ELEMENTI DI STRUTTURA DELLA MATERIA
Corso A - Prof. L. Colombo

Esercitazione no.11 - Si consideri un elettrone di energia E in movimento in una regione descritta da una barriera di potenziale come in figura (altezza della barriera: E_0; spessore della barriera: a). Studiare la funzione d'onda elettronica per questo problema.

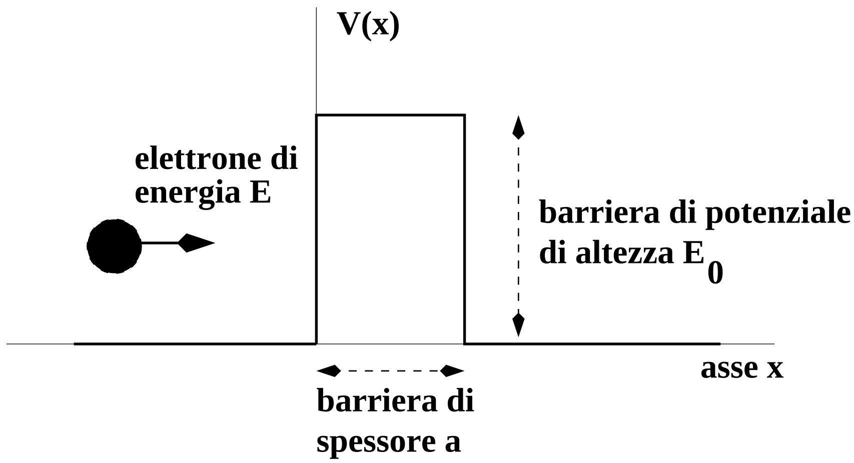

Figura 1: L'elettrone di energia E arriva da sinistra verso destra contro la barriera di potenziale di altezza E_0 e di spessore a.

Questo problema uno-dimensionale va affrontato scrivendo innanzitutto l'equazione di Schrödinger per il potenziale $V(x)$ assegnato. Utilizzando l'eq.(3.18) del testo[1] e le regole di costruzione per gli operatori quantistici, possiamo immediatamente scrivere

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x) \tag{1}$$

dove m_e è la massa dell'elettrone e il potenziale $V(x)$ è quello rappresentato in figura, ovvero:

[1] Quando ci riferiamo al testo, intendiamo il volume di L. Colombo, *Elementi di struttura della materia*, edito da Hoepli (Milano).

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ E_0 & \text{se } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{se } x > a \end{cases} \tag{2}$$

Conviene distinguerei, come fatto nella precedente esercitazione, tra i due diversi casi $E < E_0$ e $E > E_0$ e trattarli separatamente.

$\boxed{\textbf{Caso } E < E_0}$

Secondo la fisica classica una particella incidente con energia inferiore alla barriera non ha alcuna possibilità di superarla.

Ragionando in perfetta analogia a quanto fatto nella Esercitazione no.10, possiamo immediatamente scrivere la funzione d'onda $\psi(x)$ nella forma

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) = & A\mathrm{e}^{+ikx} + B\mathrm{e}^{-ikx} & \text{per } x < 0 \\ \psi_2(x) = & C\mathrm{e}^{+\alpha x} + D\mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{per } 0 \leq x \leq a \\ \psi_3(x) = & A'\mathrm{e}^{+ikx} & \text{per } x > a \end{cases} \tag{3}$$

dove

$$k = \sqrt{\frac{2m_e E}{\hbar^2}} \quad \text{e} \quad \alpha = \sqrt{\frac{2m_e(E - E_0)}{\hbar^2}} \tag{4}$$

Per quanto riguarda la soluzione $\psi_1(x)$ relativa alla regione $x < 0$, si estendono le considerazioni già fatte: essa rappresenta la sovrapposizione di un'onda incidente (che propaga da sinistra verso destra) e di un'onda riflessa (che propaga da destra verso sinistra). Nel caso, invece, della soluzione $\psi_2(x)$ relativa alla regione di barriera $0 \leq x \leq a$, essa rappresenta la sovrapposizone di un'onda che decade esponenzalmente a partire da $x = 0$ e di un'onda che corrisponde alla soluzione $\exp +(\alpha x)$ (vedi eq.(8) dell'Esercitazione no.10) che in questo caso non deve essere esclusa per motivi fisici: la larghezza di barriera, infatti, è in questo caso finita. Infine, la soluzione $\psi_3(x)$ per $x > a$ rappresenta la componente di onda trasmessa. La sua ampiezza A' è ovviamente diversa dall'ampiezza A dell'onda incidente, a causa del fatto che: (i) alla barriera si verifica riflessione e (ii) attraverso la barriera si verifica smorzamento (decadimento esponenziale) dell'onda.

