Esercizio N.1
Un'asta di acciaio è lunga 2.2 m e non può allungarsi più di 1.2 mm quando le si applica un carico di 8.5 kN. Sapendo che E = 200 GPa, determinare: (a) il più piccolo diametro dell'asta che si può usare; (b) la corrispondente tensione normale causata dal carico.

Soluzione
Nel caso di forzi monoassiali, la legge di Hooke afferma che: $\sigma = \frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$. Da cui:

$$A(min) = \frac{F \cdot L}{E \cdot \Delta L} = \frac{8500 \cdot 2200}{200000 \cdot 1.2} = 77.92\ [mm^2] = \frac{\pi d^2}{4}$$

da cui:

$$d(min) = \sqrt{\frac{4 \cdot 77.92\ [mm^2]}{\pi}} = 9.96\ [mm]$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{8500}{77.92} = 109.1\ [MPa]$$

Esercizio N.2
Un'asta di controllo fabbricata in ottone giallo non deve allungarsi più di 3 mm quando la forza di trazione è di 4 kN. Sapendo che E = 105 GPa e che la massima tensione normale ammissibile è 180 MPa, determinare: (a) il più piccolo diametro che può essere scelto per l'asta e (b) la corrispondente lunghezza massima dell'asta.

Soluzione
Nel caso di forzi monoassiali, la legge di Hooke afferma che: $\sigma = \frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$.

Poiché deve valere che: $\frac{F}{A} \leq \sigma_{am}$ allora: $A = \pi \cdot r^2 \geq \frac{F}{\sigma_{am}}$ da cui

$$r(min) \geq \sqrt{\frac{F}{\pi \cdot \sigma_{am}}} = \sqrt{\frac{4000\ [N]}{\pi \cdot 180\ [MPa]}} = 2.66\ [mm]$$

Calcolato il raggio, possiamo calcolare l'area trasversale minima dell'asta:

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2.66^2 = 22.2\ [mm^2]$$

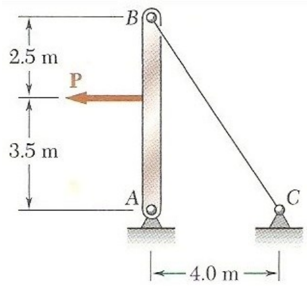
Dalla relazione: $\sigma = \frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$ ricaviamo $L(max) = E \cdot \frac{\Delta L}{\sigma_{am}} = 105000 \cdot \frac{3}{180} = 1750\ [\text{mm}]$

Esercizio N.3
In un'attrezzatura di sospensione, deve essere usato un pezzo lungo 9 m di un tondino d'acciaio di 6 mm di diametro. Si registra un allungamento di 18 mm quando viene applicata una forza di trazione P. Sapendo che E = 200 GPa, determinare: (a) la grandezza della forza P, (b) la corrispondente tensione normale nel tondino.

Soluzione
Nel caso di forzi monoassiali, la legge di Hooke afferma che: $\sigma = \frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$ da cui

$F = A \cdot E \cdot \frac{\Delta L}{L} = 200000 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{18}{9000} = 11307.9\ [N]$ da cui $\sigma = \frac{F}{A} = \frac{11307.9}{A} = 400\ [MPa]$

Esercizio N.4
Il cavo BC in figura ha un diametro di 4 mm ed è fabbricato di un acciaio con E = 200 GPa. Sapendo che la massima tensione non deve eccedere 190 MPa e che l'allungamento del cavo non deve superare 6 mm, trovare il massimo valore P del carico che si può applicare come in figura.



