TRAVI A FORTE CURVATURA

ESERCIZIO 1

Determinare il carico massimo ammissibile P_{amm} del gancio di figura (a sezione circolare di diametro 100 mm) nel caso che si voglia garantire un coefficiente di sicurezza allo snervamento pari a η=2.

Materiale: Acciaio; σ_{sn} = 240 MPa

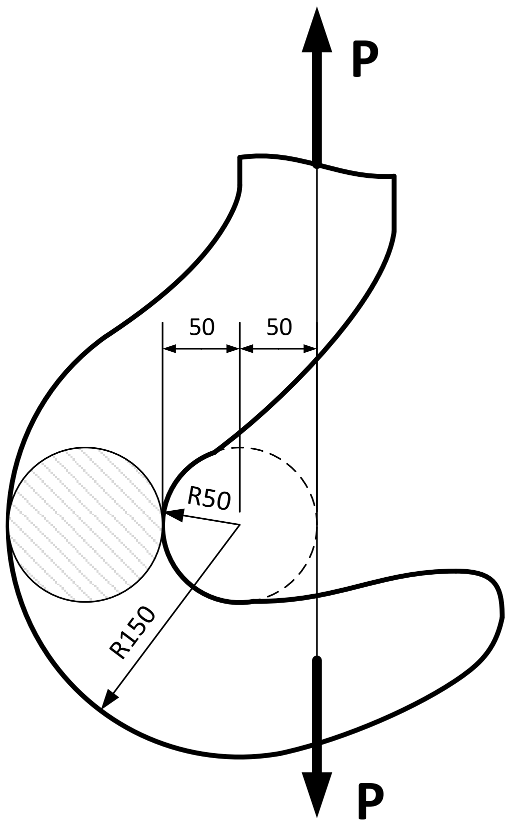

Fig. 1

Il gancio in esame può essere trattato come una trave a forte curvatura, in quanto il raggio di curvatura interno (50 mm) è addirittura più piccolo delle dimensioni trasversali della sezione del gancio (100 mm).

La sezione più critica, nella quale si ha il momento massimo (pari a P·150 mm) è la sezione A-A (fig 2). Per quella sezione vanno determinati i seguenti raggi:

- Raggio interno R_i
- Raggio corrispondente all'asse neutro R_0
- Raggio baricentrico R_G
- Raggio esterno R_e

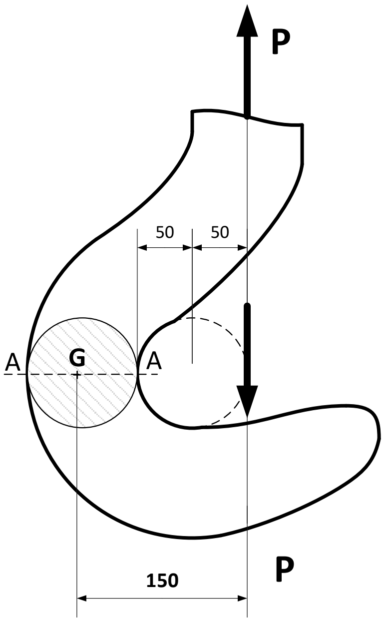

Fig. 2

I raggi interno e quello esterno valgono ovviamente R_i = 50 mm ed R_e = 150 mm.

Poiché la posizione del baricentro della sezione A-A è nota, essendo la sezione circolare, il raggio baricentrico vale R_G = 100 mm (fig. 3).

Rimane da determinare il raggio R_0 (all'asse neutro), che si ricava dall'equazione:

$$R_o = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}} = \frac{\pi \cdot \frac{100^2}{4}}{2\pi\left(R_G - \sqrt{R_G^2 - a^2}\right)} = \frac{7854}{2\pi\left(100 - \sqrt{100^2 - 50^2}\right)} = 93.3\,\mathrm{mm}$$

dove r è il raggio della generica fibra della sezione (fig. 3).

Per il calcolo dell'integrale $\int_A \frac{dA}{r}$ si possono consultare le tabelle disponibili sulle pagine del corso (http://people.unica.it/francescoaymerich/files/2015/10/Travi-a-forte-curvatura-Integrali-per-sezioni-tipiche.pdf).

