

Logica e insiemistica

Teoria

Regole e fallacie

Regole: MODUS PONENS

$$\frac{A \longrightarrow B \quad A}{B}$$

MODUS TOLLENS

$$\frac{A \longrightarrow B \quad \neg B}{\neg A}$$

Fallacie: Negazione dell'antecedente

$$\frac{A \longrightarrow B \quad \neg A}{\neg B}$$

Affermazione del conseguente

$$\frac{A \longrightarrow B \quad B}{A}$$

Tautologie

Alcune tautologie:

1. Legge dell'a-fortiori: $A \longrightarrow (B \longrightarrow A)$
2. Legge della doppia negazione: $A \longleftrightarrow \neg\neg A$
3. Legge del terzo escluso: $A \vee \neg A$
4. Principio di non contraddizione: $\neg(A \wedge \neg A)$
5. Legge di contrapposizione: $(A \longrightarrow B) \longleftrightarrow (\neg B \longrightarrow \neg A)$
6. Legge di Duns Scoto (o *ex falso quodlibet*): $A \wedge \neg A \longrightarrow B$
7. 1° Legge di De Morgan: $\neg(A \wedge B) \longleftrightarrow \neg A \vee \neg B$
8. 2° legge di De Morgan: $\neg(A \vee B) \longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
9. Legge di Filone: $(A \longrightarrow B) \longleftrightarrow (\neg A \vee B)$
10. Legge di Crisippo: $(A \longrightarrow B) \longleftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$

Esercizi

1. Si verifichi, utilizzando le tavole di verità, che le regole descritte sopra sono valide mentre le fallacie non lo sono.
2. Si verifichi, utilizzando le tavole di verità, che le formule elencate sopra sono effettivamente tautologie.
3. La formula $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ è una tautologia? In caso negativo, esibire il controesempio.
4. Si dica se la formula $\alpha \rightarrow (\neg\beta \wedge \alpha \rightarrow \beta)$ è soddisfacibile, se è una tautologia oppure se è una contraddizione. Nel caso non sia una tautologia si indichi il controesempio.
5. La formula $\alpha \wedge \beta \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ è falsificabile? In caso di risposta positiva si dica per quali assegnazioni.
6. Si considerino i seguenti insiemi: $A = \{\{1\}, 2, 3, 5\}$, $B = \{1, 4, 5, 6\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 5\}$. Si calcolino $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap (B \cap C)$, $A \cup B$, $(A \cup B) \setminus C$, $C \setminus A$, $B \setminus A$
7. Dati $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 12\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 12, x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 15\}$. Calcolare $A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cup C$, $A \cap (B \cup C)$
8. Riferendosi agli insiemi A, B, C dati nell'esercizio precedente, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false?
 - A) $9 \in (A \cup B)$
 - B) $B \subset C$
 - C) $5 \in (A \cap B)$
 - D) $B \subset ((A \cap B) \cup C)$
9. Un uomo viene processato per furto. Il pubblico ministero e l'avvocato difensore, nell'ultima udienza, fanno le seguenti affermazioni:
PM: Se l'imputato è colpevole, allora ha avuto un complice.
Avvocato: Ciò non è vero.
Sapendo che l'affermazione dell'avvocato è vera, cosa si può dire con certezza sull'imputato?
10. Un chimico, studiando una soluzione che si era tinta di arancione, constatò che in essa era presente del sodio o del potassio (o entrambi); inoltre osservò che, se non c'era sodio, c'era ferro e che, se c'era potassio, c'era anche iodio.
Quale di queste situazioni si può verificare?
 - A) La soluzione contiene solo potassio e ferro
 - B) La soluzione contiene solo ferro e iodio
 - C) La soluzione contiene sodio e potassio e non contiene iodio
 - D) La soluzione non contiene nè sodio nè iodio
 - E) La soluzione contiene solo sodio