Soluzione
Equilibrio alla rotazione intorno alla cerniera A: $\sum M_A = 0$ da cui:

$P \cdot 3.50 - R_{cy} \cdot 4.0 = 0$ da cui $R_{cy} = \frac{3.5}{4} P$

$R_{CB} \cdot sin(\propto) = R_{cy}$ da cui $R_{CB} = \frac{R_{cy}}{sin(\propto)}$

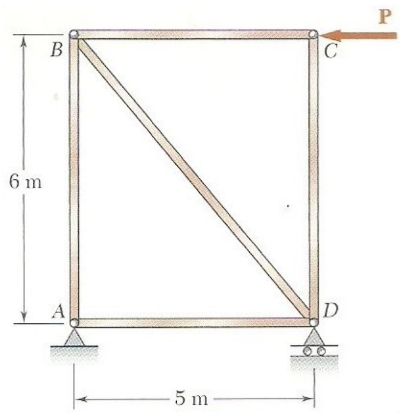
$L_{BC} \cdot sin(\propto) = L_{AB}$ da cui $sin(\propto) = \frac{L_{AB}}{L_{BC}} = \frac{6.0}{\sqrt{4^2+6^2}} = \frac{6.0}{7.21}$

da cui: $R_{CB} = \frac{R_{cy}}{sin(\propto)} = \frac{3.5/4.0}{6.0/7.21} P = 1.0516 \cdot P\ [N]$

$$R_{CB} \leq A \cdot E \cdot \frac{\Delta L}{L} = 200000 \cdot \frac{\pi 4^2}{4} \cdot \frac{6\ [mm]}{7.21 \cdot 10^3 [mm]} = 2091.5\ [N]$$

da cui: $P \leq \frac{R_{CB}}{1.0516} = \frac{2091.5}{1.0516} = 1988.6\ [N]$

Esercizio N.5
Il telaio di acciaio (E = 200 GPa) mostrato ha una diagonale BD con un'area di 1920 mm^2. Determinare il valore massimo ammissibile per la forza P se la variazione di lunghezza di BD non deve superare 1.6 mm.



Soluzione
Sono presenti 5 aste, per cui abbiamo a che fare con 5 x 3 = 15 Gradi di libertà (gdl). La somma dei gradi di libertà vincolati è 15, quindi la struttura è isostatica. Prima di procedere è necessario controllare che non sia labile: a questo scopo è possibile immaginare la struttura come somma di tre sottostrutture semplici (vedi figura), ognuna delle quali non è labile.
Per calcolare la variazione di lunghezza dell'asta BD è necessario calcolare la forza normale che su di essa agisce: a questo scopo è possibile immaginare la forza P, applicata nel nodo B, come somma di due componenti, una in direzione verticale e l'altra orientata come l'asta BD. Se ne deduce che:

$F_{BD} \cdot cos(\propto) = P$ da cui $F_{BD} = \frac{P}{cos(\propto)}$

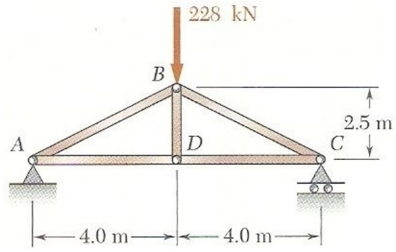
$L_{BD} \cdot cos(\propto) = L_{AD}$ da cui $cos(\propto) = \frac{L_{AD}}{L_{BD}}$ da cui $F_{BD} = \frac{P}{cos(\propto)} = \frac{L_{BD}}{L_{AD}} \cdot P$

$\sigma = \frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$ da cui $F_{BD}(max) \leq A_{BD} \cdot E \cdot \frac{\Delta L_{BD}}{L_{BD}}$

da cui $P(max) = F_{BD} \cdot cos(\propto) \leq A_{BD} \cdot E \cdot \frac{\Delta L_{BD}}{L_{BD}} \cdot \frac{L_{AD}}{L_{BD}} = 1920 \cdot 200000 \cdot \frac{1.6}{5^2+6^2} \cdot 5 = 50360\ [N]$

Esercizio N.6

Per la struttura reticolare in acciaio (E = 200 GPa) ed il carico mostrati, determinare le deformazioni degli elementi AB e AD, sapendo che le loro sezioni trasversali sono, rispettivamente, di area 2400 mm^2 e 1800 mm^2.



Soluzione

Sono presenti 5 aste, per cui abbiamo a che fare con 5 x 3 = 15 Gradi di libertà (gdl). La somma dei gradi di libertà vincolati è 15, quindi la struttura è isostatica.

