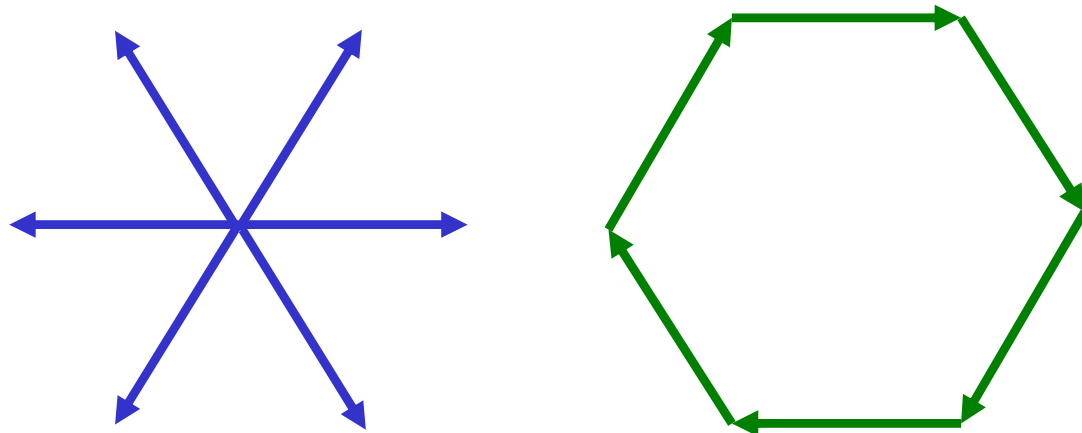


Sistemi trifase

Sistema polifase simmetrico a m fasi

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1(t) = \sqrt{2}A \cos(\omega t + \alpha) \\ a_2(t) = \sqrt{2}A \cos(\omega t + \alpha \pm \frac{2\pi}{m}) \\ \vdots \\ a_m(t) = \sqrt{2}A \cos(\omega t + \alpha \pm (m-1)\frac{2\pi}{m}) \end{array} \right.$$

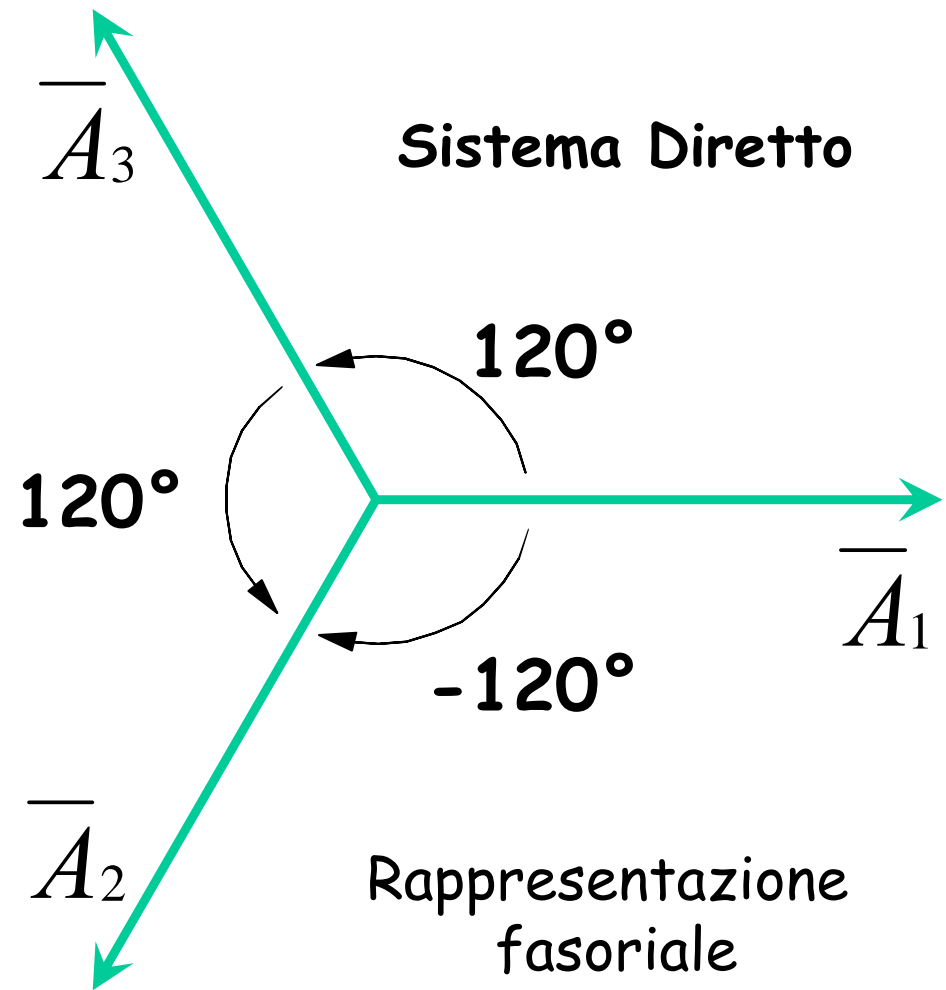
È nulla la somma dei
valori istantanei



Rappresentazione
fasoriale

per $m=3$ → Sistemi Trifase

$$\begin{cases} a_1(t) = \sqrt{2}A \cos \omega t \\ a_2(t) = \sqrt{2}A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ a_3(t) = \sqrt{2}A \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

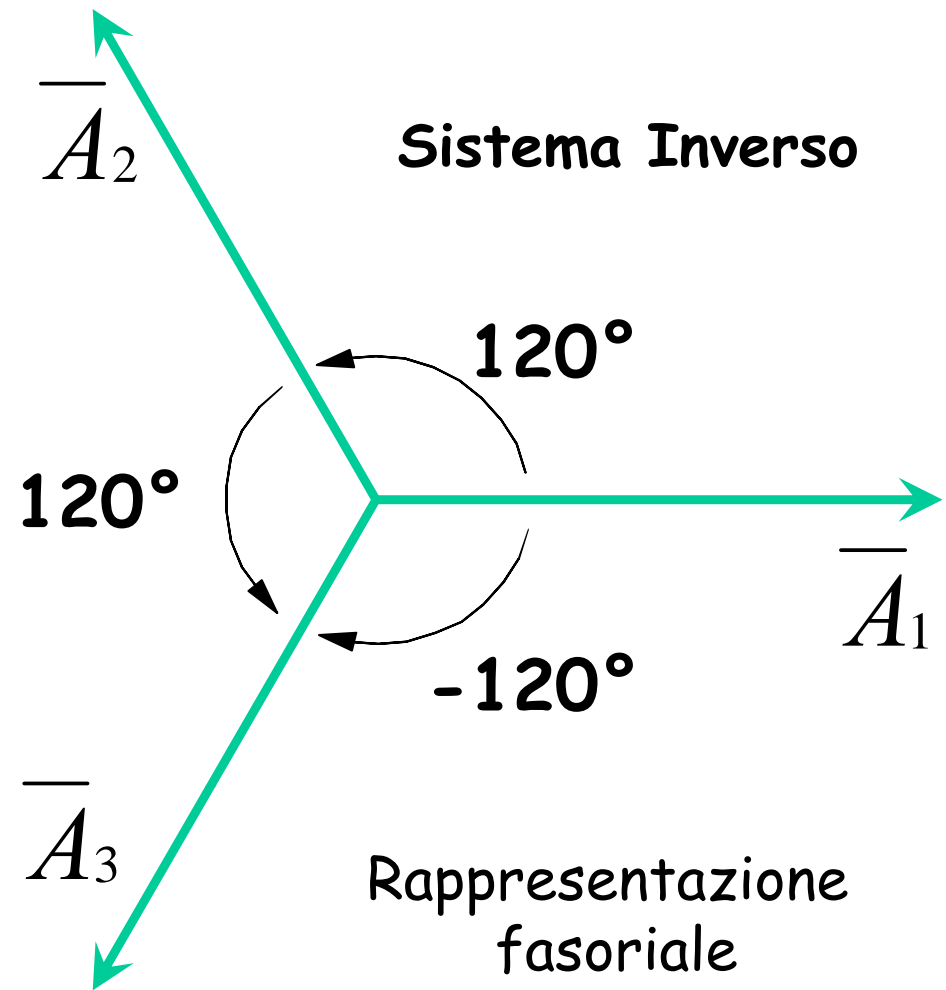


I TRE FASORI SI SUSSEGUONO SEGUENDO IL **VERSO ORARIO**

Sequenza dei ritardi

per $m=3$ \longrightarrow Sistemi Trifase

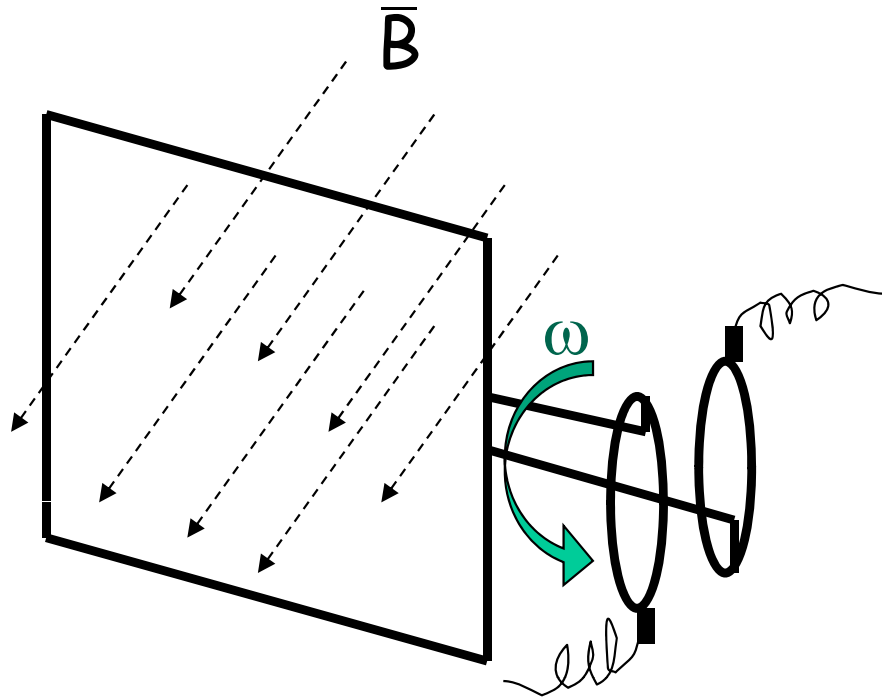
$$\begin{cases} a_1(t) = \sqrt{2}A \cos \omega t \\ a_2(t) = \sqrt{2}A \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \\ a_3(t) = \sqrt{2}A \cos(\omega t + \frac{4\pi}{3}) \end{cases}$$



I TRE FASORI SI SUSSEGUONO SEGUENDO IL **VERSO ANTIORARIO**

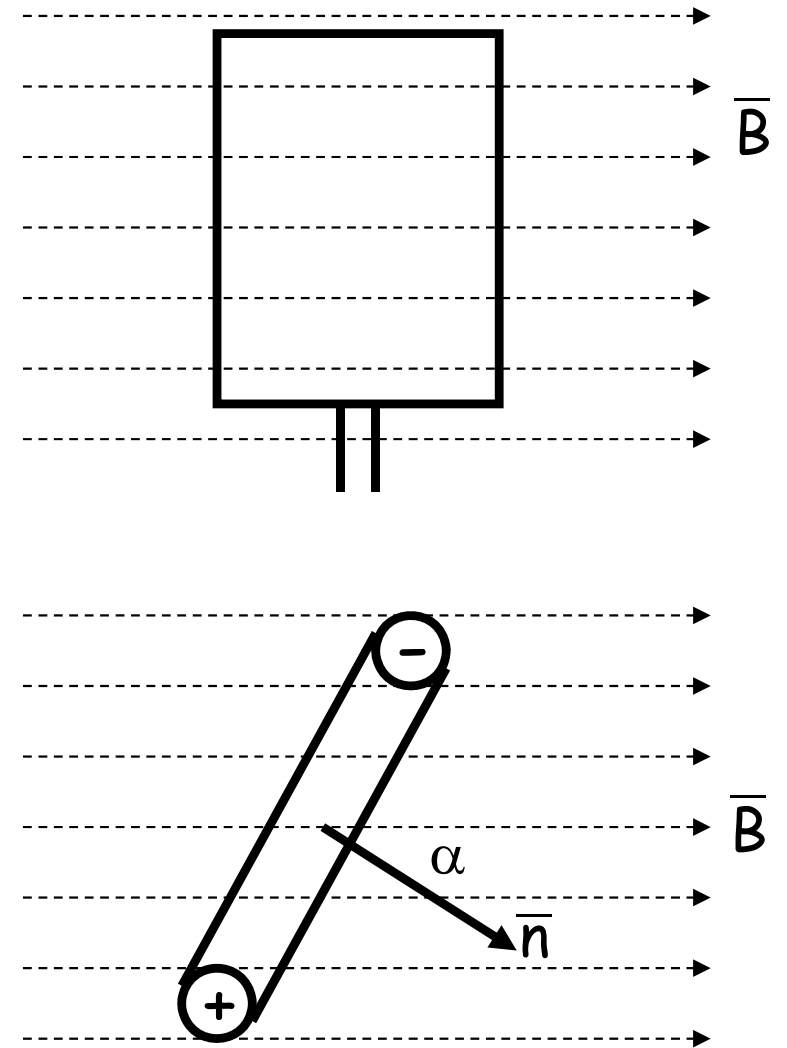
Sequenza degli anticipi

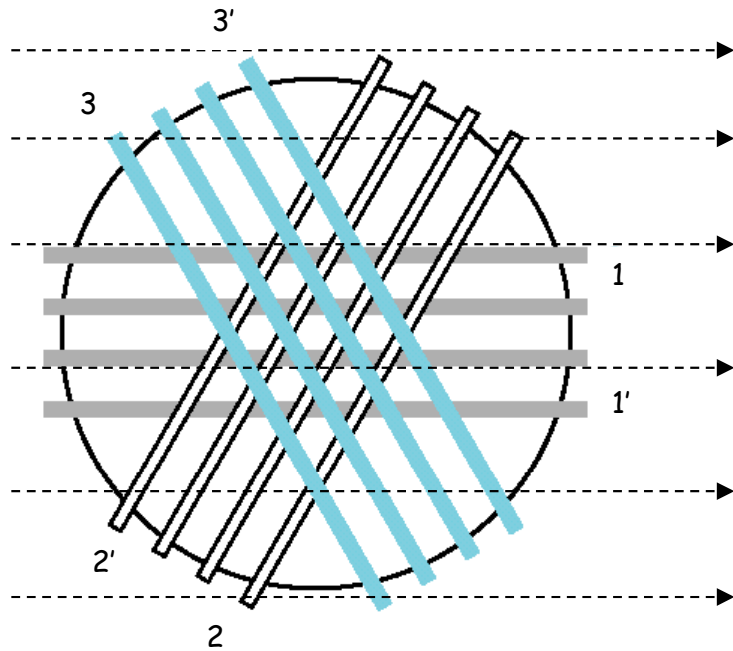
GENERATORE TRIFASE



$$\varphi(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\text{f.e.m. } e' = -\frac{d\varphi}{dt} = \omega BS \sin(\omega t + \alpha) \rightarrow e = Ne'$$

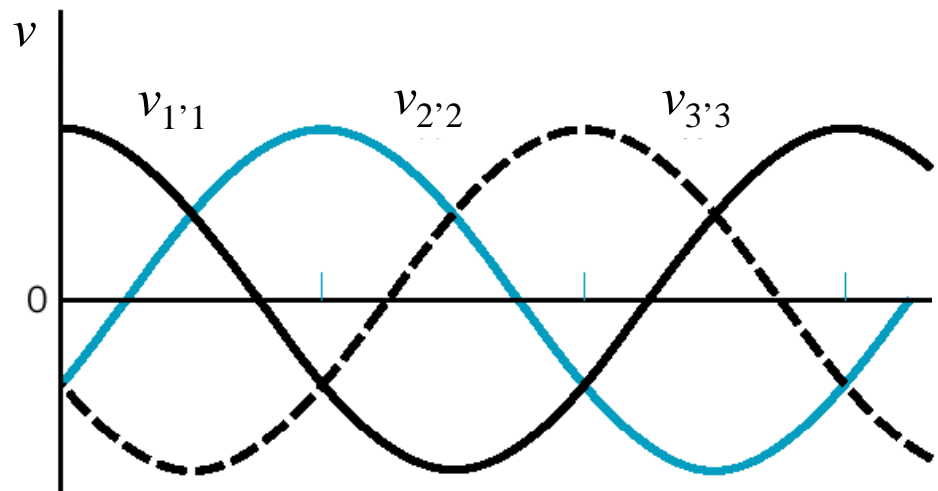




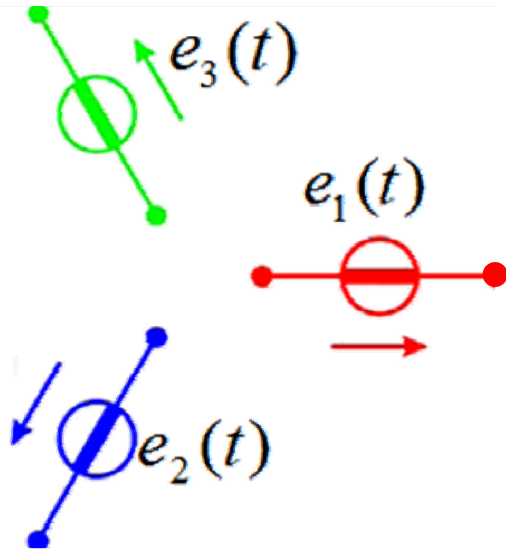
$\alpha = 0$ Bobina 1
 $\alpha = -2\pi/3$ Bobina 2
 $\alpha = -4\pi/3$ Bobina 3

Generatore trifase di tensione

Sistema trifase simmetrico diretto di tensioni



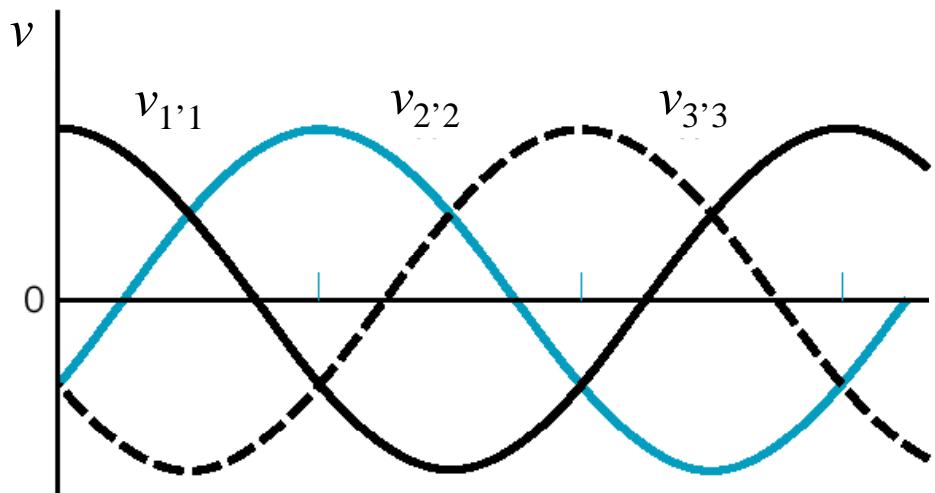
$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1'1}(t) = \omega NBS \cos \omega t = e_1 \\ v_{2'2}(t) = \omega NBS \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) = e_2 \\ v_{3'3}(t) = \omega NBS \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) = e_3 \end{array} \right.$$



$$\begin{cases} \bar{E}_1 = Ee^{j0^\circ} \\ \bar{E}_2 = Ee^{-j\frac{2\pi}{3}} = Ee^{j\frac{4\pi}{3}} \\ \bar{E}_3 = Ee^{-j\frac{4\pi}{3}} = Ee^{j\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$$

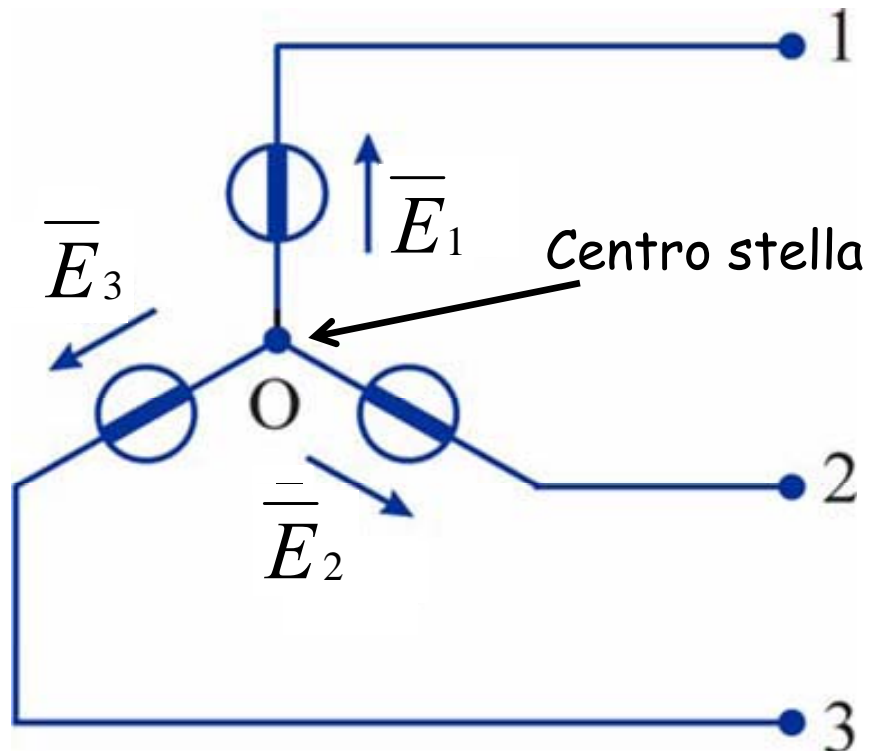
$$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0$$

Sistema trifase simmetrico diretto di tensioni



$$\begin{cases} v_{1'1}(t) = \omega NBS \cos \omega t = e_1 \\ v_{2'2}(t) = \omega NBS \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) = e_2 \\ v_{3'3}(t) = \omega NBS \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) = e_3 \end{cases}$$

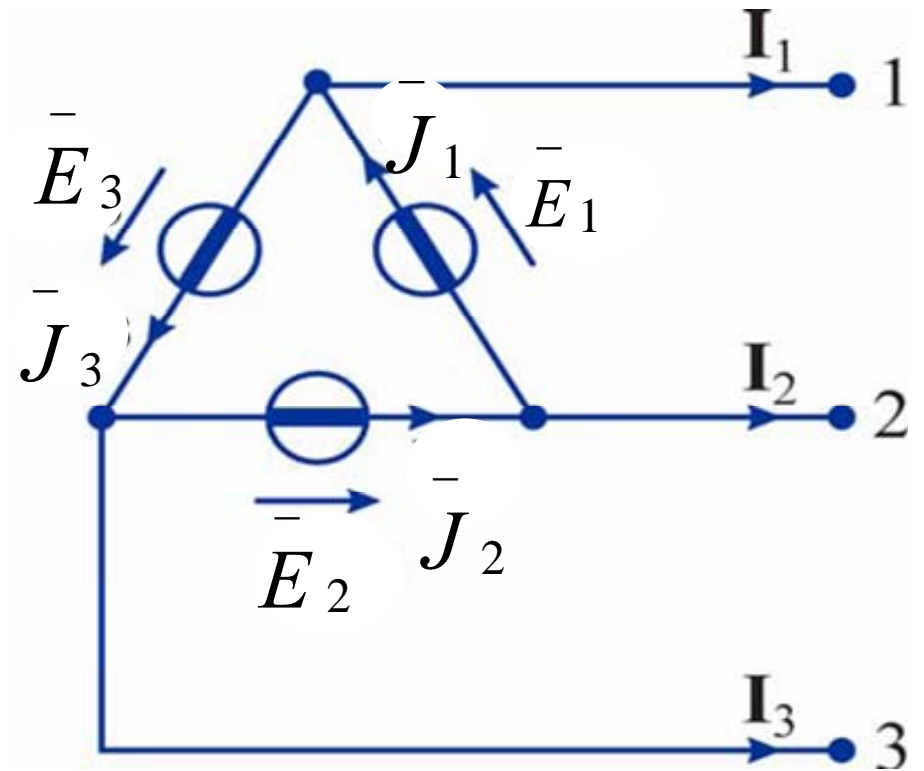
Generatori a Y



$\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3 \rightarrow$ Tensioni stellate

$\bar{U}_{ij} = \bar{E}_i - \bar{E}_j \rightarrow$ Tensione concatenata

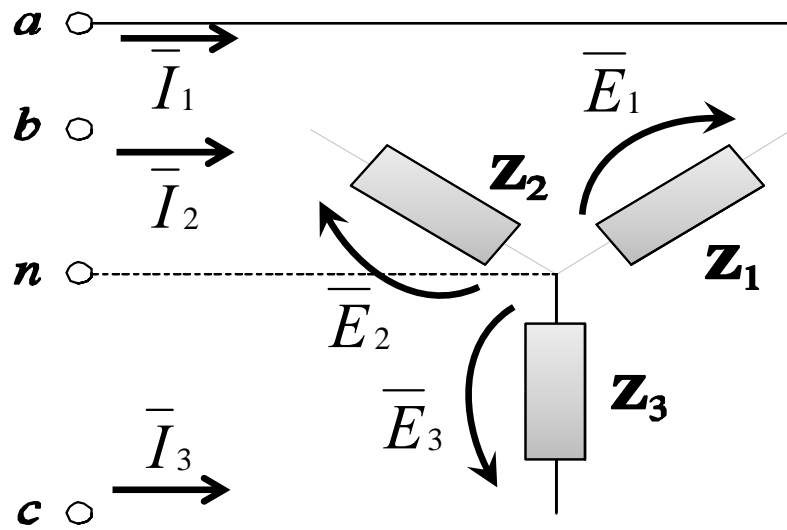
Generatori a Δ



$\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3 \rightarrow$ Correnti di linea

