ESERCITAZIONE

Si vuole visualizzare la traiettoria del vettore di magnetizzazione, supposto inizialmente allineato lungo l'asse z (grazie all'azione di un campo magnetico statico, ad es. $B_0 = 1.5\ Tesla$), dopo che viene acceso un campo impulsivo a radiofrequenza, con pulsazione ω_L, durata $T_{\pi/2}$ e diretto lungo l'asse x del tipo

$$\mathbf{B}_1(t) = 2\,\mathrm{B}_{RF}\cos(\omega_L t)\,\mathbf{i}_x$$

Le componenti del vettore $\mathbf{M}$ variano secondo le seguenti espressioni

$$M_z(t) = M_0\cos(2\Omega t)$$
$$M_x(t) = \mathrm{M}_0\sin(2\Omega t)\sin(\omega_L t)$$
$$M_y(t) = \mathrm{M}_0\sin(2\Omega t)\cos(\omega_L t)$$

dove $\Omega = \frac{\mu_P B_{RF}}{\hbar}$, $\mu_P = 1.41\cdot 10^{-26}\ J/T$ è il momento magnetico di un protone, $\hbar = 1.055\cdot 10^{-34}\ J\cdot sec$ è la costante di Plank e $B_{RF} = 10^{-3}\ Tesla$. Si consideri per M_0 il valore della magnetizzazione dei protoni, per un volume $V_S = 1\ cm^3$ ($M_0 = 3.08\cdot 10^{-9}\cdot B_0\cdot V_{S[\mathrm{cm}^3]}$).

- Definire un intervallo temporale tale che la componente $M_z(t)$ vari da $-M_0$ a M_0.
  Per farlo basta considerare che l'argomento del coseno deve variare tra 0 e π, quindi t varia tra

  $$2\Omega t_1 = 0 \qquad t_1 = 0$$
  $$2\Omega t_2 = \pi \qquad t_2 = \frac{\pi}{2\Omega}$$

- Definire ω_L in modo tale che $\sin\omega_L t$ esegua $N_1 = 50$ oscillazioni nell'intervallo temporale definito al punto precedente ($\omega_L = N_1\cdot(2\Omega)$).
- Utilizzare la funzione plot3(Mx, My, Mz) per visualizzare la traiettoria della punta del dipolo magnetico.
- Modificare N_1 per vedere come cambia la traiettoria

In seguito il campo RF viene spento. La magnetizzazione torna a quella originale (M_0) seguendo una traiettoria sempre a spirale ma che si attenua esponenzialmente secondo le equazioni

$$M_z(t) = M_0\left[1 - e^{-\frac{t-T_{\pi/2}}{T_1}}\right] \qquad t \gg T_{\pi/2}\ \text{(trascurabile)}$$

$$\mathbf{M}_{xy}(t) = M_0 e^{-\frac{t}{T_2^*}}\left[\sin\omega_L t\mathbf{i}_x + \cos\omega_L t\mathbf{i}_y\right]$$

- si consideri T_1 pari a 5 volte il periodo delle funzioni oscillanti ($\sin\omega_L t$ e $\cos\omega_L t$) e T_2^* pari al periodo delle funzioni oscillanti

  $$T_1 = 5\cdot\frac{2\pi}{\omega_L} \qquad T_2^* = \frac{2\pi}{\omega_L}$$

- fare il grafico della traiettoria seguita dal vettore $\mathbf{M}$, utilizzando la funzione plot3 come fatto precedentemente plot3(Mx, My, Mz)

ESERCIZIO 1

Si vogliono riprodurre i grafici di Fig. 1 e Fig. 2 di pag. 16 delle dispense "***MRI.pdf***" rappresentanti l'intensità dello spettro del segnale ricevuto da una sezione di una risonanza magnetica. L'espressione dello spettro è data da

$$\hat{S}(\omega, T_E) = KM_0(x_0, 0)T_2^* \frac{1 - \exp\left[-\frac{T_E}{T_2^*}\right]\exp\left[-j(\omega - \gamma G_x x_0)T_E\right]}{1 + j(\omega - \gamma G_x x_0)T_2^*}$$

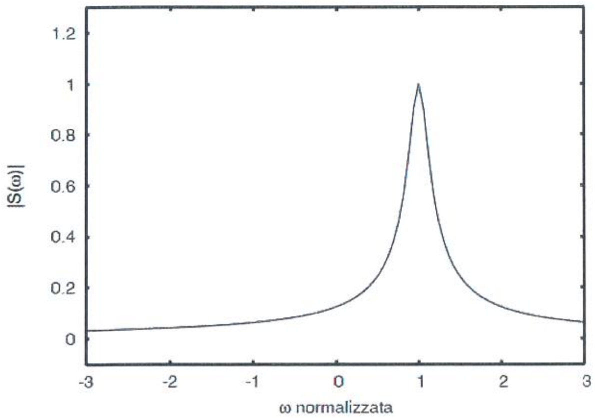


Fig. 1: $T_E = \infty$.

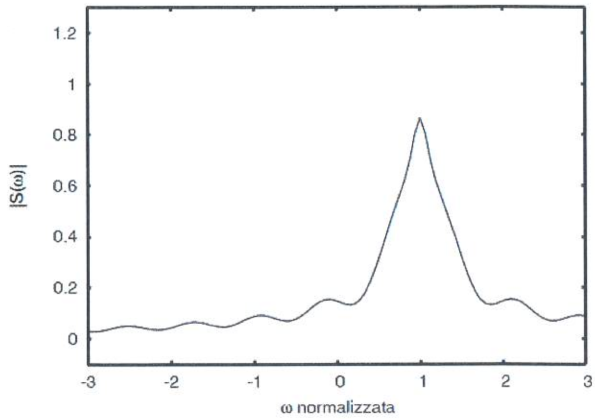


Fig. 2: $T_E = T_2^*$

Per la realizzazione dei grafici, considerare il modulo dell'espressione precedete, normalizzato al valore $KM_0(x_0, 0)T_2^*$, considerare il prodotto $\gamma G_x x_0$ normalizzato (quindi unitario) e si consideri anche ω normalizzata, facendola variare da -3 a 3. Si assuma $T_2^* = 8$.

