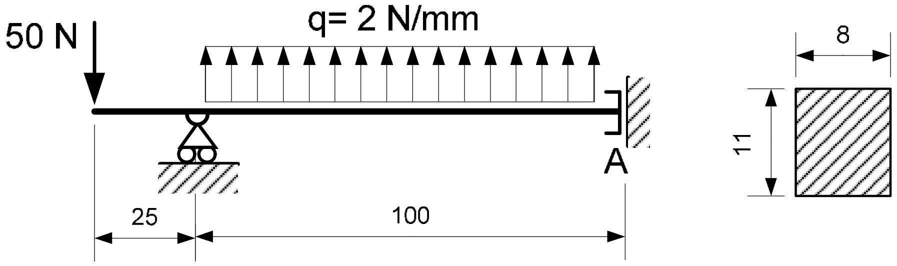
ESERCIZI SVOLTI O CON TRACCIA DI SOLUZIONE SU

# EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA

**v 0.9**

Calcolare lo spostamento verticale del pattino A della struttura utilizzando l'equazione della linea elastica. Materiale: acciaio (E=210 GPa)

(Prova scritta 15 luglio 2013)

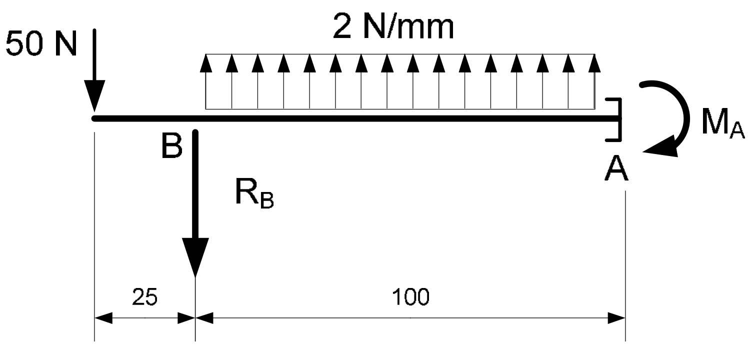



Utilizziamo N e mm come unità di misura.

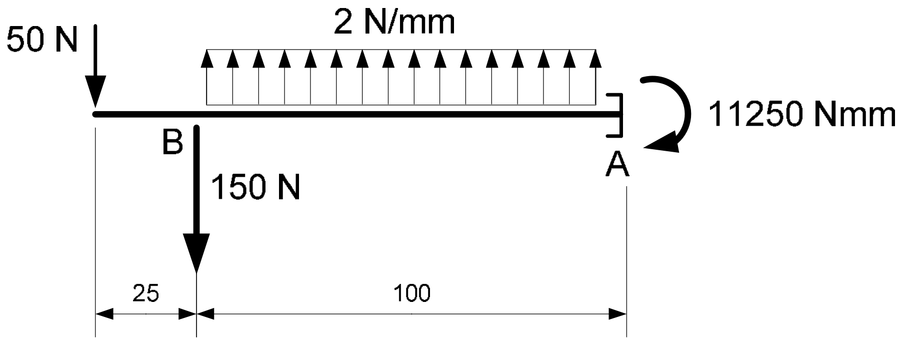
Si avrà allora

$E$ = 210000 N/mm$^2$

$$J = \frac{8 \cdot 11^3}{12} = 887.3\ mm^4$$




Le reazioni vincolari al carrello a terra in B ($R_B$) ed al pattino a terra in A ($M_A$) possono essere calcolate con semplici equazioni di equilibrio della trave (per esempio alla traslazione in direzione verticale ed alla rotazione intorno al carrello B). Si ricava $R_B$ = 150 N ed $M_A = 11250$ Nmm.