$\bar{J}_1, \bar{J}_2, \bar{J}_3 \rightarrow$ Correnti di fase

Carico a stella



Se Z_1, Z_2 e Z_3 sono collegati a stella:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{Z_1}; \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{Z_2}; \quad \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{Z_3}$$

Se $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{Z}; \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{Z}; \quad \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{Z}$$

$$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0 \Rightarrow \bar{I}_0 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$$



Sistema equilibrato di correnti

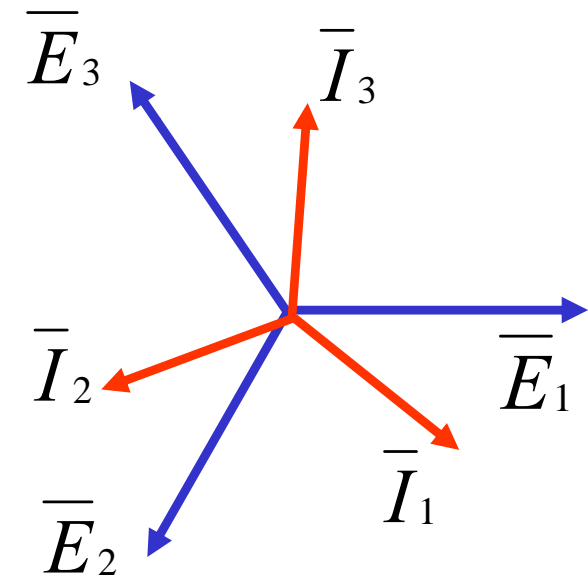
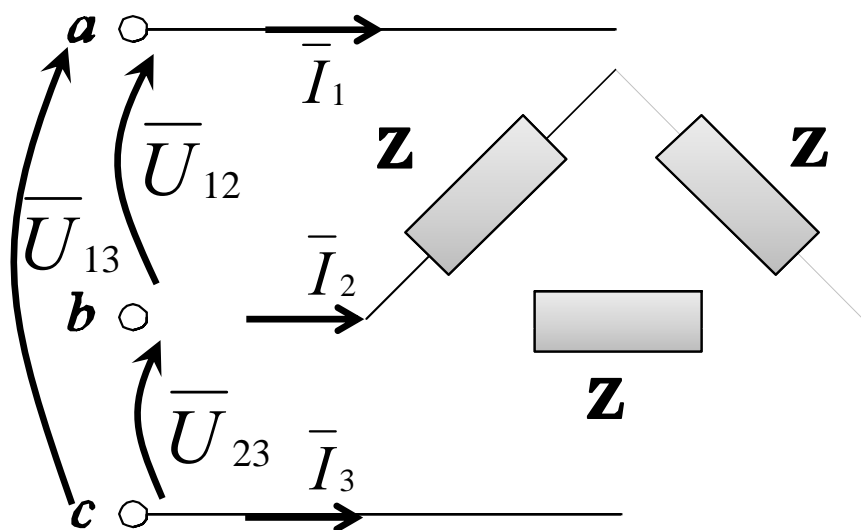
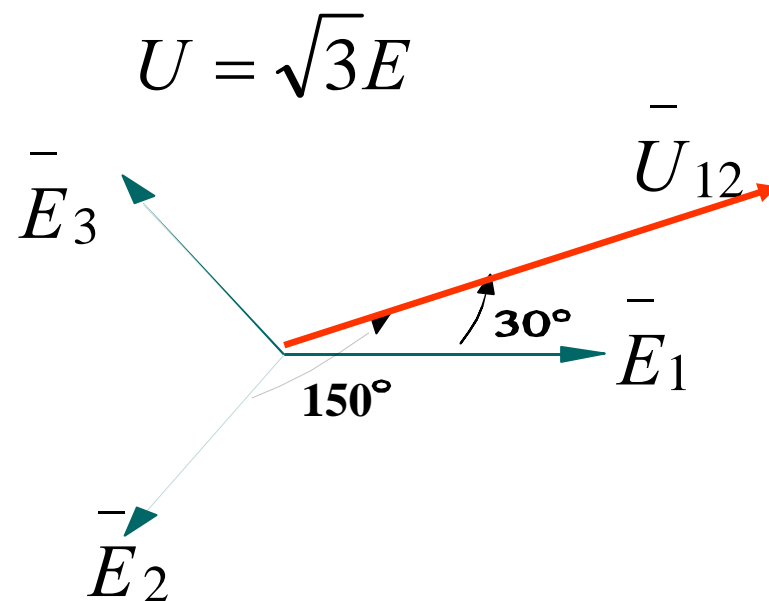


Diagramma Fasoriale

Carico a triangolo



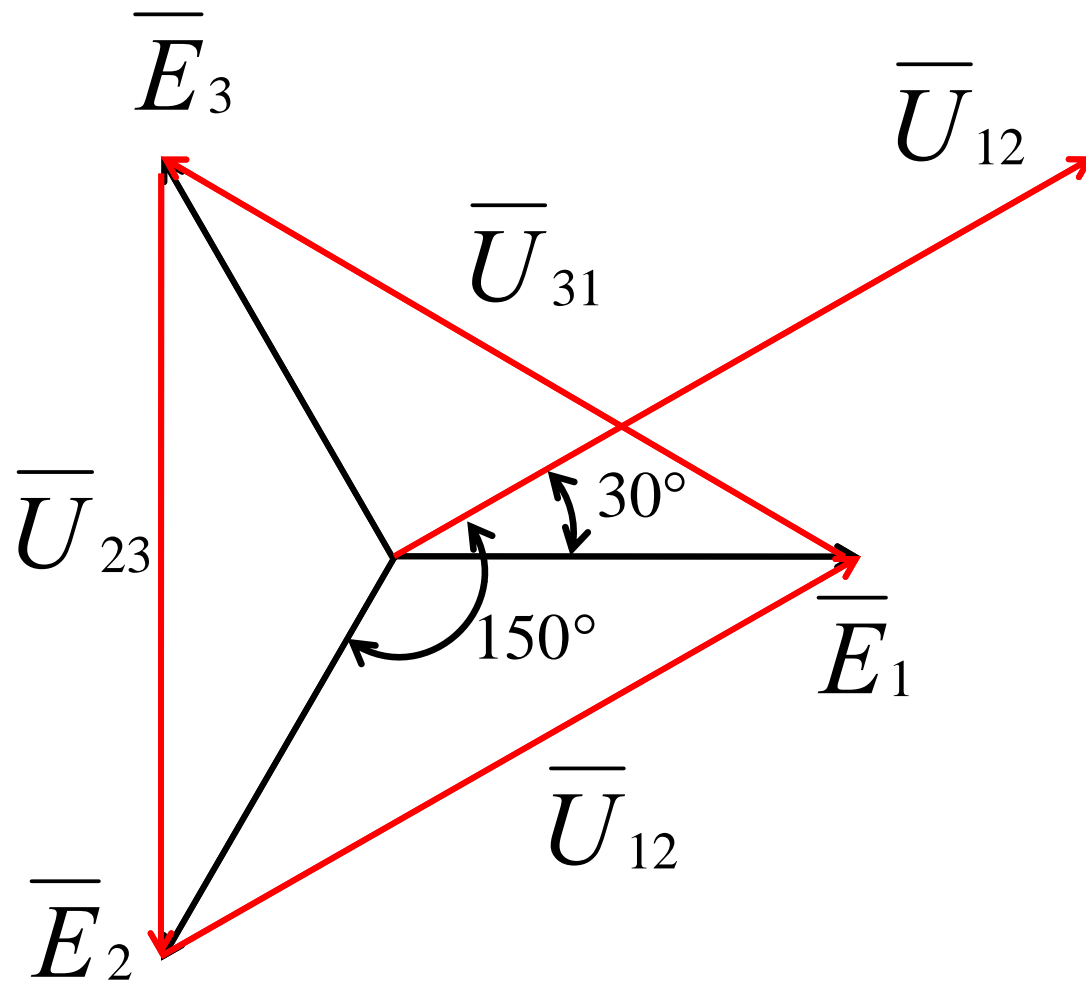
Tensioni concatenate:



- Terna Pura o Spuria

- Le tensioni concatenate forniscono SEMPRE un sistema PURO

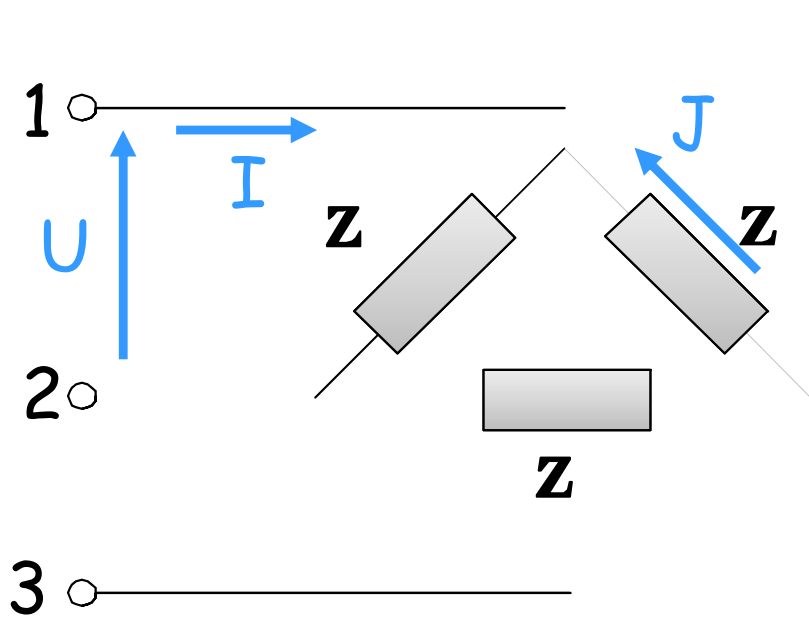
Tensioni stellate e concatenate



$$\overline{U}_{12} = \sqrt{3} \overline{E}_1 e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$\overline{U}_{23} = \sqrt{3} \overline{E}_2 e^{j\frac{\pi}{6}}$$

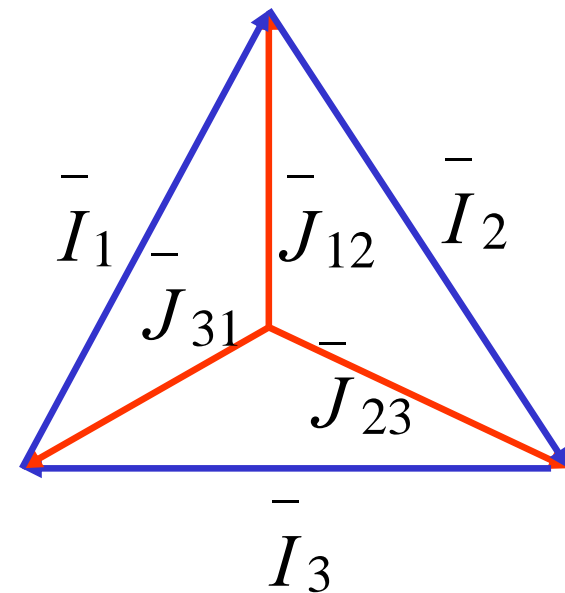
$$\overline{U}_{31} = \sqrt{3} \overline{E}_3 e^{j\frac{\pi}{6}}$$



$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{J}_{12} - \bar{J}_{31} \\ \bar{I}_2 = \bar{J}_{23} - \bar{J}_{12} \\ \bar{I}_3 = \bar{J}_{31} - \bar{J}_{23} \end{cases}$$

$$I = \sqrt{3}J$$

$$\bar{J}_{12} + \bar{J}_{23} + \bar{J}_{31} = 0$$



•Correnti di fase J

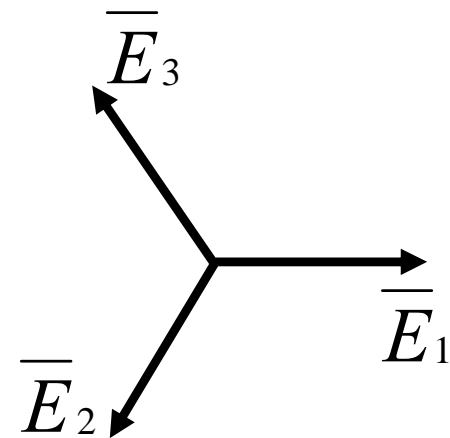
•Le correnti di linea in un sistema trifase senza neutro costituiscono un sistema PURO

Terne di sequenza

$$\alpha = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

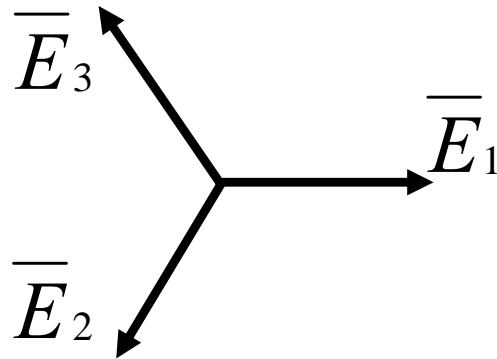
$$\alpha^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + j\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} \bar{E}_1 = Ee^{j0} \\ \bar{E}_2 = Ee^{-j\frac{2\pi}{3}} \\ \bar{E}_3 = Ee^{-j\frac{4\pi}{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \bar{E}$$



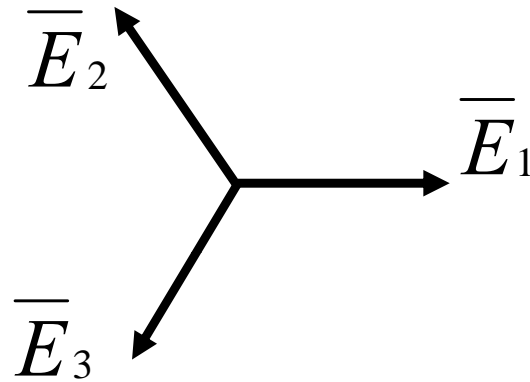
Terne di sequenza

$$\begin{bmatrix} \overline{E}_1 \\ \overline{E}_2 \\ \overline{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \overline{E}$$



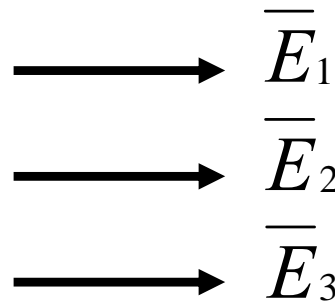
Diretta

$$\begin{bmatrix} \overline{E}_1 \\ \overline{E}_2 \\ \overline{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} \overline{E}$$



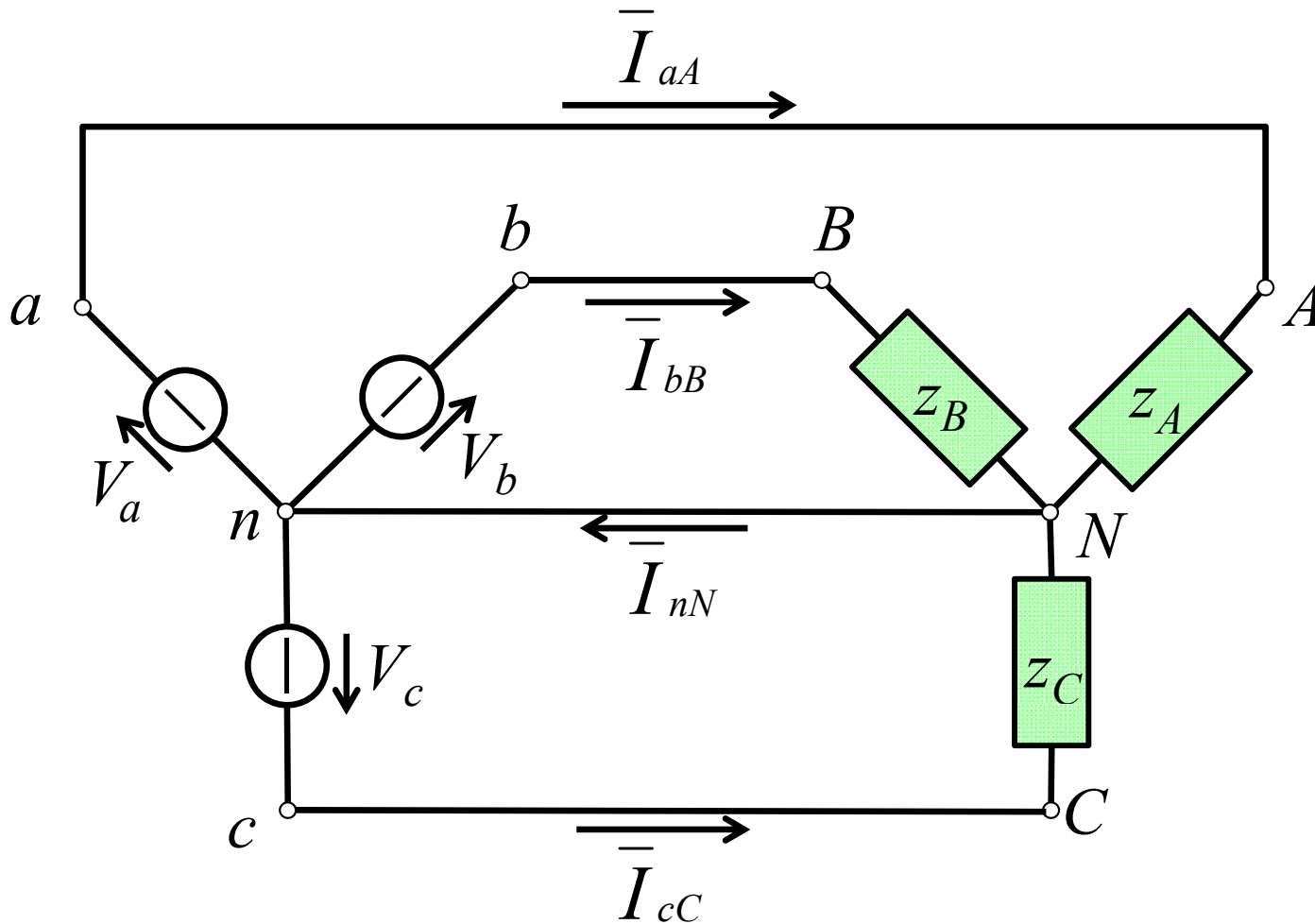
Inversa

$$\begin{bmatrix} \overline{E}_1 \\ \overline{E}_2 \\ \overline{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \overline{E}$$

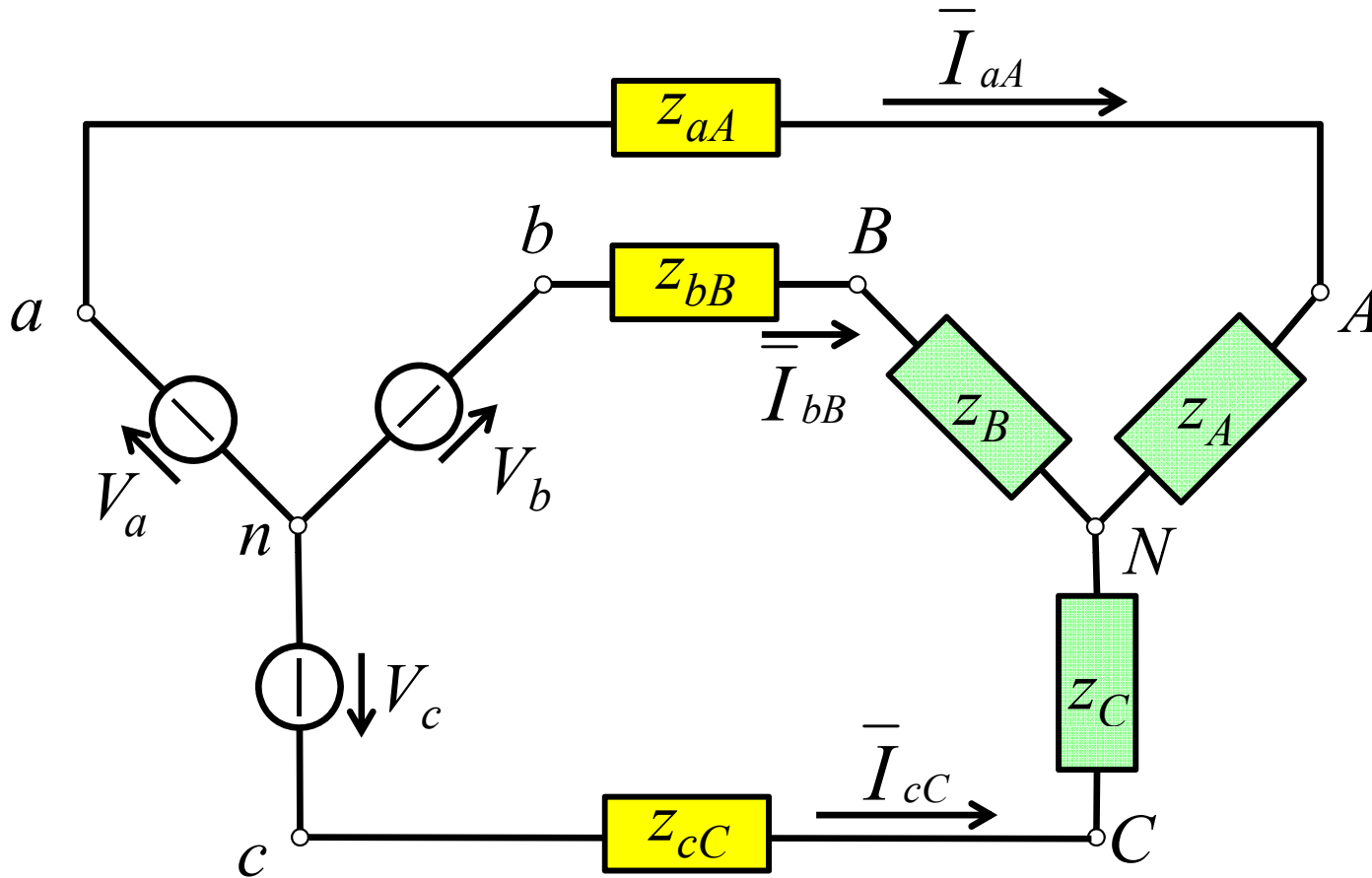


Omopolare

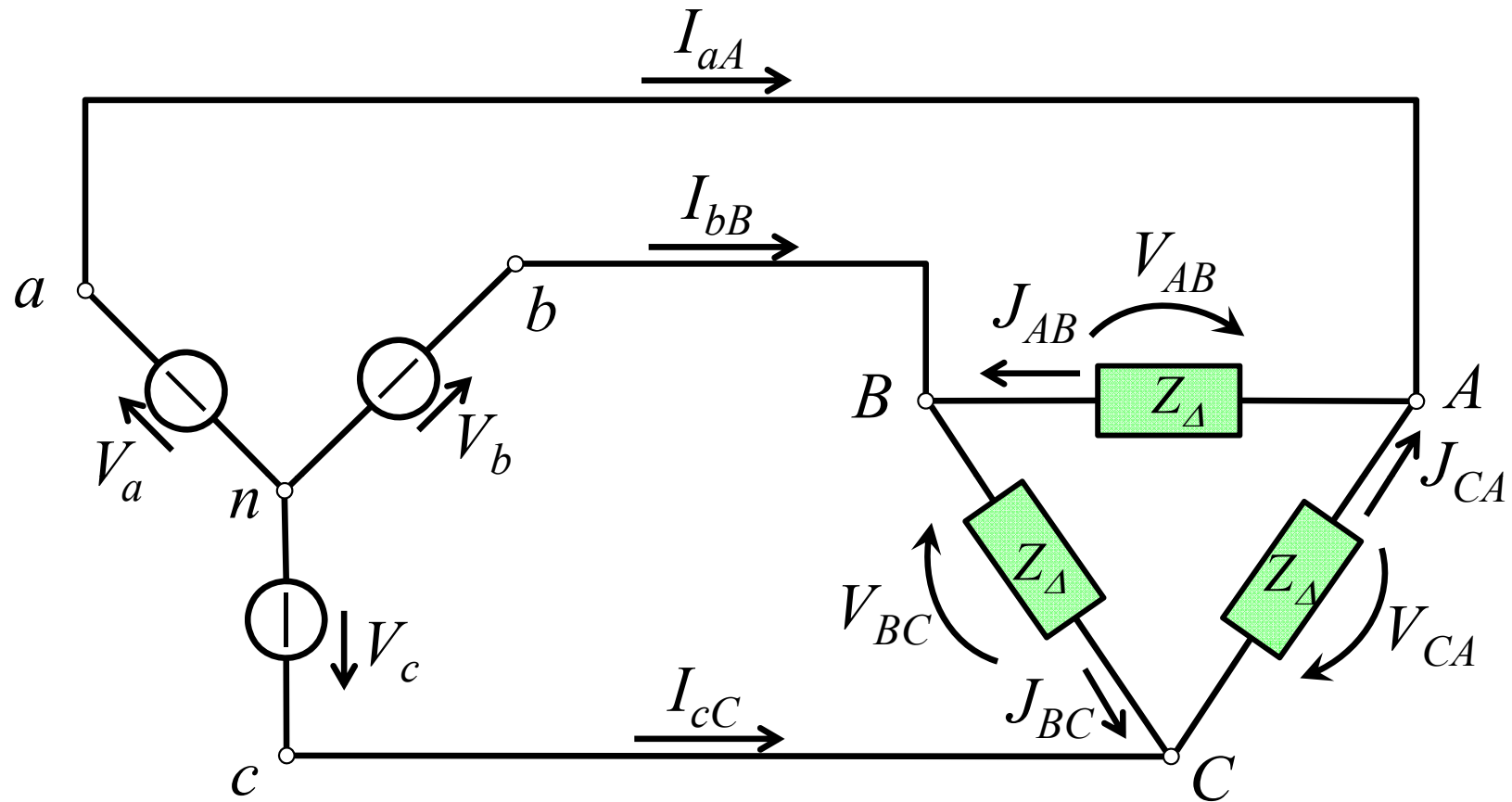
Sistema trifase Y-Y a quattro fili.



