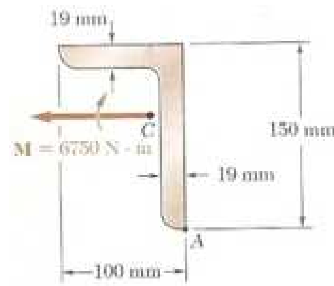
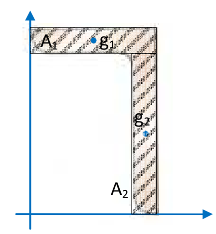
Esercizio N.1 (pag. 281)

La coppia M agisce in un piano verticale passante per l'asse baricentrico di una trave la cui sezione trasversale è mostrata in figura. Determinare la tensione nel punto A.



Soluzione

Per calcolare i momenti principali d'inerzia trascuriamo i raccordi e cerchiamo la posizione del baricentro dell'intera area. Possiamo immaginare la sezione a L come somma di due rettangoli, A_1 di dimensioni 100 x 19 e A_2 di dimensioni 19 x (150-19), oppure differenza di due aree rettangolari, B_1 di dimensioni 100 x 150 e B_2 di dimensioni (100-19) x (150 – 19).



Nel primo caso abbiamo:

Area A1: $\mathrm{A_1 = B \cdot t = 100 \cdot 19 = 1900\ [mm^2]}$

Area A2: $\mathrm{A_2 = t \cdot (H - t) = 19 \cdot (150 - 19) = 2489\ [mm^2]}$

Area totale: $\mathrm{A_{tot} = A_1 + A_2 = 1900 + 2489 = 4389\ [mm^2]}$

Posizione del baricentro dell'area A₁:

$$x_{g_1} = 50\ [\mathrm{mm}]$$
$$y_{g_1} = 150 - 19/2 = 140.5\ [\mathrm{mm}]$$

Posizione del baricentro dell'area A₂:

$$x_{g_2} = 100 - \ (19/2) = 90.5\ [\mathrm{mm}]$$
$$y_{g_2} = (150 - 19)/2 = 65.5\ [\mathrm{mm}]$$

I momenti statici delle due aree rispetto agli assi coordinati x ed y valgono rispettivamente:

Momenti statici dell' area A₁:

$$S_y(A_1) = A_1 \cdot x_{g_1} = 1900 \cdot 50 = 95000\ [\mathrm{mm^3}]$$
$$S_x(A_1) = A_1 \cdot y_{g_1} = 1900 \cdot 140.5 = 266950\ [\mathrm{mm^3}]$$

Momenti statici dell' area A₂:

$$S_y(A_2) = A_2 \cdot x_{g_2} = 2489 \cdot 90.5 = 225254.5\ [\mathrm{mm^3}]$$
$$S_x(A_2) = A_2 \cdot y_{g_2} = 2489 \cdot 65.5 = 163029.5\ [\mathrm{mm^3}]$$

I Momenti Statici dell'area totale valgono:

$$S_y(A_{tot}) = S_y(A_1) + S_y(A_2) = 95000 + \ 225254.5 = 320254.5\ [\mathrm{mm^3}]$$
$$S_x(A_{tot}) = S_x(A_1) + S_x(A_2) = 266950 + \ 163029.5 = 429979.5\ [\mathrm{mm^3}]$$

La posizione del baricentro dell'intera sezione vale:

$$x_G = \frac{S_y(A_{tot})}{A_{tot}} = \frac{320254.5}{4389} = 72.9675 \ \cong 73\ [\mathrm{mm}]$$
$$y_G = \frac{S_x(A_{tot})}{A_{tot}} = \frac{429979.5}{4389} = 97.9675 \cong 98\ [\mathrm{mm}]$$

I momenti principali d'inerzia dell'area A_1 (cioè calcolati rispetto al sistema di riferimento locale la cui origine si trova nel baricentro dell'area A_1) valgono:

$$I_{xx}(A_1) = \frac{B \cdot t^3}{12} = \frac{100 \cdot 19^3}{12} = 57158\ [mm^4]$$
$$I_{yy}(A_1) = \frac{t \cdot B^3}{12} = \frac{19 \cdot 100^3}{12} = 1583333\ [mm^4]$$
$$I_{xy}(A_1) = 0$$