Per calcolare le deformazioni degli elementi AB e AD dobbiamo conoscere le azioni normali che su di essi agiscono. La reazione verticale nel nodo A vale F/2: essa deve essere scomposta in due componenti orientate come le aste AB e AD. Risulta quindi:

$R_{AB} \cdot sin(\propto) = R_{Ay} = \frac{F}{2}$ da cui $R_{AB} = \frac{F}{2 \cdot sin(\propto)}$

$R_{AD} \cdot tan(\propto) = R_{Ay} = \frac{F}{2}$ da cui $R_{AD} = \frac{F}{2 \cdot tan(\propto)} = R_{AB} \cdot cos(\propto)$

$L_{AD} \cdot tan(\propto) = L_{BD}$ da cui $tan(\propto) = \frac{L_{BD}}{L_{AD}} = \frac{2.5}{4}$

$L_{AB} \cdot sin(\propto) = L_{BD}$ da cui $sin(\propto) = \frac{L_{BD}}{L_{AB}}$

in cui $L_{AB} = \sqrt{L_{AD}^2 + L_{BD}^2} = \sqrt{4^2 + 2.5^2} = 4.717\ [m]$

Risulta quindi:

$$R_{AB} = \frac{F}{2 \cdot sin(\propto)} = \frac{F}{2} \cdot \frac{L_{AB}}{L_{BD}} = \frac{228000}{2} \cdot \frac{4.717}{2.5} = 215.1\ [kN]$$

$$R_{AD} = \frac{F}{2 \cdot tan(\propto)} = \frac{F}{2} \cdot \frac{L_{AD}}{L_{BD}} = \frac{228000}{2} \cdot \frac{4.0}{2.5} = 182.4\ [kN]$$

Dalla legge di Hooke: $\sigma = \frac{F}{A} = E \cdot \epsilon$ risulta: $\epsilon = \frac{F}{E \cdot A}$

Quindi:

$$\epsilon_{AB} = \frac{R_{AB}}{E \cdot A_{AB}} = \frac{215.1}{200 \cdot 2400} = 0.00045 = 450\mu\epsilon$$

$$\epsilon_{AD} = \frac{R_{AD}}{E \cdot A_{AD}} = \frac{91.2}{200 \cdot 1800} = 0.000253 = 253\mu\epsilon$$

Le aste AB e AD si allungano quindi delle seguenti quantità:

$$\Delta L_{AB} = \epsilon_{AB} \cdot L_{AB} = 0.00045 \cdot 4717[mm] = 2.113\ [mm]$$

$$\Delta L_{AD} = \epsilon_{AD} \cdot L_{AD} = 0.000253 \cdot 4000[mm] = 1.012\ [mm]$$

Esercizio N.7

Determinare lo spostamento del punto A di un cilindro ad asse verticale di altezza h, omogeneo di densità ρ e modulo di elasticità E, dovuto al suo peso proprio.

Soluzione

L'azione interna N(x) di compressione vale:

$$N(x) = -\int_0^x dF_x = -\int_0^x \rho \cdot g \cdot dvol = -\int_0^x \rho \cdot g \cdot A(x) \cdot dx = -\rho \cdot g \cdot A \cdot x$$

Secondo la legge di Hooke monoassiale:

$$\sigma = \frac{N(x)}{A(x)} = E \cdot \epsilon = E \cdot \frac{du}{dx} \qquad \text{da cui} \qquad du = \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} \cdot dx$$

Integrando abbiamo:

$$u(x) = \int_0^x \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} \cdot dx = \int_0^x \frac{-\rho \cdot g \cdot A \cdot x}{E \cdot A} \cdot dx = -\frac{\rho \cdot g \cdot x^2}{2 \cdot E} + c$$

Condizione al contorno: quando x = h lo spostamento verticale u(h) = 0, quindi:

$$-\frac{\rho \cdot g \cdot h^2}{2 \cdot E} + c = 0 \qquad \text{da cui} \qquad c = \frac{\rho \cdot g \cdot h^2}{2 \cdot E}$$

Quindi la funzione "spostamento verticale" è la seguente:

$$u(x) = \frac{\rho \cdot g}{2 \cdot E} \cdot (h^2 - x^2)$$

Quando x = 0 lo spostamento vale: $u(x=0) = \frac{\rho \cdot g}{2 \cdot E} \cdot h^2$

Esercizio N.8

Determinare lo spostamento del vertice A di un cono circolare omogeneo di altezza h, densità ρ e modulo di elasticità E, dovuto al suo peso proprio.