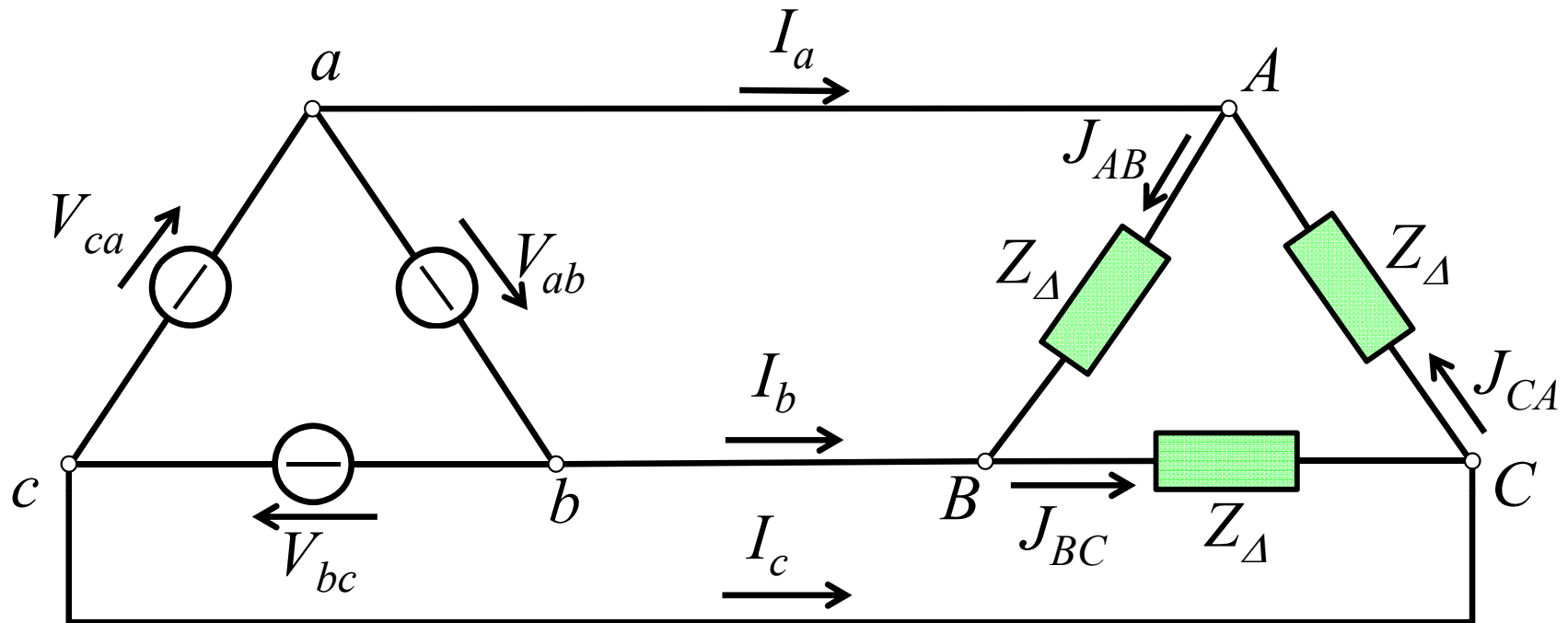
Sistema trifase Y-Y a tre fili.



Sistema trifase $\text{Y}-\Delta$

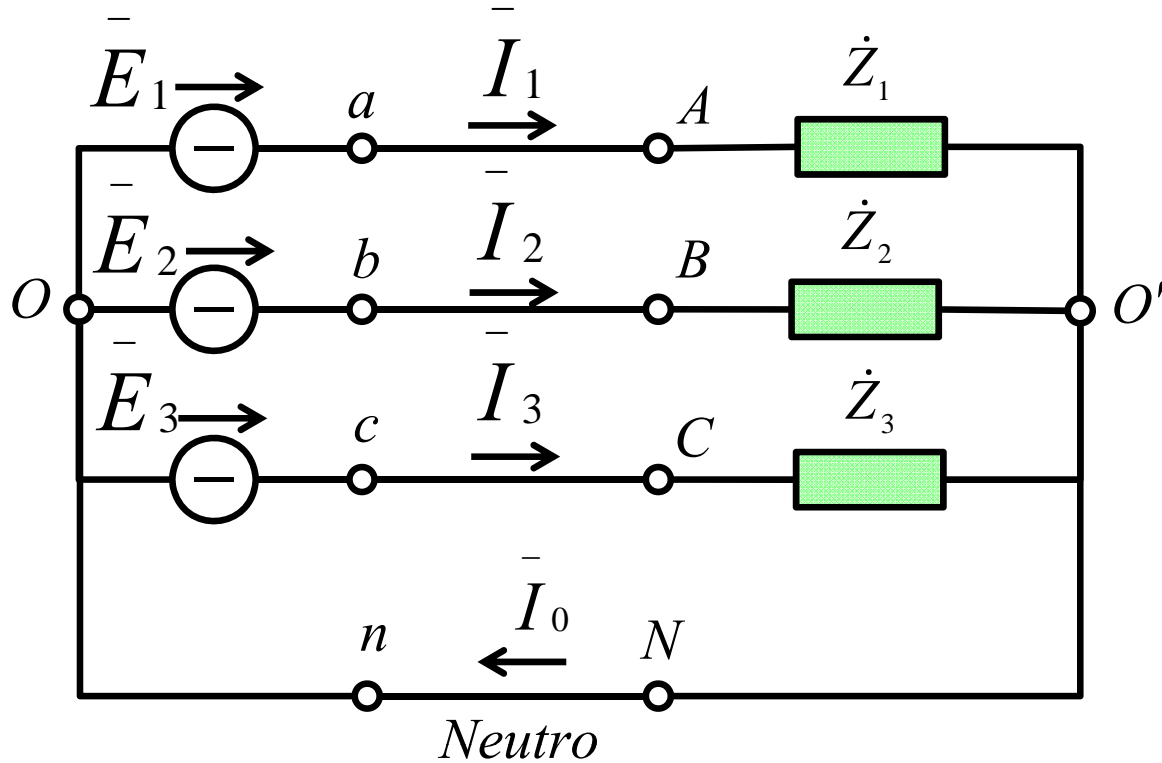


COLLEGAMENTO Δ - Δ



Il generatore e' interessato dalle stesse correnti J

COLLEGAMENTO Y-Y



$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3 = \dot{Z} = \dot{Z} \angle \varphi$$

$$I = \frac{E}{Z}$$

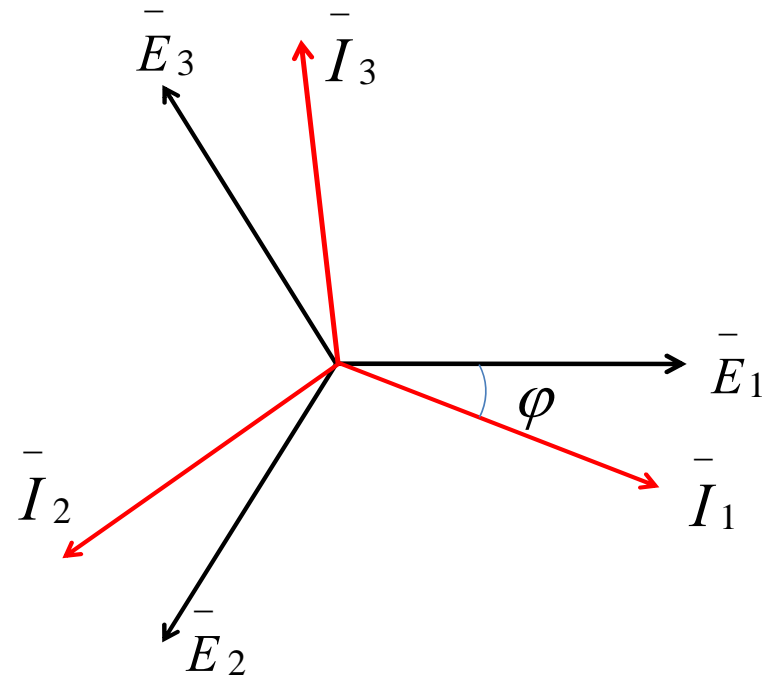
$$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0$$

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$$

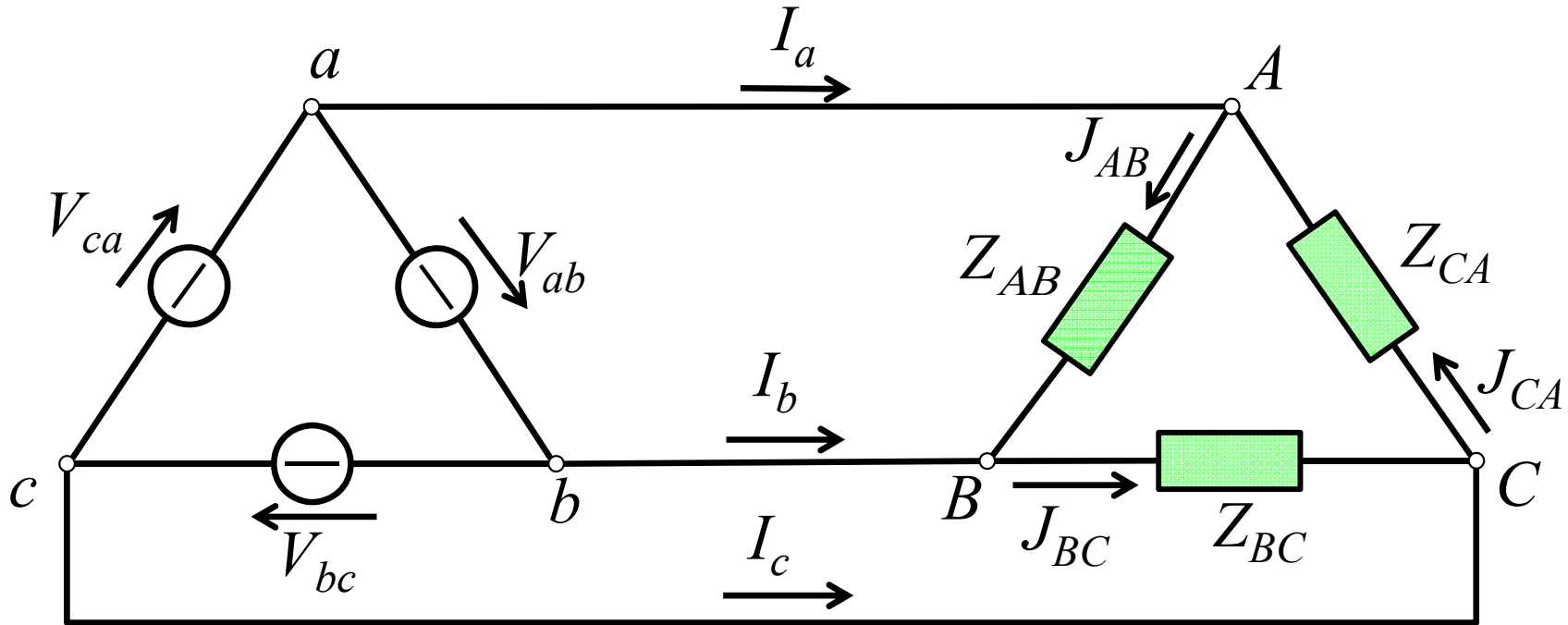
$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}} = \frac{E \angle 0}{Z \angle \varphi} = I \angle -\varphi$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}} = \frac{E \angle -(2/3)\pi}{Z \angle \varphi} = I \angle -(2/3)\pi - \varphi$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}} = \frac{E \angle -(4/3)\pi}{Z \angle \varphi} = I \angle -(4/3)\pi - \varphi$$

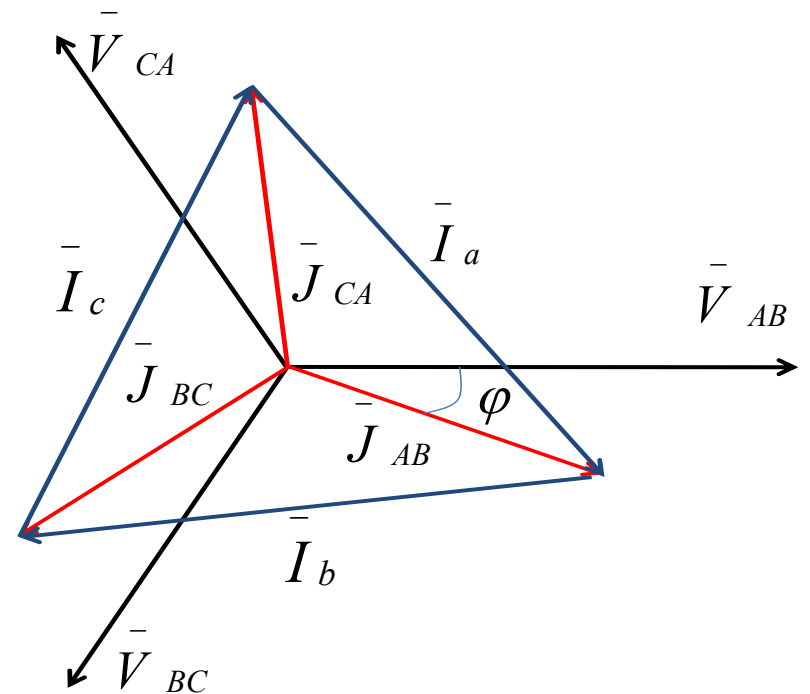


COLLEGAMENTO Δ - Δ

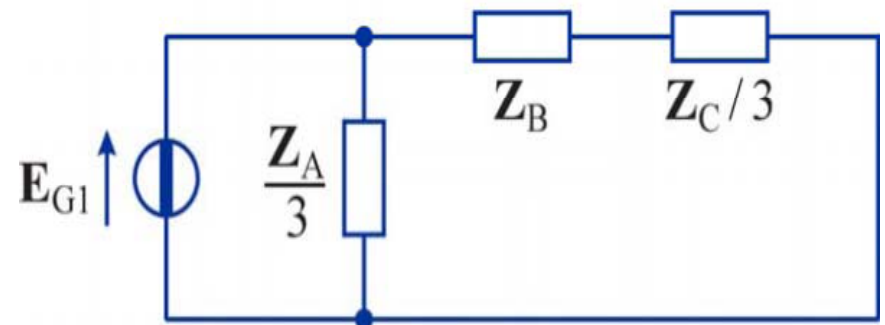
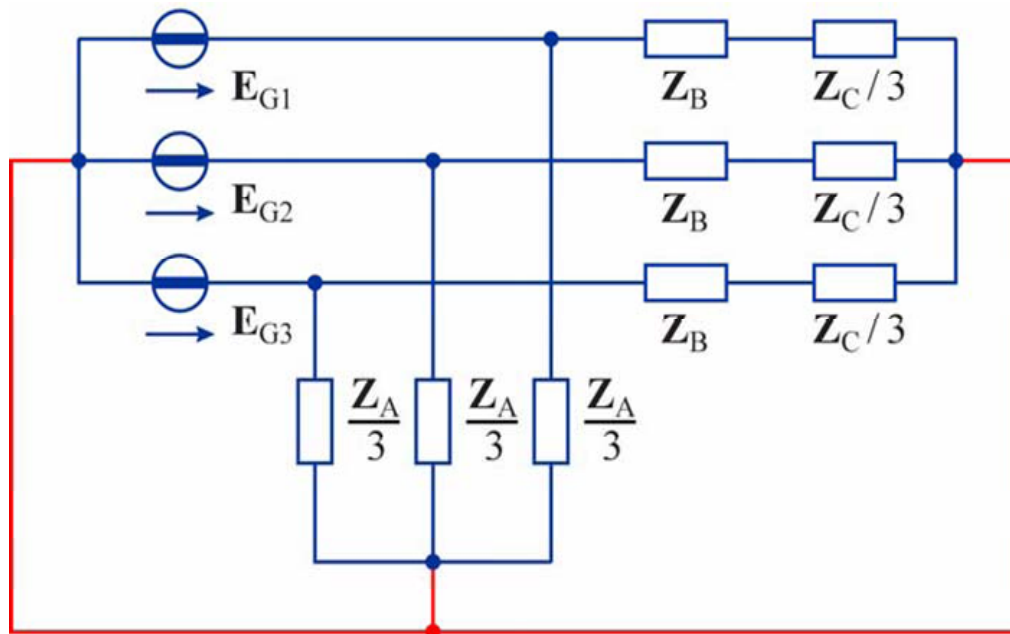
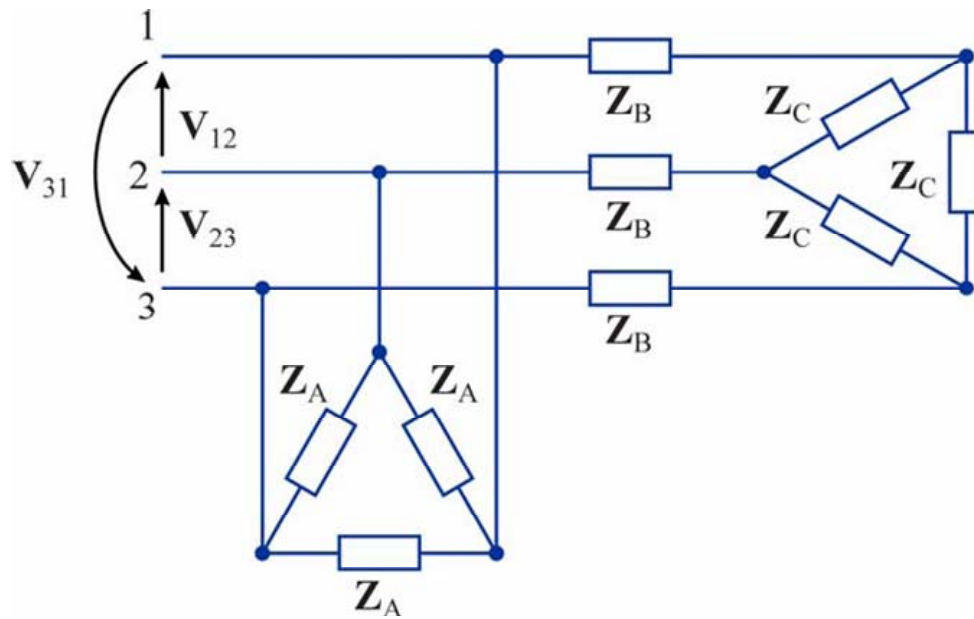


$$\dot{Z}_{AB} = \dot{Z}_{BC} = \dot{Z}_{CA} = \dot{Z} = \dot{Z} \angle \varphi$$

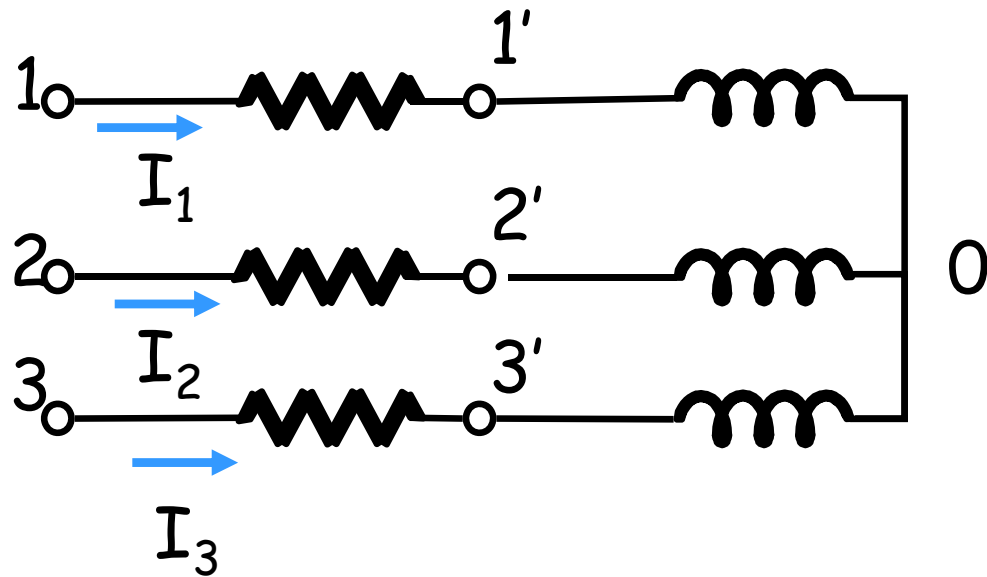
$$\bar{J}_{AB} = \frac{\bar{V}_{AB}}{\dot{Z}}; \bar{J}_{BC} = \frac{\bar{V}_{BC}}{\dot{Z}}; \bar{J}_{CA} = \frac{\bar{V}_{CA}}{\dot{Z}}$$



CIRCUITO MONOFASE EQUIVALENTE



Esempio: Rete trifase Simmetrica ed Equilibrata



Calcolare v_{12} dati:

$$v_{3'0} = 100\sqrt{2} \cos \omega t;$$

$$R = 3\Omega; X = 4\Omega$$

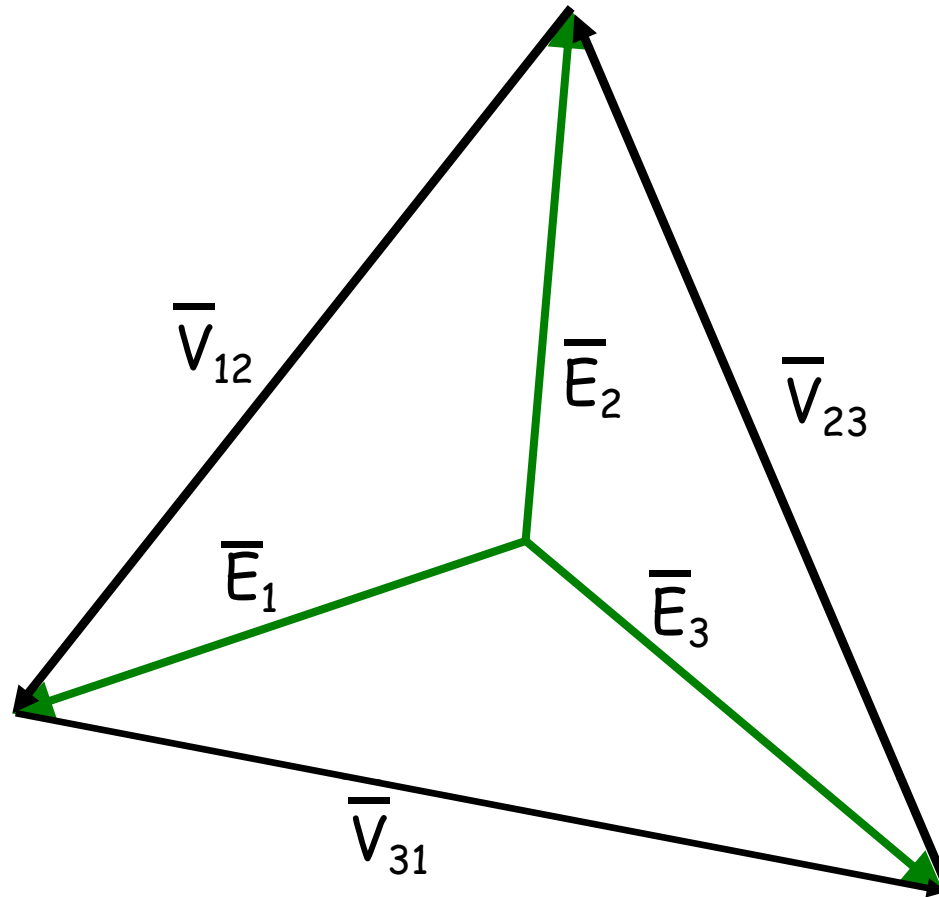
$$\bar{V}_{3'0} = 100 \angle 0^\circ$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{V}_{3'0}}{jX} = \frac{100}{j4} = -j25$$

$$\bar{E}_3 = (R + jX)\bar{I}_3 = (3 + j4)(-j25) = 100 - j75$$

noto \bar{E}_3 sono noti: $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{V}_{12}, \bar{V}_{23}, \bar{V}_{31}$

Graficamente:

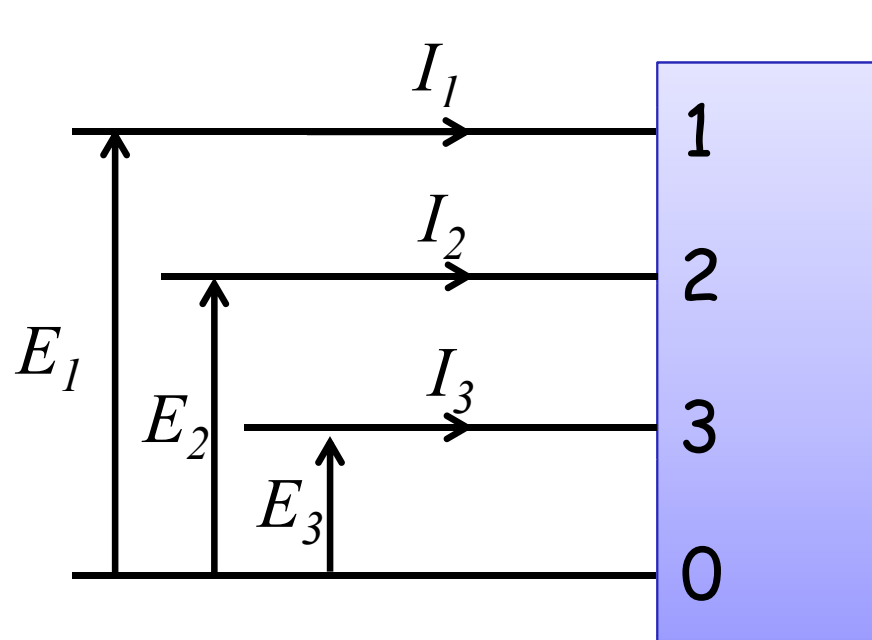


\bar{V}_{12} e' sfasato in ritardo di $\pi/2$ rispetto a \bar{E}_3 ed e' $\sqrt{3}$ volte più grande:

$$\bar{V}_{12} = \sqrt{3} \bar{E}_3 e^{-j\frac{\pi}{2}} = -192.9 - j173.2 = 216.5 \angle -126.87^\circ$$

$$v_{12}(t) = \sqrt{2} \cdot 216.5 \cos(\omega t - 126.87^\circ)$$

CARICHI TRIFASE



$$\dot{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} & \dot{Z}_{13} \\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} & \dot{Z}_{23} \\ \dot{Z}_{31} & \dot{Z}_{32} & \dot{Z}_{33} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} & \dot{Y}_{13} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} & \dot{Y}_{23} \\ \dot{Y}_{31} & \dot{Y}_{32} & \dot{Y}_{33} \end{bmatrix}$$

La relazione tra le tensione stellate e le correnti di linea, in generale, può essere espressa in termini di matrici di impedenza o di ammettenza:

$$\bar{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{Z}} \cdot \bar{\mathbf{I}}$$

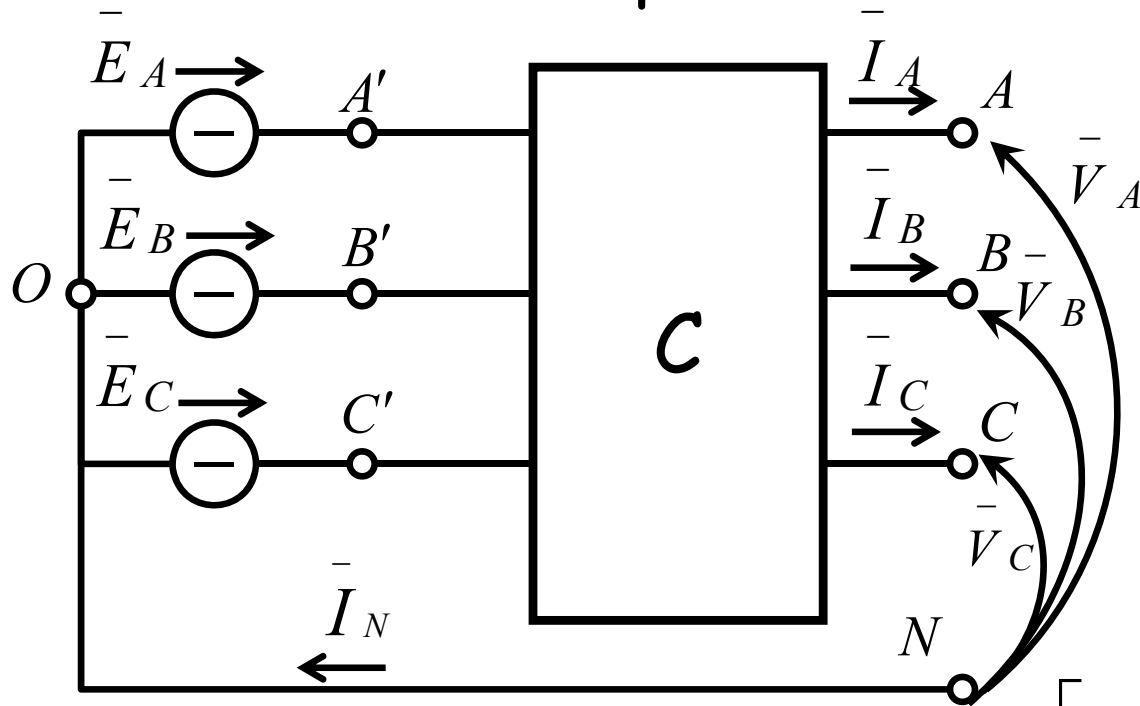
$$\bar{\mathbf{I}} = \dot{\mathbf{Y}} \cdot \bar{\mathbf{E}}$$

con:

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{bmatrix}$$

Esempio: Sistema Trifase con Neutro



Il carico trifase può essere considerato come un tre-ports la cui equazione descrittiva è:

$$\begin{bmatrix} \dot{Z} \\ \dot{Z} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I} \\ \bar{I} \\ \bar{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{V} \\ \bar{V} \\ \bar{V} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{Z}_{A'A} & \dot{Z}_{A'B} & \dot{Z}_{A'C} \\ \dot{Z}_{B'A} & \dot{Z}_{B'B} & \dot{Z}_{B'C} \\ \dot{Z}_{C'A} & \dot{Z}_{C'B} & \dot{Z}_{C'C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_A \\ \bar{I}_B \\ \bar{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{V}_{A'A} \\ \bar{V}_{B'B} \\ \bar{V}_{C'C} \end{bmatrix}$$

Da Kirchhoff alle maglie

$$\begin{cases} \bar{E}_A = \bar{V}_{A'A} + \bar{V}_A \\ \bar{E}_B = \bar{V}_{B'B} + \bar{V}_B \\ \bar{E}_C = \bar{V}_{C'C} + \bar{V}_C \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{E} \\ \bar{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z} \\ \dot{Z} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I} \\ \bar{I} \\ \bar{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{V} \\ \bar{V} \\ \bar{V} \end{bmatrix}$$

THEOREMA DI THEVENIN GENERALIZZATO

Un sistema trifase in condizioni di normale funzionamento è
SIMMETRICO ED EQUILIBRATO



- Carichi monofase cablati sulle tre fasi
- Carichi trifase con matrici ciclosimmetriche (non vale la reciprocità quando vi sono organi in movimento)

Esempio: Sistema Trifase con Neutro

$$\begin{bmatrix} \bar{E}_A \\ \bar{E}_B \\ \bar{E}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{A'A} & \dot{Z}_{A'B} & \dot{Z}_{A'C} \\ \dot{Z}_{B'A} & \dot{Z}_{B'B} & \dot{Z}_{B'C} \\ \dot{Z}_{C'A} & \dot{Z}_{C'B} & \dot{Z}_{C'C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_A \\ \bar{I}_B \\ \bar{I}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{V}_A \\ \bar{V}_B \\ \bar{V}_C \end{bmatrix}$$

Teorema di Thevenin generalizzato

Per le macchine rotanti trifase (motori e generatori) e':

$$\begin{cases} \dot{Z}_{A'A} = \dot{Z}_{B'B} = \dot{Z}_{C'C} = \dot{Z}_p \\ \dot{Z}_{A'B} = \dot{Z}_{B'C} = \dot{Z}_{C'A} = \dot{Z}_m \\ \dot{Z}_{B'A} = \dot{Z}_{C'B} = \dot{Z}_{A'C} = \dot{Z}_n \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_p & \dot{Z}_m & \dot{Z}_n \\ \dot{Z}_n & \dot{Z}_p & \dot{Z}_m \\ \dot{Z}_m & \dot{Z}_n & \dot{Z}_p \end{bmatrix}$$

Matrice ciclosimmetrica

Si dimostra che, quando le matrici di impedenza dei carichi trifase sono almeno ciclosimmetriche il sistema e' equilibrato

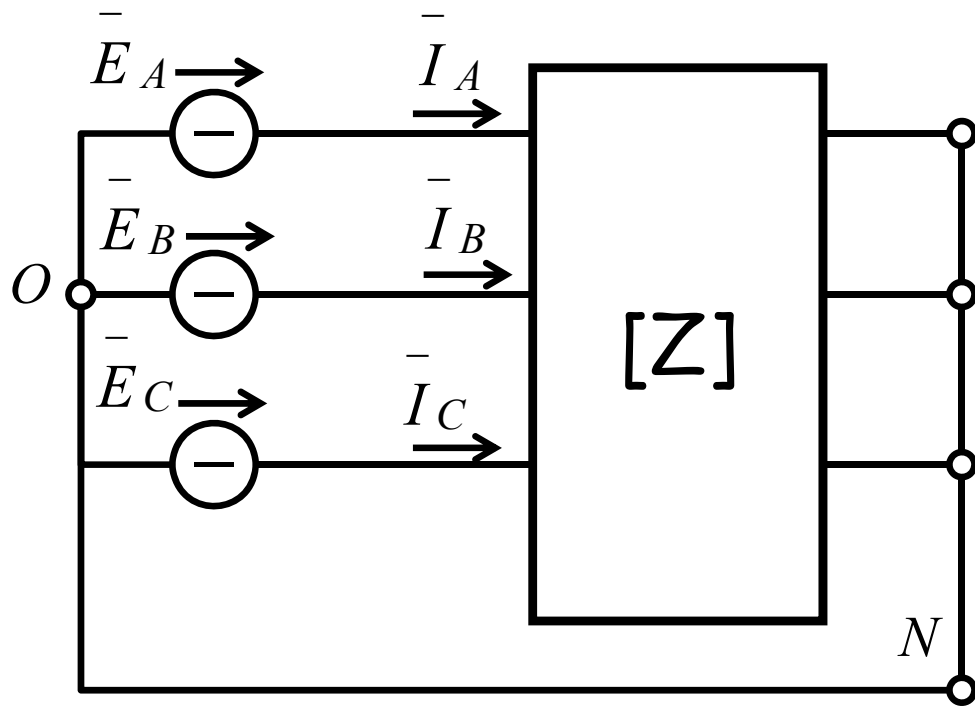
Se il carico e' passivo e reciproco:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Z}_{A'A} = \dot{Z}_{B'B} = \dot{Z}_{C'C} = \dot{Z}_p \\ \dot{Z}_{A'B} = \dot{Z}_{B'C} = \dot{Z}_{C'A} = \dot{Z}_m \\ \dot{Z}_{B'A} = \dot{Z}_{C'B} = \dot{Z}_{A'C} = \dot{Z}_n \end{array} \right. \quad \mathbf{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{Z}_{A'B} = \dot{Z}_{B'A} \\ \dot{Z}_{B'C} = \dot{Z}_{C'B} \\ \dot{Z}_{A'C} = \dot{Z}_{C'A} \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \text{La matrice } [Z] \text{ e' simmetrica}$$

In entrambi i casi il sistema trifase e' equilibrato

In tale caso il sistema puo' essere studiato facendo riferimento ad un unico circuito monofase equivalente

Dimostrazione:



$$\underline{\bar{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \cdot \bar{E}_A ; \quad \underline{\bar{I}} = \begin{bmatrix} \bar{I}_A \\ \bar{I}_B \\ \bar{I}_C \end{bmatrix}$$

$$\bar{I}_N = \bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C \quad ; \quad \underline{\bar{E}} = \begin{bmatrix} Z \end{bmatrix} \cdot \underline{\bar{I}}$$

$$\underline{\bar{I}} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_p & \dot{Y}_m & \dot{Y}_n \\ \dot{Y}_n & \dot{Y}_p & \dot{Y}_m \\ \dot{Y}_m & \dot{Y}_n & \dot{Y}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \cdot \bar{E}_A \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_A = \left(\dot{Y}_p + \alpha^2 \dot{Y}_m + \alpha \dot{Y}_n \right) \bar{E}_A \\ \bar{I}_B = \left(\dot{Y}_n + \alpha^2 \dot{Y}_p + \alpha \dot{Y}_m \right) \bar{E}_A = \alpha^2 \bar{I}_A \\ \bar{I}_C = \left(\dot{Y}_m + \alpha^2 \dot{Y}_n + \alpha \dot{Y}_p \right) \bar{E}_A = \alpha \bar{I}_A \end{cases}$$



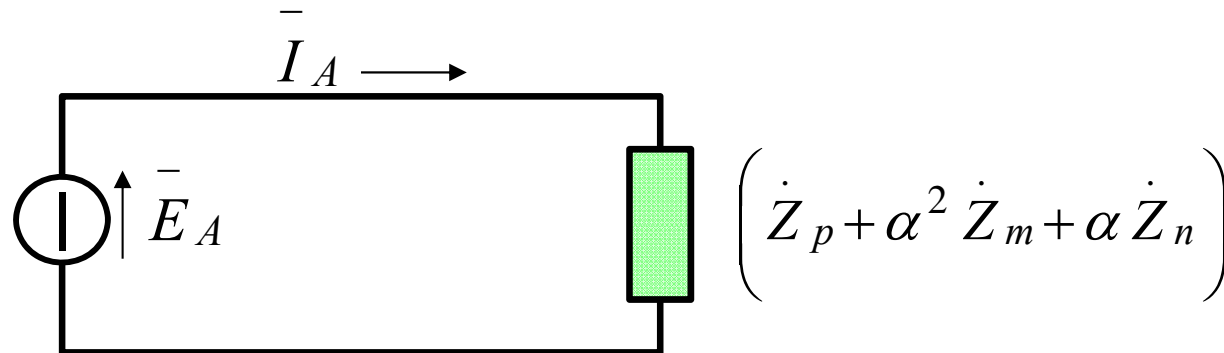
Il sistema e' equilibrato

Dimostrazione (Cnt.):

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} \dot{Z} \\ \dot{Z} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} \cdot \bar{I} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \bar{E}_A \\ \bar{E}_B \\ \bar{E}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_p & \dot{Z}_m & \dot{Z}_n \\ \dot{Z}_n & \dot{Z}_p & \dot{Z}_m \\ \dot{Z}_m & \dot{Z}_n & \dot{Z}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \cdot \bar{I}_A \quad \longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_A = \left(\dot{Z}_p + \alpha^2 \dot{Z}_m + \alpha \dot{Z}_n \right) \bar{I}_A \\ \alpha^2 \bar{E}_A = \left(\dot{Z}_n + \alpha^2 \dot{Z}_p + \alpha \dot{Z}_m \right) \bar{I}_A = \alpha^2 \bar{I}_A \quad \alpha \times \Rightarrow \\ \alpha \bar{E}_A = \left(\dot{Z}_m + \alpha^2 \dot{Z}_n + \alpha \dot{Z}_p \right) \bar{I}_A = \alpha \bar{I}_A \quad \alpha^2 \times \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_A = \left(\dot{Z}_p + \alpha^2 \dot{Z}_m + \alpha \dot{Z}_n \right) \bar{I}_A \\ \bar{E}_A = \left(\alpha \dot{Z}_n + \dot{Z}_p + \alpha^2 \dot{Z}_m \right) \bar{I}_A \\ \bar{E}_A = \left(\alpha^2 \dot{Z}_m + \alpha \dot{Z}_n + \dot{Z}_p \right) \bar{I}_A \end{array} \right.$$

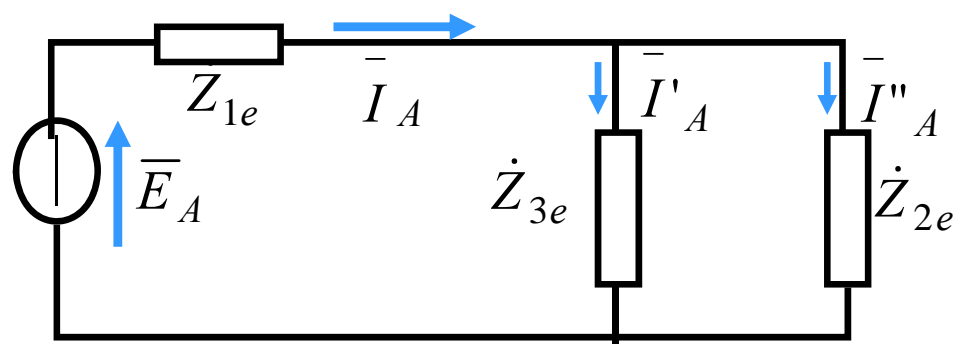
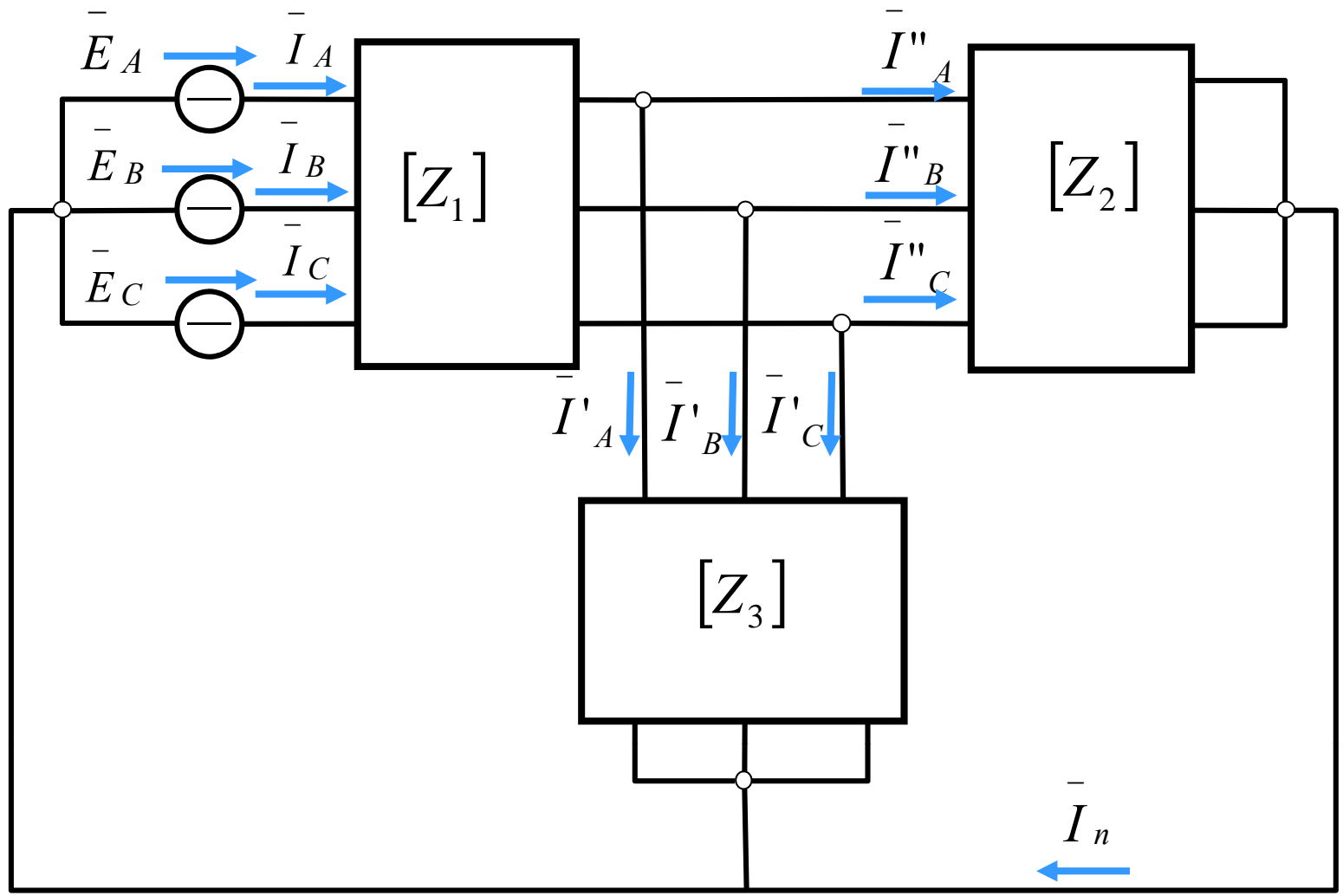
COINCIDENTI



**Circuito monofase
equivalente**

Le correnti nelle tre fasi si ricavano applicando al fasore \bar{I}_A la terna di operatori $1, \alpha^2, \alpha$

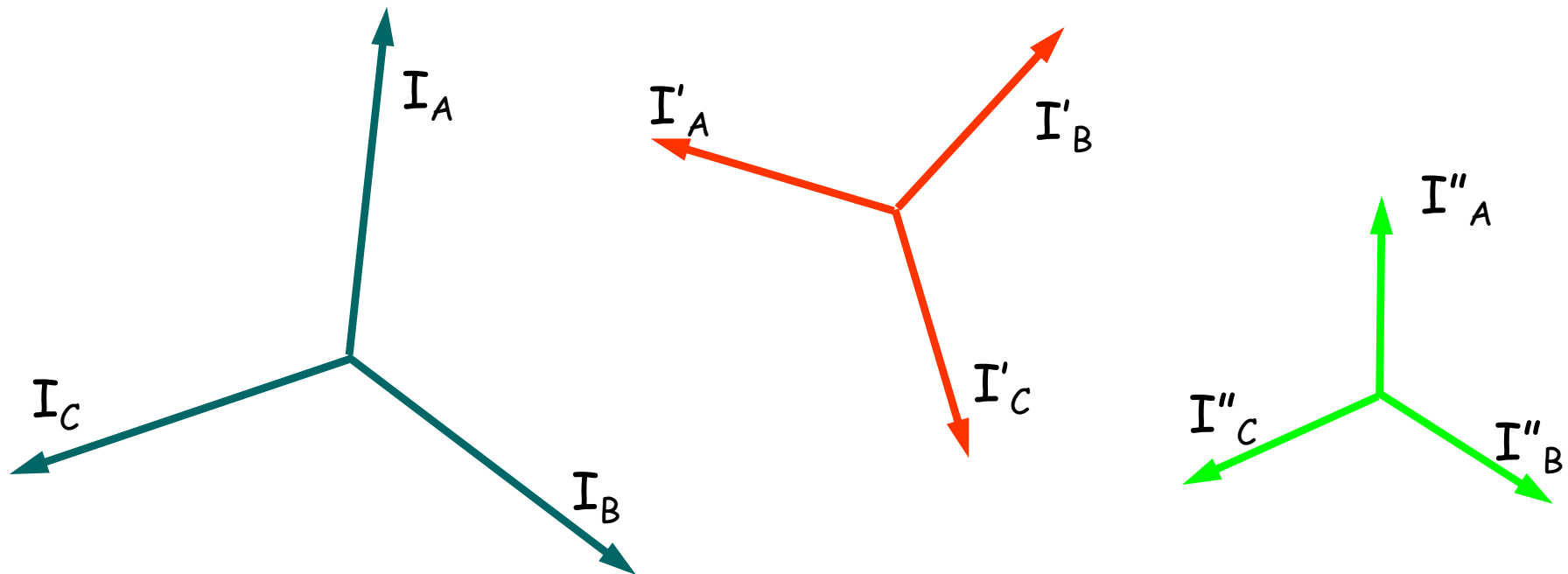
Esempio:



$$\begin{aligned} \dot{Z}_{1e} &= (\dot{Z}_{p1} + \alpha^2 \dot{Z}_{m1} + \alpha \dot{Z}_{n1}) \\ \dot{Z}_{2e} &= (\dot{Z}_{p2} + \alpha^2 \dot{Z}_{m2} + \alpha \dot{Z}_{n2}) \\ \dot{Z}_{3e} &= (\dot{Z}_{p3} + \alpha^2 \dot{Z}_{m3} + \alpha \dot{Z}_{n3}) \end{aligned}$$

Esempio (Cnt.):

Trovate le correnti I_A , I'_A e I''_A , le altre si ricavano considerando che quelle trovate sono i primi fasori di terne equilibrate:



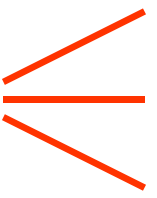
CARICHI SQUILIBRATI

➤ La presenza di carichi non trifase può introdurre uno squilibrio nelle correnti.

