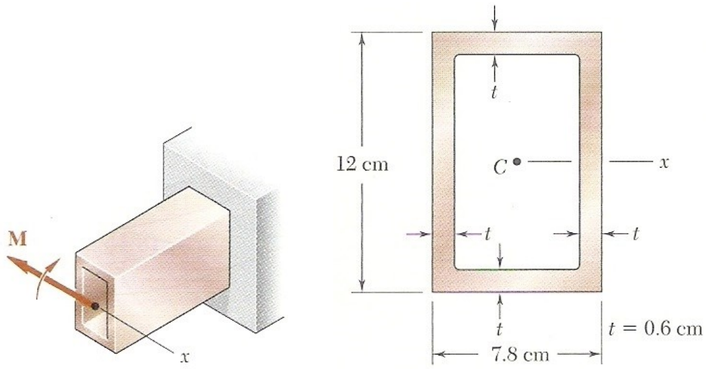
Esercizio N.1

Il tubo rettangolare mostrato è estruso da una lega di alluminio per la quale σ_{sn} = 280 MPa e σ_U = 420 Mpa e E = 74 GPa. Trascurando l'effetto dei raccordi, determinare (a) il momento flettente M per il quale il coefficiente di sicurezza sarà 3.00, (b) il corrispondente raggio di curvatura del tubo.



Soluzione

L'altezza della trave vale H = 120 mm.

Lo sforzo assiale causato dal momento flettente M, vale: $\sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{J_x}$ e diventa massimo nei punti più lontani dall'asse neutro, in cui y = H/2 = 60 mm.

J_x indica il momento principale d'inerzia rispetto all'asse x-x e vale:

$$J_x = J_x(pieno) - J_x(vuoto) = \frac{B \cdot H^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{78 \cdot 120^3}{12} - \frac{(78 - 2 \cdot 6) \cdot (120 - 2 \cdot 6)^3}{12}$$
$$= 4303584\ [mm^4]$$

Il massimo sforzo ammissibile vale: $\sigma_{am} = \frac{\sigma_u}{C.S} = \frac{420}{3} = 140\ [MPa]$

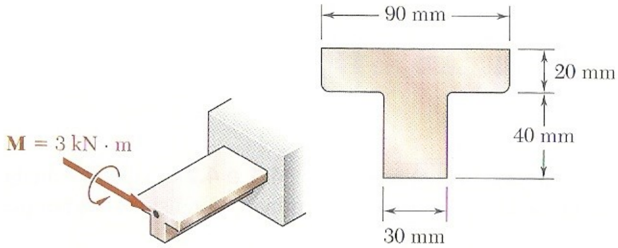
da cui:

$$M_x = \sigma_{am} \cdot \frac{J_x}{H/2} = 140 \cdot \frac{4303584}{60} = 10041696\ [N \cdot mm] \cong 10\ [kN \cdot m]$$

Ricordando che: $\frac{1}{R} = \frac{M_x}{E \cdot J_x}$, il corrispondente raggio di curvatura R del tubo vale:

$$R = \frac{E \cdot J_x}{M_x} = \frac{74000 \cdot 4303584}{10041696} = 31.714\ [m]$$

Esercizio N.2
Un elemento di macchina in ghisa è soggetto alla coppia di 3 kN·m mostrata. Sapendo che E = 165 GPa e trascurando la presenza dei raccordi, determinare (a) le massime tensioni di trazione e compressione nell'elemento, (b) il raggio di curvatura dell'elemento.



Soluzione
Per iniziare è necessario calcolare la posizione del baricentro ed il momento principale d'inerzia dell'intera sezione a T rispetto all'asse orizzontale x-x passante per il baricentro G. Per il calcolo del baricentro, dividiamo la sezione in due aree rettangolari A_1 e A_2 di dimensioni rispettivamente pari a 30 mm x 40 mm e 90 mm x 20 mm.