Si ha quindi:

- Raggio interno R_i = 50 mm
- Raggio corrispondente all'asse neutro R_0 = 93.3 mm
- Raggio baricentrico R_G = 100 mm
- Raggio esterno R_e = 150 mm

da cui si ricava che la distanza y_G tra il baricentro e l'asse neutro vale

$$y_G = R_G - R_0 = 6.7\ \mathrm{mm}$$

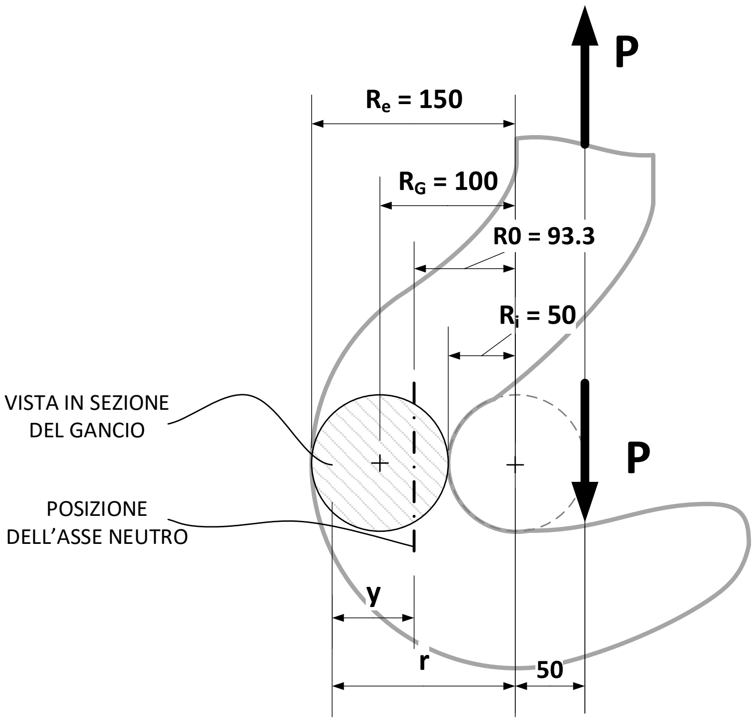

Fig. 3

Lo sforzo massimo (di trazione) si avrà nella sezione A-A sulle fibre più vicine al centro di curvatura (cioè per r=R_i) e sarà dato dalla somma dello sforzo dovuto alla flessione $M = P\cdot 150$ e di quello dovuto all'azione normale P

$$\sigma = \frac{y}{r}\cdot\frac{M}{y_G\cdot A}+\frac{P}{A}=\frac{93.3-50}{50}\cdot\frac{P\cdot 150}{6.7\cdot 7854}+\frac{P}{7854}$$

dove y è la distanza della fibra considerata dall'asse neutro (fig. 3).

Per calcolare il carico massimo ammissibile P_{amm}, uguagliamo lo sforzo massimo σ appena calcolato allo sforzo ammissibile (σ_{sn}/η), ottenendo:

$$\frac{240}{2}=\frac{43.3}{50}\cdot\frac{P\cdot 150}{6.7\cdot 7854}+\frac{P}{7854}$$

da cui

P_{amm} = 46227 N

Lo sforzo (di compressione) sulle fibre esterne più lontane dal centro di curvatura (poste ad r=R_e) sarà dato dalla somma dello sforzo dovuto alla flessione M = 46227·150 Nmm e di quello dovuto all'azione normale N= 46200 N

$$\sigma = \frac{y}{r}\cdot\frac{M}{y_G\cdot A}+\frac{P}{A}=-\frac{150-93.3}{150}\cdot\frac{46227\cdot 150}{6.7\cdot 7854}+\frac{46227}{7854}=-49.8+5.89=-43.9\text{ MPa}$$

L'andamento qualitativo degli sforzi nella sezione A-A è riportato in fig. 4.