- Il primo grafico è ottenuto considerando $T_E = \infty$. In tal caso l'espressione precedente si semplifica poiché il primo esponenziale al numeratore annulla il secondo termine al numeratore.
- Il secondo grafico è ottenuto considerando $T_E = T_2^*$. Una volta fatto il secondo grafico, vedere come cambia il grafico al variare di T_E, e verificare che man mano che cresce tende sempre più al primo grafico (per valori di $T_E > (3 \div 4)T_2^*$ i due grafici diventano praticamente indistinguibili).

ESERCIZIO 2

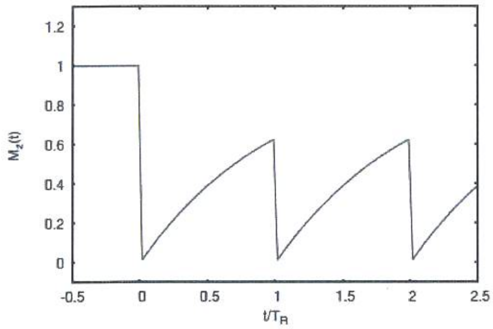


Fig. 1: Andamento di M_z.

Riprodurre il grafico di Fig. 1, pag. 18 delle dispense "***MRI.pdf***", ricordando che l'espressione della magnetizzazione lungo l'asse z è data da

$$M_z(t) = M_0\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right)\right]$$

e considerando che una sequenza di impulsi (spaziati di T_R) annulli la magnetizzazione lungo z ogni T_R. Si consideri $T_1 = 0.5$. Il valore di T_R lo si può determinare dal grafico notando che per $t = T_R$ si ha $M_z(T_R) = 0.6$ da cui, invertendo la formula precedente $T_R = -T_1 \ln(1 - 0.6)$.

Suggerimento: Fare il grafico solo di un "dente" della figura e ripeterlo. Ad esempio se Mz è il vettore che contiene una rampa, allora [Mz Mz Mz] ne conterrà 3 in fila.

ESERCIZIO 3

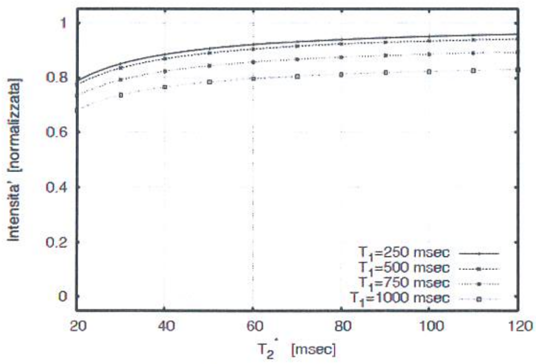
Riprodurre i grafici dell'intensità dell'immagine, data da

$$I(x_0, y_0) = KM_0(x_0, y_0)\left[1-\exp\left(-\frac{T_R}{T_1}\right)\right]\left\{T_2^*\left[1-\exp\left(-\frac{T_E}{T_2^*}\right)\right]\right\}$$

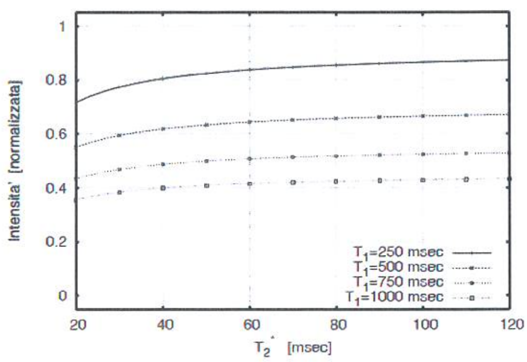
nei seguenti casi

- $T_R = 2000\ msec$ e $T_E = 10\ msec$
- $T_R = 600\ msec$ e $T_E = 10\ msec$
- $T_R = 3000\ msec$ e $T_E = 120\ msec$

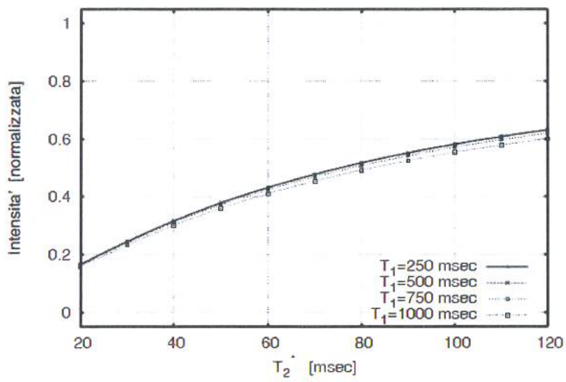
Ogni grafico mostra l'intensità I al variare di T_2^* che va da $20\ msec$ sino a $120\ msec$ e deve riportare 4 curve, ciascuna corrispondente a un diverso valore di T_1 che parte da $250\ msec$ e va avanti di passi di $250\ msec$. Considerare l'ampiezza di I normalizzata al valore $KM_0(x_0, y_0)T_E$.



$T_R = 2000\,msec$ e $T_E = 10\,msec$.



$T_R = 600\,msec$ e $T_E = 10\,msec$.



$T_R = 3000\,msec$ e $T_E = 120\,msec$.