I momenti principali d'inerzia dell'area A_2 valgono:

$$I_{xx}(A_2) = \frac{t \cdot (H-t)^3}{12} = \frac{19 \cdot (150-19)^3}{12} = 3559477.4\ [mm^4]$$

$$I_{yy}(A_2) = \frac{(H-t) \cdot t^3}{12} = \frac{(150-19) \cdot 19^3}{12} = 74877.4\ [mm^4]$$

$$I_{xy}(A_2) = 0$$

I momenti d'inerzia dell'area A_1 calcolati rispetto al sistema di riferimento globale (la cui origine si trova sul baricentro dell'intera sezione) valgono (vedi la Legge di Huygens):

$$I_{xxG}(A_1) = I_{xx}(A_1) + A_1 \cdot (y_G - \mathrm{y_{g_1}})^2 = 57158 + 1900 \cdot (98 - 140.5)^2 = 3489033\ [\mathrm{mm}^4]$$

$$I_{yyG}(A_1) = I_{yy}(A_1) + A_1 \cdot (x_G - \mathrm{x_{g_1}})^2 = 1583333 + 1900 \cdot (73 - 50)^2 = 2588433\ [\mathrm{mm}^4]$$

$$I_{xyG}(A_1) = I_{xy}(A_1) + A_1 \cdot (x_G - \mathrm{x_{g_1}}) \cdot (y_G - \mathrm{y_{g_1}}) = 0 + 1900 \cdot (73 - 50) \cdot (98 - 140.5) = -1857250\ [\mathrm{mm}^4]$$

I momenti d'inerzia dell'area A_2 calcolati rispetto al sistema di riferimento globale (la cui origine si trova sul baricentro dell'intera sezione) valgono:

$$I_{xxG}(A_2) = I_{xx}(A_2) + A_2 \cdot (y_G - \mathrm{y_{g_2}})^2 = 3559477.4 + 2489 \cdot (98 - 65.5)^2 = 6188483.65\ [\mathrm{mm}^4]$$

$$I_{yyG}(A_2) = I_{yy}(A_2) + A_2 \cdot (x_G - \mathrm{x_{g_2}})^2 = 74877.4 + 2489 \cdot (73 - 90.5)^2 = 837133.65\ [\mathrm{mm}^4]$$

$$I_{xyG}(A_2) = I_{xy}(A_2) + A_2 \cdot (x_G - \mathrm{x_{g_2}}) \cdot (y_G - \mathrm{y_{g_2}}) = +0 + 2489 \cdot (73 - 90.5) \cdot (98 - 65.5) = -1415618.75\ [\mathrm{mm}^4]$$

I momenti centrali d'inerzia dell'intera sezione valgono:

$$I_{xxG}(A_1 + A_2) = I_{xxG}(A_1) + I_{xxG}(A_2) = 3489033 + 6188483.65 \cong 9677517\ [\mathrm{mm}^4]$$

$$I_{yyG}(A_1 + A_2) = I_{yyG}(A_1) + I_{yyG}(A_2) = 2588433 + 837133.65 \cong 3425567\ [\mathrm{mm}^4]$$

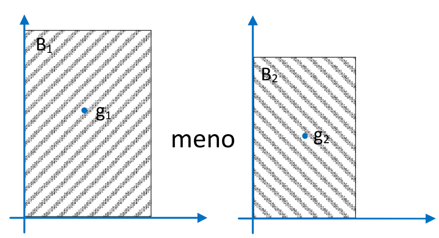
$$I_{xyG}(A_1 + A_2) = I_{xyG}(A_1) + I_{xyG}(A_2) = -1857250 - 1415618.75 \cong -3272869\ [\mathrm{mm}^4]$$

Nel secondo caso abbiamo:

Area B1: $\mathrm{B_1 = B \cdot H = 100 \cdot 150 = 15000\ [mm^2]}$

Area B2: $\mathrm{B_2 = (B - t) \cdot (H - t) = 10611\ [mm^2]}$

Area totale: $\mathrm{B_{tot} = B_1 - B_2 = 15000 - 10611 = 4389\ [mm^2]}$



Posizione del baricentro dell'area B_1:

$$\mathrm{x_{g_1} = 100/2 = 50\ [mm]}$$
$$\mathrm{y_{g_1} = 150/2 = 75\ [mm]}$$

Posizione del baricentro dell'area B_2:

$$\mathrm{x_{g_2} = (100 - 19)/2 = 40.5\ [mm]}$$
$$\mathrm{y_{g_2} = (150 - 19)/2 = 65.5\ [mm]}$$