<u>Soluzione</u>

L'azione interna N(x) di compressione vale:

$$N(x) = -\int_0^x dF_x = -\int_0^x \rho \cdot g \cdot dvol = -\int_0^x \rho \cdot g \cdot A(x) \cdot dx$$

La sezione trasversale del cono è funzione del raggio che varia linearmente con la coordinata verticale x:

$$r(x) = \frac{x}{h} \cdot R \qquad A(x) = \pi \cdot r^2(x) = \pi \cdot \left(\frac{R}{h} x\right)^2 = A_0 \cdot \left(\frac{x}{h}\right)^2$$

in cui R ed A_0 indicano rispettivamente il raggio massimo e l'area massima alla base del cono, quando x = h.

Da cui:

$$N(x) = -\int_0^x \rho \cdot g \cdot A(x) \cdot dx = -\frac{\rho \cdot g \cdot A_0}{h^2} \cdot \int_0^x x^2 \cdot dx = -\frac{\rho \cdot g \cdot A_0}{3 \cdot h^2} \cdot x^3$$

Secondo la legge di Hooke monoassiale:

$$\sigma = \frac{N(x)}{A(x)} = E \cdot \epsilon = E \cdot \frac{du}{dx} \qquad \text{da cui} \qquad du = \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} \cdot dx$$

Integrando abbiamo:

$$u(x) = \int_0^x \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} \cdot dx = \int_0^x \frac{-\rho \cdot g \cdot A_0 \cdot x^3}{3 \cdot h^2 \cdot E \cdot \left(\frac{x}{h}\right)^2 \cdot A_0} \cdot dx = -\frac{\rho \cdot g}{3 \cdot E} \int_0^x x \cdot dx = -\frac{\rho \cdot g \cdot x^2}{6 \cdot E} + c$$

Condizione al contorno: quando x = h lo spostamento verticale u(h) = 0, quindi:

$$-\frac{\rho \cdot g \cdot h^2}{6 \cdot E} + c = 0 \qquad \text{da cui} \qquad c = \frac{\rho \cdot g \cdot h^2}{6 \cdot E}$$

Quindi la funzione "spostamento verticale" è la seguente:

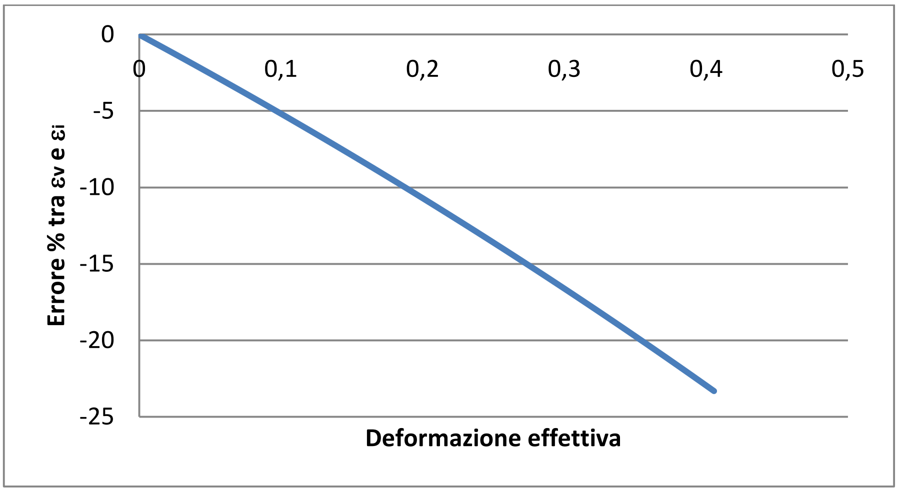
$$u(x) = \frac{\rho \cdot g}{6 \cdot E} \cdot (h^2 - x^2)$$

