Università di Cagliari

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica

V.le Merello, 92; 09123, Cagliari (Italia)

Tel: (+39) 070.675.5604
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it

Esercitazione Guidata Matematica 1

14 /11/2013

1. Calcolare l'ordine di infinitesimo della seguente funzione

$$f(x) = (1-\cos(x))^2 \ln(1+2x).$$

2. Scrivere l'equazione della retta tangente a $f(x) = \dfrac{3+3x+3\sin(x)}{1+x}$ nel punto $x_0 = 0$.

3. Data la funzione $f(x) = |e^x - e| - 1$ calcolare:
   a) campo di esistenza e comportamento agli estremi,
   b) crescenza e convessità,
   c) eventuali punti di non derivabilità,
   d) disegnare il grafico.

   Successivamente, dire se è applicabile il Teorema di Weierstrass nell'intervallo $f(x) = [0,2]$ ed eventualmente applicarlo, calcolando il massimo ed il minimo assoluti della funzione in tale intervallo. Contraddice il risultato ottenuto il Teorema di Fermat? Perchè?

4 Scrivere il polinomio di Taylor di grado 3 che approssima la funzione $f(x) = e^{1+\sin(x)}$ nel punto $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

In Cagliari, 14/11/2013

Svolgimento

Es 1.

Osserviamo che $f(x)$ è definita se

$$1+2x>0 \iff x>-\frac{1}{2}$$

I punti che rendono $f(x)$ infinitesima sono

a. $x_0=0$

b. $x_0=2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots = 2k\pi$, $k=1,2,3\dots$

Caso a. L'infinitesimo campione (che è $x-x_0$) vale in questo caso x.

Bisogna cercare $\alpha>0$ t.c.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2\ln(1+2x)}{x^\alpha}=\ell \quad (\ell\neq 0 \text{ e finito})$$

Utilizzando $\frac{1-\cos x}{x^2}\to\frac{1}{2}$ per $x\to 0$ e $\frac{\ln(1+2x)}{2x}\to 1$ per $x\to 0$

Si ha

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{(1-\cos x)^2}{x^4}}_{\to(1/2)^2}\cdot\underbrace{\frac{\ln(1+2x)}{2x}}_{\to 1}=\frac{1}{4};$$

quindi $f(x)$ è infinitesimo di ordine 5 $(x^4\cdot 2x=2x^5)$ per $x\to 0$

Caso b. Se $x_0\to 2k\pi$, $k=1,2,3,\dots$ $1-\cos(x)\to 0$

mentre $\ln(1+2x)\to\ln(1+4k\pi)$.

In tal caso solo si analizza l'infinitesimo $1-\cos(x)$

Lo sviluppo notevole di $\cos(x)$ con $x \approx 0$ é:

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots$$

Generalizzando $\cos(f(x)) \approx 1 - \frac{f(x)^2}{2!} + \frac{f(x)^4}{4!} \dots$ $\quad f(x) \approx 0$, $x \approx x_0$

Si a che $\cos(x) = \cos(x - 2k\pi)$, $k = 1, 2, 3 \dots$ Periodicita'

Quindi $\cos(x - 2k\pi) \cong 1 - \frac{(x - 2k\pi)^2}{2!} + \frac{(x - 2k\pi)^4}{4!} \dots$

Per quanto riguarda l'ordine di infinitesimo, devo confrontare $f(x)$ con $(x - 2k\pi)^\alpha$, per $x \to 2k\pi$

Si ha $\lim_{x \to 2k\pi} \frac{(1 - \cos x)^2 \ln(1 + 2x)}{(x - 2k\pi)^\alpha} =$

$$= \lim_{x \to 2k\pi} \frac{\left(\frac{(x - 2k\pi)^2}{2!} - \frac{(x - 2k\pi)^4}{4!} + \dots \right)^4 \ln(1 + 2x)}{(x - 2k\pi)^\alpha} =$$

Vanno a 0 molto rapidamente rispetto a $(x-2k\pi)^4$

$$\lim_{x \to 2k\pi} \frac{\left(\frac{(x - 2k\pi)^4}{(2!)^2} + \overset{0}{\frac{(x - 2k\pi)^8}{(4!)^2}} - \overset{0}{\frac{2(x - 2k\pi)^6}{2! \cdot 4!}} + \dots \right) \ln(1 + 2x)}{(x - 2k\pi)^\alpha} = \frac{1}{4} \cdot \ln(1 + 4k\pi)$$