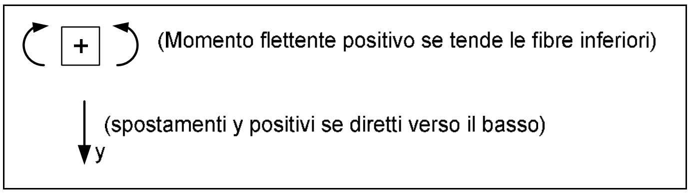



Per calcolare lo spostamento verticale del pattino A è sufficiente scrivere l'equazione della linea elastica nel tratto A-B.

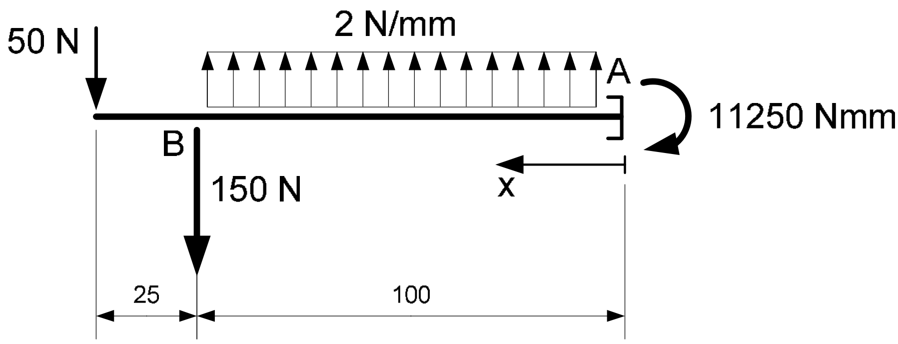
L'equazione generale della linea elastica è la seguente

$$y'' = -\frac{M(x)}{EJ},$$

valida per le seguenti convenzioni di segno:




Scegliendo l'origine delle ascisse in A, come dalla figura seguente,




l'equazione del momento flettente nel tratto A-B può essere scritta come:

$$M(x) = -11250 + 2\frac{x^2}{2} \qquad per \quad 0 < x < 100$$

L’equazione della linea elastica nel tratto A-B (0<$x$<100) vale pertanto

$$y'' = -\frac{-11250 + 2\frac{x^2}{2}}{EJ} \qquad per\ \ 0 < x < 100$$

da cui

$$EJ\,y'' = -x^2 + 11250 \qquad (1)$$

e, integrando in sequenza,

$$EJ\,y' = \frac{-x^3}{3} + 11250x + C_1 \qquad (2)$$

$$EJ\,y = -\frac{1}{3}\frac{x^4}{4} + 11250\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \qquad (3)$$

Le costanti $C_1$ e $C_2$ si possono determinare imponendo le opportune condizioni al contorno nel tratto A-B (0<$x$<100):

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a)* | Nel punto A ($x$=0), in corrispondenza del pattino, la rotazione della linea d’asse della struttura deve essere nulla (il pattino non permette la rotazione della trave) | – | $y' = 0 \quad in\ \ x = 0$ |
| *b)* | Nel punto B ($x$=100), in corrispondenza del carrello, lo spostamento verticale della linea d’asse della struttura deve essere nullo (il carrello non permette spostamenti verticali) | – | $y = 0 \quad in\ \ x = 100$ |

Imponendo la condizione *a)* nell’equazione (2) si ricava:

$$EJ \cdot 0 = \frac{-0^3}{3} + 11250 \cdot 0 + C_1$$

e dunque $C_1 = 0$

Imponendo la condizione *b)* nell’equazione (3), ed essendo $C_1$=0, si ricava:

$$0=-\frac{1}{3}\cdot\frac{100^4}{4}+11250\cdot\frac{100^2}{2}+C_1\cdot 100+C_2=-\frac{1}{3}\cdot\frac{100^4}{4}+11250\cdot\frac{100^2}{2}+C_2$$

da cui

$$C_2=+\frac{1}{3}\cdot\frac{100^4}{4}-11250\cdot\frac{100^2}{2}=-47.917E6$$

L'equazione (3) si può quindi scrivere come:

$$EJ\,y=-\frac{x^4}{12}+11250\frac{x^2}{2}-47.917E6$$

ed anche come

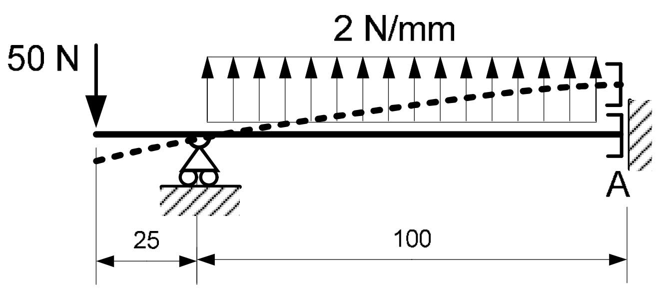
$$y=\frac{1}{EJ}\left(-\frac{x^4}{12}+11250\frac{x^2}{2}-47.917E6\right)$$

Lo spostamento verticale *y* del pattino si può quindi ricavare dalla precedente equazione imponendo il valore *x*=0:

$$y=\frac{1}{EJ}\left(-\frac{0^4}{12}+11250\frac{0^2}{2}-47.917E6\right)=\frac{-47.917E6}{210000\cdot 887.3}=-0.257mm$$

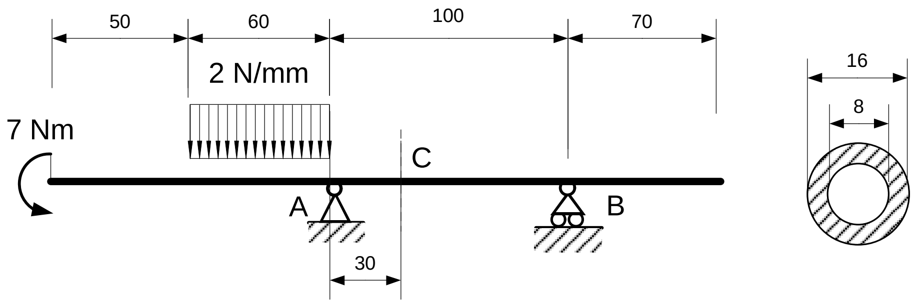
Poichè il valore di *y* è negativo, lo spostamento è diretto verso l'alto (per le convenzioni scelte, *y* è positivo se diretto verso il basso).

La deformata qualitativa (e non in scala) della struttura è rappresentata nella figura seguente.



Data la trave di figura (Alluminio; E = 70 GPa), si richiede di determinare l'equazione della linea elastica nel tratto A-B e di calcolare (sfruttando l'equazione della linea elastica) lo spostamento verticale della sezione C.

(Prova scritta 28 gennaio 2013)

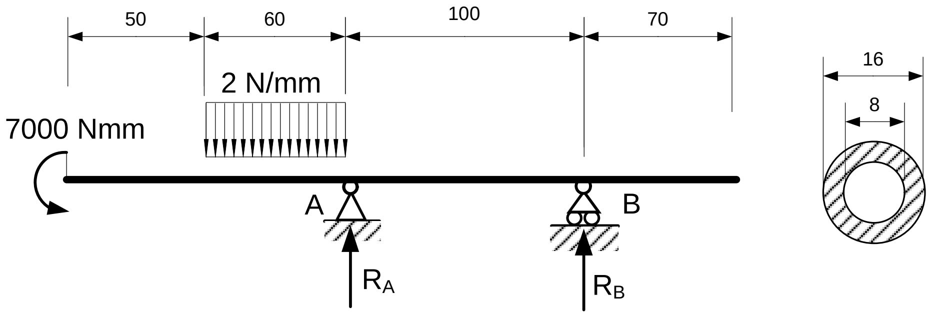



Utilizziamo N e mm come unità di misura.