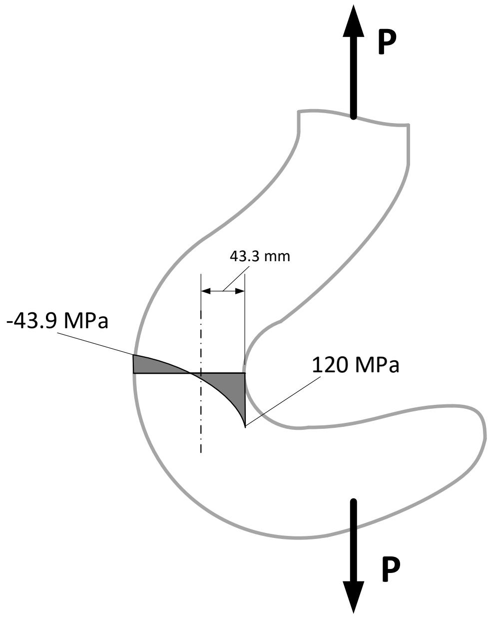

Fig. 4

ESERCIZIO 2

Determinare lo sforzo di trazione massimo nel del gancio di figura 1.

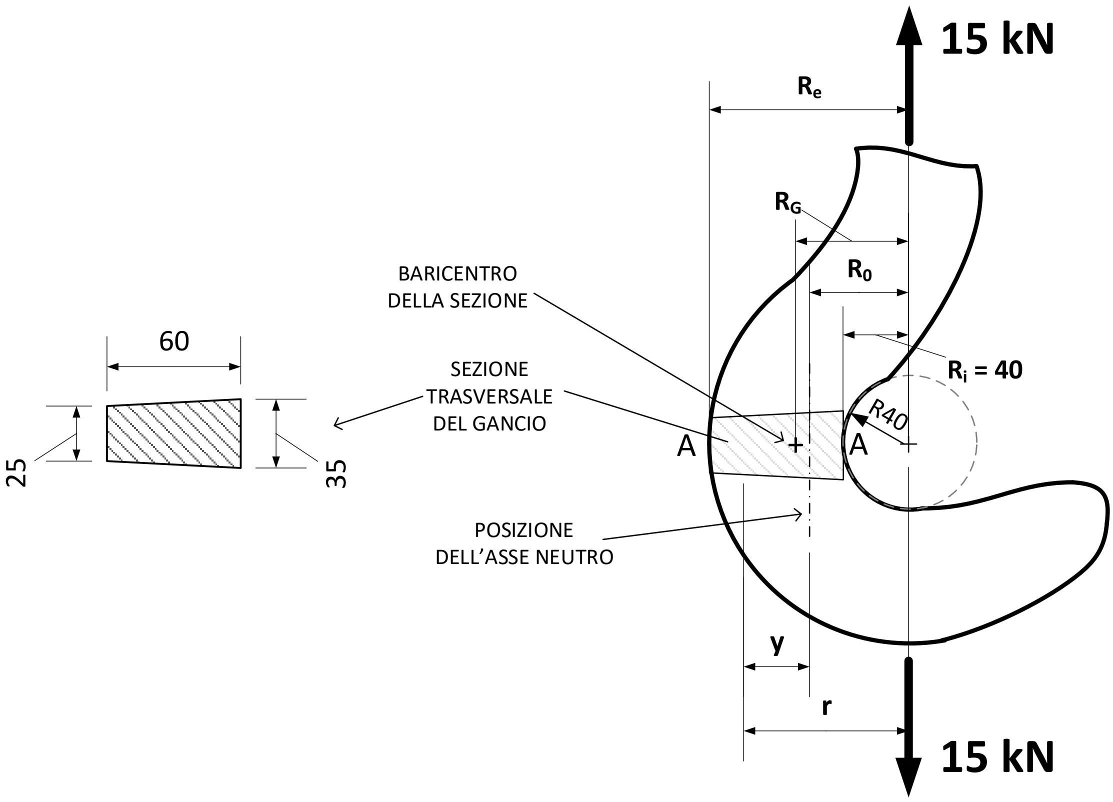

Fig. 1

La sezione più critica, nella quale si ha il momento massimo, è la sezione A-A. Per tale sezione vanno determinati i seguenti raggi:

- Raggio interno R_i
- Raggio corrispondente all'asse neutro R_0
- Raggio baricentrico R_G
- Raggio esterno R_e

I raggi interno e quello esterno valgono R_i = 40 mm ed R_e = 40 mm + 60 mm = 100 mm.