Quando x = 0 lo spostamento vale: $u(x=0) = \frac{\rho \cdot g}{6 \cdot E} \cdot h^2$

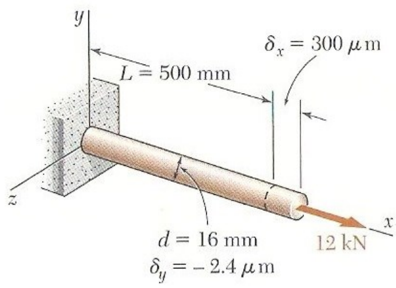
Esercizio N.9
Indicando con ε la "deformazione ingegneristica" di un provino a trazione, dimostrare che la deformazione effettiva è $\varepsilon_t = ln(1+\varepsilon)$.

<u>Soluzione</u>
Per definizione: $\epsilon = \frac{dl}{l}$ da cui integrando dalla lunghezza iniziale alla finale:

$$\epsilon = \int_{l_i}^{l_f} \frac{dl}{l} = \ln l_f - \ln l_i = \ln \frac{l_f}{l_i} = \ln \frac{(l_i + \Delta l)}{l_i} = \ln\left(1 + \frac{\Delta l}{l_i}\right) = \ln(1+\epsilon)$$



Esercizio N.10
Un'asta di materiale omogeneo ed isotropo, lunga 500 mm e di 16 mm di diametro, soggetta ad una forza assiale di 12 kN, si allunga di 300 μm, mentre il suo diametro diminuisce di 2.4 μm. Determinare il modulo di elasticità ed il coefficiente di Poisson del materiale.



<u>Soluzione</u>
Secondo la legge di Hooke monoassiale:

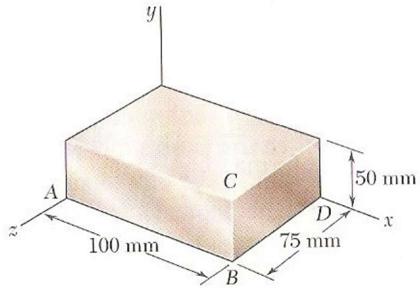
$$\sigma = \frac{N}{A} = E \cdot \epsilon = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

da cui $$E = \frac{N}{A \cdot \epsilon} = \frac{12000}{\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{0.3}{500}} = 99472\ [MPa] \cong 100[GPa]$$

La deformazione trasversale vale:

$$\epsilon_y = -\nu \cdot \epsilon_x \qquad \text{da cui} \quad \nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{-0.0024/16}{0.3/500} = \frac{500}{16} \cdot \frac{0.0024}{0.3} = 0.25$$

Esercizio N.11
Il blocco di acciaio della figura è soggetto ad una pressione uniforme su tutte le sue facce. Sapendo che l'accorciamento dello spigolo AB è -3×10^{-2} mm, determinare (a) la variazione di lunghezza degli altri due spigoli, (b) la pressione p applicata alle facce del blocco. Assumere E = 200 GPa e ν = 0.29.



Soluzione
Per la legge di Hooke generalizzata abbiamo:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_x - \nu \cdot \left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

Poiché in questo caso abbiamo una pressione uniforme : $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$

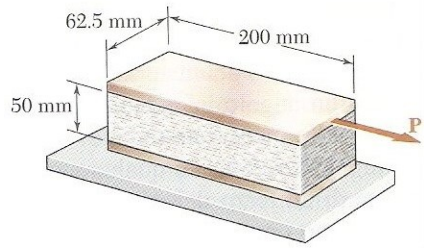
allora: $\epsilon_x = \frac{P}{E} \cdot (1 - 2 \cdot \nu)$ da cui $p = \frac{E}{(1-2\cdot\nu)} \epsilon_x = \frac{200000}{1-2\cdot 0.29} \cdot \left(\frac{-0.03}{100}\right) = -142.86\ [MPa]$

Poiché: $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon$ allora $\Delta L_{BC} = \epsilon \cdot L_{BC} = \frac{-0.03}{100} \cdot 50 = -0.015\ [mm] = -15\ [\mu m]$