Si avrà allora

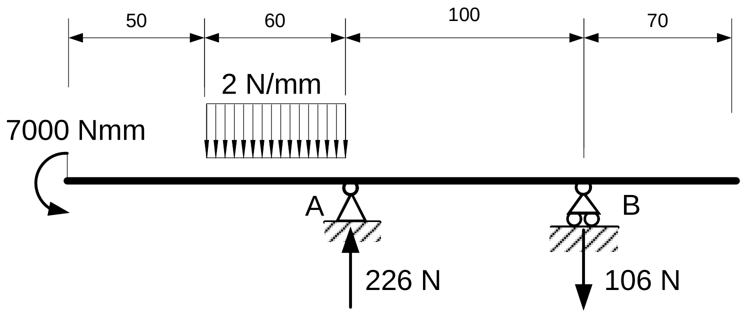
$E$ = 70000 N/mm$^2$

$$J = \frac{p\,16^4}{64} - \frac{p\,8^4}{64} = 3016\,mm^4$$




Le reazioni vincolari al carrello a terra in B ($R_B$) ed alla cerniera a terra in A ($R_A$) possono essere calcolate con semplici equazioni di equilibrio della trave (per esempio alla rotazione intorno al punto A ed alla traslazione in direzione verticale).

Si ricava $R_A$ = 226 N ed $R_B$ = -106 N.

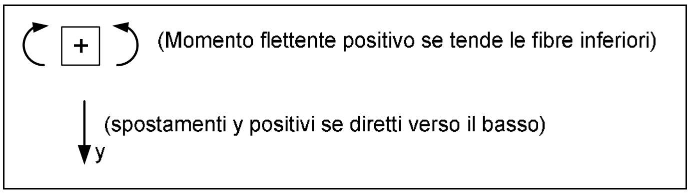



Per calcolare lo spostamento verticale della trave nel punto C è sufficiente utilizzare l'equazione della linea elastica nel tratto A-B.

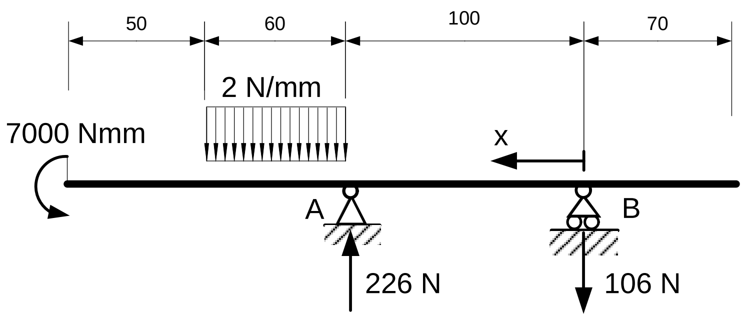
L'equazione generale della linea elastica è la seguente

$$y''=-\frac{M(x)}{EJ},$$

valida per le seguenti convenzioni di segno:




Scegliendo l'origine delle ascisse in B, come dalla figura seguente,




l'equazione del momento flettente nel tratto B-A può essere scritta come:

$M(x) = -106 \cdot x \qquad per \;\; 0 < x < 100$

L’equazione della linea elastica nel tratto B-A (0<$x$<100) vale pertanto

$$y'' = -\frac{-106x}{EJ} = +\frac{106x}{EJ} \qquad per \;\; 0 < x < 100$$

da cui

$$EJ\, y'' = 106\, x \qquad (1)$$

e, integrando in sequenza,

$$EJ\, y' = 106 \frac{x^2}{2} + C_1 \qquad (2)$$

$$EJ\, y = 106 \frac{x^3}{6} + C_1\, x + C_2 \qquad (3)$$

Le costanti $C_1$ e $C_2$ si possono determinare imponendo le opportune condizioni al contorno nel tratto B-A (0<$x$<100):

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a)* | Nel punto B ($x$=0), in corrispondenza del carrello, lo spostamento verticale della linea d’asse della struttura deve essere nullo (il carrello non permette spostamenti verticali) | – | $y = 0 \quad in \;\; x = 0$ |
| *b)* | Nel punto A ($x$=100), in corrispondenza della cerniera, lo spostamento verticale della linea d’asse della struttura deve essere nullo (la cerniera non permette spostamenti verticali) | – | $y = 0 \quad in \;\; x = 100$ |