Es. Utilizzatori monofase come quelli domestici

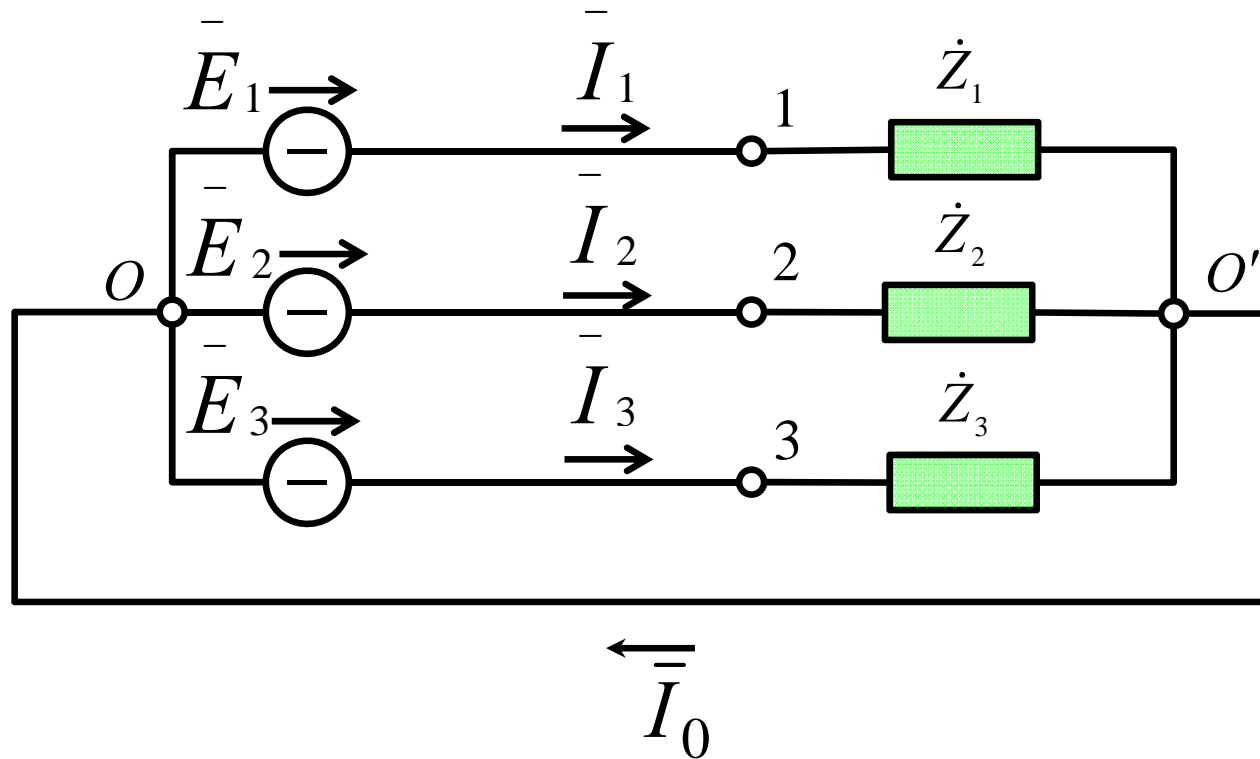
Lo squilibrio dovuto ai carichi monofase, almeno nelle grandi reti, può essere compensato

➤ I guasti possono introdurre squilibrio nelle correnti

Guasti:  Fra fase e fase
Fra fase e neutro (Terra)
Fra fase-fase e neutro (Terra)

Il caso dei guasti è il più importante perché coinvolge grandi potenze

CARICHI SQUILIBRATI: SISTEMA TRIFASE Y-Y CON NEUTRO



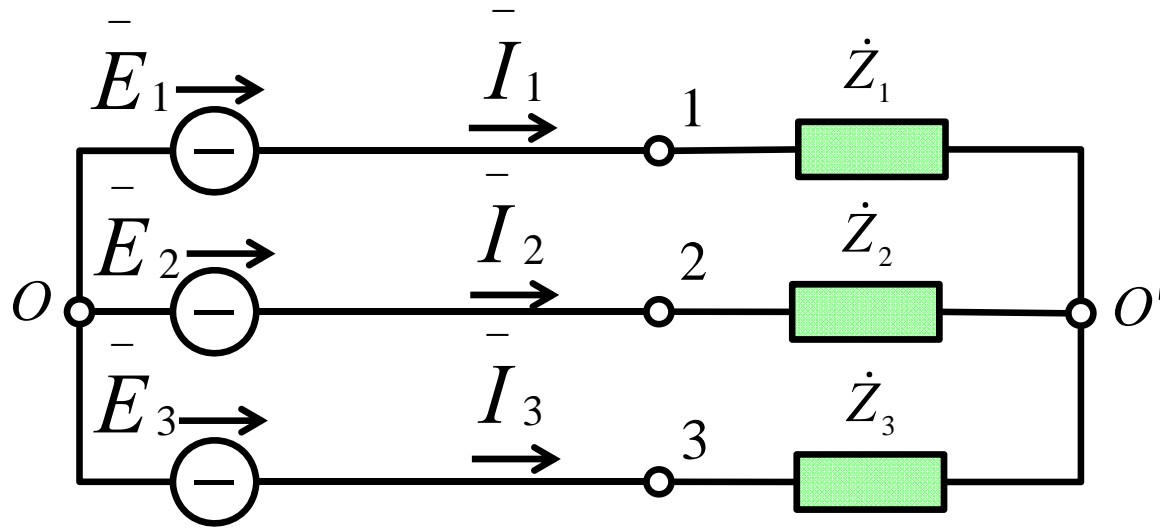
$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1}; \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2}; \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3}$$

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3$$

CARICHI SQUILIBRATI: SISTEMI TRIFASE Y-Y SENZA NEUTRO ACCESSIBILE

- Tra centro stella del carico e centro stella del generatore viene persa la equipotenzialità.
Si verifica uno spostamento del centro stella
- Tale centro stella può essere trovato calcolando il fasore spostamento del centro stella e facendo uso dei teoremi e dei metodi visti per i circuiti monofase

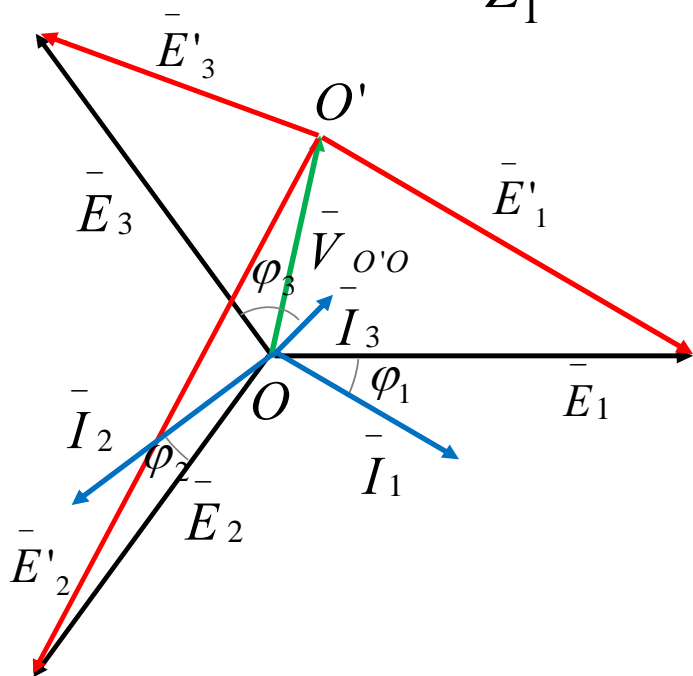
METODO DELLO SPOSTAMENTO DEL CENTRO STELLA



$$\bar{V}_{o'o} = \frac{\frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} + \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} + \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3}}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}}$$

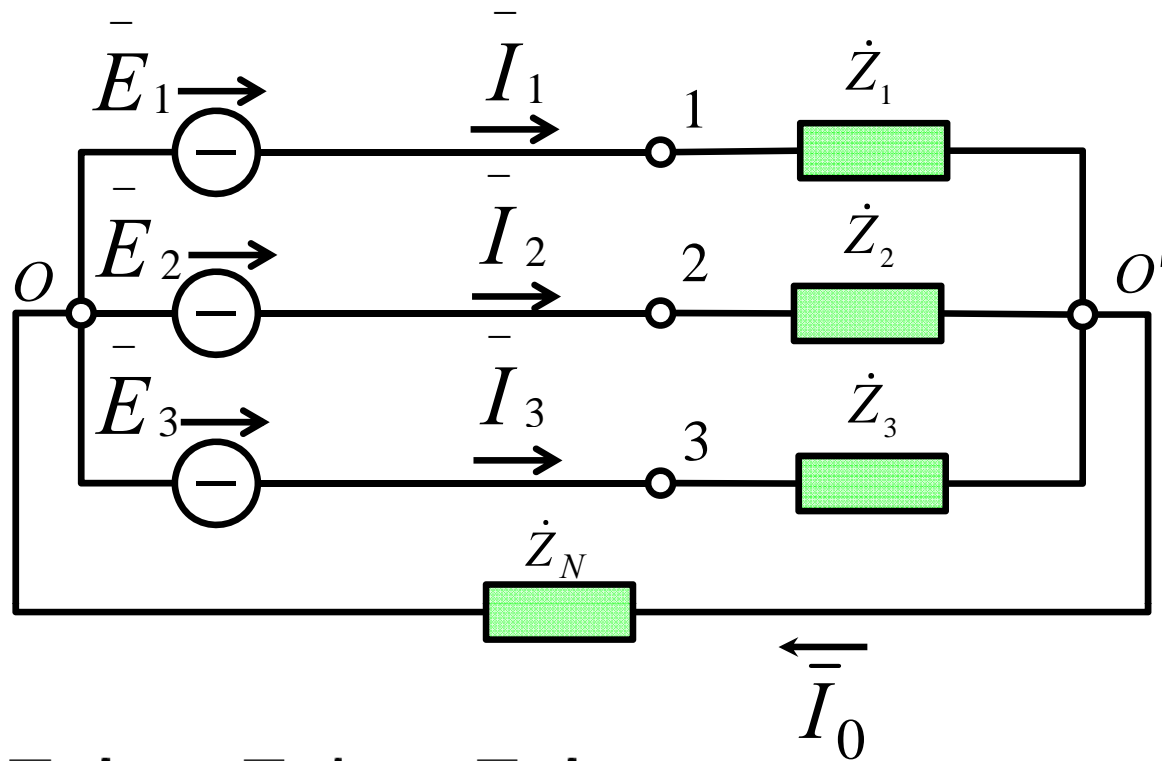
Teorema di Millmann

da cui: $\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1 - \bar{V}_{o'o}}{\dot{Z}_1}; \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2 - \bar{V}_{o'o}}{\dot{Z}_2}; \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3 - \bar{V}_{o'o}}{\dot{Z}_3}$



Il centro stella del carico e' spostato rispetto al centro stella del generatore

CARICHI SQUILIBRATI: SISTEMA TRIFASE Y-Y CON NEUTRO

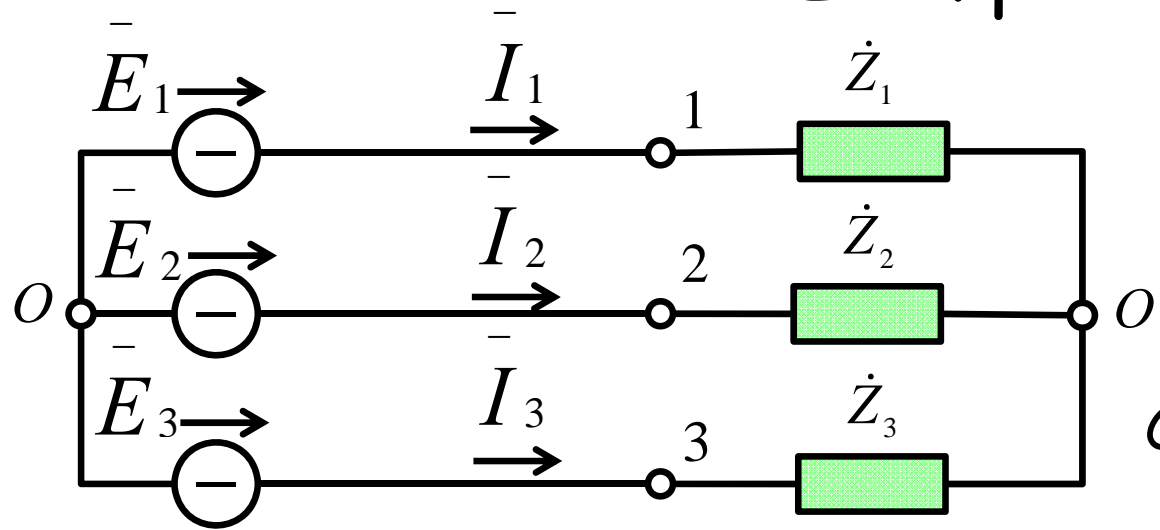


$$\bar{V}_{o'o} = \frac{\bar{E}_1 \dot{Y}_1 + \bar{E}_2 \dot{Y}_2 + \bar{E}_3 \dot{Y}_3}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 + \dot{Y}_N}$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1 - \bar{V}_{o'o}}{\dot{Z}_1} \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2 - \bar{V}_{o'o}}{\dot{Z}_2} \quad \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3 - \bar{V}_{o'o}}{\dot{Z}_3}$$

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3$$

Esempio



$$U = 400V$$

$$\dot{Z}_1 = 100\Omega;$$

$$\dot{Z}_2 = j100\Omega;$$

$$\dot{Z}_3 = -j100\Omega$$

Calcolare le correnti di linea

Si introducono le tensioni stellate, prendendo come riferimento \bar{E}_1

$$\bar{E}_1 = \frac{U}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 231(V); \bar{E}_2 = \alpha^2 \bar{E}_1 = 231e^{-j\frac{2\pi}{3}} (V); \bar{E}_3 = \alpha \bar{E}_1 = 231e^{-j\frac{4\pi}{3}} (V)$$

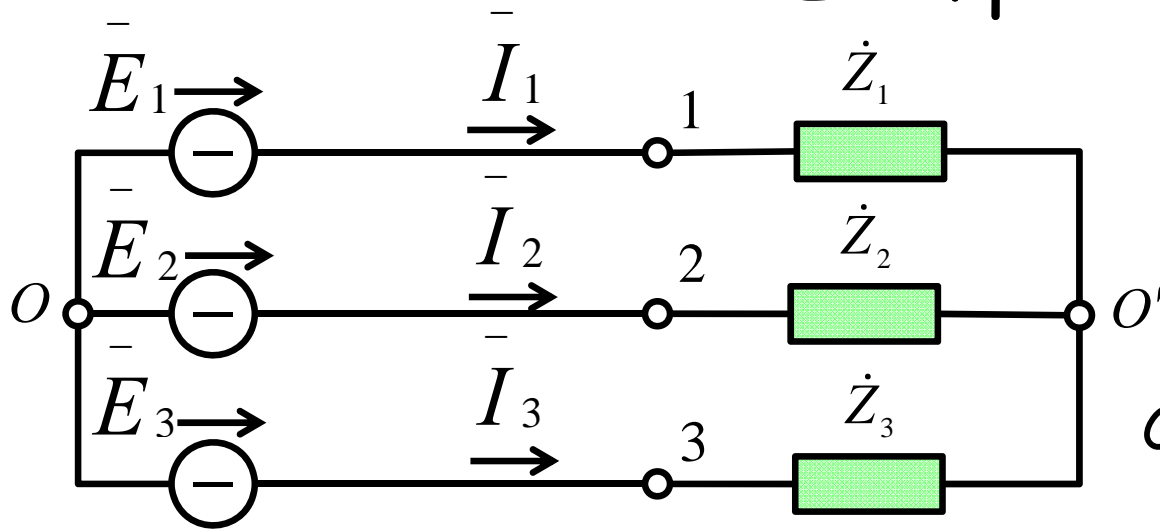
$$\bar{V}_{oo'} = \frac{0.01 \cdot 231 - j0.01 \cdot \alpha^2 231 + j0.01 \cdot \alpha \cdot 231}{0.01 - j0.01 + j0.01} = -169(V)$$

$$\bar{I}_1 = 0.01(231 + 169) = 4(A); \bar{I}_2 = -j0.01(\alpha^2 231 + 169) = -2 - j0.536(A);$$

$$\bar{I}_3 = -2 + j0.536(A)$$

Essendo il centro stella isolato e': $\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$

Esempio



$$\bar{U} = 400V$$

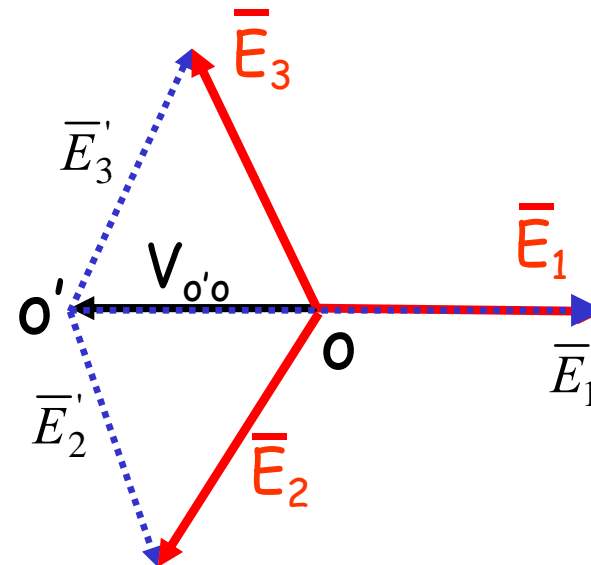
$$\dot{Z}_1 = 100\Omega;$$

$$\dot{Z}_2 = j100\Omega;$$

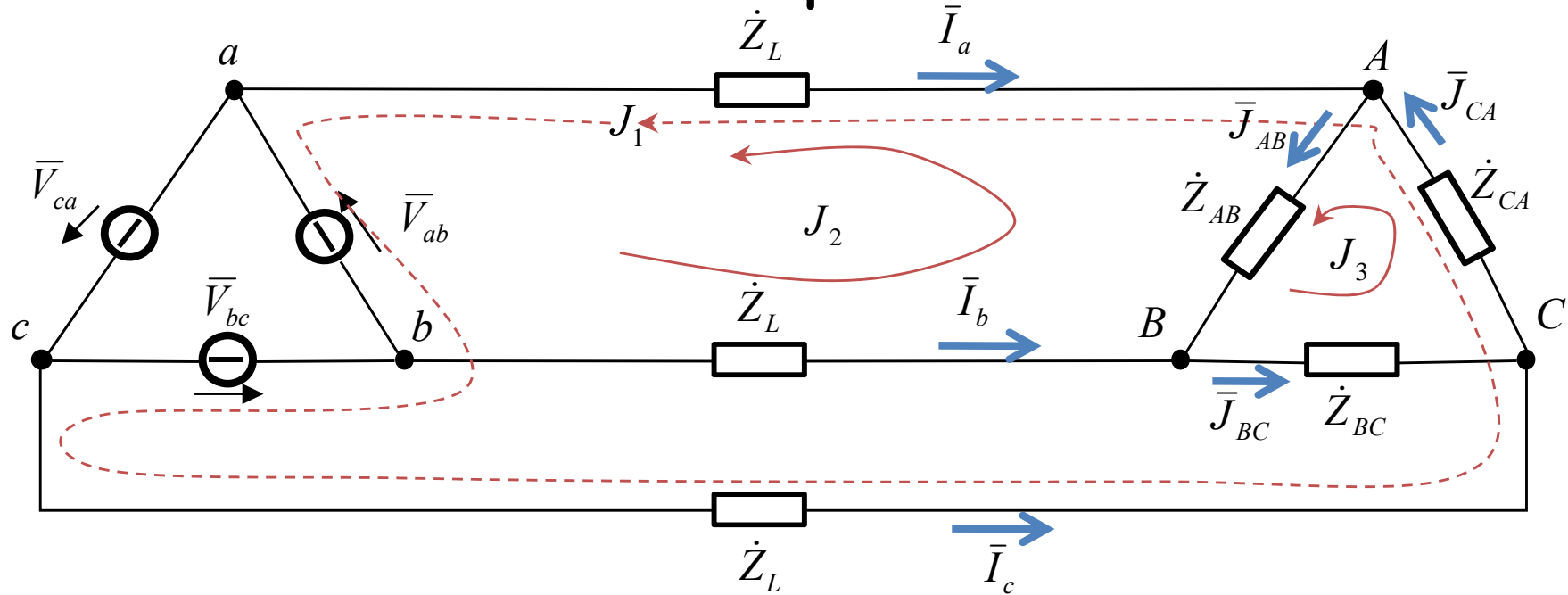
$$\dot{Z}_3 = -j100\Omega$$

Calcolare le correnti di linea

Diagramma fasoriale



Esempio

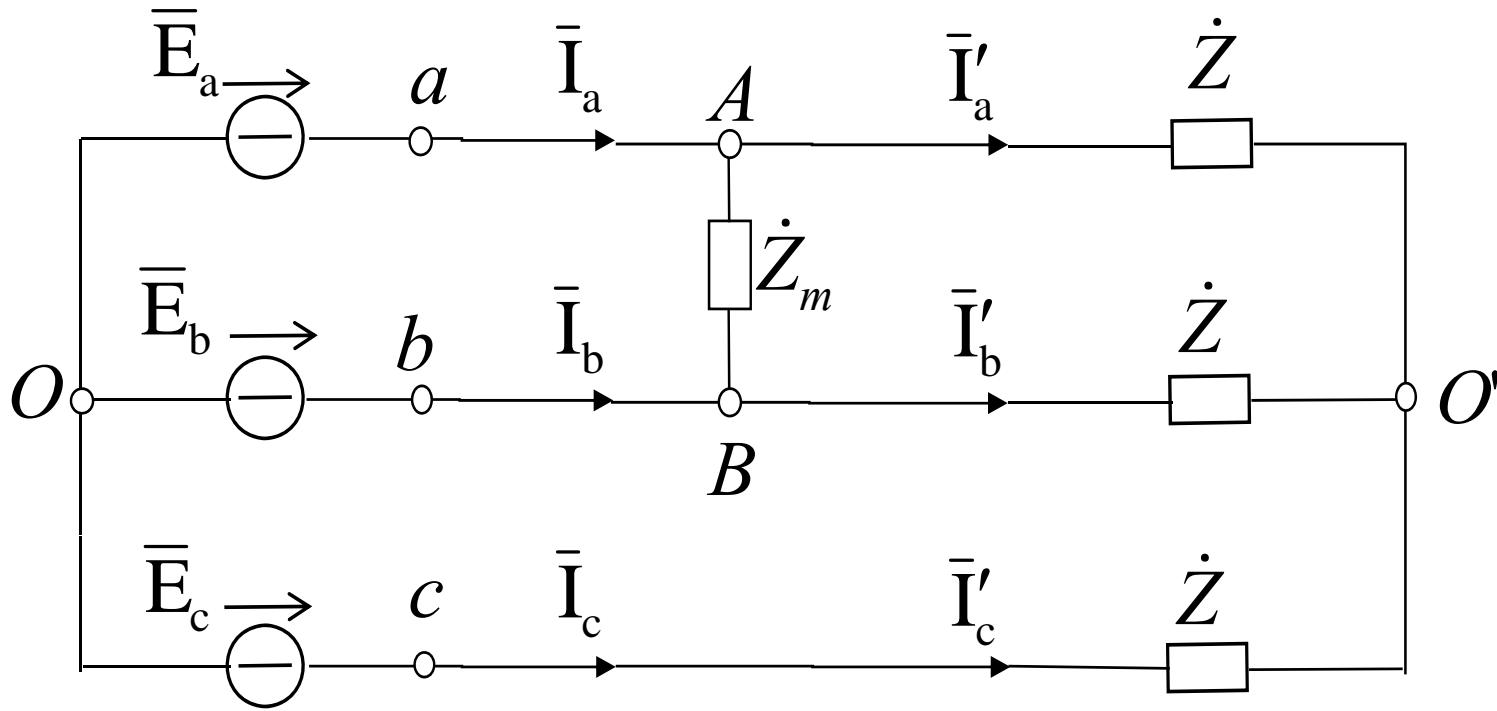


$$\begin{bmatrix} (2\dot{Z}_L + \dot{Z}_{CA}) & \dot{Z}_L & \dot{Z}_{CA} \\ \dot{Z}_L & (2\dot{Z}_L + \dot{Z}_{AB}) & -\dot{Z}_{AB} \\ \dot{Z}_{CA} & -\dot{Z}_{AB} & (\dot{Z}_{AB} + \dot{Z}_{BC} + \dot{Z}_{CA}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{J}_1 \\ \bar{J}_2 \\ \bar{J}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{V}_{ab} - \bar{V}_{bc} \\ -\bar{V}_{ab} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \bar{J}_{AB} = \bar{J}_3 - \bar{J}_2 \\ \bar{J}_{BC} = \bar{J}_3 \\ \bar{J}_{CA} = \bar{J}_3 + \bar{J}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{I}_A = -\bar{J}_1 - \bar{J}_2 \\ \bar{I}_B = \bar{J}_2 \\ \bar{I}_C = \bar{J}_1 \end{cases}$$

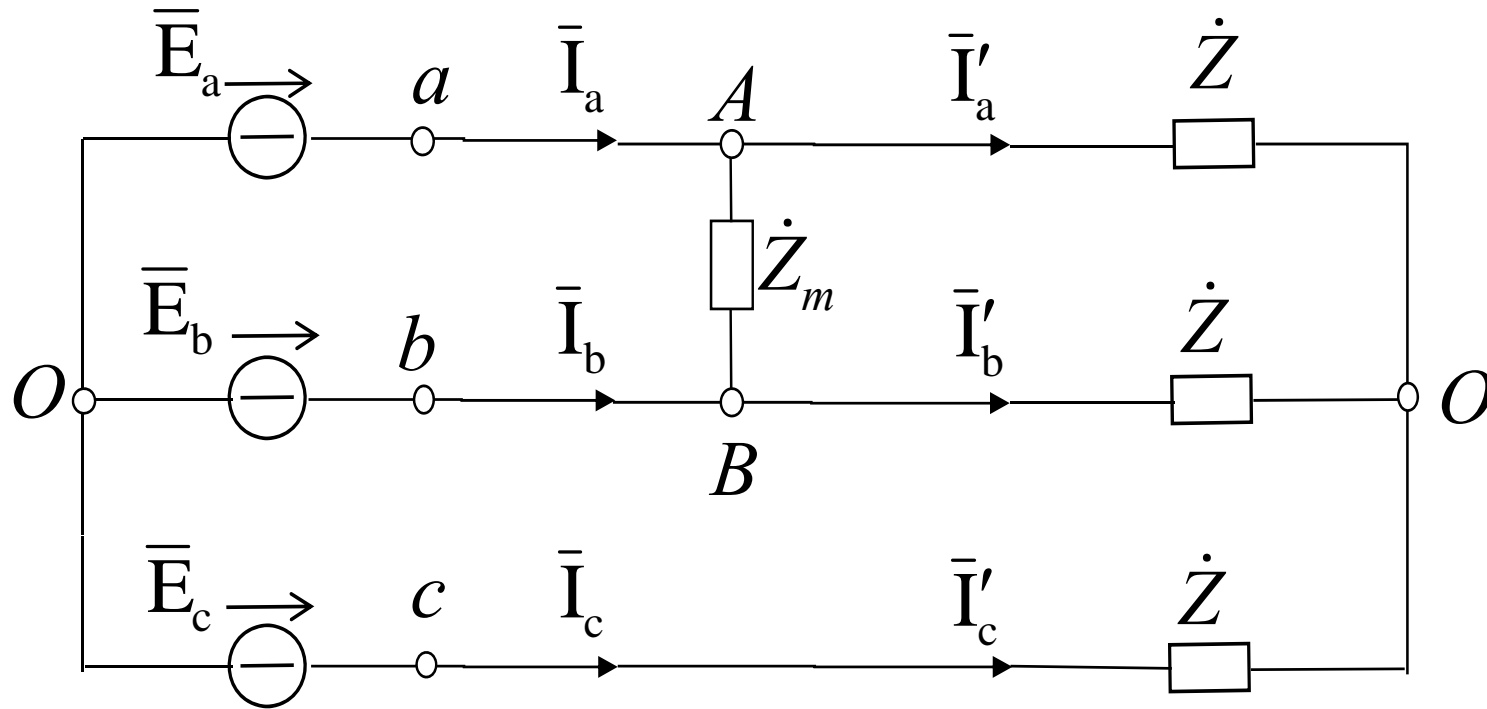
Esempio



La terna delle correnti $\bar{I}'_a; \bar{I}'_b; \bar{I}'_c$ costituisce una terna equilibrata

$$\bar{I}'_a = \frac{\bar{E}_a}{\dot{Z}}; \bar{I}'_b = \frac{\bar{E}_b}{\dot{Z}}; \bar{I}'_c = \frac{\bar{E}_c}{\dot{Z}}$$