Se $\alpha = 4$; $f(x)$ è infinitesimo di ordine 4 per $x \to 2k\pi$

Es 2

l'eq. della tangente è:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$y_0 = f(x_0)$ e $m = f'(x_0)$

$f(x_0) = f(0) = 3.$

$$f'(x) = \frac{(3 + 3\cos x)(1+x) - (3 + 3x + 3\sin x)\cdot 1}{(1+x)^2};$$

$f'(0) = 3.$ Pertanto $y = 3 + 3x.$

Es 3.

a) Dominio: $\forall x \in \mathbb{R}; \mathcal{D} =]-\infty, +\infty[$

$$f(x) = \begin{cases} \underbrace{e^x - e - 1}_{f_1(x)}, & e^x - e \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e \Leftrightarrow x \geq 1 \\ \underbrace{-e^x + e - 1}_{f_2(x)}, & e^x - e < 0 \Leftrightarrow e^x < e \Leftrightarrow x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f_2(x) = \lim_{x \to -\infty} (-e^x + e - 1) = e - 1$$

$y = e - 1$ as. orizzontale

Prendo f_2 perché "$-\infty < 1$".

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim_{x \to +\infty} (e^x - e - 1) = +\infty$$

Prendo f_1 perché "$+\infty > 1$".

As. obliquo? $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e - 1}{x} = +\infty$ No As. OBL.

Hopital

b) $f'(x) = \begin{cases} \underbrace{e^x}_{f_1'(x)} & x \geq 1, \Rightarrow f'(x) > 0, \ f \text{ cresce} \\ \underbrace{-e^x}_{f_2'(x)} & x < 1, \Rightarrow f'(x) < 0, \ f \text{ decresce} \end{cases}$

$f''(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 1, \Rightarrow f''(x) > 0, \ f \text{ convessa} \\ -e^x & x < 1, \Rightarrow f''(x) < 0, \ f \text{ concava} \end{cases}$

c) Il punto $x = 1$ è un punto da analizzare perché separa una funzione ($f_1(x) = e^x - e - 1$) dall'altra ($f_2(x) = -e^x + e - 1$).

- Continuità in $x = 1$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f_1(x) = \lim_{x \to 1^+} (e^x - e - 1) = -1 \\ \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f_2(x) = \lim_{x \to 1^-} (-e^x + e - 1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{uguali!!!}$$

Quindi $\lim_{x \to 1} f(x) = -1$

Poi $f(1) = f_1(1) = -1$

$\Rightarrow f$ continua in $x = 1$

- Derivabilità in $x = 1$

$$\lim_{x \to 1} f'(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} f_1'(x) = \lim_{x \to 1^+} e^x = e \\ \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} f_2'(x) = \lim_{x \to 1^-} (-e^x) = -e \end{cases} \Rightarrow \text{Diversi !!!}$$