Il risultato ottenuto è di importanza fondamentale: *secondo le leggi della meccanica quantistica esiste una probabilità non nulla che l'elettrone incidente sulla barriera di potenziale (con energia inferiore alla barriera) possa "penetrarla" e passarci attraverso.* Questo fatto è noto col nome di **effetto**

tunnel ed è alla base del principio di funzionamento di alcuni moderni dispositivi elettronici a stato solido. L'andamento complessivo della funzione d'onda è rappresentato in Fig.2.

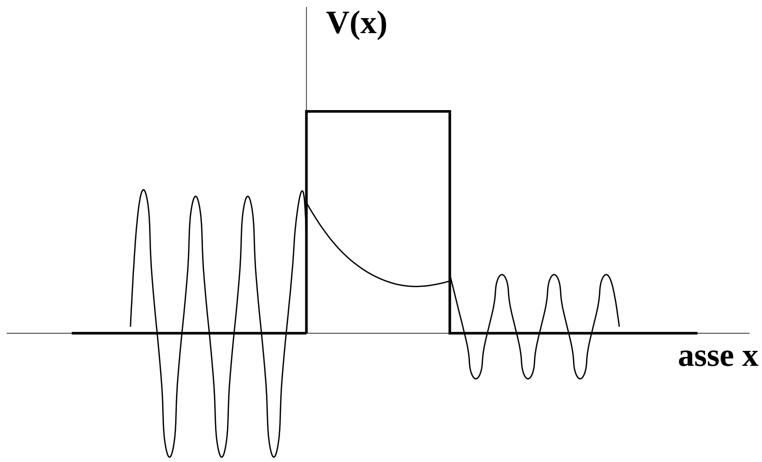

Figura 2: Andamento della funzione d'onda per un elettrone di energia E incidente (da sinistra verso destra) contro la barriera di potenziale di altezza $E_0 > E$ e di spessore a.

$\boxed{\textbf{Caso } E > E_0}$

Secondo la fisica classica una particella incidente con energia superiore alla barriera riesce a superare la barriera. Secondo la meccanica quantistica, invece, abbiamo imparato che esiste una probabilità non nulla che l'onda incidente venga comunque riflessa. Nel caso della barriera di spessore finito, abbiamo due diverse superfici sulle quali può avvenire riflessione: quella posta in $x = 0$ (su cui si riflette l'onda incidente da sinistra) e quella posta in $x = a$ (su cui si riflette l'onda trasmessa). Pertanto, possiamo immediatamente scrivere le soluzioni per le diverse regioni dello spazio come segue:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) = & A\mathrm{e}^{+ikx} + B\mathrm{e}^{-ikx}i \quad \text{per } x < 0 \\ \psi_2(x) = & C\mathrm{e}^{+i\beta x} + D\mathrm{e}^{-i\beta x} \quad \text{per } 0 \le x \le a \\ \psi_3(x) = & A'\mathrm{e}^{+ikx} \quad \text{per } x > a \end{cases} \tag{5}$$

dove

$$\beta = \sqrt{\frac{2m_e(E - E_0)}{\hbar^2}} \tag{6}$$

È interessante studiare il coefficiente di trasmissione in questo caso. Imponendo le opportune condizioni al contorno in $x = 0$ e in $x = a$ (vedasi l'Esercitazione no.10) è possibile determinare sia il valore di A che di A' e, pertanto, calcolare il coefficiente di trasmissione $T = A'/A$. Il risultato è riportato in Fig.3[2].

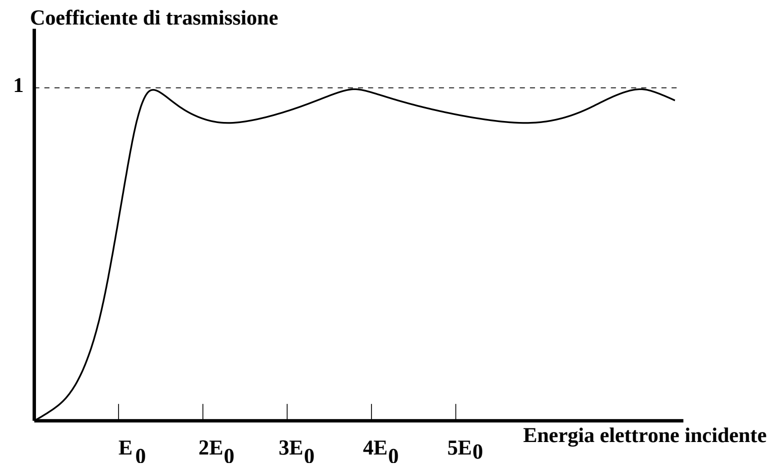

Figura 3: Andamento del coefficiente di trasmissione per un elettrone di energia E, incidente (da sinistra verso destra) contro la barriera di potenziale di altezza E_0 e di spessore a.

Come si può osservare, esistono particolari valori dell'energia E dell'elettrone incidente per i quali la barriera *è perfettamente trasparente*. Anche questo risultato non ha analogo classico.

[2] Abbiamo assunto che la velocità di propagazione delle onde sia la stessa a destra e a sinistra della barriera.