Esempio



La terna delle correnti $\bar{I}_a; \bar{I}_b; \bar{I}_c$ sarà invece una terna squilibrata a causa del carico monofase che carica diversamente le tre fasi

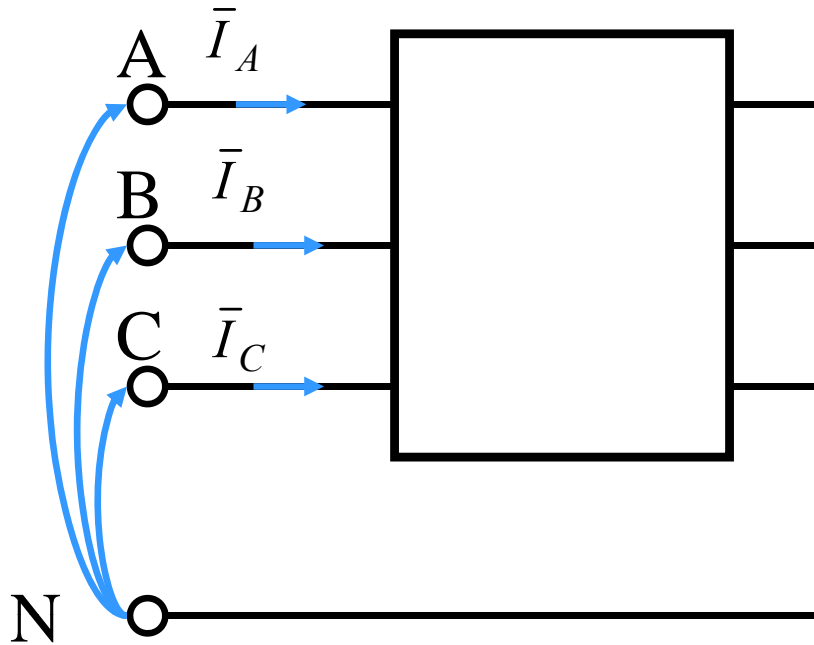
$$\bar{I}_{AB} = \frac{\bar{V}_{AB}}{\dot{Z}_m} \quad \text{con} \quad \bar{V}_{AB} = \bar{E}_a - \bar{E}_b$$

Applicando l'equilibrio alle correnti ai nodi A e B si ottiene:

$$\begin{cases} \bar{I}_a = \bar{I}'_a + \bar{I}_{AB} \\ \bar{I}_b = \bar{I}'_b - \bar{I}_{AB} \\ \bar{I}_c = \bar{I}'_c \end{cases}$$

POTENZE NEI SISTEMI TRIFASE

NEUTRO ACCESSIBILE



Potenza istantanea

$$p(t) = e_A i_A + e_B i_B + e_C i_C$$

In regime sinusoidale

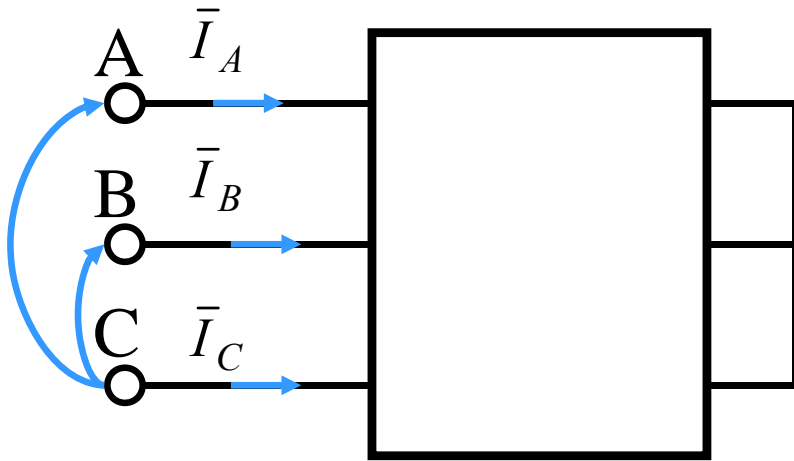
$$P = E_A I_A \cos \varphi_A + E_B I_B \cos \varphi_B + E_C I_C \cos \varphi_C$$

$$Q = E_A I_A \sin \varphi_A + E_B I_B \sin \varphi_B + E_C I_C \sin \varphi_C$$

$$\dot{S} = P + jQ \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

POTENZE NEI SISTEMI TRIFASE

SENZA NEUTRO



Si può considerare uno dei tre terminali come COMUNE

$$\begin{cases} v_{AC} = e_A - e_C & \text{Tensioni concatenate} \\ v_{BC} = e_B - e_C \\ i_A + i_B + i_C = 0 \end{cases}$$

$$p(t) = v_{AC}i_A + v_{BC}i_B = (e_A - e_C)i_A + (e_B - e_C)i_B = e_Ai_A + e_Bi_B + e_Ci_C$$

In regime sinusoidale

$$P = V_{AC}I_A \cos(\bar{V}_{AC}\bar{I}_A) + V_{BC}I_B \cos(\bar{V}_{BC}\bar{I}_B)$$

$$Q = V_{AC}I_A \sin(\bar{V}_{AC}\bar{I}_A) + V_{BC}I_B \sin(\bar{V}_{BC}\bar{I}_B)$$

Sistema Simmetrico ed Equilibrato con **Neutro Accessibile**

$$p(t) = E_M \cos(\omega t) \cdot I_M \cos(\omega t - \varphi) + \\ + E_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot I_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) + \\ + E_M \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cdot I_M \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right)$$

Poiche' e': $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$

e ponendo $I_M = \sqrt{2}I; E_M = \sqrt{2}E$

$$p(t) = 2EI \left\{ \frac{1}{2} [\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi] + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left[\cos\left(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right) + \cos \varphi \right] + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left[\cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) + \cos \varphi \right] \right\} = 3EI \cos \varphi$$

La potenza istantanea e' costante

$$P = 3EI \cos \varphi$$

$$Q = 3EI \sin \varphi$$

$$S = 3EI$$

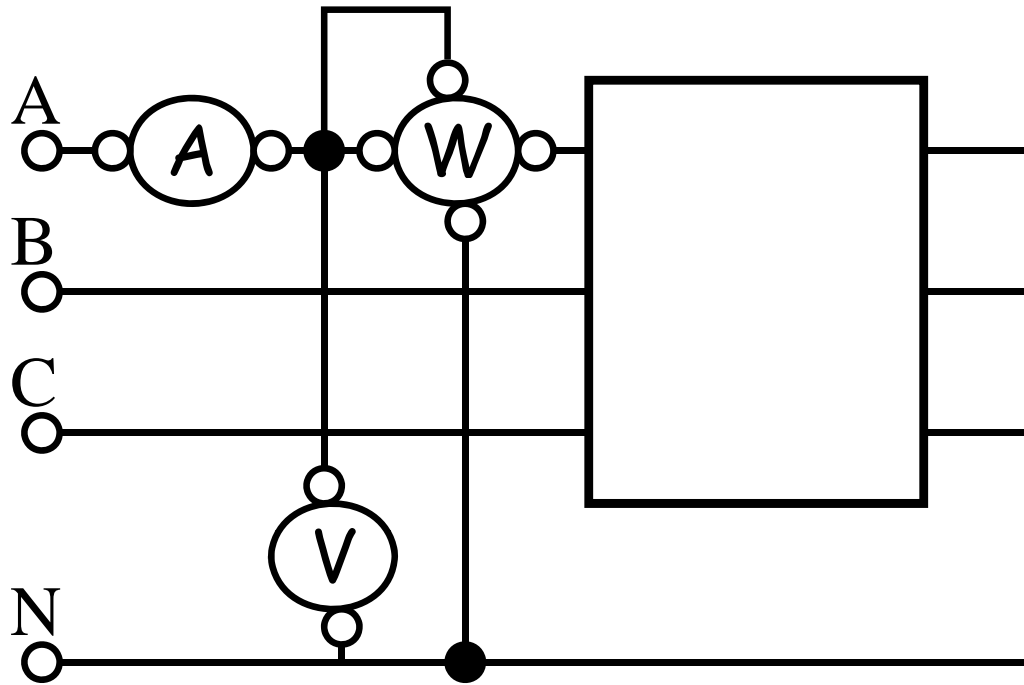
$$P = \sqrt{3}UI \cos \varphi$$

$$Q = \sqrt{3}UI \sin \varphi$$

$$S = \sqrt{3}UI$$

$$\dot{S} = P + jQ$$

MISURE (Neutro accessibile)



$$P = 3P' \quad (\text{Wattmetro})$$

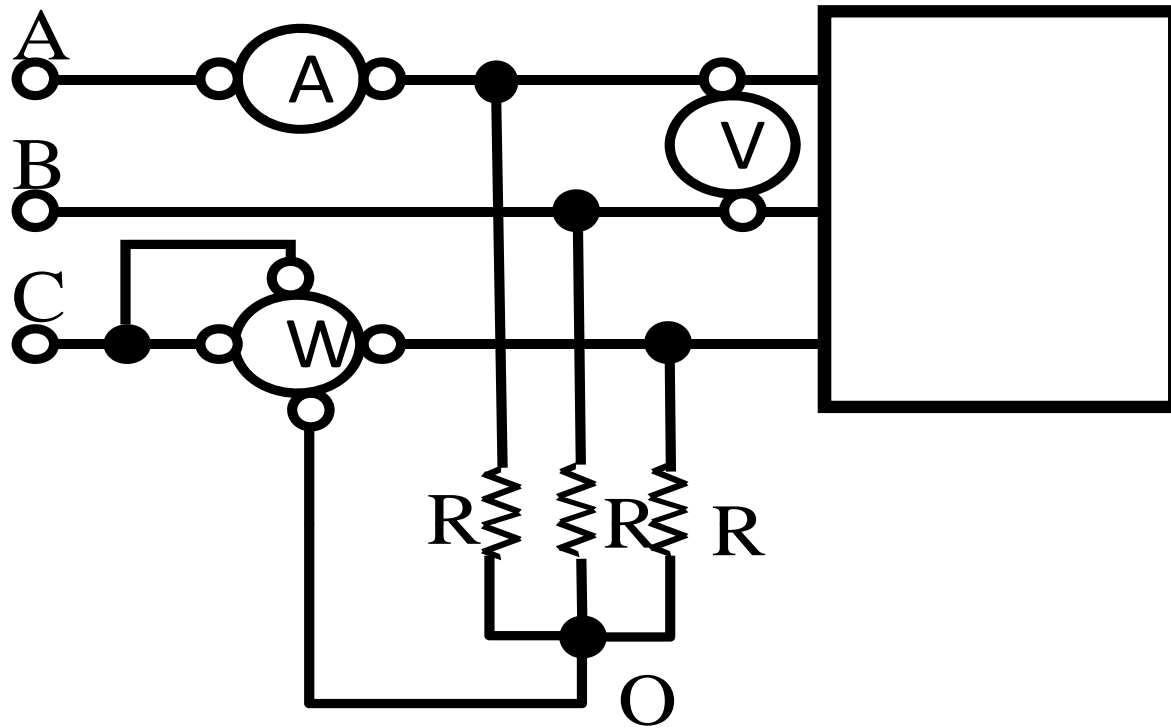
$$S = 3EI \quad (\text{Amp} + \text{Volt})$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{3EI}$$

$$|\sin \varphi| = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$$

$$|Q| = 3EI |\sin \varphi|$$

MISURE (Neutro non accessibile)

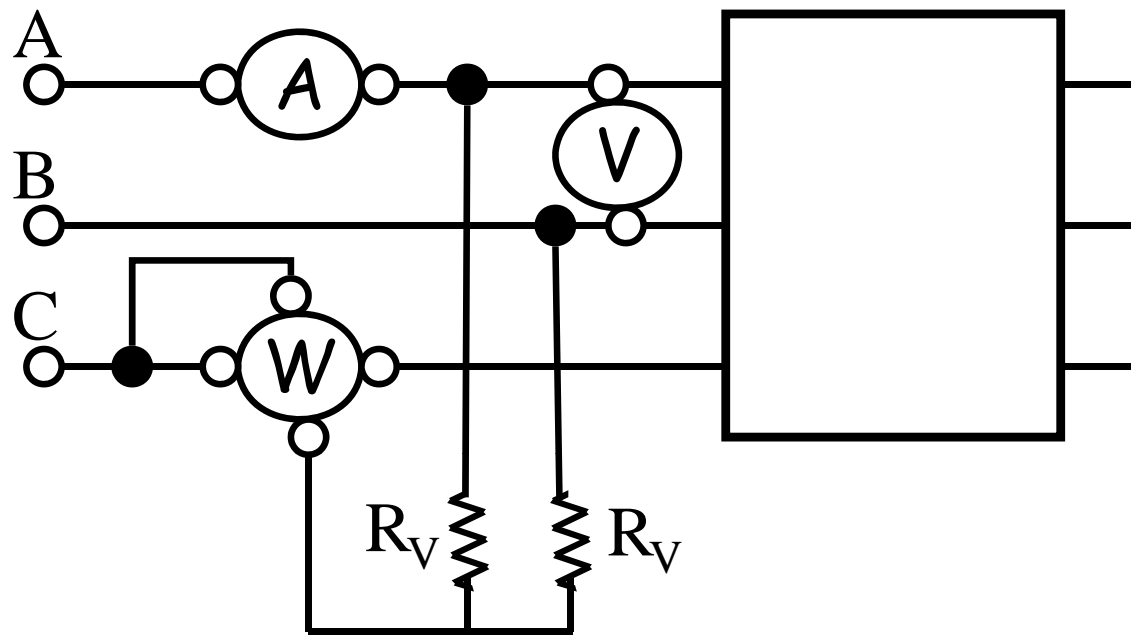


Si crea un centro stella artificiale

$$P = 3P' \quad (\text{Wattmetro})$$

$$U = \sqrt{3}E \quad (\text{Volt})$$

MISURE (Neutro non accessibile)



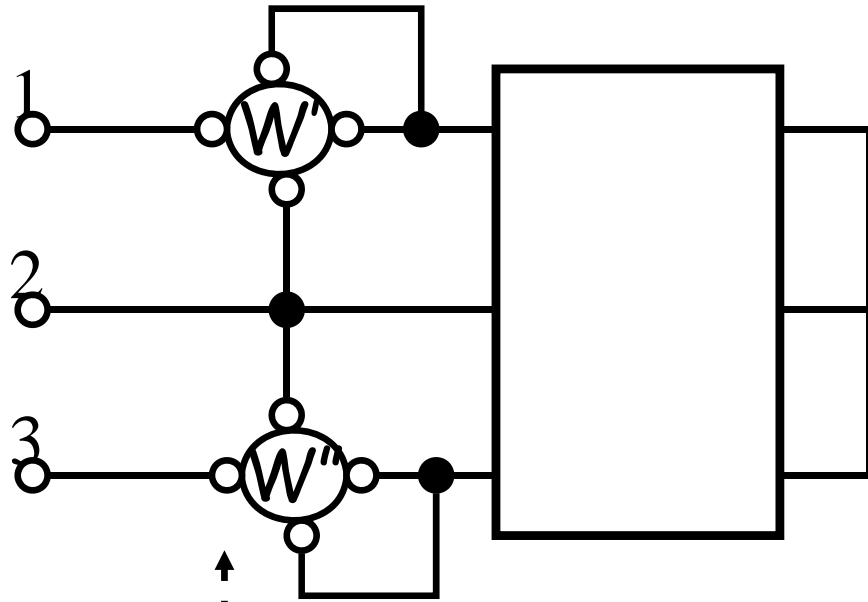
Si crea un centro stella artificiale

$$P = 3P' \quad (\text{Wattmetro})$$

$$U = \sqrt{3}E \quad (\text{Volt})$$

R_V : resistenza voltmetrica del wattmetro

Inserzione Aron

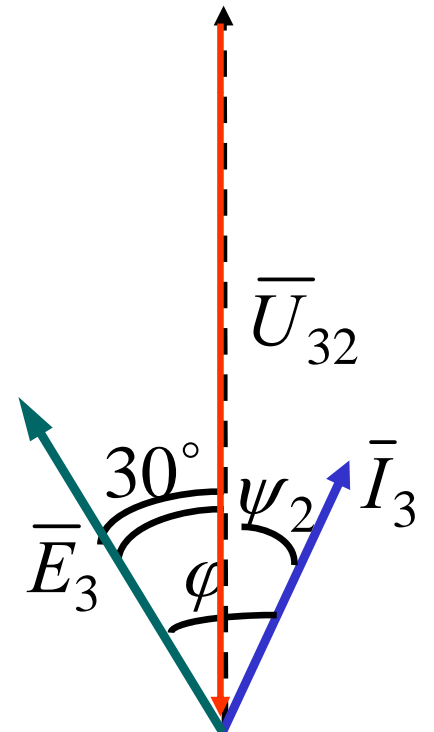
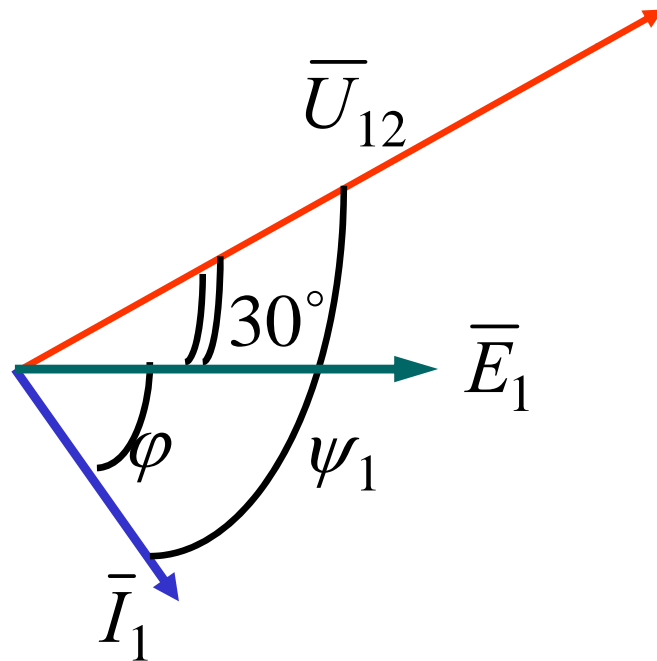
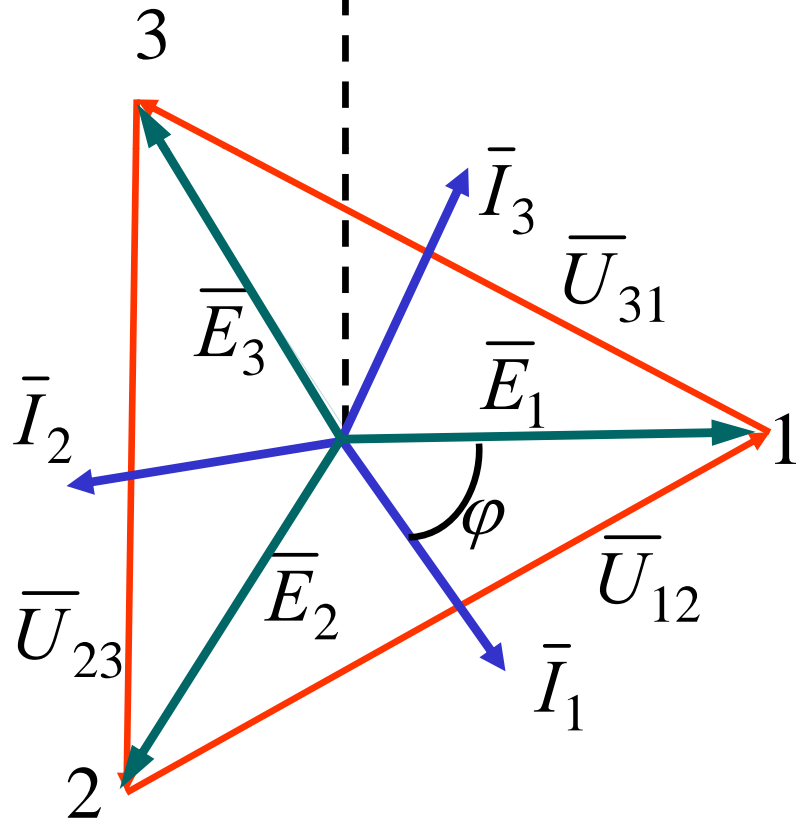


$$P' = V_{12} I_1 \cos(\bar{V}_{12} \bar{I}_1)$$

$$P'' = V_{32} I_3 \cos(\bar{V}_{32} \bar{I}_3)$$

$$P' = V_{12} I_1 \cos(\psi_1)$$

$$P'' = V_{32} I_3 \cos(\psi_2)$$



$$P' = V_{12} I_1 \cos(\varphi + 30^\circ)$$

$$P'' = V_{32} I_3 \cos(\varphi - 30^\circ)$$

$$P = P' + P''$$

Dimostrazione

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$P' + P'' = VI [\cos(\varphi - 30^\circ) + \cos(\varphi + 30^\circ)] = \sqrt{3}EI \cdot 2 \cos \varphi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3EI \cos \varphi = P$$

La somma delle letture dei due wattmetri fornisce la potenza attiva del sistema

$$Q = \sqrt{3}(P'' - P')$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} P'' - P' &= VI [\cos(\varphi - 30^\circ) - \cos(\varphi + 30^\circ)] = -\sqrt{3}EI \cdot 2 \cdot -\left(\frac{1}{2}\right) \sin \varphi = \\ &= \sqrt{3}EI \sin \varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

La potenza reattiva del sistema è $\sqrt{3}$ volte la differenza $P'' - P'$

Note:

- Se il carico è resistivo ($\varphi=0$) $P'=P''$
- Se il carico è induttivo o capacitivo $P' \neq P''$:

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}VI \sin \varphi}{\sqrt{3}VI \cos \varphi} = \frac{Q}{P} = \sqrt{3} \frac{P'' - P'}{P'' + P'}$$

- Se l'ordine ciclico è diretto, man mano che φ cresce P' si riduce rispetto a P'' ; la potenza reattiva varia al variare di φ

Note (Cnt):

- Se conosciamo la natura del carico possiamo determinare l'ordine ciclico delle fasi:
se il carico e' induttivo $Q > 0$ implica che se leggiamo $P'' - P' < 0$ deduciamo che l'ordine ciclico e' inverso (e viceversa)

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}VI \sin \varphi}{\sqrt{3}VI \cos \varphi} = \frac{Q}{P} = \sqrt{3} \frac{P'' - P'}{P'' + P'}$$

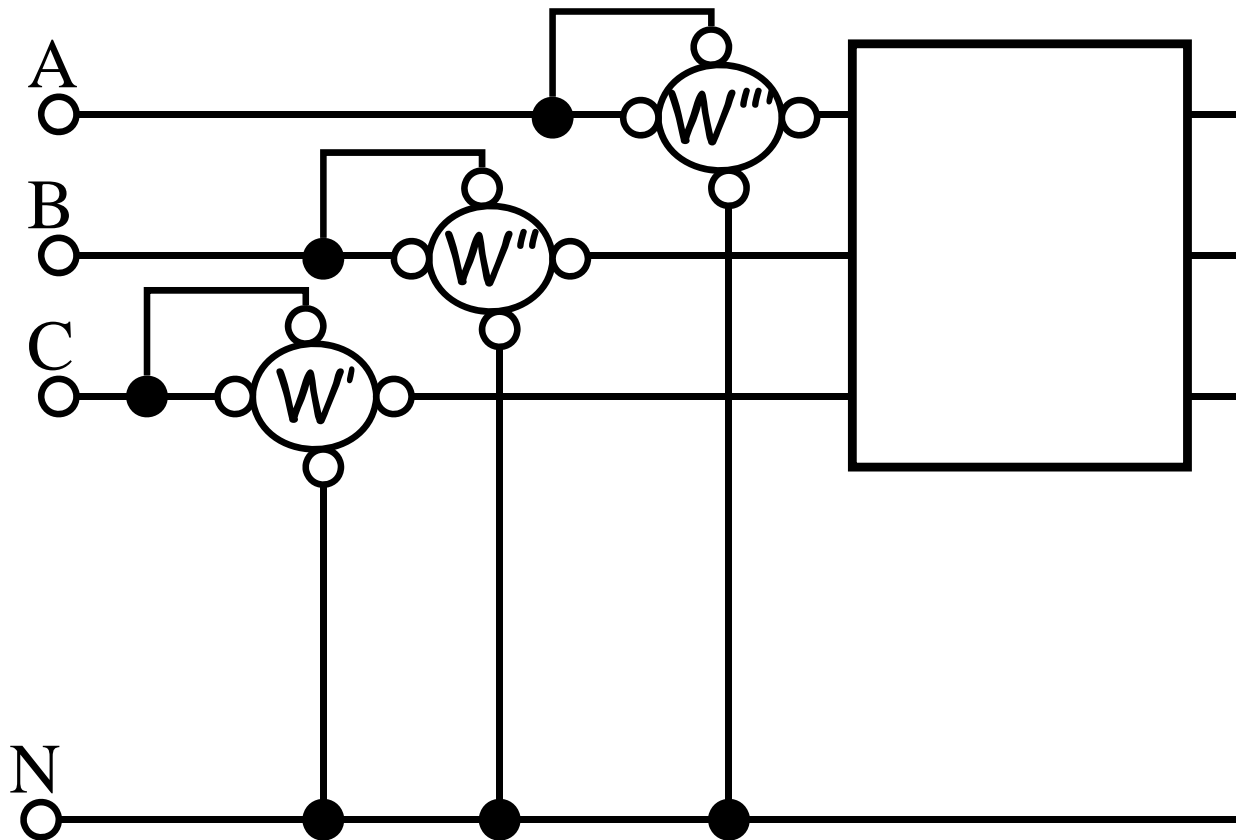
Note (Cnt):

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}VI \sin \varphi}{\sqrt{3}VI \cos \varphi} = \frac{Q}{P} = \sqrt{3} \frac{P'' - P'}{P'' + P'}$$

- Se $\varphi > 60$ P' diventa negativo
- Se l'ordine ciclico e' inverso le precedenti si ribaltano
- Se l'ordine ciclico e' diretto :
 $P'' - P' < 0$ implica $Q < 0$ carico capacitivo (e viceversa)
- Se conosciamo la natura del carico possiamo determinare l'ordine ciclico delle fasi:
se il carico e' induttivo $Q > 0$ implica che se leggiamo $P'' - P' < 0$ deduciamo che l'ordine ciclico e' inverso (e viceversa)

Sistema dissimmetrico e squilibrato

➤ Neutro accessibile



$$P = P' + P'' + P'''$$

➤ Neutro non accessibile

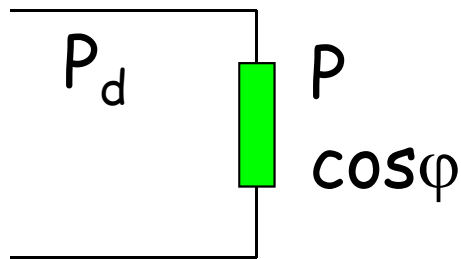
Il centro stella artificiale può essere scelto ad arbitrio, ad es. sul filo 2.
La potenza attiva può ancora essere misurata con l'inserzione Aron
PER MISURARE LA POTENZA REATTIVA OCCORRE UTILIZZARE 3
WATTMETRI (Es. Inserzione RIGHI)

Utilità dei sistemi trifase

Impiego: Produzione, trasporto, distribuzione, utilizzazione (i sistemi monofase sono impiegati in applicazioni specifiche come impianti di piccola potenza, per uso domestico, trazione, elettrochimici, etc.)