I momenti statici delle due aree rispetto agli assi coordinati x ed y valgono rispettivamente:

Momenti statici dell' area B_1:

$$\mathrm{S_y(B_1) = B_1 \cdot x_{g_1} = 15000 \cdot 50 = 750000\ [mm^3]}$$
$$\mathrm{S_x(B_1) = B_1 \cdot y_{g_1} = 15000 \cdot 75 = 1125000\ [mm^3]}$$

Momenti statici dell' area B_2:

$$\mathrm{S_y(B_2) = B_2 \cdot x_{g_2} = 10611 \cdot 40.5 = 429745.5\ [mm^3]}$$
$$\mathrm{S_x(B_2) = B_2 \cdot y_{g_2} = 10611 \cdot 65.5 = 695020.5\ [mm^3]}$$

I Momenti Statici dell'area totale valgono:

$$S_y(B_{tot}) = S_y(B_1) - S_y(B) = 750000 - 429745.5 = 320254.5 \; [mm^3]$$
$$S_x(B_{tot}) = S_x(B_1) - S_x(B_2) = 1125000 - 695020.5 = 429979.5 \; [mm^3]$$

La posizione del baricentro dell'intera sezione vale:

$$x_G = \frac{S_y(B_{tot})}{B_{tot}} = \frac{320254.5}{4389} = 73[mm]$$
$$y_G = \frac{S_x(B_{tot})}{B_{tot}} = \frac{429979.5}{4389} = 98 \; [mm]$$

I momenti principali d'inerzia dell'area B_1 rispetto al sistema di riferimento locale valgono :

$$I_{xx}(B_1) = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{100 \cdot 150^3}{12} = 28125000 \; [mm^4]$$
$$I_{yy}(B_1) = \frac{H \cdot B^3}{12} = \frac{150 \cdot 100^3}{12} = 12500000 \; [mm^4]$$
$$I_{xy}(B_1) = 0$$

I momenti principali d'inerzia dell'area B_2 rispetto al sistema di riferimento locale valgono:

$$I_{xx}(B_2) = \frac{(B-t)\cdot(H-t)^3}{12} = \frac{(100-19)\cdot(150-19)^3}{12} = 15174614.25 \; [mm^4]$$
$$I_{yy}(B_2) = \frac{(H-t)\cdot(B-t)^3}{12} = \frac{(150-19)\cdot(100-19)^3}{12} = 5801564.25 \; [mm^4]$$
$$I_{xy}(B_2) = 0.$$

I momenti d'inerzia dell'area B_1 calcolati rispetto al sistema di riferimento globale (la cui origine si trova sul baricentro dell'intera sezione) valgono (vedi la Legge di Huygens):

$$I_{xxG}(B_1) = I_{xx}(B_1) + B_1 \cdot \left(y_G - y_{g_1}\right)^2 = 28125000 + 15000 \cdot (98-75)^2 = 36060000 \; [mm^4]$$
$$I_{yyG}(B_1) = I_{yy}(B_1) + B_1 \cdot \left(x_G - x_{g_1}\right)^2 = 12500000 + 15000 \cdot (73-50)^2 = 20435000 \; [mm^4]$$
$$I_{xyG}(B_1) = I_{xy}(B_1) + B_1 \cdot \left(x_G - x_{g_1}\right) \cdot \left(y_G - y_{g_1}\right) = 0 + 15000 \cdot (73-50) \cdot (98-75) = 7935000 \; [mm^4]$$

I momenti d'inerzia dell'area B_2 calcolati rispetto al sistema di riferimento globale (la cui origine si trova sul baricentro dell'intera sezione) valgono:

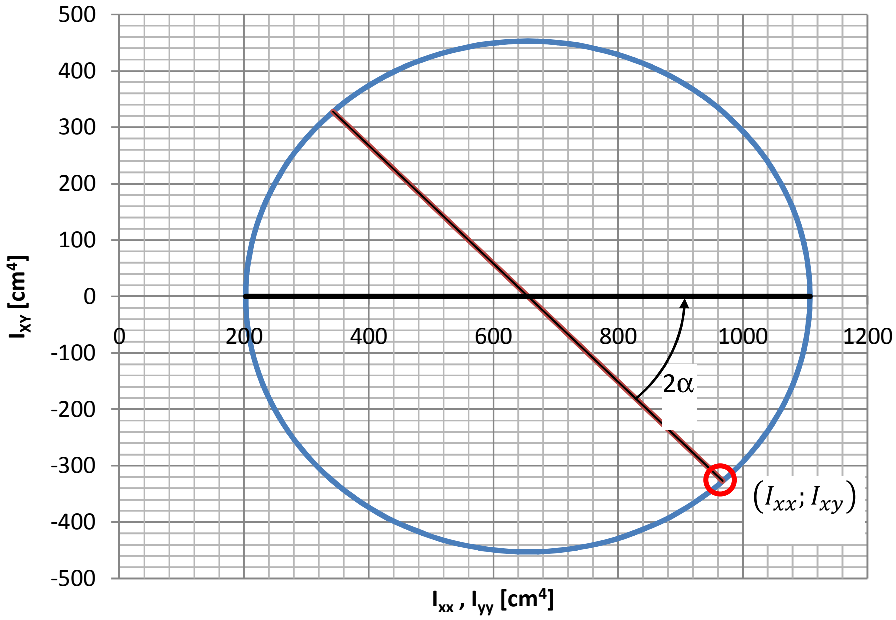
$$I_{xxG}(B_2) = I_{xx}(B_2) + B_2 \cdot \left(y_G - y_{g_2}\right)^2 = 15174614.25 + 10611 \cdot (98-65.5)^2 = 26382483 \; [mm^4]$$
$$I_{yyG}(B_2) = I_{yy}(B_2) + B_2 \cdot \left(x_G - x_{g_2}\right)^2 = 5801564.25 + 10611 \cdot (73-40.5)^2 = 17009433 \; [mm^4]$$
$$I_{xyG}(B_2) = I_{xy}(B_2) + B_2 \cdot \left(x_G - x_{g_2}\right) \cdot \left(y_G - y_{g_2}\right) = +0 + 10611 \cdot (73-40.5) \cdot (98-65.5) = 11207868.75 \; [mm^4]$$

I momenti centrali d'inerzia dell'intera sezione valgono:

$$I_{xxG}(B_1 - B_2) = I_{xxG}(B_1) - I_{xxG}(B_2) = 36060000 - 26382483 = 9677517 \; [mm^4]$$
$$I_{yyG}(B_1 - B_2) = I_{yyG}(B_1) - I_{yyG}(B_2) = 20435000 - 17009433 = 3425567 \; [mm^4]$$
$$I_{xyG}(B_1 - B_2) = I_{xyG}(B_1) - I_{xyG}(B_2) = 7935000 \; - 11207868.75 \cong -3272869 \; [mm^4]$$

Come si può notare i risultati ottenuti con i due metodi coincidono.

Disegniamo il cerchio di Mohr dei momenti d'inerzia.



Per ottenere i momenti principali d'inerzia è necessario ruotare il sistema di riferimento dell'angolo:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot atan\left(\frac{2 \cdot I_{xyG}}{I_{yyG} - I_{xxG}}\right) = \frac{1}{2} \cdot atan\left(\frac{-2 \cdot 3272869}{3425567 - 9677517}\right) = 23.158°$$

Si tratta di una rotazione positiva, cioè antioraria.

Il centro del cerchio di Mohr si trova nel punto di coordinate:

$$\left[\frac{I_{yyG} + I_{xxG}}{2}; 0\right] = \left[\frac{9677517 + 3425567}{2}; 0\right] = [6551542; 0]$$

mentre il suo raggio vale:

$$\sqrt{\left(\frac{I_{yyG} - I_{xxG}}{2}\right)^2 + I_{xyG}^2} = \sqrt{\left(\frac{9677517 - 3425567}{2}\right)^2 + (-3272869)^2} = 4525858$$

Il momento principale d'inerzia più grande vale:

$$I_{xx}(max) = centro + raggio = 6551542 + 4525858 = \ 11077400 \ [\mathrm{mm}^4]$$