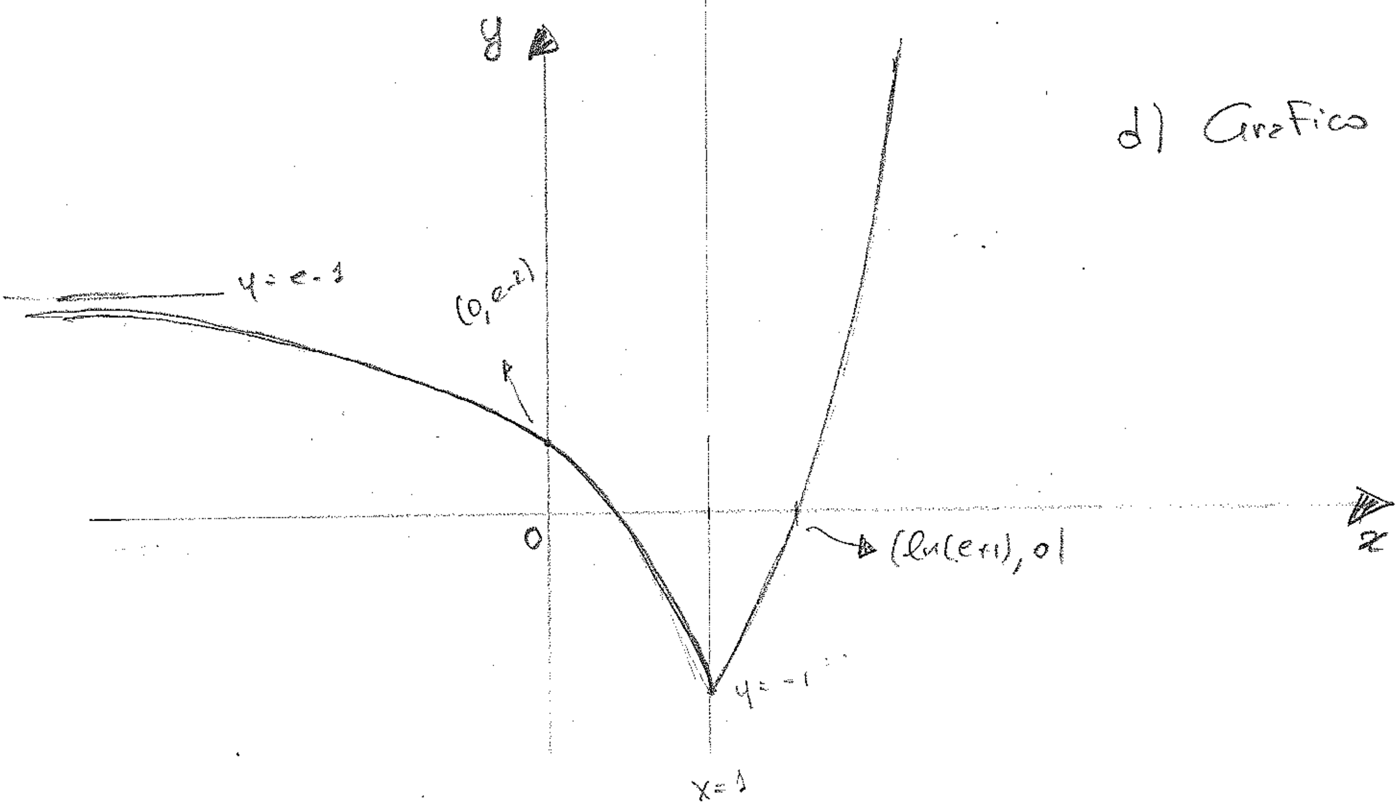
Non esiste $\lim_{x \to 1} f'(x) \Rightarrow f$ NON derivabile in $x = 1$

Si osservi che

$f(0) = e-2$ e che $f(x) = 0 \iff \begin{cases} e^x = e+1 & x \geq 1 \\ e^x = e-1 & x \leq 1 \end{cases}$

La funzione passa per $(\ln(e+1), 0)$ e $(\ln(e-1), 0)$

d) Grafico



Th Weierstrass Se $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato, allora ammette massimo e minimo assoluti

La funzione data è continua in $\mathbb{R}$, quindi anche in $[0,2]$; ammette quindi max e min assoluti.

Per calcolarli devo controllare il valore di f negli estremi ($f(0) = e-2$, $f(2) = e^2 - e - 1$), il valore di f nei punti di non derivabilità ($f(1) = -1$), ed il valore di f nei punti in cui la sua derivata è zero (punti stazionari); siccome $f'(x) \neq 0$, non ci sono punti stazionari.

Pertanto, il minimo assoluto è -1 e f lo raggiunge nel punto di non derivabilità $x = 1$ ed il massimo è $e^2 - e - 1$, raggiunto nell'estremo $x = 2$.

Th Fermat. Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ha un estremo (cioè un massimo o minimo) in $x_0 \in (a,b)$ e f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$

La funzione considerata ha in $x = 1$ un estremo ma 1 non è punto di derivabilità; quindi il teorema di Fermat non è contraddetto.

Es 4.

$$T_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!}$$

con $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$f(x_0) = e^2;$$

$$f'(x) = \cos(x) e^{1+\sin x} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

$$f''(x) = e^{1+\sin x} \cos^2(x) - \sin(x) e^{1+\sin x} \Rightarrow f''(x_0) = -e^2$$

$$f'''(x) = -\cos(x) e^{1+\sin(x)} + e^{1+\sin(x)} \cos^3(x) - 3e^{1+\sin x} \cos x \sin x \Rightarrow f'''(x_0) = 0$$

$$T_3(x) = e^2 - \frac{e^2}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Oss: Il polinomio di grado 3 non ha termini di terzo grado.