Per determinare il raggio baricentrico R_G è necessario calcolare la posizione del baricentro G della sezione A-A. Come illustrato in fig. 2, possiamo considerare la sezione trapezoidale come composta dall'unione di due triangoli (ognuno di base 5 mm ed altezza 60 mm) ed un rettangolo (di base 25 mm ed altezza 60 mm); la distanza d_G del baricentro dalla base maggiore del trapezio si ricava mediante la relazione:

$$d_G = \frac{2 \cdot \left(\frac{5 \cdot 60}{2}\right) \cdot \frac{60}{3} + 25 \cdot 60 \cdot 30}{\frac{(35+25) \cdot 60}{2}} = \frac{51000}{1800} = 28.33\ mm$$

dove il numeratore esprime la somma dei momenti statici dei due triangoli e del rettangolo rispetto alla base maggiore ed il denominatore esprime l'area del trapezio.

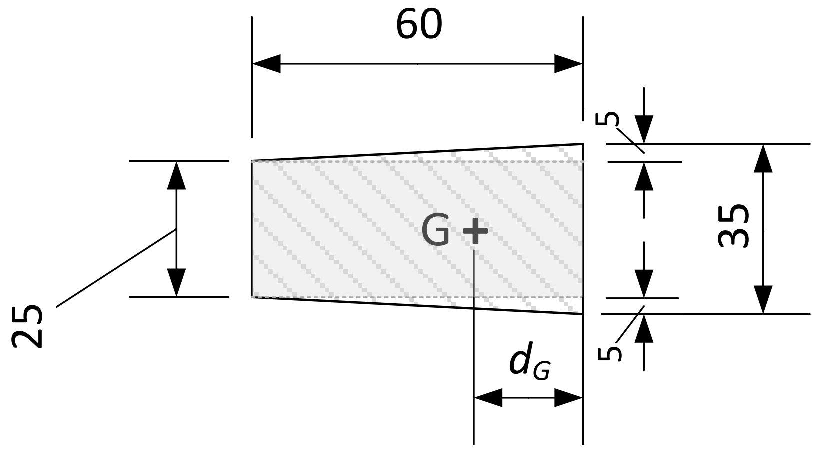

Fig. 2

Di conseguenza il raggio baricentrico R_G vale

$R_G = 40 + d_G = 40$ mm + 28.33 mm = 68.33 mm

Il raggio R_0 (distanza dell'asse neutro dal centro di curvatura del gancio nella sezione considerata) si ricava infine dall'equazione:

$$R_0 = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}}$$

Per il calcolo dell'integrale $\int_A {}^{dA}/_{r}$ per la sezione trapezoidale si possono consultare le tabelle disponibili sulle pagine del corso (http://people.unica.it/francescoaymerich/files/2015/10/Travi-a-forte-curvatura-Integrali-per-sezioni-tipiche.pdf).

Poichè $A = 1800$ mm^2, e

$$\int_A \frac{dA}{r} = \frac{35 \cdot 100 - 25 \cdot 40}{100 - 40} \cdot \ ln \frac{100}{40} - 35 + 25 = 28.18 \text{ mm},$$

si ottiene infine

$$R_0 = \frac{1800}{28.18} = 63.88 \text{ mm}$$

Si ha quindi (fig. 3):

- Raggio interno $R_i = 40$ mm
- Raggio corrispondente all'asse neutro $R_0 = 63.88$ mm