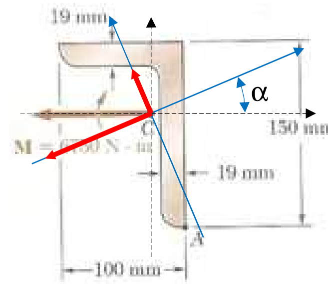
Il momento principale d'inerzia più piccolo vale:

$$I_{yy}(min) = centro - raggio = 6551542 - 4525858 = \ 2025684 \ [\mathrm{mm}^4]$$

Per calcolare gli sforzi nel punto A, dobbiamo proiettare il momento flettente lungo gli assi principali d'inerzia.

$$M_x = M \cdot \cos(\alpha) = 6750000 \cdot \cos(23.158^\circ) = 6206111 \ [N \cdot mm]$$

$$M_y = M \cdot \sin(\alpha) = 6750000 \cdot \sin(23.158^\circ) = 2654559 \ [N \cdot mm]$$



Poiché il punto A, rispetto al sistema di riferimento baricentrico, ha le seguenti coordinate:

$$\begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100-73 \\ -98 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 27 \\ -98 \end{Bmatrix}$$

la sua posizione rispetto al sistema di riferimento ruotato è la seguente:

$$\begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix}_R = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ -sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(23°) & sin(23°) \\ -sin(23°) & \cos(23°) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 27 \\ -98 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -13.7 \\ -100.7 \end{Bmatrix}$$

La tensione nel punto A è la somma del contributo del momento flettente M_x e del momento flettente M_y, che tendono le fibre del punto A (vedi figura):

$$\sigma_z = \frac{M_x \cdot y_A}{I_{xxR}} + \frac{M_y \cdot x_A}{I_{yyR}} = \frac{6206111 \cdot 100.7}{11077400} + \frac{2654559 \cdot 13.7}{2025676} = 56.42 + 17.95 = 74.37\ [MPa]$$

Per definizione, l'asse neutro è il luogo di punti dove si annulla lo sforzo normale agente sulla sezione. Nel nostro caso abbiamo:

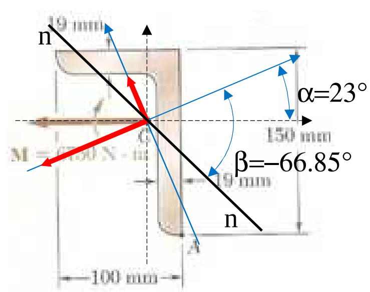
$$\frac{M_x \cdot y_R}{I_{xxR}} + \frac{M_y \cdot x_R}{I_{yyR}} = 0$$

da cui:

$$y_R = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_{xxR}}{I_{yyR}} x_R = \frac{2654559}{6206111} \cdot \frac{11077400}{2025676} \cdot x_R = -2.339 \cdot x_R = \tan\beta \cdot x_R$$

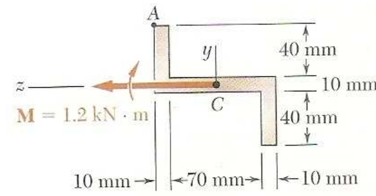
dove le coordinate x_R ed y_R appartengono al sistema di riferimento ruotato e la sua inclinazione vale:

$\beta = arctan(-2.339) = -66.85\,°$.



Esercizio N.2

La coppia M agisce in un piano verticale passante per l'asse baricentrico di una trave la cui sezione trasversale è mostrata in figura. Determinare la tensione nel punto A.



$$\begin{cases} I_{xxG} = 61.42\ [\mathrm{cm}^4] \\ I_{yyG} = 189.42\ [\mathrm{cm}^4] \\ I_{xyG} = -80.00[\mathrm{cm}^4] \end{cases}$$

Soluzione

Per calcolare i momenti principali d'inerzia trascuriamo i raccordi; in oltre dal disegno osserviamo che il baricentro si trova nel punto C.

I Momenti principali d'inerzia dell'intera sezione dipendono dal contributo di tre aree rettangolari, A_1 (10 x 40) a destra del punto C, A_2 (10 x 40) a sinistra del punto C e A_3 (90 x 10) centrata sul punto C.

