ENUNCIATI DI ESAMI DI ANALISI MATEMATICA 1

1. Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange. Dire se è applicabile alla funzione $f(x) = e^{x}\left(|x-1|+1\right)$ nell'intervallo [0,2] motivando la risposta.
2. Enunciare il teorema di de l'Hospital. Utilizzandolo calcolare $\lim_{x\to+\infty} x\left(arctgx - \frac{\pi}{2}\cos\frac{1}{x}\right)$.
3. Definizione di integrale generalizzato per una funzione non limitata. Calcolare $\int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx$ (si utilizzi il metodo di sostituzione).
4. Data la funzione $f(x) = \ln\left[(2-x)^2(1+x)\right]$ calcolare
a) campo di esistenza e comportamento agli estremi,
b) intervalli dove cadono le intersezioni con gli assi,
c) massimi e minimi,
d) disegnare il grafico.

1. Data la funzione $f(x) = \frac{x}{\ln^3|x|}$ calcolare
a) campo di esistenza e comportamento agli estremi,
b) massimi e minimi,
c) punti di flesso,
d) disegnare il grafico
2. Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle. Dire se è applicabile alla funzione $f(x) = e^{2x}\left(|x^2-x|-2\right)$ nell'intervallo [-1,2] motivando la risposta.
3. Formula di Mac-Laurin e ipotesi di validità. Calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x}{tg^2 x - tgx^2}$ utilizzando gli sviluppi di Mac-Laurin.
4. Definizione di integrale generalizzato per una funzione non limitata. Calcolare $\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ (si utilizzi il metodo di sostituzione).

---

1. Data la funzione $f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x^2}{x-1}\right)}$ calcolare
a) campo di esistenza e comportamento agli estremi,
b) massimi e minimi,
c) eventuali punti di flesso,
d) disegnare il grafico
2. Enunciare il teorema degli zeri delle funzioni continue. Applicarlo alla funzione $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ nell'intervallo [-1,2] motivando la risposta.
3. Teorema di De l'Hospital e ipotesi di validità. Calcolare, utilizzandolo, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 + \log(1-x)}{x^2 sen(3x)}$.
4. Definizione di integrale generalizzato del tipo $\int_a^{\infty} f(x)dx$. Calcolare $\int_0^{\infty}\frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$.

1. Data la funzione $f(x) = Arctg\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$ calcolare
a) campo di esistenza e comportamento agli estremi,
b) massimi e minimi,
c) eventuali punti di flesso,
d) disegnare il grafico
2. Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange. Dire se è applicabile alla funzione $f(x) = arcsen(x)$ nell'intervallo [-1,1] motivando la risposta.
3. Formula di Mac-Laurin e ipotesi di validità. Calcolare utilizzando gli sviluppi di Mac-Laurin $\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x-1)+e^x-1}{(1-\cos x)tan(x)}$.
4. Definizione di integrale definito. Calcolare $\int_1^2 \sqrt[3]{x^2}\ln x\,dx$ (si utilizzi il metodo per parti).

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it

1) Enunciare il teorema di Weierstrass. Verificare che la funzione $f(x) = |2 - x - x^2|$ soddisfa le ipotesi del teorema in $[a,b] \subset R$.
Determinare i massimo e minimo assoluti di *f(x)*in [-2, 3].

2) Definizione di funzione infinita e confronto tra infiniti.
Utilizzandolo calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + \sqrt{4x^4} + x + \ln x}{\sqrt[3]{2x^4} + 3x^2 + \ln x^2}$

3) Calcolare l'area della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione $y = \log(1-x)$ e l'asse delle *x* con $x \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$.

4) Data la funzione $f(x) = \frac{x}{x^3 - 1}$ calcolare
a) campo di esistenza e comportamento agli estremi,
b) massimi e minimi,
c) eventuali punti di flesso,
d) disegnare il grafico.

1) Enunciare e dimostrare il teorema di unicità del limite finito di una funzione f(x) per $x \to x_0$.

2) Definizione di funzione infinitesima e ordine di infinitesimo.
Calcolare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ per $x \to 1$.

3) Definizione di integrale generalizzato per una funzione continua in un intervallo illimitato $[a, +\infty[$. Dire se esiste, ed eventualmente calcolare, il seguente integrale generalizzato $\int_2^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^3} dx$.

4) Data la funzione $f(x) = x^3 e^{-x}$ calcolare
a) campo di esistenza e comportamento agli estremi,
b) punti di discontinuità (classificarli),
c) massimi e minimi,
d) disegnare il grafico.

1) Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat. Data la $f(x) = |x - 1|$, che ha un minimo assoluto in x=1, dire se soddisfa il teorema in [0,2] motivando la risposta.

2) Illustrare la formula di Mac-Laurin. Utilizzandola calcolare il limite
$$\lim_{x\to+0} \frac{x - arctg 2x}{x(e^{3x^2} - 1)}$$

3) Calcolare l'area della regione piana delimitata dalla funzione $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ e dalle rette verticali $x = -1$ e $x = 2$.

4) Data la funzione $f(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$ calcolare
a) campo di esistenza e comportamento agli estremi,
b) punti di discontinuità (classificarli),
c) massimi e minimi,
d) disegnare il grafico.

1) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale. Utilizzandolo determinare i punti critici della funzione integrale $F(x) = \int_0^x \frac{t-1}{t^2+1} dt$ e classificarli.

2) Utilizzando i limiti notevoli calcolare il seguente limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-3x) + x\sin x}{\ln(1+\sin x) + \cos 2x - 1}$$

3) Data la funzione $f(x) = \frac{1+x}{1-|x|}$ calcolare
a) campo di esistenza e comportamento agli estremi,
b) massimi e minimi,
c) punti di discontinuità e di non derivabilità,
d) disegnare il grafico

4) Calcolare l' integrale $\int_0^1 \frac{4x^3+5}{2x+3} dx$

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it

1) Significato geometrico dell'integrale definito. Calcolare l'area della regione piana compresa tra la funzione *h(x)*= $\frac{1-x}{x^2}$ e l'asse delle *x* con $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

2) Data la funzione $f(x) = \log(9 - x^2)$ determinare
   a) il campo di esistenza e comportamento agli estremi,
   b) crescenza e decrescenza e calcolare i punti critici,
   c) dire se è applicabile il Teorema di Rolle in [-1,1],
   d) tracciare il grafico.

3) Calcolare il limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{\sin x - tgx}$.

4) Definizione di funzione derivabile in un punto e suo significato geometrico. Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $g(x) = \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}$ in $x = \frac{\pi}{3}$

1. Data la funzione $f(x) = \frac{1}{\ln(x-1)}$
   a) calcolare il campo di esistenza e il comportamento della funzione ai suoi estremi.
   b) crescenza e decrescenza,
   c) concavità e convessità,
   d) tracciare il grafico.

2. Definizione di funzione derivabile in un punto e suo significato geometrico. Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = \sin(x^2 - \pi^2)$ in $x = \pi$.

3. Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange. Successivamente, dire se è applicabile alla funzione $y = \sqrt{x-1}$ nell'intervallo $[1,5]$, e calcolare il valore del punto corrispondente alla tesi del teorema.

4. Utilizzando il metodo di integrazione per parti, calcolare $\int (2x+1)e^{x+1}dx$.

---

1. Calcolare l'area della regione di piano compresa tra le parabole di equazione $y = (x-1)^2$ e $y = 2x - x^2$.

2. Enunciare il criterio della radice per le serie numeriche. Utilizzandolo studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$.

3. Data la funzione $f(x) = \frac{x^2}{\ln(x)}$, calcolare
   a) campo di esistenza e comportamento agli estremi,
   b) studiare la continuità e derivabilità,
   c) crescenza e decrescenza,
   d) disegnare il grafico.

4. Enunciare la formula di Mac Laurin e scriverla per la funzione $f(x) = \sqrt{x+1}$ fino al terzo ordine.

1. Data la funzione $f(x) = \frac{e^{-x}}{x-1}$ calcolare
   a. campo di esistenza e comportamento agli estremi,
   b. massimi e minimi,
   c. eventuali punti di flesso,
   d. disegnare il grafico

2. Calcolare l'area della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione $y = |\ln(1-x)|$ e l'asse delle *x* con $x \in \left[-2, \frac{1}{2}\right]$.

3. Definizione di serie numerica convergente. Enunciare e dimostrare il criterio del confronto per la convergenza di una serie numerica. Utilizzandolo dimostrare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^3+1}$.

4. Scrivere, illustrando tutti i passaggi, il polinomio di Mac-Laurin di grado 3 che approssima la funzione $f(x) = \sqrt{2x+1}$.