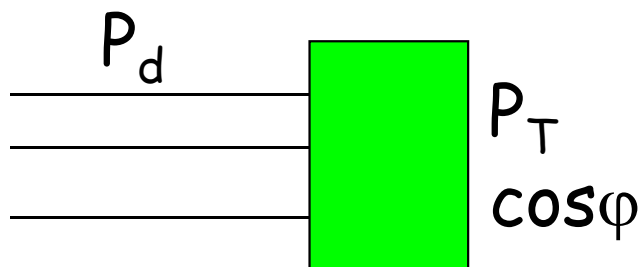
Utilità:

A parità di tensione, potenza trasportata e perdite ammesse, col trifase si utilizza un volume di rame inferiore del 25%



$$P = VI \cos \varphi = \sqrt{3}UI_T \cos \varphi = P_T \Rightarrow I_T = \frac{I}{\sqrt{3}}$$

$$P_d = 2RI^2 = 2\rho \frac{L}{S} I^2 = 3R_T I_T^2 = 3\rho \frac{L}{S_T} I_T^2$$



Il volume di rame richiesto nei due casi è:

$$v = 2LS; v_T = 3LS_T \Rightarrow v_T = \frac{3}{4}v$$

Utilità:

I sistemi trifase permettono la generazione del CAMPO
MAGNETICO ROTANTE → MOTORI ASINCRONI

TRIFASE per potenze sino a diverse decine di MW

La potenza istantanea, e quindi la coppia di un motore trifase, e' costante. Di conseguenza diminuisce il rischio di oscillazioni meccanici sono dimensionati per la coppia media anziché per la coppia massima

I generatori trifase, a parità di potenza, consentono un miglior sfruttamento del rame e del ferro

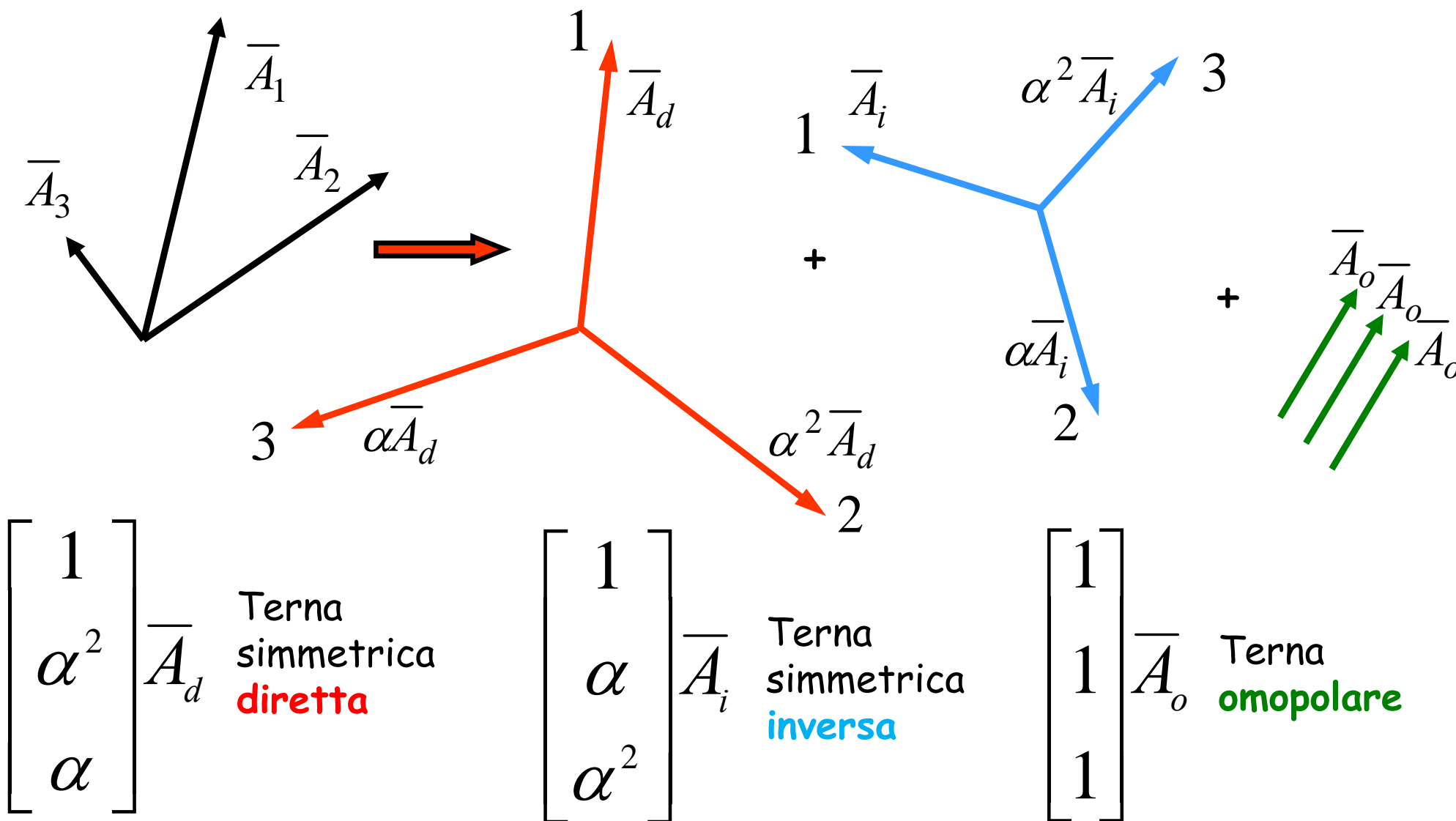
GUASTI

- CORTO CIRCUITI TRA FASE E FASE
- CORTO CIRCUITI FRA FASE E NEUTRO (TERRA)
- CORTO CIRCUITI FRA FASE-FASE E NEUTRO (TERRA)

Il caso dei guasti e' il più importante perché coinvolge grandi potenze

PRINCIPIO DI SCOMPOSIZIONE

Una terna dissimmetrica e' univocamente scomponibile in una terna simmetrica **diretta**, una **inversa** e una **omopolare**



MATRICI DI FORTESCUE

Trasformazione lineare delle variabili descrittive

DIRETTA

INVERSA

$$[F] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$[F]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}$$

PRINCIPIO DI SCOMPOSIZIONE

$$\begin{bmatrix} \overline{E}_o \\ \overline{E}_d \\ \overline{E}_i \end{bmatrix} = [F] \cdot \begin{bmatrix} \overline{E}_1 \\ \overline{E}_2 \\ \overline{E}_3 \end{bmatrix}$$

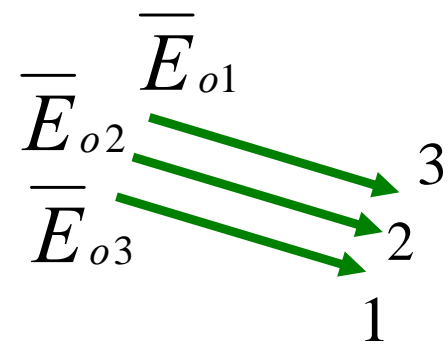
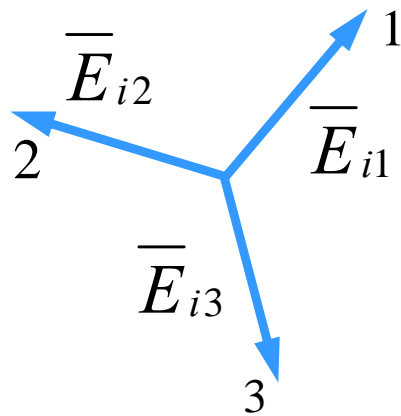
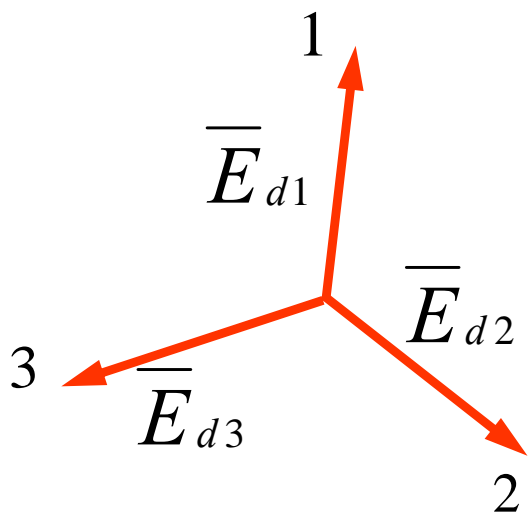
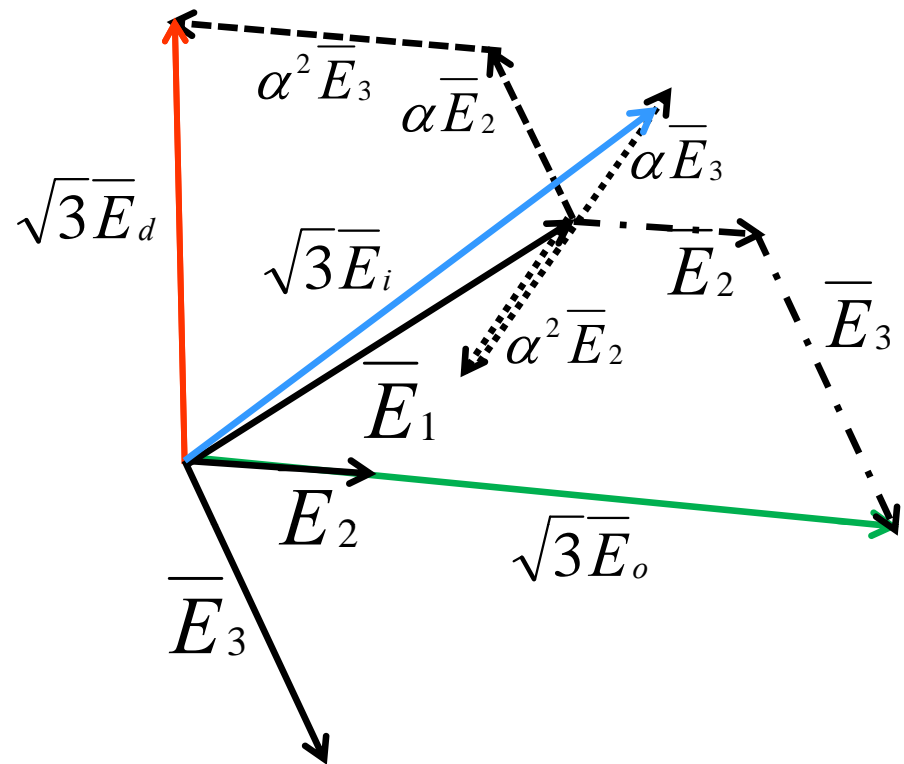
$$\begin{bmatrix} \overline{E}_1 \\ \overline{E}_2 \\ \overline{E}_3 \end{bmatrix} = [F]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \overline{E}_o \\ \overline{E}_d \\ \overline{E}_i \end{bmatrix}$$

PRINCIPIO DI SCOMPOSIZIONE

$$\begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{bmatrix}$$

⇒ terna di partenza (dissimmetrica)

$$\begin{cases} \bar{E}_o = \frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3) \\ \bar{E}_d = \frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{E}_1 + \alpha \bar{E}_2 + \alpha^2 \bar{E}_3) \\ \bar{E}_i = \frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{E}_1 + \alpha^2 \bar{E}_2 + \alpha \bar{E}_3) \end{cases}$$



Se il sistema e' simmetrico diretto:

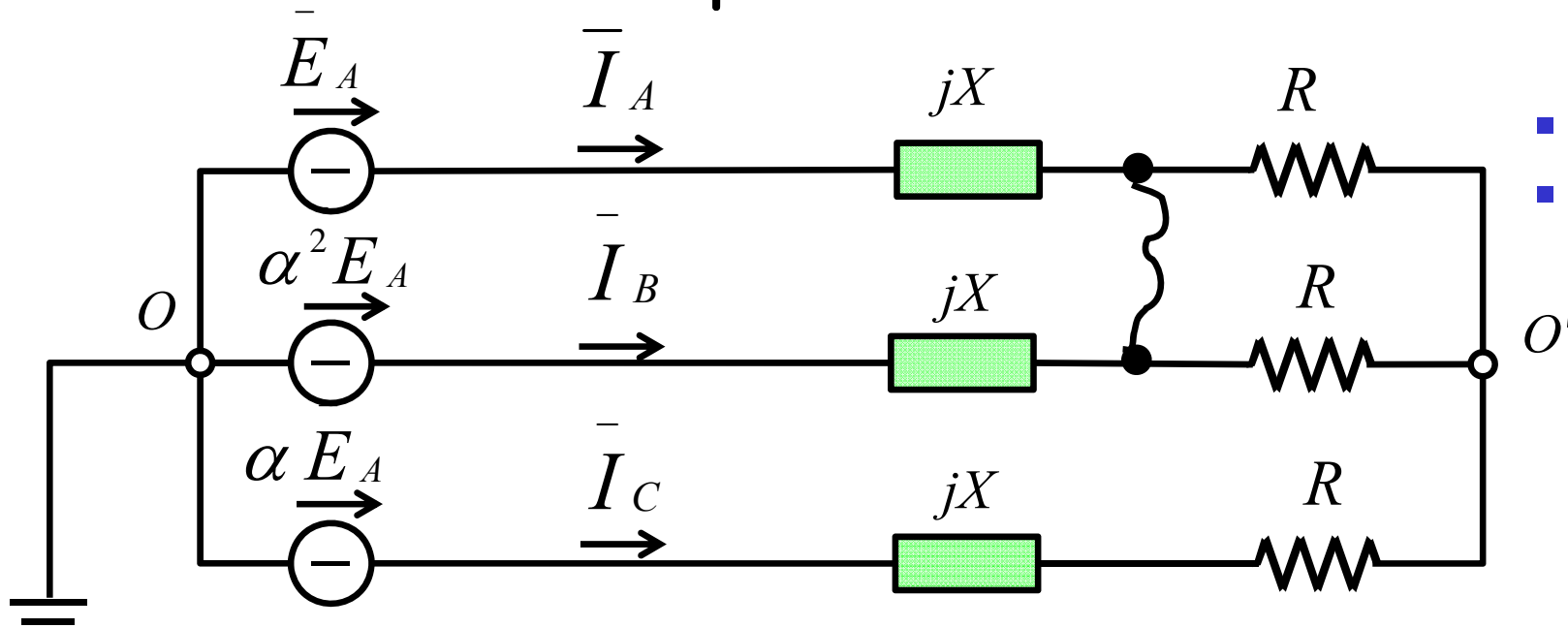
$$\begin{cases} \bar{E}_o = 0 \\ \bar{E}_d = \sqrt{3} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_i = 0 \end{cases}$$

Se $\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0 \Rightarrow \bar{E}_o = 0$ terna pura

$[F]$ e $[F]^{-1}$ sono adimensionali

$$\begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \alpha^2 \bar{E}_1 \\ \alpha \bar{E}_1 \end{bmatrix} = [F]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \bar{E}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esempio di Corto-Circuito



- Neutro isolato
- cto-cto in H

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_A - \bar{V}_H = jX\bar{I}_A \\ \bar{E}_B - \bar{V}_H = jX\bar{I}_B \\ \bar{E}_C - \bar{V}_H = (R + jX)\bar{I}_C + \frac{R \cdot R}{R + R}\bar{I}_C = (R + jX)\bar{I}_C + \frac{R}{2}\bar{I}_C \\ \bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C = 0 \end{array} \right.$$

- Somma delle correnti nulla (neutro isolato)
- O' non è allo stesso potenziale di O (rialzato da terra)
- Le correnti sono squilibrate
- La presenza del corto circuito crea uno squilibrio

ANALISI DELLE RETI

La procedura di decomposizione è alla base delle semplificazioni dell'analisi delle reti trifase in presenza di guasti:

$$\bar{\mathbf{E}} = [\dot{\mathbf{Z}}] \bar{\mathbf{I}}_+ + \bar{\mathbf{V}} \quad [\dot{\mathbf{Z}}] = \begin{bmatrix} \dot{Z}_p & \dot{Z}_m & \dot{Z}_n \\ \dot{Z}_n & \dot{Z}_p & \dot{Z}_m \\ \dot{Z}_m & \dot{Z}_n & \dot{Z}_p \end{bmatrix}$$

Si dimostra che:

$$[F] \bar{\mathbf{E}} = [F] \underbrace{[\dot{\mathbf{Z}}] [F]^{-1} [F]}_{\text{Identità}} \bar{\mathbf{I}}_+ + [F] \bar{\mathbf{V}} = [\dot{\mathbf{Z}}'] [F] \bar{\mathbf{I}}_+ + [F] \bar{\mathbf{V}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{E}_o \\ \bar{E}_d \\ \bar{E}_i \end{bmatrix} = [\dot{\mathbf{Z}}'] \begin{bmatrix} \bar{I}_o \\ \bar{I}_d \\ \bar{I}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{V}_o \\ \bar{V}_d \\ \bar{V}_i \end{bmatrix}$$

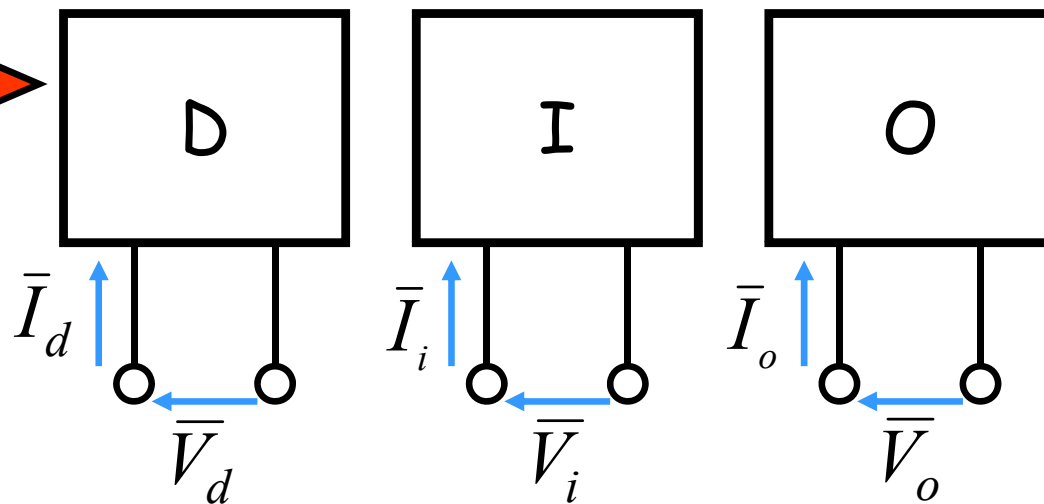
$$\text{con: } [\dot{\mathbf{Z}}'] = \begin{bmatrix} \dot{Z}_o & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Z}_d & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Z}_i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{Z}_o = \dot{Z}_p + \dot{Z}_m + \dot{Z}_n \\ \dot{Z}_d = \dot{Z}_p + \alpha^2 \dot{Z}_m + \alpha \dot{Z}_n \\ \dot{Z}_i = \dot{Z}_p + \alpha \dot{Z}_m + \alpha^2 \dot{Z}_n \end{cases} \quad \text{Impedenze di sequenza}$$

ANALISI DELLE RETI (Cnt.)

Ogni componente di tensione e' legata alla relativa componente di corrente secondo impedenze che rendono le tre relazioni indipendenti fra loro:

Si possono considerare tre reti di sequenza che sono monofase

$$\begin{cases} \bar{E}_0 = \dot{Z}_o \bar{I}_0 + \bar{V}_0 \\ \bar{E}_d = \dot{Z}_d \bar{I}_d + \bar{V}_d \\ \bar{E}_i = \dot{Z}_i \bar{I}_i + \bar{V}_i \end{cases}$$



Al verificarsi del guasto le tre reti dovranno essere opportunamente interconnesse in modo da verificare sia le condizioni imposte dal guasto che dal tipo di rete (neutro isolato, a terra, etc.)