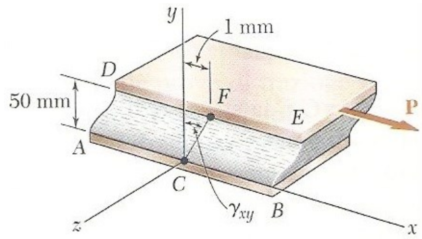
$$\Delta L_{BD} = \epsilon \cdot L_{BD} = \frac{-0.03}{100} \cdot 75 = -0.0225\ [mm] = -22.5\ [\mu m]$$

Esercizio N.12

Il blocco rettangolare di un materiale con modulo di rigidità G = 630 MPa è incollato a due piastre orizzontali rigide. La piastra inferiore è fissa, mentre quella superiore è soggetta ad una forza orizzontale P. Sapendo che la piastra superiore si sposta di 1 mm sotto l'azione della forza, determinare: (a) la deformazione angolare media nel materiale, (b) l'entità della forza P applicata alla piastra superiore.



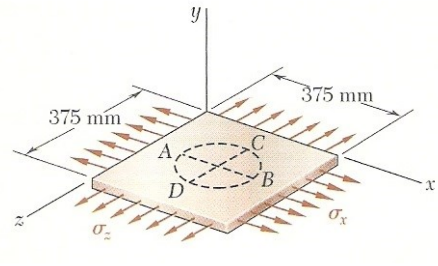
Soluzione
Per la legge di Hooke abbiamo: $\tau_{yx} = \frac{P}{A} = G \cdot \gamma_{yx}$, valore medio dello sforzo di taglio. Di conseguenza la deformazione angolare media vale: $\gamma_{yx} = \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{1\ [mm]}{50\ [mm]} = 0.02\ [rad]$



L'entità della forza P applicata alla piastra superiore vale:

$$P = G \cdot A \cdot \gamma_{yx} = 630 \cdot (200 \cdot 62.5) \cdot 0.02 = 158\ [kN]$$

Esercizio N.13
Un cerchio di diametro d = 225 mm è inciso su una piastra di alluminio, priva di tensioni, di spessore t = 19 mm. Successivamente, forze agenti nel piano della piastra causano tensioni normali σ_x = 84 MPa e σ_z = 140 MPa. Per E = 70 GPa e ν = 1/3, determinare le variazioni: (a) della lunghezza del diametro AB, (b) della lunghezza del diametro CD, (c) dello spessore della piastra, (d) del volume della piastra.



Soluzione
Poiché in questo caso σ_y = 0, la legge di Hooke generalizzata diventa:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot \sigma_z] = \frac{1}{70000} \cdot \left[84 - \frac{140}{3}\right] = 533\ [\mu\epsilon]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [-\nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{70000} \cdot \left[-\frac{84+140}{3}\right] = -1066.7\ [\mu\epsilon]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot \sigma_x] = \frac{1}{70000} \cdot \left[140 - \frac{84}{3}\right] = 1600\ [\mu\epsilon]$$

da cui:

$$\Delta L_{AB} = \epsilon_x \cdot d = 533 \cdot 10^{-6} \cdot 225 = 0.12\ [mm]$$

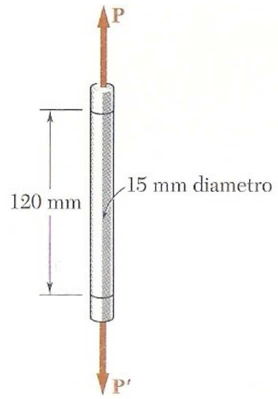
$$\Delta L_{CD} = \epsilon_z \cdot d = 1600 \cdot 10^{-6} \cdot 225 = 0.36\ [mm]$$

$$\Delta t = \epsilon_y \cdot t = -1066.7 \cdot 10^{-6} \cdot 19 = -0.02\ [mm]$$

$$\frac{\Delta V}{V} \cong \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = (533 - 1066.7 + 1600)[\mu\epsilon] = 1066\ [\mu\epsilon]$$

da cui: $\Delta V = V \cdot 1066 \cdot 10^{-6} = (375 \cdot 375 \cdot 19) \cdot 1066 \cdot 10^{-6} = 2849\ [mm^3]$

Esercizio N.14
Una prova standard di trazione è usata per determinare le proprietà di una plastica sperimentale. Il provino è una barra di diametro 15 mm ed è soggetto ad un carico di trazione di 3.5 kN. Sapendo che nella lunghezza base di 120 mm è stato osservato un allungamento di 11 mm ed una riduzione di diametro di 0.62 mm, determinare (a) il modulo di elasticità, (b) il modulo di rigidità ed (c) il coefficiente di Poisson del materiale.