- Raggio baricentrico R_G = 68.33 mm
- Raggio esterno R_e = 100 mm

da cui si ricava che la distanza y_G tra il baricentro e l'asse neutro vale

$y_G = R_G - R_0 = 4.45$ mm

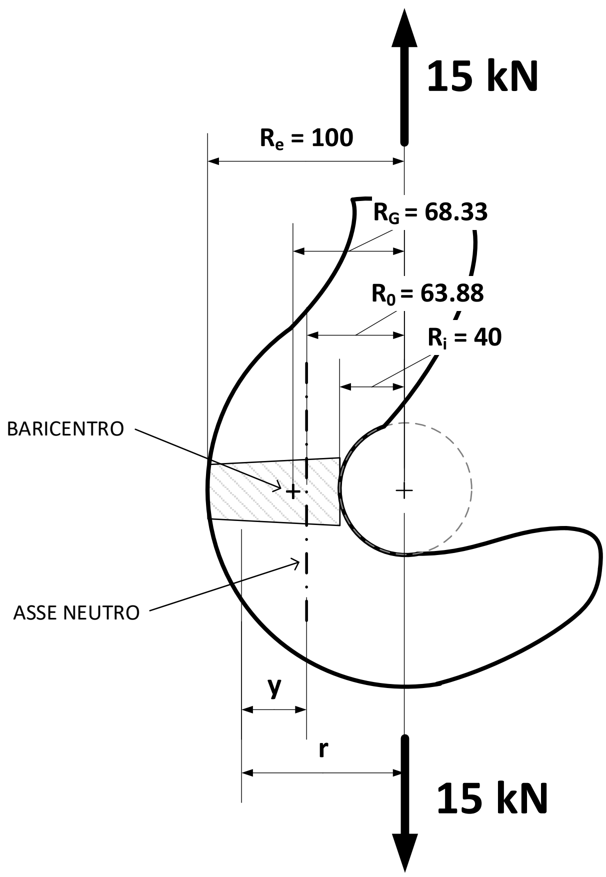

Fig. 3

Lo sforzo σ (di trazione) sulle fibre più vicine al centro di curvatura della sezione A-A (cioè per $r=R_i$) sarà dato dalla somma dello sforzo dovuto al momento flettente (valutato rispetto al baricentro della sezione; $M = 15000 \cdot 68.33 = 1.025 \cdot 10^6$ Nmm) e dello sforzo dovuto all'azione normale (N = 15000 N):

$$\sigma = \frac{y}{r} \cdot \frac{M}{y_G \cdot A} + \frac{N}{A} = \frac{23.88}{40} \cdot \frac{1.025 \cdot 10^6}{4.45 \cdot 1800} + \frac{15000}{1800} = 76.4 + 8.3 = 84.7 \text{ MPa}$$

Lo sforzo (di compressione) sulle fibre opposte della sezione A-A varrà invece

$$\sigma = \frac{y}{r} \cdot \frac{M}{y_G \cdot A} + \frac{N}{A} = -\frac{(100 - 63.88)}{100} \cdot \frac{1.025 \cdot 10^6}{4.45 \cdot 1800} + \frac{15000}{1800} = -46.2 + 8.3 = -37.9 \text{ MPa}$$

L'andamento qualitativo degli sforzi nella sezione A-A è riportato in fig. 4.