Imponendo la condizione *a)* nell’equazione (3) si ricava:

$$EJ \cdot 0 = 106 \cdot \frac{0^3}{6} + C_1 \cdot 0 + C_2 = C_2$$

e dunque $C_2 = 0$

Imponendo la condizione *b)* sempre nell’equazione (3), ed essendo $C_2$=0, si ricava:

$$EJ \cdot 0 = 106 \cdot \frac{100^3}{6} + C_1 \cdot 100$$

da cui

$$C_1 = -176667$$

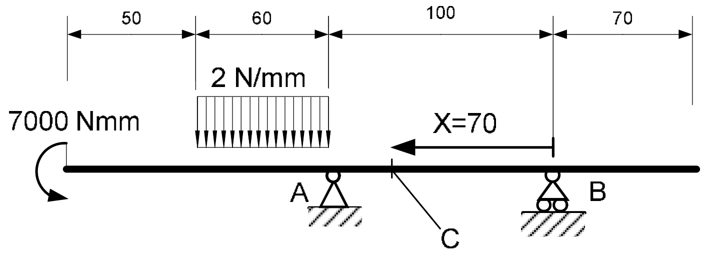
L'equazione (3) si può quindi scrivere come:

$$EJ\, y = 106 \frac{x^3}{6} - 176667\, x$$

ed anche come

$$y = \frac{1}{EJ}\left(106 \frac{x^3}{6} - 176667\, x\right)$$

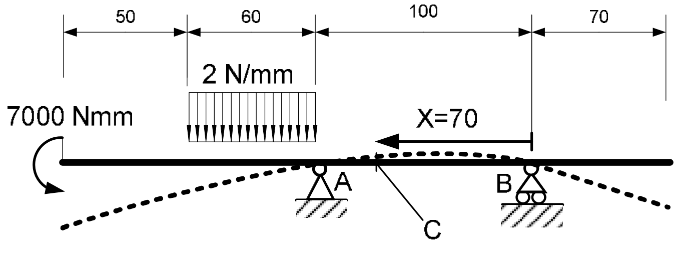
Lo spostamento verticale *y* della linea d'asse della trave nel punto C si può quindi ricavare dalla precedente equazione imponendo il valore *x*=70 (poichè l'origine delle x è in B):




$$y = \frac{1}{EJ}\left(106 \frac{70^3}{6} - 176667 \cdot 70\right) = \frac{1}{70000 \cdot 3016} \cdot (-6.307E6) = -0.0299\boldsymbol{mm}$$

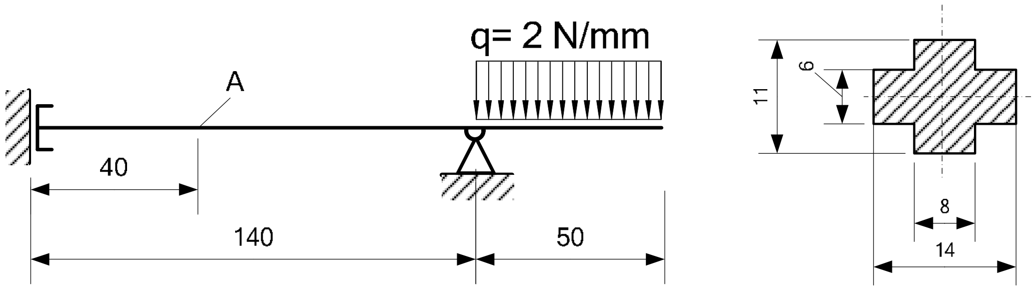
Poichè il valore di *y* è negativo, lo spostamento è diretto verso l'alto (per le convenzioni scelte, *y* è positivo se diretto verso l'alto).

La deformata qualitativa (non in scala) della struttura è rappresentata nella figura seguente.