Soluzione: Secondo la legge di Hooke monoassiale abbiamo: $\sigma = \frac{N}{A} = E \cdot \epsilon = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$.
Possiamo quindi scrivere: $E = \frac{N}{A} \cdot \frac{L}{\Delta L} = \frac{3500\ [N]}{\pi \cdot d^2/4} \cdot \frac{120}{11} = 216\ \frac{N}{mm^2} = 216\ MPa.$

La relazione che lega la deformazione longitudinale a quella trasversale vale: $\epsilon_y = -\nu \cdot \epsilon_x$

da cui il Coefficiente di Poisson vale: $\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\Delta d/d}{\Delta L/L} == -\frac{-0.62/15}{11/120} = \frac{0.041\overline{3}}{0.091\overline{6}} = 0.451$

Il modulo di rigidità vale: $G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} = \frac{216}{2 \cdot (1.451)} = 74.4\ MPa$

Esercizio N.15
In molte situazioni è noto che la tensione normale in una data direzione è nulla; per esempio può capitare che $\sigma_z = 0$. Per questo caso, conosciuto come tensione piana, dimostrare che, se le deformazioni ε_x e ε_y sono state determinate sperimentalmente, possiamo esprimere σ_x, σ_y e ε_z come segue:

$$\sigma_x = E\frac{\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y}{1-\nu^2}$$
$$\sigma_y = E\frac{\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x}{1-\nu^2}$$
$$\sigma_x = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

Soluzione
Possiamo scrivere la Legge di Hooke in forma matriciale nel modo seguente:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\\varepsilon_y\\\varepsilon_z\end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\cdot\begin{bmatrix}1 & -\nu & -\nu\\ -\nu & 1 & -\nu\\ -\nu & -\nu & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\sigma_x\\\sigma_y\\\sigma_z\end{Bmatrix} \qquad (1)$$

Nel caso di stato di sforzo piano, in cui $\sigma_z = 0$, abbiamo:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\\varepsilon_y\end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\cdot\begin{bmatrix}1 & -\nu\\ -\nu & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\sigma_x\\\sigma_y\end{Bmatrix}$$

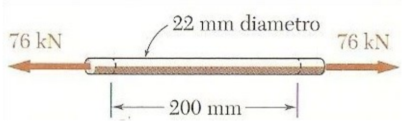
Invertendo la matrice abbiamo:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\\sigma_y\end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\cdot\begin{bmatrix}1 & \nu\\ \nu & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\\varepsilon_y\end{Bmatrix} \qquad \text{come volevasi dimostrare}$$

Dalla (1), ricordando che $\sigma_z = 0$, abbiamo:

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E}\cdot(\sigma_x+\sigma_y) = -\frac{\nu}{E}\cdot\frac{E}{1-\nu^2}\cdot(\varepsilon_x + \nu\cdot\varepsilon_y + \nu\cdot\varepsilon_x + \varepsilon_y) = -\frac{\nu}{1-\nu^2}\cdot(1+\nu)\cdot(\varepsilon_x+\varepsilon_y) =$$
$$= -\frac{\nu}{1-\nu}\cdot(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$$

Esercizio N.16
Determinare la dilatazione ε e la variazione di volume del tratto di 200 mm dell'asta in figura se: (a) l'asta è fabbricata in acciaio con E = 200 GPa e ν = 0.30; (b) l'asta è fabbricata in alluminio con E = 70 GPa e ν = 0.35.



Soluzione
Secondo la legge di Hooke monoassiale abbiamo: $\sigma = \frac{N}{A} = E\cdot\epsilon$.