Rettangolo: area = A_1 = 30 x 40 = 1200 [mm^2]; posizione verticale del baricentro: y_{g1} = 20 mm
Rettangolo: area = A_2 = 90 x 20 = 1800 [mm^2]; posizione verticale del baricentro: y_{g2} = 50 mm
Sezione a T: area = A_{tot} = A_1 + A_2 = 1200 + 1800 = 3000 [mm2];

posizione verticale del baricentro: $y_G = \frac{A_1 \cdot y_{g1} + A_2 \cdot y_{g2}}{A_{tot}} = \frac{1200 \cdot 20 + 1800 \cdot 50}{3000} = 38\ [mm]$

Il momento d'inerzia del rettangolo A_1 rispetto al proprio asse baricentrico orizzontale vale:

$$J_{x1} = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{30 \cdot 40^3}{12} = 160000\ [mm^4]$$

Il momento d'inerzia del rettangolo A_2 rispetto al proprio asse baricentrico orizzontale vale:

$$J_{x2} = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{90 \cdot 20^3}{12} = 60000\ [mm^4]$$

Il momento d'inerzia dell'intera sezione a T rispetto al proprio asse baricentrico orizzontale vale:

$$J_x = J_{x1} + A_1 \cdot \left(y_G - y_{g1}\right)^2 + J_{x2} + A_2 \cdot \left(y_G - y_{g2}\right)^2 =$$
$$= 160000 + 1200 \cdot (38 - 20)^2 + 60000 + 1800 \cdot (38 - 50)^2 = 548800 + 319200 =$$
$$= 868000\ [mm^4]$$

Lo sforzo assiale causato dal momento flettente M, vale: $\sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{J_x}$.
Per convenzione, consideriamo positivi i momenti che tendono le fibre inferiori della trave e poniamo l'asse y verso il basso, con l'origine nel baricentro della sezione a T.

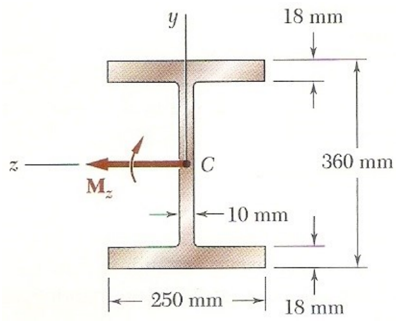
Il massimo sforzo di compressione vale: $\sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{J_x} = \frac{-3000000 \cdot 38}{868000} = -131.3\ [MPa]$
il massimo sforzo di trazione vale: $\sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{J_x} = \frac{-3000000 \cdot (38-60)}{868000} = 76\ [MPa]$

Ricordando che: $\frac{1}{R} = \frac{M_x}{E \cdot J_x}$, il raggio di curvatura R dell'elemento vale:

$$R = \frac{E \cdot J_x}{M_x} = \frac{165000 \cdot 868000}{3000000} = 47.740\ [m]$$

Esercizio N.3

La trave a doppio T mostrata è fabbricata in acciaio inossidabile ad alta resistenza per il quale σ_{sn} = 345 MPa e σ_U = 450 MPa. Usando un fattore di sicurezza CS pari a 3.00, determinare la coppia massima che può essere applicata alla trave quando è inflessa intorno all'asse z. Trascurare l'effetto dei raccordi.



Soluzione

Calcolo del momento principale d'inerzia dell'intera sezione a doppia T intorno all'asse z-z.
Dividiamo l'area in tre rettangoli:

A_1 (anima): B = 10 mm; H = 360 - 2x18 = 324 mm; $A_1 = B \cdot H = 10 \cdot 324 = 3240\ [mm^2]$
A_2; A_3 (ali): B = 250 mm; H = 18 mm; $A_2 = A_3 = B \cdot H = 250 \cdot 18 = 4500\ [mm^2]$

Il momento principale d'inerzia dell'area A_1 intorno al proprio asse baricentrico orizzontale vale:

$$J_{z1} = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{10 \cdot 324^3}{12} = 28343520\ [mm^4]$$