I momenti principali d'inerzia dell'area A_1 e dell'area A_2 rispetto ai rispettivi assi orizzontali baricentri valgono: $I_{xx}(A_1) = I_{xx}(A_2) = \frac{t \cdot H^3}{12} = \frac{10 \cdot 40^3}{12} = 53333.\overline{3}\ [mm^4]$

I momenti principali d'inerzia dell'area A_1 e dell'area A_2 rispetto ai rispettivi assi verticali baricentri valgono: $I_{yy}(A_1) = I_{yy}(A_2) = \frac{H \cdot t^3}{12} = \frac{40 \cdot 10^3}{12} = 3333.\overline{3}\ [mm^4]$

Il momento principale d'inerzia dell'area A_3 rispetto al proprio asse baricentrico orizzontale vale:

$$I_{xx}(A_3) = \frac{B \cdot t^3}{12} = \frac{90 \cdot 10^3}{12} = 7500\ [mm^4]$$

Il momento principale d'inerzia dell'area A_3 rispetto al proprio asse baricentrico verticale vale:

$$I_{yy}(A_3) = \frac{t \cdot B^3}{12} = \frac{10 \cdot 90^3}{12} = 607500\ [mm^4]$$

I momenti principali d'inerzia misti delle aree A_1 , A_2 e A_3 sono nulli: $I_{xy}(A_1) = I_{xy}(A_2) = I_{xy}(A_3) = 0$

Rispetto al sistema di riferimento globale la cui origine è nel punto C, l'asse x è orientato verso destra e l'asse y è orientato verso l'alto:

a) il baricentro della sezione A_1, vale: $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_{G1} = \begin{Bmatrix} 40 \\ -25 \end{Bmatrix}$

b) il baricentro della sezione A_2, vale: $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_{G2} = \begin{Bmatrix} -40 \\ 25 \end{Bmatrix}$

c) il baricentro della sezione A_3, vale: $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_{G3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

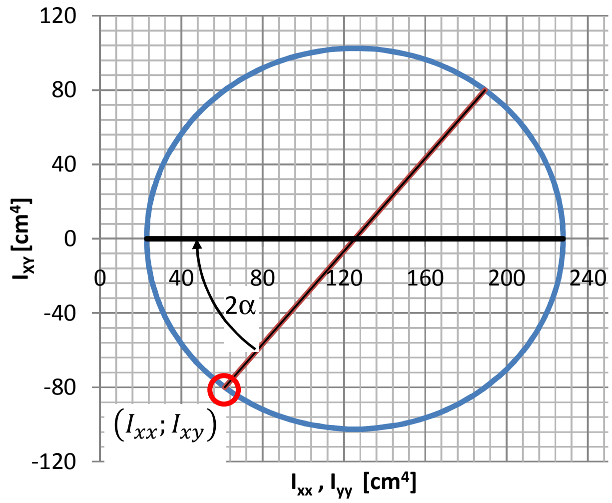
I momenti principali d'inerzia dell'intera sezione valgono:

$$\begin{aligned} I_{xxG} &= I_{xx}(A_1) + A_1 \cdot \left(-\mathrm{y}_{\mathrm{g}_1}\right)^2 + I_{xx}(A_2) + A_2 \cdot \left(-\mathrm{y}_{\mathrm{g}_2}\right)^2 + I_{xx}(A_3) = \\ &= 53333.\overline{3} + 400 \cdot (25)^2 + 53333.\overline{3} + 400 \cdot (-25)^2 + 7500 = 614166.\overline{6}\ [\mathrm{mm}^4] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{yyG} &= I_{yy}(A_1) + A_1 \cdot \left(-\mathrm{x}_{\mathrm{g}_1}\right)^2 + I_{yy}(A_2) + A_2 \cdot \left(-\mathrm{x}_{\mathrm{g}_2}\right)^2 + I_{yy}(A_3) = \\ &= 3333.\overline{3} + 400 \cdot (-40)^2 + 3333.\overline{3} + 400 \cdot (40)^2 + 607500 = 1894166.\overline{6}\ [\mathrm{mm}^4] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{xyG} &= I_{xy}(A_1) + A_1 \cdot \left(x_G - \mathrm{x}_{\mathrm{g}_1}\right) \cdot \left(y_G - \mathrm{y}_{\mathrm{g}_1}\right) + I_{xy}(A_2) + A_2 \cdot \left(x_G - \mathrm{x}_{\mathrm{g}_2}\right) \cdot \left(y_G - \mathrm{y}_{\mathrm{g}_2}\right) + I_{xy}(A_2) + A_2 \\ &\cdot \left(x_G - \mathrm{x}_{\mathrm{g}_2}\right) \cdot \left(y_G - \mathrm{y}_{\mathrm{g}_2}\right) = 400 \cdot (-40) \cdot (25) + 400 \cdot (40) \cdot (-25) = -800000\ [\mathrm{mm}^4] \end{aligned}$$

Disegniamo il cerchio di Mohr dei momenti d'inerzia.



