmente di 125 mm. Sapendo che la tensione tangenziale media ammissibile nei bulloni è di 85 MPa, determinare la massima forza verticale di taglio ammissibile.



Soluzione

Ricordiamo la formula che lega la forza verticale di taglio alla distribuzione degli sforzi di taglio:

$$\tau_{xy} = \frac{T \cdot S_z(y)}{b(y) \cdot I_z}$$

dove $S_z(y)$ indica il momento statico dell'area al di sopra della coordinata y, calcolato rispetto all'asse neutro z; b(y) indica la larghezza della trave alla coordinata y, I_z indica il momento principale d'inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse orizzontale z.

Il profilo W250 x 44.8 è normalizzato secondo le norme americane AISI e le sue dimensioni si ricavano dalle tabelle: in particolare la sua altezza H è pari a 266 mm. Poiché la piastra di rinforzo è unita alla trave per mezzo dei chiodi, è necessario calcolarne il momento statico rispetto all'asse neutro.

$$S_z\left(y = \pm\frac{266}{2}\right) = A(piastra) \cdot y_g(piastra) = (175 \cdot 12) \cdot (133 + 6) = 291900\ [mm^3]$$

Il momento principale d'inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse orizzontale z vale:

$$I_z = 2 \cdot [I_z(piastra) + A(piastra) \cdot d^2] + I_z(trave)$$

Il momento principale d'inerzia dell'ala rispetto al proprio asse baricentrico orizzontale vale:

$$I_z(piastra) = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{175 \cdot 12^3}{12} = 25200\ [\mathrm{mm}^4]$$

Il momento principale d'inerzia della trave normalizzata (W250 x 44.8) rispetto al proprio asse baricentrico orizzontale (che coincide con l'asse baricentrico dell'intera sezione) vale: 71.1×10^6 [mm^4].

Il momento principale d'inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse orizzontale z vale:

$$\begin{aligned} I_z &= 2 \cdot [I_z(piastra) + A(piastra) \cdot d^2] + I_z(trave) \\ &= 2 \cdot [25200 + (175 \cdot 12) \cdot (133 + 6)^2] + 71.1 \cdot 10^6 = 152298600\ [mm^4] \end{aligned}$$

Lo sforzo di taglio all'altezza del passaggio tra piastra e trave, dove agiscono i chiodi, vale:

$$\tau_{xy} = \frac{T \cdot S_z(y)}{b(y) \cdot I_z} = \frac{500 \cdot 120000}{20 \cdot 16200000} = 0.185\ [MPa]$$

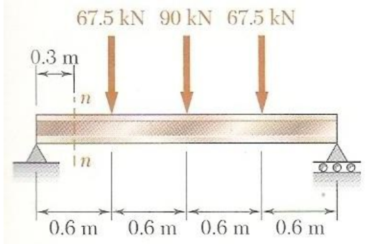
Poiché il tensore degli sforzi è simmetrico, risulta: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ e quindi in direzione x, cioè dell'asse della trave, agisce una forza pari a $F = \tau_{yx} \cdot b(y) \cdot s$ che deve essere presa in carico da due bulloni. Tale forza, divisa per l'area trasversale dei due bulloni deve essere inferiore alla tensione ammissibile pari a 85 MPa.

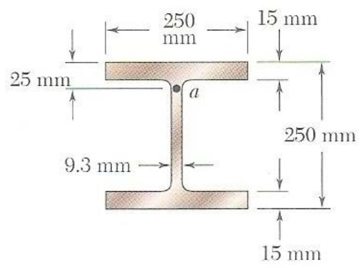
$$\tau_{yx}(bullone) = \frac{F}{2 \cdot A(bullone)} = \frac{\tau_{yx} \cdot b(y) \cdot s}{2 \cdot (\pi \cdot d^2)/4} = \frac{\frac{T \cdot S_z(y)}{b(y) \cdot I_z} \cdot b(y) \cdot s}{2 \cdot (\pi \cdot d^2)/4} \leq \sigma_{am} = 85\ [MPa]$$

da cui:

$$T \leq 85 \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot d^2}{4 \cdot s} \cdot \frac{I_z}{S_z(y)} = 85 \cdot \frac{\pi \cdot 18^2}{2 \cdot 125} \cdot \frac{152298600}{291900} = 180566\ [N] \cong 180.6\ [kN]$$

Esercizio N.5
Per la trave ed il carico mostrati, considerare la sezione n-n e determinare (a) la massima tensione tangenziale in questa sezione, (b) la tensione tangenziale nel punto a.





Soluzione

Per l'equilibrio alla rotazione dell'intera trave intorno al punto B dobbiamo avere:

$$V_a \cdot L - F_1 \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot L\right) - F_2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot L\right) - F_3 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot L\right) = 0$$

da cui, osservando che $F_1 = F_3$:

$$V_a = F_1 + \frac{F_2}{2} = 67.5 + \frac{90}{2} = 112.5\ [kN]$$

Il taglio tra l'appoggio del punto A ed il punto di applicazione della forza F_1 è costante e vale V_a.
Il momento principale d'inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse orizzontale z vale:

$$I_z = 2 \cdot [I_z(ala) + A(ala) \cdot d^2] + I_z(anima)$$

Il momento principale d'inerzia dell'ala rispetto al proprio asse baricentrico orizzontale vale:

$$I_z(ala) = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{250 \cdot 15^3}{12} = 70312.5\ [\text{mm}^4]$$

Il momento principale d'inerzia dell'anima rispetto al proprio asse baricentrico orizzontale (che coincide con l'asse baricentrico dell'intera sezione) vale:

$$I_z(anima) = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{9.3 \cdot (250 - 30)^3}{12} = 8252200\ [\text{mm}^4]$$

Il momento principale d'inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse orizzontale z vale:

$$I_z = 2 \cdot [I_z(ala) + A(ala) \cdot d^2] + I_z(anima) = 2 \cdot [70312.5 + (250 \cdot 15) \cdot (125 - 7.5)^2] + 8252200 = 111939700\ [mm^4]$$

Lo sforzo di taglio massimo si ha in corrispondenza dell'asse baricentrico in cui il momento statico vale:

$$S_z(y = 0) = A(ala) \cdot y_g(ala) + \frac{A(anima)}{2} \cdot y_g(mezza\ anima)$$
$$= (250 \cdot 15) \cdot (125 - 7.5) + \left(9.3 \cdot \frac{250 - 30}{2}\right) \cdot \frac{250 - 30}{4} = 496890\ [mm^3]$$

Di conseguenza lo sforzo di taglio massimo, vale:

$$\tau_{xy} = \frac{T \cdot S_z(y)}{b(y) \cdot I_z} = \frac{112500 \cdot 496890}{9.3 \cdot 111939700} = 53.7\ [MPa]$$

Il momento statico dell'area al di sopra del punto "a" indicato in figura, calcolato rispetto all'asse neutro z vale:

$$S_z(y = 125) = A(ala) \cdot y_g(ala) = (250 \cdot 15) \cdot (125 - 7.5) = 440625\ [mm^3]$$

Di conseguenza lo sforzo di taglio nel punto "a" vale:

$$\tau_{xy} = \frac{T \cdot S_z(y)}{b(y) \cdot I_z} = \frac{112500 \cdot 440625}{9.3 \cdot 111939700} = 47.6[MPa]$$