Il momento principale d'inerzia delle aree A_2 e A_3 intorno ai rispettivi assi baricentrici orizzontali vale:

$$J_{z2} = J_{z3} = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{250 \cdot 18^3}{12} = 121500\ [mm^4]$$

Il momento d'inerzia dell'intera sezione a doppia T rispetto al proprio asse baricentrico orizzontale vale:

$$J_z = J_{z1} + J_{z2} + A_2 \cdot \left(y_G - y_{g2}\right)^2 + J_{z3} + A_3 \cdot \left(y_G - y_{g3}\right)^2 =$$
$$= 28343520 + 121500 + 4500 \cdot (180 - 9)^2 + 121500 + 4500 \cdot (180 - 351)^2$$
$$= 28343520 + 2 \cdot 131706000 = 291755520\ [mm^4]$$

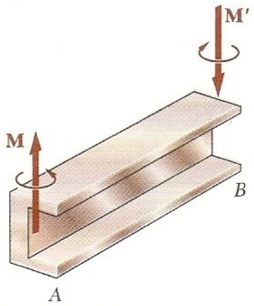
Lo sforzo assiale massimo ammissibile vale:

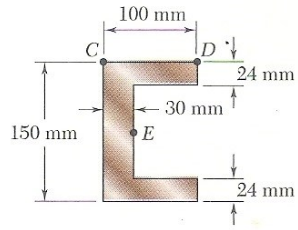
$$\sigma_{am} = \frac{\sigma_u}{C.S} = \frac{450}{3} = 150\ [MPa]$$

La coppia massima che può essere applicata alla trave quando è inflessa intorno all'asse z vale:

$$M_z = \sigma_{am} \cdot \frac{J_z}{H/2} = 150 \cdot \frac{291755520}{360/2} = 243129600\ [N \cdot mm] \cong 243.1\ [kN \cdot m]$$

Esercizio N.4
Due coppie uguali ed opposte di grandezza M = 15 kNm sono applicate alla trave AB mostrata in figura. Osservando che le coppie causano la flessione della trave in un piano verticale determinare la tensione (a) nel punto C, (b) nel punto D, (c) nel punto E.





<u>Soluzione</u>
Per iniziare è necessario calcolare la posizione del baricentro ed il momento principale d'inerzia dell'intera sezione a U rispetto all'asse verticale y-y passante per il baricentro G. Per il calcolo del baricentro, dividiamo la sezione in tre aree rettangolari A_1, A_2 e A_3 delle seguenti dimensioni:

$A_1 = 150 \times 30 = 4500$ [mm^2]; posizione orizzontale del baricentro: $x_{g1} = 15$ [mm]
$A_2 = A_3 = 24 \times 70 = 1680$ [mm^2]; posizione orizzontale del baricentro: $x_{g2} = \frac{30+100}{2} = 65\ [mm]$
$A_{tot} = A_1 + A_2 + A_3 = 4500 + 2x1680 = 7860$ [mm2];

posizione orizzontale del baricentro: $x_G = \frac{A_1 \cdot x_{g1} + A_2 \cdot x_{g2} + A_3 \cdot x_{g3}}{A_{tot}} = \frac{4500 \cdot 15 + 2 \cdot 1680 \cdot 65}{7860} = 36.374\ [mm]$

Il momento d'inerzia del rettangolo A_1 rispetto al proprio asse baricentrico verticale vale:

$$J_{y1} = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{150 \cdot 30^3}{12} = 337500\ [mm^4]$$

Il momento d'inerzia dei rettangoli A_2 e A_3 rispetto ai rispettivi assi baricentrici verticali vale:

$$J_{y2} = J_{y3} = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{24 \cdot 70^3}{12} = 686000\ [mm^4]$$

Il momento d'inerzia dell'intera sezione a U rispetto al proprio asse baricentrico verticale vale:

$$J_y = J_{y1} + A_1 \cdot (x_G - x_{g1})^2 + 2 \cdot \left[J_{y2} + A_2 \cdot (x_G - x_{g2})^2\right] =$$
$$= 337500 + 4500 \cdot (36.374 - 15)^2 + 2 \cdot [686000 + 1680 \cdot (36.374 - 65)^2] =$$
$$= 2393315 + 2 \cdot 2062672 = 6518660.3\ [mm^4]$$

Lo sforzo assiale causato dal momento flettente M, vale: $\sigma_z = \frac{M_y \cdot x}{J_y}$.
Per convenzione consideriamo positivi i momenti che tendono le fibre alla sinistra della trave;
orientiamo l'asse x verso sinistra, con l'origine nel baricentro della sezione a U.