La variazione di volume vale: $\Delta V = V\cdot(\epsilon_x+\epsilon_y+\epsilon_z) = V\cdot\epsilon_x\cdot(1-2\cdot\nu)$

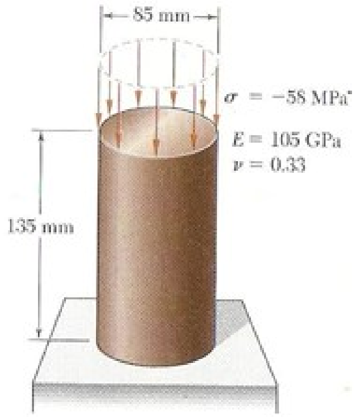
Nel caso di asta fabbricata in acciaio abbiamo: $\epsilon_x = \frac{N}{E\cdot A} = \frac{76000\,[N]}{200000\cdot\pi\cdot d^2/4} = 1000\,[\mu\epsilon] = 0.001 = 0.1\%$

$$\Delta V = V\cdot\epsilon_x\cdot(1-2\cdot\nu) = A\cdot L\cdot\epsilon_x\cdot(1-2\cdot\nu) = \frac{\pi\cdot 22^2}{4}\cdot 200\cdot 0.001\cdot(1-2\cdot 0.30) = 30.41\,[mm^3]$$

Nel caso di asta fabbricata in alluminio abbiamo: $\epsilon_x = \frac{N}{E\cdot A} = \frac{76000\,[N]}{70000\cdot\pi\cdot d^2/4} = 2856\,[\mu\epsilon] \cong 0.0029 = 0.29\%$

$$\Delta V = V\cdot\epsilon_x\cdot(1-2\cdot\nu) = A\cdot L\cdot\epsilon_x\cdot(1-2\cdot\nu) = \frac{\pi\cdot 22^2}{4}\cdot 200\cdot 0.0029\cdot(1-2\cdot 0.35) = 65.14\,[mm^3]$$

Esercizio N.17
Per il carico assiale mostrato, (a) determinare la variazione di altezza e quella di volume del cilindro di ottone della figura; (b) risolvere la parte (a) ipotizzando che il carico sia idrostatico con $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$ =-70 MPa.



Soluzione
Trascurando l'effetto del peso proprio, possiamo ammettere che l'azione normale N(x) sia costante.

Secondo la legge di Hooke monoassiale:

$$\sigma = \frac{N(x)}{A(x)} = E \cdot \epsilon = E \cdot \frac{du}{dx} \qquad \text{da cui} \quad du = \frac{\sigma}{E} \cdot dx$$

Integrando abbiamo:

$$u(x) = \int_0^x \frac{\sigma}{E} \cdot dx = \frac{\sigma}{E} \cdot x$$

Quando x = h lo spostamento verticale u(h) = 0, quindi:

$$u(x) = \frac{\sigma}{E} \cdot h = \frac{-58}{105000} \cdot 135 = 0.0746\ [mm]$$

la variazione di volume vale:

$$\Delta V = V \cdot \epsilon_x \cdot (1 - 2 \cdot \nu) = A \cdot L \cdot \frac{\sigma_x}{E} \cdot (1 - 2 \cdot \nu) = \frac{\pi \cdot 85^2}{4} \cdot 135 \cdot \frac{-58}{105000} \cdot (1 - 2 \cdot 0.33) = -143.87\ [mm^3]$$

Nel caso di carico idrostatico abbiamo che $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$ e quindi anche $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$.

Per la legge di Hooke generalizzata abbiamo:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_x - \nu \cdot \left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] = \frac{\sigma_x}{E} \cdot [1 - 2 \cdot \nu] = \frac{-70}{105000} \cdot [1 - 2 \cdot 0.33] = -226.7[\mu\varepsilon] = -0.0002267$$

da cui: $$\Delta V = V \cdot \left(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z\right) = 3 \cdot V \cdot \epsilon_x = 3 \cdot \frac{\pi \cdot 85^2}{4} \cdot 135 \cdot (-226.7 \cdot 10^{-6}) = 520.9\ [mm^3]$$