Calcolare la rotazione (in gradi) della linea d'asse della struttura nel punto A utilizzando l'equazione della linea elastica. Materiale: acciaio (E=210 GPa)

(Prova scritta 11 gennaio 2010)

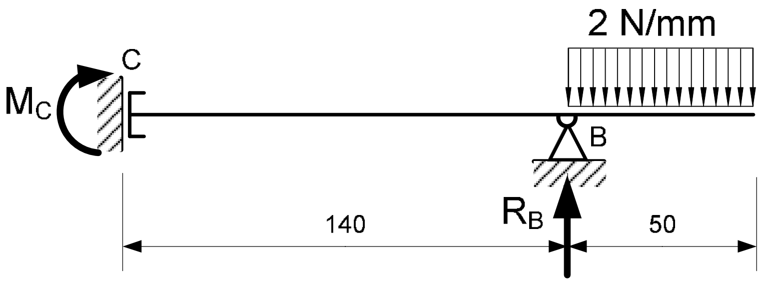



Utilizziamo N e mm come unità di misura.

Si avrà allora

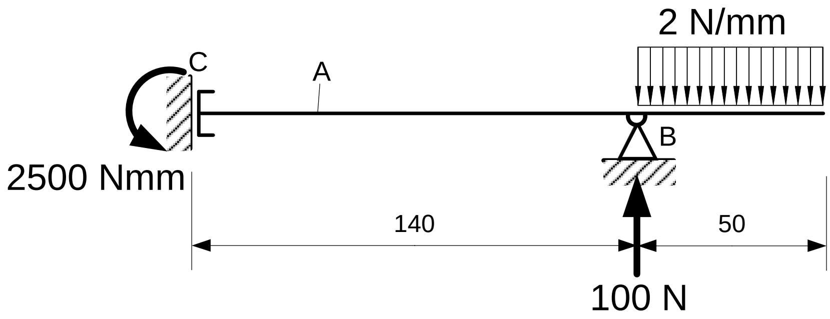
$E$ = 210000 N/mm$^2$

$$J = \frac{8 \cdot 11^3}{12} + 2 \cdot \left( 3 \cdot \frac{6^3}{12} \right) = 995.3\, mm^4$$




Le reazioni vincolari al pattino a terra C ($M_C$) ed alla cerniera a terra B ($R_B$) possono essere calcolate con semplici equazioni di equilibrio della trave (per esempio alla traslazione in direzione verticale ed alla rotazione intorno al punto B).

Si ricava $R_B$ = 100 N ed $M_C$ = -2500 Nmm.

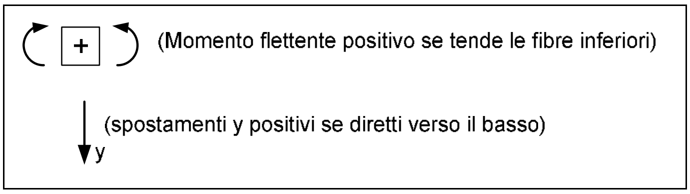



Per calcolare la rotazione della trave nel punto A possiamo scrivere l’equazione della linea elastica nel tratto C-B.

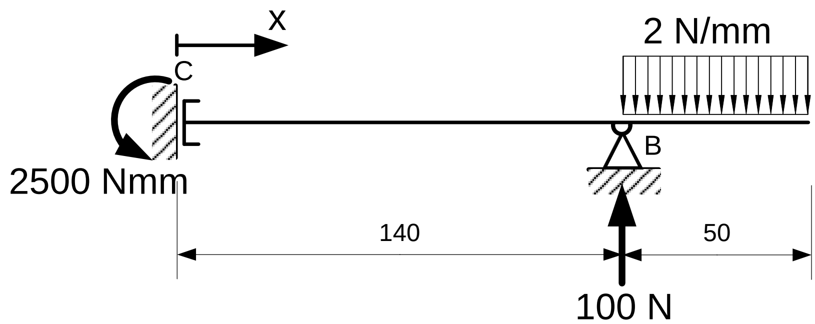
L’equazione generale della linea elastica è:

$$y'' = -\frac{M(x)}{EJ},$$

valida per le seguenti convenzioni di segno:




Scegliendo l’origine delle ascisse in C, come dalla figura seguente,




l’equazione del momento flettente nel tratto C-B può essere scritta come:

$$M(x) = -2500 \qquad per \;\; 0 < x < 140$$

L'equazione della linea elastica nel tratto C-B (0<x<140) vale pertanto

$$y'' = -\frac{-2500}{EJ} = \frac{2500}{EJ} \qquad per \;\; 0 < x < 140$$

da cui

$$EJ\,y'' = 2500 \qquad (1)$$

e, integrando in sequenza,

$$EJ\,y' = 2500 \cdot x + C_1 \qquad (2)$$

$$EJ\,y = 2500 \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \qquad (3)$$

Le costanti $C_1$ e $C_2$ si possono determinare imponendo le opportune condizioni al contorno nel tratto C-B (0<*x*<140):

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a)* | Nel punto C (*x*=0), in corrispondenza del pattino, la rotazione della linea d'asse della struttura deve essere nulla (il pattino non permette la rotazione della trave) | _ | $y' = 0 \quad in \;\; x = 0$ |
| *b)* | Nel punto B (*x*=140), in corrispondenza della cerniera, lo spostamento verticale della linea d'asse della struttura deve essere nullo (la cerniera non permette spostamenti verticali) | _ | $y = 0 \quad in \;\; x = 100$ |

Imponendo la condizione ***a)*** nell'equazione (2) si ricava:

$$EJ \cdot 0 = 2500 \cdot 0 + C_1$$

e dunque $C_1 = 0$

Imponendo la condizione *b)* nell'equazione (3), ed essendo $C_1$=0, si ricava:

$$EJ \cdot 0 = 2500 \cdot \frac{140^2}{2} + C_2$$

da cui

$$C_2 = -2500 \cdot \frac{140^2}{2} = -2.45E7$$

L'equazione (2) si può quindi scrivere come:

$$EJ\,y' = 2500 \cdot x$$

ed anche come

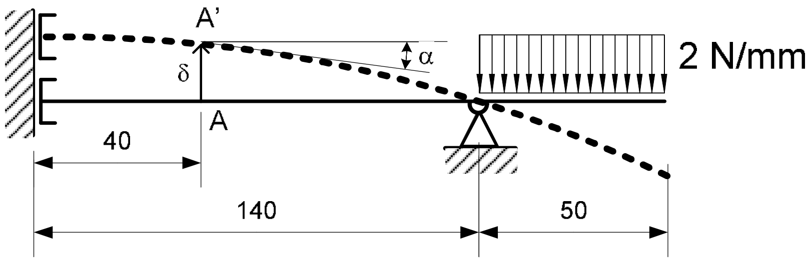
$$y' = \frac{1}{EJ}(2500 \cdot x)$$

La rotazione della linea d'asse della trave nel punto A è espressa dal valore della *y'* in x=40:

$$y' = \frac{1}{EJ}(2500 \cdot 40) = \frac{1}{210000 \cdot 995.3} \cdot 100000 = 0.00047844\,\mathrm{rad} = (0.00047844 \cdot \frac{180}{p})° = 0.0274°$$

$$a = 0.0274°$$

La deformata qualitativa (e non in scala) della struttura è rappresentata nella figura seguente.




L'equazione (3), $y = \frac{1}{EJ}\left(2500 \cdot \frac{x^2}{2} - 2.45E7\right)$, permette invece di determinare lo spostamento δ del punto A, calcolando il valore di *y* per *x*= 40 mm:

$$y = \frac{1}{210000 \cdot 995.3} \cdot \left(2500 \cdot \frac{40^2}{2} - 2.45E7\right) = -0.108\,mm$$

$$d = -0.108\ \ mm$$