Il punto C si trova in posizione: $x_C = 36.374\ [mm]$;

Il punto D si trova in posizione: $x_D = 36.374 - 100 = -63.626\ [mm]$;

Il punto E si trova in posizione: $x_E = 36.374 - 30 = 6.374\ [mm]$;

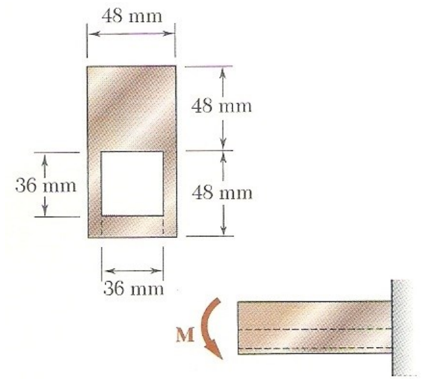
Di conseguenza gli sforzi valgono:

Punto C: $\sigma_z = \frac{M_y \cdot x_C}{J_y} = \frac{15000000 \cdot 36.374}{6518660.3} = 83.7\ [MPa]$

Punto D: $\sigma_z = \frac{M_y \cdot x_D}{J_y} = \frac{15000000 \cdot (-63.626)}{6518660.3} - 146.4\ [MPa]$

Punto E: $\sigma_z = \frac{M_y \cdot x_E}{J_y} = \frac{15000000 \cdot 6.374}{6518660.3} = 14.7\ [MPa]$

Esercizio N.5
Sapendo che per la trave estrusa mostrata, la tensione ammissibile è 120 MPa in trazione e 150 MPa in compressione, determinare la coppia massima M che può essere applicata.



<u>Soluzione</u>
Calcoliamo il baricentro della sezione cava ed il suo momento principale d'inerzia sottraendo dalla sezione piena $A_1 = 48 \times 96$ mm^2, la sezione vuota $A_2 = 36 \times 36$ mm^2.

$\mathrm{A_1} = \mathrm{B \cdot H} = 48 \cdot 96 = 4608\ [\mathrm{mm}^2]$; posizione verticale del baricentro: $y_{g1} = 48\ [mm]$

$\mathrm{A_2} = \mathrm{b \cdot h} = 36 \cdot 36 = 1296\ [\mathrm{mm}^2]$; posizione verticale del baricentro: $y_{g2} = (48 - 36) + \frac{36}{2} = 30\ [mm]$

$\mathrm{A_{tot}} = \mathrm{A_1} - \mathrm{A_2} = 4608 - 1296 = 3312\ [\mathrm{mm}^2]$

Posizione verticale del baricentro della sezione cava: $y_G = \frac{A_1 \cdot y_{g1} - A_2 \cdot y_{g2}}{A_{tot}} = \frac{4608 \cdot 48 - 1296 \cdot 30}{3312} = 55\ [mm]$

Il momento d'inerzia dell'area A_1 rispetto al proprio asse baricentrico orizzontale vale:

$$J_{x1} = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{48 \cdot 96^3}{12} = 3538944\ [mm^4]$$

Il momento d'inerzia dell'area A_2 rispetto al proprio asse baricentrico orizzontale vale:

$$J_{x2} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{36 \cdot 36^3}{12} = 139968\ [mm^4]$$

Il momento d'inerzia dell'intera sezione cava rispetto al proprio asse baricentrico orizzontale vale:

$$J_x = J_{x1} + A_1 \cdot (y_G - y_{g1})^2 - \left[J_{x2} + A_2 \cdot (y_G - y_{g2})^2\right] =$$

$$= 3538944 + 4608 \cdot (55 - 48)^2 - 139968 - 1296 \cdot (55 - 30)^2 = 3764736 - 949968$$

$$= 2814768\ [mm^4]$$

Per convenzione, consideriamo positivi i momenti che tendono le fibre inferiori della trave e poniamo l'asse y verso il basso, con l'origine nel baricentro della sezione cava.