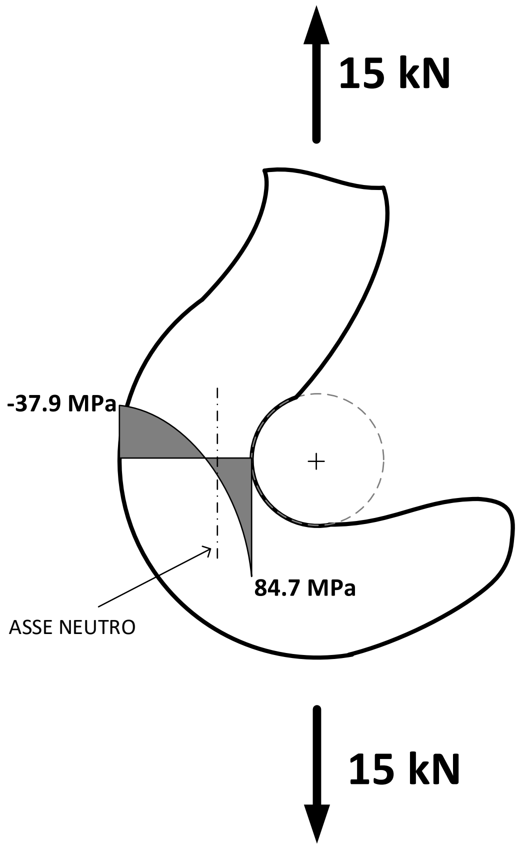

Fig. 4

ESERCIZIO 3

La trave curva di fig. 1 è soggetta alle estremità B e C a due momenti opposti di modulo $30 \cdot 10^6$ N·mm. Determinare lo sforzo massimo nella struttura e calcolare l'avvicinamento relativo dei due estremi (B e C) della trave (Acciaio, E = 210 GPa).

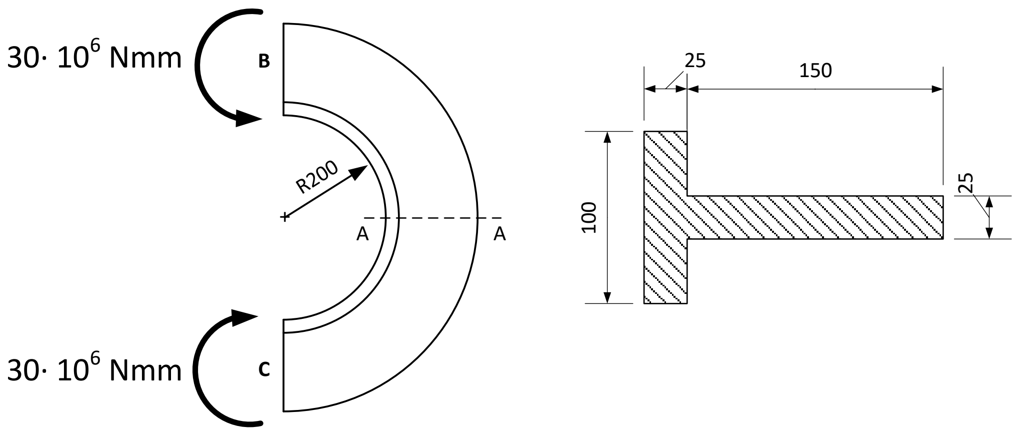

Fig. 1

Tutte le sezioni della trave sono soggette ad un momento pari a M = $30 \cdot 10^6$ N·mm ed è pertanto sufficiente calcolare gli sforzi in una sezione qualunque, come ad esempio la sezione A-A.

Per tale sezione vanno determinati i seguenti raggi:

- Raggio interno R_i
- Raggio corrispondente all'asse neutro R_0
- Raggio baricentrico R_G
- Raggio esterno R_e

I raggi interno e quello esterno valgono R_i = 200 mm ed R_e = 200 mm + 175 mm = 375 mm.

La distanza del baricentro G della sezione dalle fibre interne della trave (fig. 2) vale

$$d_G = \frac{(25 \cdot 100) \cdot 12.5 + (25 \cdot 150) \cdot (25 + 75)}{(25 \cdot 100) + (25 \cdot 150)} = \frac{406250}{6250} = 65 \text{ mm}$$

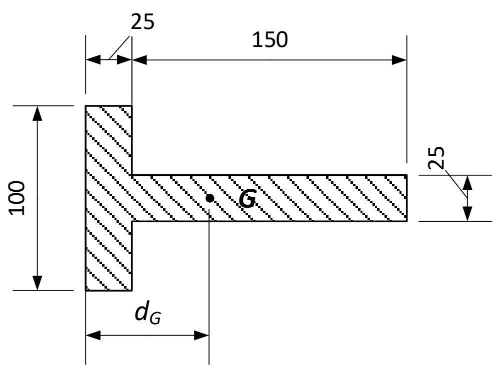

Fig. 2

Il raggio baricentrico R_G vale dunque

$R_G = 200 + d_G = 200$ mm + 65 mm = 265 mm

Il raggio R_0 (distanza dell'asse neutro dal centro di curvatura della trave nella sezione considerata) si ricava infine dall'equazione:

$$R_0 = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}}$$

Per il calcolo dell'integrale $\int_A {dA}/{r}$ per la sezione trapezoidale si possono consultare le tabelle disponibili sulle pagine del corso (http://people.unica.it/francescoaymerich/files/2015/10/Travi-a-forte-curvatura-Integrali-per-sezioni-tipiche.pdf).