Per ottenere i momenti principali d'inerzia è necessario ruotare il sistema di riferimento dell'angolo:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot atan\left(\frac{2 \cdot I_{xyG}}{I_{yyG} - I_{xxG}}\right) = \frac{1}{2} \cdot atan\left(\frac{-2 \cdot 800000}{1894166.\overline{6} - 614166.\overline{6}}\right) = -25.67°$$

Si tratta di una rotazione negativa, cioè oraria.

Il centro del cerchio di Mohr si trova nel punto di coordinate:

$$\left[\frac{I_{yyG} + I_{xxG}}{2}; 0\right] = \left[\frac{1894166.\overline{6} + 614166.\overline{6}}{2}; 0\right] = [1254167; 0]$$

Il raggio del cerchio di Mohr vale:

$$\sqrt{\left(\frac{I_{yyG} - I_{xxG}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{1894166.\overline{6} - 614166.\overline{6}}{2}\right)^2 + (800000)^2} = 1024500\ [\mathrm{mm}^4]$$

Il momento principale d'inerzia più grande vale:

$$I_{yy}(max) = centro + raggio = 1254167 + 1024500 = \ 2278666.5\ [\mathrm{mm}^4]$$

Il momento principale d'inerzia più piccolo vale:

$$I_{xx}(min) = centro - raggio = 1254167 - 1024500 = \ 229666.8\ [\mathrm{mm}^4]$$

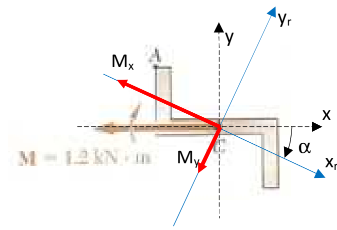
Per calcolare gli sforzi nel punto A, dobbiamo proiettare il momento flettente lungo gli assi principali d'inerzia.

$$M_x = M \cdot \cos(\alpha) = 1200000 \cdot \cos(-25.67^\circ) = 1081565\ [N \cdot mm]$$

$$M_y = M \cdot \sin(\alpha) = 1200000 \cdot \sin(-25.67^\circ) = -519825\ [N \cdot mm]$$

Il punto A rispetto al sistema di riferimento baricentrico ha coordinate:

$$\begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -45 \\ 45 \end{Bmatrix}$$



Di conseguenza, rispetto al sistema di riferimento ruotato, le sue coordinate sono:

$$\begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix}_R = \begin{bmatrix} \cos(-25.67) & sin(-25.67) \\ -sin(-25.67) & \cos(-25.67) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -45 \\ 45 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -60.052 \\ 21.065 \end{Bmatrix}$$

Lo sforzo nel punto A è la somma del contributo del momento flettente M_x e del momento flettente M_y che entrambi ne comprimono le fibre (vedi figura):

$$\sigma_z = -\frac{M_x \cdot y_A}{I_{xx}} - \frac{M_y \cdot x_A}{I_{yy}} = -\frac{1081565 \cdot (21.065)}{229666.8} - \frac{519825 \cdot (60.052)}{2278666.5} = -99.2 - 13.7 = -112.9\ [MPa]$$

Per definizione, l'asse neutro è il luogo di punti dove si annulla lo sforzo normale alla sezione. Nel nostro caso abbiamo:

$$\frac{M_x \cdot y_R}{I_{xxR}} + \frac{M_y \cdot x_R}{I_{yyR}} = 0$$

da cui:

$$y_R = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_{xxR}}{I_{yyR}} x_R = -\frac{519825}{1081565} \cdot \frac{229666.8}{2278666.5} \cdot x_R = -0.04844 \cdot x_R = \tan\beta \cdot x_R$$

Quindi l'inclinazione dell'asse neutro rispetto al sistema baricentrico ruotato vale:

$$\beta = arctan(-0.04844) = -2.77\,°.$$