Il massimo sforzo di compressione deve essere inferiore a 150 MPa, quindi:

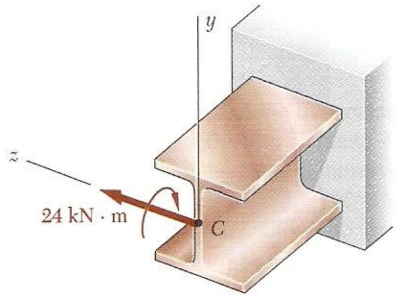
$$\left|\frac{-M_x \cdot y}{J_x}\right| \leq 150 \quad \text{da cui} \quad M_x \leq 150 \cdot \frac{J_x}{y} = 150 \cdot \frac{2814768}{55} = 7676640[N \cdot mm] \cong 7.67[kN \cdot m]$$

Il massimo sforzo di trazione deve essere inferiore a 120 MPa, quindi:

$$\left|\frac{-M_x \cdot y}{J_x}\right| \leq 120 \quad \text{da cui} \quad M_x \leq 120 \cdot \frac{J_x}{y} = 120 \cdot \frac{2814768}{96-55} = 8238345[N \cdot mm] \cong 8.23[kN \cdot m]$$

Di conseguenza la coppia massima M che può essere applicata vale: $M_x \leq 7.67\ [kN \cdot m]$ e tende le fibre superiori.

Esercizio N.6
Una coppia di 24 kNm è applicata alla trave W200 x 46.1 mostrata. (a) Ipotizzando che la coppia sia applicata intorno all'asse z come mostrato, determinare (a) la massima tensione ed il raggio di curvatura della trave, (b) Risolvere il quesito (a) ipotizzando che la coppia sia applicata intorno all'asse y. Usare E = 200 GPa.



Soluzione
Dalla tabella C.1 (Profili ad ali larghe – norme AISI), risulta che la sezione W200 x 46.1 ha le seguenti proprietà:

- Area trasversale: A = 5860 mm^2;
- Altezza: H = 203 mm;
- Larghezza delle ali: B = 203 mm;
- Spessore delle ali: t_a = 11.0 mm;
- Spessore dell'anima: t = 7.2 mm;
- Momento principale d'inerzia intorno all'asse orizzontale: $I_x = 45.5 \times 10^6$ mm^4;
- Momento principale d'inerzia intorno all'asse verticale: $I_y = 15.3 \times 10^6$ mm^4.

La massima tensione vale:

$$\sigma_z(max) = \frac{M_x \cdot y_{max}}{J_x} = \frac{(24 \cdot 10^6) \cdot (203/2)}{45.6 \cdot 10^6} = 53.4\ [MPa]$$

Ricordando che : $\frac{1}{R} = \frac{M_x}{E \cdot J_x}$, il raggio di curvatura vale:

$$R = \frac{E \cdot J_x}{M_x} = \frac{200000 \cdot 45.6 \cdot 10^6}{24 \cdot 10^6} = 380\ [m]$$

Se la coppia fosse applicata intorno all'asse y avremo:

$$\sigma_z(max) = \frac{M_y \cdot x_{max}}{J_y} = \frac{(24 \cdot 10^6) \cdot (203/2)}{15.3 \cdot 10^6} = 159.2\ [MPa]$$

$$R = \frac{E \cdot J_y}{M_y} = \frac{200000 \cdot 15.3 \cdot 10^6}{24 \cdot 10^6} = 127.5\ [m]$$