Poichè A = 6250 mm^2, e

$$\int_A \frac{dA}{r} = 100 \cdot ln\frac{225}{200} + 25 \cdot ln\frac{375}{225} = 24.55 \text{ mm},$$

si ottiene infine

$$R_0 = \frac{6250}{24.55} = 254.6 \text{ mm}$$

Si ha quindi (fig. 3):

- Raggio interno R_i = 200 mm
- Raggio corrispondente all'asse neutro R_0 = 254.6 mm
- Raggio baricentrico R_G = 265 mm
- Raggio esterno R_e = 375 mm

da cui si ricava che la distanza y_G tra il baricentro e l'asse neutro vale

$y_G = R_G – R_0$ = 10.4 mm

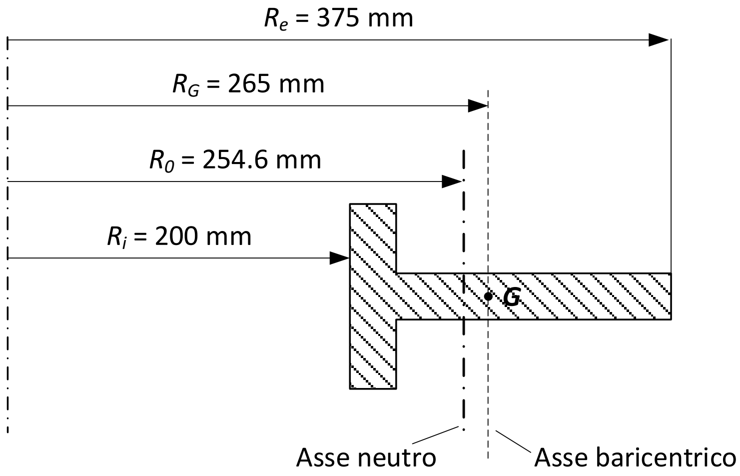

Fig. 3

Lo sforzo σ (di compressione) sulle fibre esterne più vicine al centro di curvatura (cioè per $r=R_i$) sarà dato da

$$\sigma = \frac{y}{r} \cdot \frac{M}{y_G \cdot A} = -\frac{254.6 - 200}{200} \cdot \frac{30 \cdot 10^6}{10.4 \cdot 6250} == -126.0 \text{ MPa}$$

Lo sforzo σ (di trazione) sulle fibre esterne opposte varrà invece

$$\sigma = \frac{y}{r} \cdot \frac{M}{y_G \cdot A} = +\frac{375 - 254.6}{375} \cdot \frac{30 \cdot 10^6}{10.4 \cdot 6250} = +148.2 \text{ MPa}$$

L'andamento qualitativo degli sforzi nella sezione A-A è riportato in fig. 4.

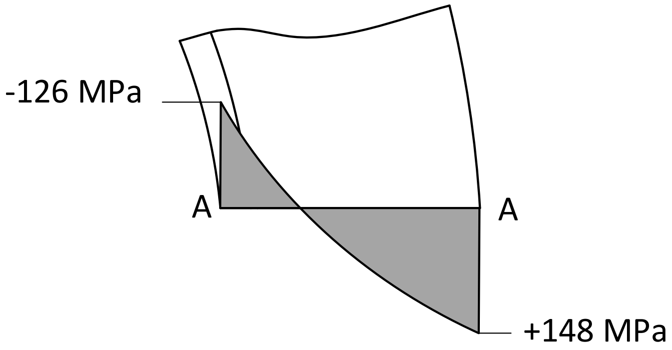

Fig. 4

Il calcolo dello spostamento relativo delle estremità della trave può essere effettuato applicando il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) sui sistemi di forze e spostamenti schematizzati, considerando l'asse baricentrico della struttura, come in fig. 5. A causa della simmetria della struttura e dei carichi rispetto all'orizzontale passante per la sezione A-A, possiamo studiare solo metà struttura per il calcolo dello spostamento δ. L'avvicinamento degli estremi B e C sarà il doppio dello spostamento δ calcolato.