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it

1. Illustrando tutti i passaggi, disegnare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1+x}{1-|x|}$.
2. Determinare l'area della porzione di piano delimitata dall'asse delle x con $x \in [-1,1]$,e dal grafico della funzione $y = xe^{3x^2}$.
3. (solo per le matricole dell'A.A. 2013/14, crediti 9) Determinare l'unica soluzione del problema $\begin{cases} y' = (x^2+1)(1+y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$
4. Studiare il carattere e, dove possibile, calcolare la somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (x-3)^n$.
5. Calcolare il limite $\lim_{x \to +0} \dfrac{x - \arctan 2x}{x(e^{x^2}-1)}$.
6. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 3 che approssima la funzione $y = \cos(4x)$ in $x = \pi$.
7. Definizione di derivata prima di una funzione f(x) in un punto x_0 e suo significato geometrico. Definizione di funzione continua in un punto x_0. Illustrare con degli esempi il legame tra la derivabilita' e la continuità di una funzione f(x) in x_0.

---

1. Illustrando tutti i passaggi, disegnare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.
2. Calcolare l'area della porzione di piano compresa tra le due parabole di equazione $y = 1+\sqrt{x}$ e $y = 1+x^2$.
3. Definizione di integrale generale per un'equazione differenziale del primo ordine. Trovale l'integrale generale di $y' = x^2(1+y^2)$.
4. Studiare il carattere della seguente serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+3n+2}$ e calcolare la sua somma.
5. Utilizzando i prodotti notevoli calcolare il limite $\lim_{x \to 1} \dfrac{\tan^2(x-1) + \ln^2(x)}{1-\cos(x-1)}$
6.) Definizione di funzione derivabile in un punto e suo significato geometrico. Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = \sin(x^2 - \dfrac{\pi^2}{4})$ in $x = \dfrac{\pi}{2}$.
7. Definizione di massimo e minimo relativo per una funzione f(x). Ricerca dei punti di massimo e minimo per f(x) in un intervallo [a,b].

---

1. Illustrando tutti i passaggi, disegnare il grafico della funzione $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$.
2. Calcolare l'integrale $\int_0^1 \dfrac{4x^3+5}{x+5}dx$
3. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale $y'' - 2y' + 2y = 1 + x^2$.
4. Studiare il carattere della seguente serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2}{e^n}$.
5. Scrivere il polinomio di Mac-Laurin di grado 3 che approssima la funzione $y = 1 - \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.
6. Definizione di funzione infinitesima per $x \to x_0$ e loro confronto. Utilizzando il confronto calcolare $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\sin^2(\sqrt{x}) + x^2 + x^6}{(e^x-1)^2 + \sqrt{x}}$.
7. Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

---

1. Illustrando tutti i passaggi, disegnare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1-2x}{1+|x|}$
2. Calcolare l'area della porzione di piano, nel primo quadrante, racchiusa dalle due curve di equazione $y = x^3$ e $y = 4x - 3x^2$.
3. Risolvere la seguente equazione differenziale $y'' - 2y' = 2x^2$.
4. Studiare il carattere della seguente serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{2^{2n}}$.
5. Utilizzando i limiti notevoli calcolare il $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x)\tan x}{1-\cos x}$.
6. Data la funzione $f(x) = \ln(x + x^2 + 1)$ scrivere l'equazione della parabola che la approssima nel punto di ascissa x=0.
7. Enunciare e dimostrare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it

1. Illustrando tutti i passaggi, disegnare il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{1}{x\ln(x)}$
2. Calcolare l'area della porzione di piano, nel primo quadrante, racchiusa dalle due curve di equazione $y=x^3$ e $y=4x-3x^2$.
3. Risolvere la seguente equazione differenziale $y''-2y'=2x^2$.
4. Studiare il carattere della seguente serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{\log n}{n}$.
5. Utilizzando i limiti notevoli calcolare il $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)\tan x}{1-\cos x}$.
6. Data la funzione $f(x)=e^{x+x^2+1}$ scrivere l'equazione della parabola che la approssima nel punto di ascissa x=0.
7. Enunciare e dimostrare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.

1. Illustrando tutti i passaggi, disegnare il grafico della funzione $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$.
2. Calcolare l'integrale $\int_0^2\dfrac{2-x}{9-x^2}dx$
3. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale $y''-2y'+2y=1+x^2$.
4. Studiare il carattere della seguente serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$
5. Scrivere il polinomio di Mac-Laurin di grado 3 che approssima la funzione $y=1-\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)$.
6. Definizione di funzione infinitesima per $x\to x_0$ e loro confronto. Utilizzando il confronto calcolare $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2(\sqrt{x})+x^2+x^6}{(e^x-1)^2+\sqrt{x}}$.
7. Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it