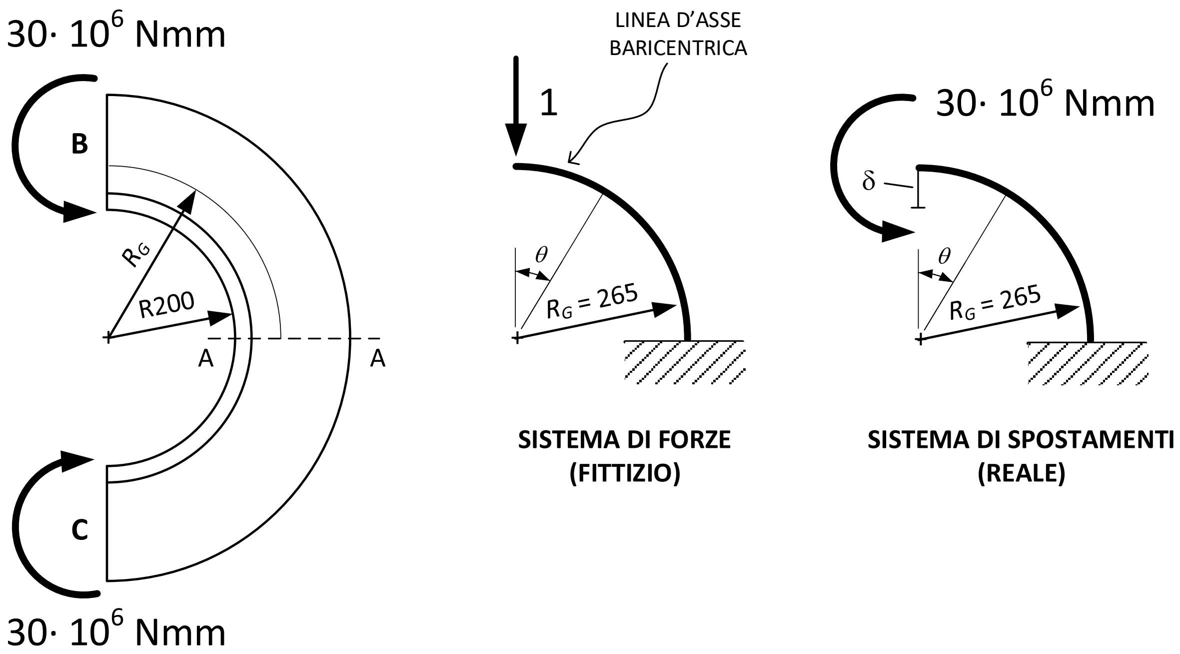

Fig. 5

Poichè nel sistema di spostamenti sono presenti solo azioni flettenti (M), è sufficiente limitarsi al calcolo dei soli momenti flettenti *M'* nel sistema di forze.

Le azioni interne nei due sistemi rilevanti ai fini del calcolo di δ sono dunque le seguenti

SISTEMA DI SPOSTAMENTI

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad M = -30 \cdot 10^6 \ \text{Nmm} \quad \rightarrow \quad d\varphi = \frac{M}{E \cdot y_G \cdot A} d\theta = \frac{-30 \cdot 10^6}{210000 \cdot 10.4 \cdot 6250} d\theta$$

SISTEMA DI FORZE

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad M' = -1 \cdot R_g \cdot sin(\theta) = -265 \cdot sin(\theta)$$

Di conseguenza, l'equazione del PLV ($L_{est} = L_{int}$) si può esprimere nel modo seguente:

$L_{est} = 1 \cdot \delta$

$$L_{int} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -265 \cdot sin(\theta) \cdot \frac{-30 \cdot 10^6}{210000 \cdot 10.4 \cdot 6250} d\theta = 0.582 \text{ mm}$$

$\delta = 0.582$ mm

L’avvicinamento relativo delle due estremità vale infine $2\delta = 1.16$ mm