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
 [F][\dot{Z}][F]^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{3}} [F] \begin{bmatrix} \dot{Z}_p & \dot{Z}_m & \dot{Z}_n \\ \dot{Z}_n & \dot{Z}_p & \dot{Z}_m \\ \dot{Z}_m & \dot{Z}_n & \dot{Z}_p \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} = \\
 \frac{1}{\sqrt{3}} [F] &\begin{bmatrix} (\dot{Z}_p + \dot{Z}_m + \dot{Z}_n) & (\dot{Z}_p + \alpha^2 \dot{Z}_m + \alpha \dot{Z}_n) & (\dot{Z}_p + \alpha \dot{Z}_m + \alpha^2 \dot{Z}_n) \\ (\dot{Z}_p + \dot{Z}_m + \dot{Z}_n) & (\dot{Z}_n + \alpha^2 \dot{Z}_p + \alpha \dot{Z}_m) & (\dot{Z}_n + \alpha \dot{Z}_p + \alpha^2 \dot{Z}_m) \\ (\dot{Z}_p + \dot{Z}_m + \dot{Z}_n) & (\dot{Z}_m + \alpha^2 \dot{Z}_n + \alpha \dot{Z}_p) & (\dot{Z}_m + \alpha \dot{Z}_n + \alpha^2 \dot{Z}_p) \end{bmatrix} = \\
 \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} (\dot{Z}_p + \dot{Z}_m + \dot{Z}_n) & (\dot{Z}_p + \alpha^2 \dot{Z}_m + \alpha \dot{Z}_n) & (\dot{Z}_p + \alpha \dot{Z}_m + \alpha^2 \dot{Z}_n) \\ (\dot{Z}_p + \dot{Z}_m + \dot{Z}_n) & (\dot{Z}_n + \alpha^2 \dot{Z}_p + \alpha \dot{Z}_m) & (\dot{Z}_n + \alpha \dot{Z}_p + \alpha^2 \dot{Z}_m) \\ (\dot{Z}_p + \dot{Z}_m + \dot{Z}_n) & (\dot{Z}_m + \alpha^2 \dot{Z}_n + \alpha \dot{Z}_p) & (\dot{Z}_m + \alpha \dot{Z}_n + \alpha^2 \dot{Z}_p) \end{bmatrix} = \\
 \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3(\dot{Z}_p + \dot{Z}_m + \dot{Z}_n) & 0 & 0 \\ 0 & 3(\dot{Z}_p + \alpha^2 \dot{Z}_m + \alpha \dot{Z}_n) & 0 \\ 0 & 0 & 3(\dot{Z}_p + \alpha \dot{Z}_m + \alpha^2 \dot{Z}_n) \end{bmatrix} &= \rightarrow
 \end{aligned}$$

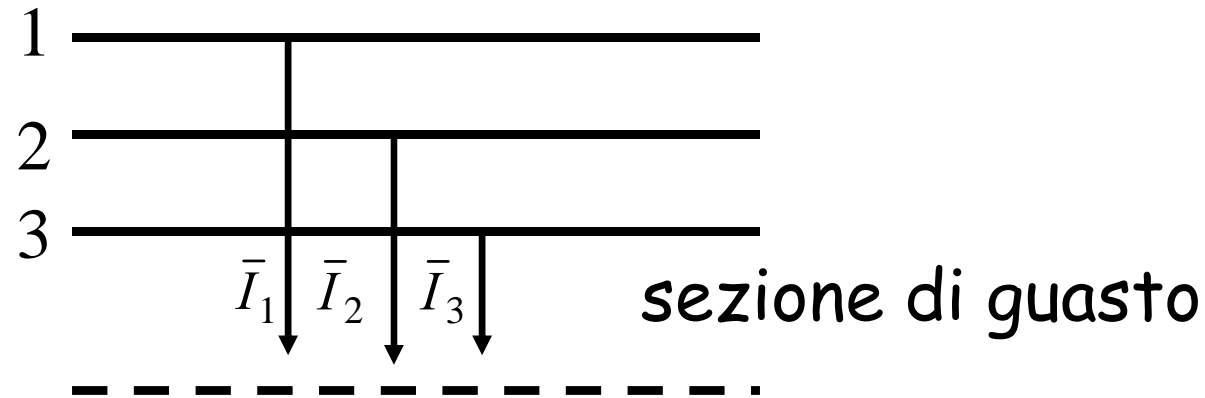
Dimostrazione (Cnt.):

$$= \begin{bmatrix} (\dot{Z}_p + \dot{Z}_m + \dot{Z}_n) & 0 & 0 \\ 0 & (\dot{Z}_p + \alpha^2 \dot{Z}_m + \alpha \dot{Z}_n) & 0 \\ 0 & 0 & (\dot{Z}_p + \alpha \dot{Z}_m + \alpha^2 \dot{Z}_n) \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \dot{Z}_o & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Z}_d & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Z}_i \end{bmatrix} \quad \text{c.v.d.}$$

IN GENERALE

- Applicando la trasformazione di Fortescue alle equazioni topologiche e dei componenti si ricavano le reti monofase di sequenza
- Applicando la trasformazione alle condizioni al contorno si ricavano le condizioni cui devono soddisfare le tre reti di sequenza

ESEMPI:



Hp.: Neutro a terra

$\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$ correnti di guasto

$$V_1 = V_2 = V_3$$

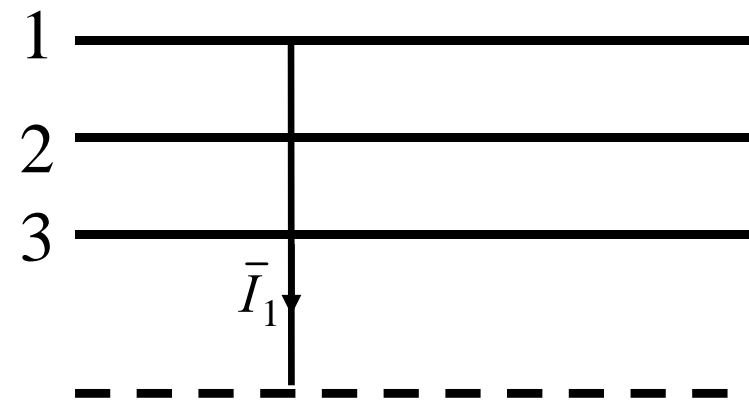
In assenza di guasto:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 = 0 \\ \bar{I}_1 = \bar{I}_2 = \bar{I}_3 = 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \bar{I}_d &= \bar{I}_i = \bar{I}_o = 0 \\ V_d &= V_1 = V_2 = V_3 \\ \bar{V}_i &= \bar{V}_0 = 0 \end{aligned}$$

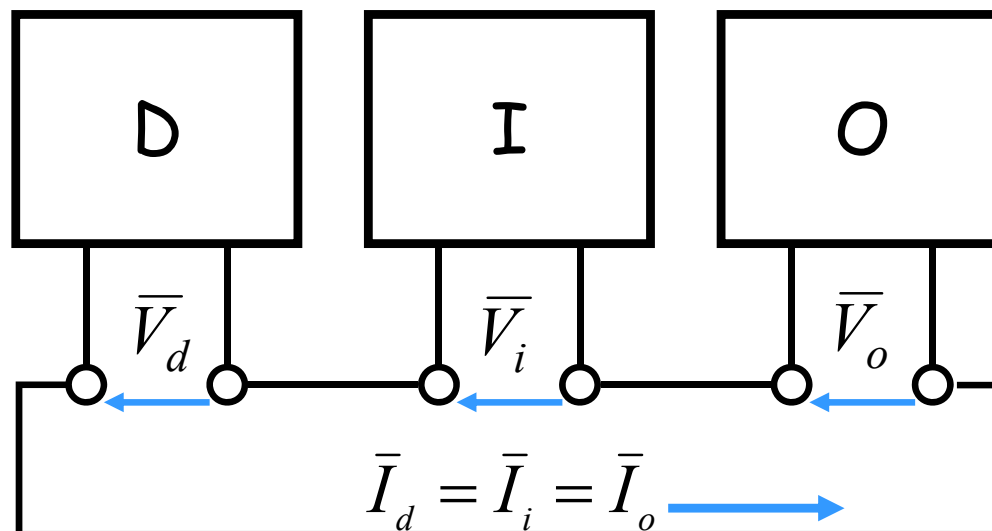
ESEMPIO 1: Corto circuito fra fase e terra



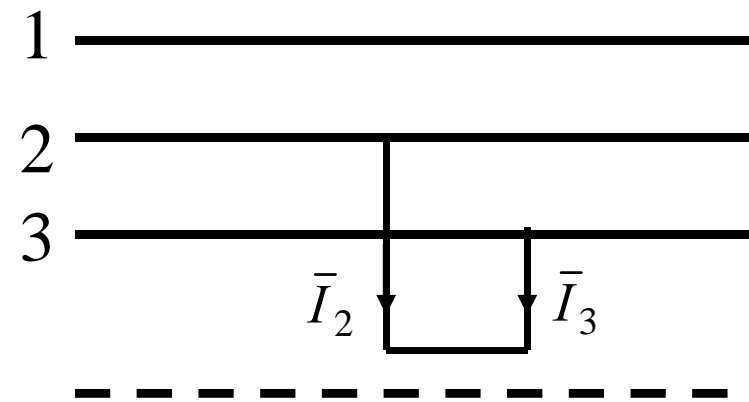
$$\bar{V}_1 = 0 \Rightarrow \bar{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{V}_o + \bar{V}_d + \bar{V}_i) = 0 \Rightarrow \bar{V}_o + \bar{V}_d + \bar{V}_i = 0$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_3 = 0 \Rightarrow \bar{I}_d = \bar{I}_i = \bar{I}_o = \frac{\bar{I}_1}{\sqrt{3}}$$

Tali relazioni sono soddisfatte ponendo le tre reti di sequenza in serie



ESEMPIO 2: Corto circuito fra due fasi



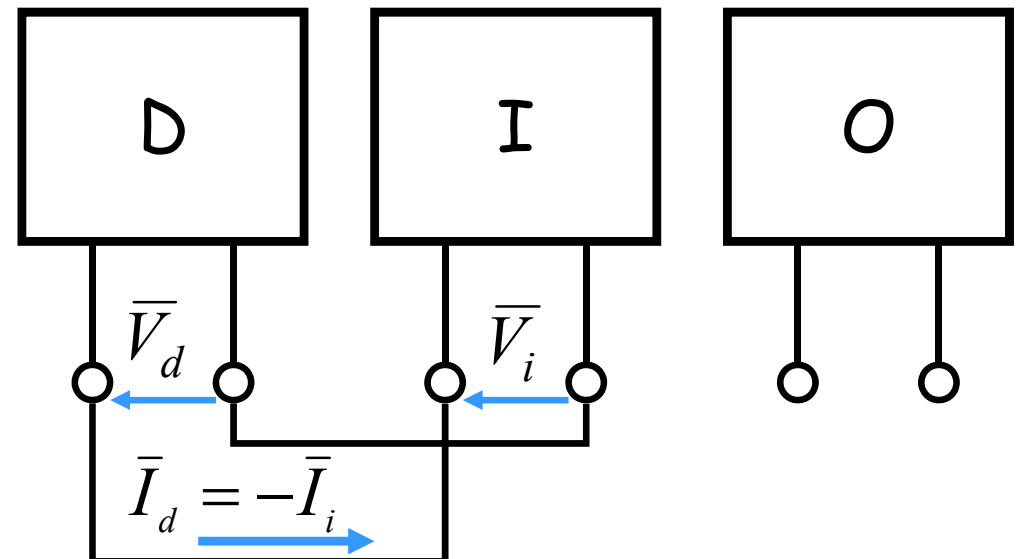
$$\bar{V}_2 = \bar{V}_3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{V}_o + \alpha^2 \bar{V}_d + \alpha \bar{V}_i) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{V}_o + \alpha \bar{V}_d + \alpha^2 \bar{V}_i) \Rightarrow$$

$$(\alpha^2 - \alpha) \bar{V}_d = (\alpha^2 - \alpha) \bar{V}_i \Rightarrow \boxed{\bar{V}_d = \bar{V}_i}$$

$$\bar{I}_o = 0$$

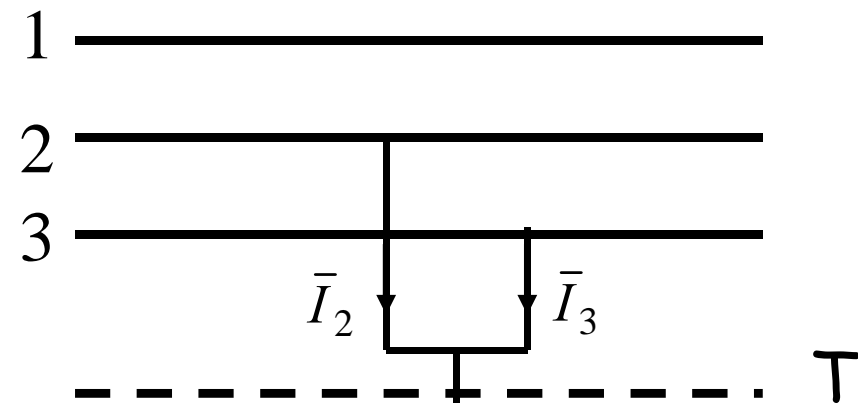
$$\bar{I}_d + \bar{I}_i = 0$$

Tali relazioni sono soddisfatte ponendo in parallelo le due reti di sequenza diretta e inversa e lasciando aperta quella omopolare



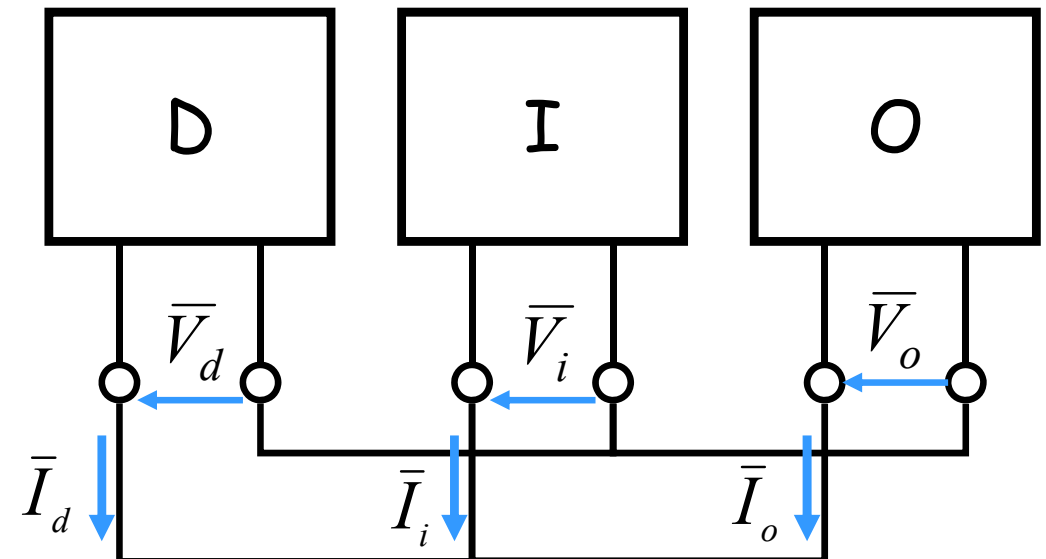
ESEMPIO 3:

Corto circuito
fra due fasi e terra

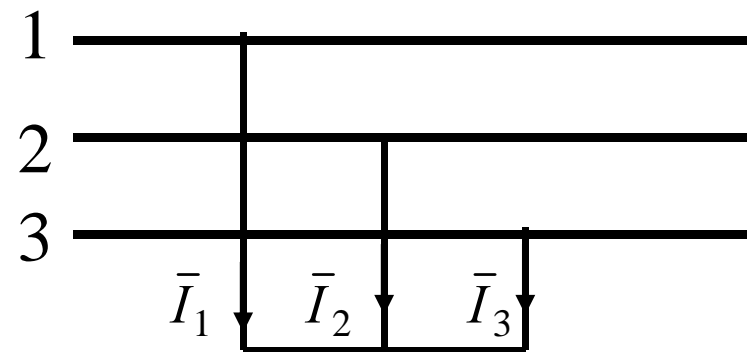


$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_2 = \bar{V}_3 = 0 \Rightarrow \bar{V}_o = \bar{V}_d = \bar{V}_i = \frac{\bar{V}_1}{\sqrt{3}} \\ \bar{I}_1 = 0 \Rightarrow \bar{I}_o + \bar{I}_d + \bar{I}_i = 0 \end{array} \right.$$

Tali relazioni sono soddisfatte
connettendo in parallelo le tre
reti di sequenza

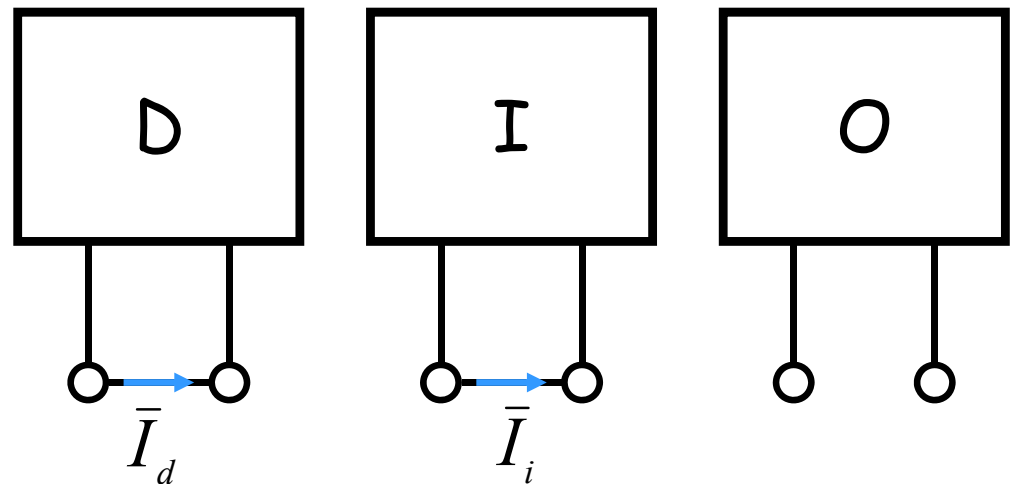


ESEMPIO 4: Corto circuito trifase

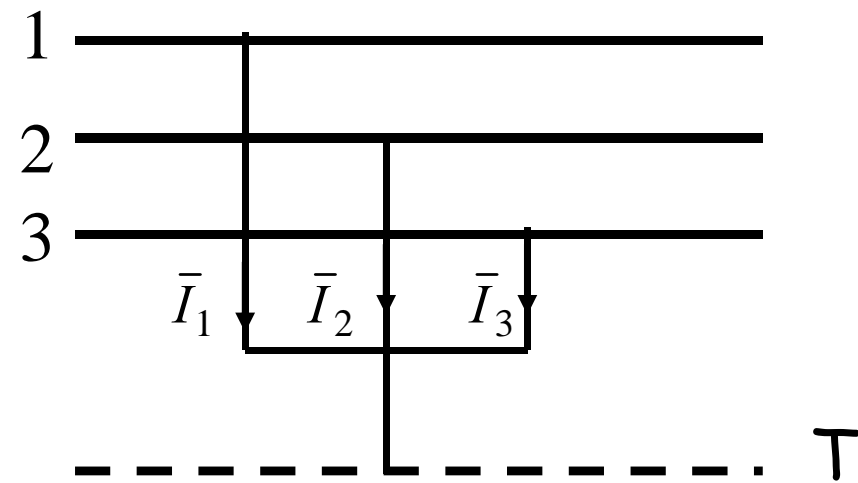


$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_1 = \bar{V}_2 = \bar{V}_3 \Rightarrow \bar{V}_d = \bar{V}_i = 0 \\ \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0 \Rightarrow \bar{I}_o = 0 \end{array} \right.$$

Tali relazioni sono soddisfatte cortocircuitando le reti di sequenza diretta e inversa e lasciando aperta la rete di sequenza omopolare

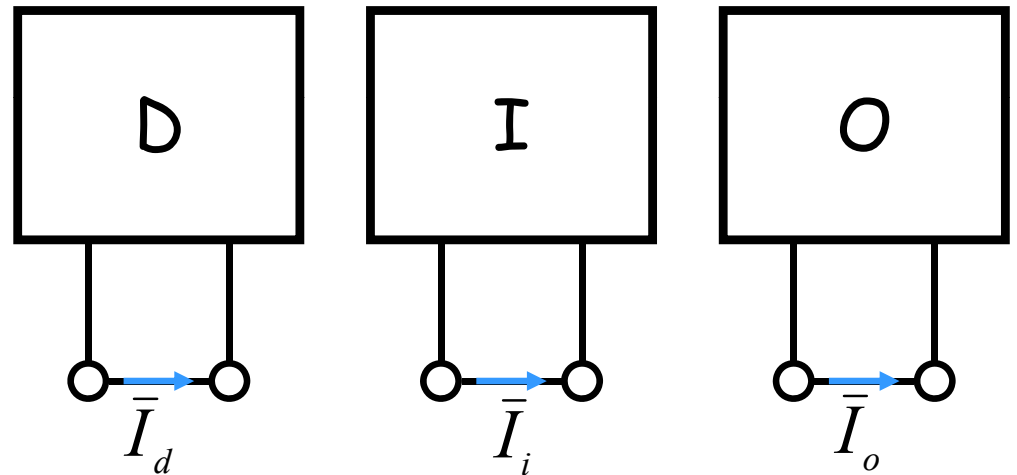


ESEMPIO 5: Corto circuito trifase a terra



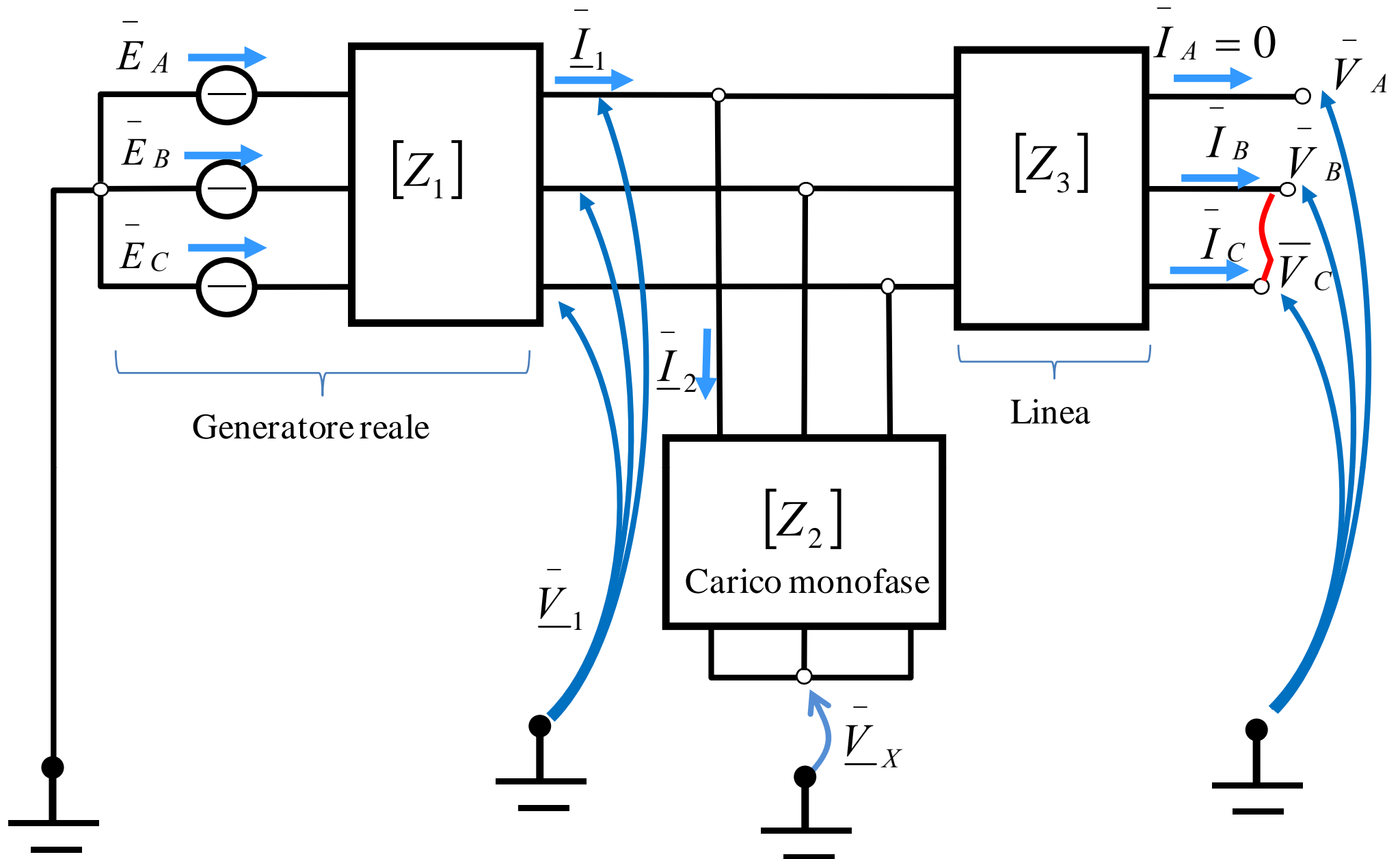
$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2 = \bar{V}_3 = 0 \Rightarrow \bar{V}_o = \bar{V}_d = \bar{V}_i = 0$$

Tali condizione e' soddisfatta
cortocircuitando le tre reti di
sequenza



ANALOGAMENTE POSSONO ESSERE TRATTATI I CASI IN CUI
L'IMPEDENZA DEL GUASTO NON SIA TRASCURABILE

Esempio: Corto circuito fra fasi



CONDIZIONI AL CONTORNO

Condizioni di guasto

$$\begin{cases} \bar{I}_A = 0 \\ \bar{I}_C = -\bar{I}_B \\ \bar{V}_B = \bar{V}_C \end{cases} \Rightarrow \bar{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{I}_B \\ -\bar{I}_B \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \bar{V}_A \\ \bar{V}_B \\ \bar{V}_B \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_o = 0; \bar{I}_d = -\bar{I}_i \\ \bar{V}_d = \bar{V}_i \end{cases}$$

Generatore simmetrico diretto: $\bar{E}_i = \bar{E}_o = 0$

Carico $[Z_2]$ con neutro isolato: $\bar{\mathbf{V}}_x = \begin{bmatrix} \bar{V}_x \\ \bar{V}_x \\ \bar{V}_x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_{2o} = 0; \\ \bar{V}_{xd} = \bar{V}_{xi} = 0 \end{cases}$

EQUAZIONI TOPOLOGICHE

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \bar{\mathbf{E}} = [\dot{\mathbf{Z}}_1] \bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{\mathbf{V}}_1 \\
 (2) \quad & \bar{\mathbf{I}}_1 = \bar{\mathbf{I}}_2 + \bar{\mathbf{I}} \\
 (3) \quad & \bar{\mathbf{V}}_1 = [\dot{\mathbf{Z}}_2] \bar{\mathbf{I}}_2 + \bar{\mathbf{V}}_x \\
 (4) \quad & \bar{\mathbf{V}}_1 = [\dot{\mathbf{Z}}_3] \bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{V}}
 \end{aligned}$$



Trasformando con Fortescue:

$$(1) \quad \begin{bmatrix} \bar{E}_0 \\ \bar{E}_d \\ \bar{E}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{1o} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Z}_{1d} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Z}_{1i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{I}_{1o} \\ \bar{I}_{1d} \\ \bar{I}_{1i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{V}_{1o} \\ \bar{V}_{1d} \\ \bar{V}_{1i} \end{bmatrix} \quad (3) \quad \begin{bmatrix} \bar{V}_{1o} \\ \bar{V}_{1d} \\ \bar{V}_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{2o} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Z}_{2d} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Z}_{2i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{I}_{2o} \\ \bar{I}_{2d} \\ \bar{I}_{2i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{V}_{xo} \\ \bar{V}_{xd} \\ \bar{V}_{xi} \end{bmatrix}$$

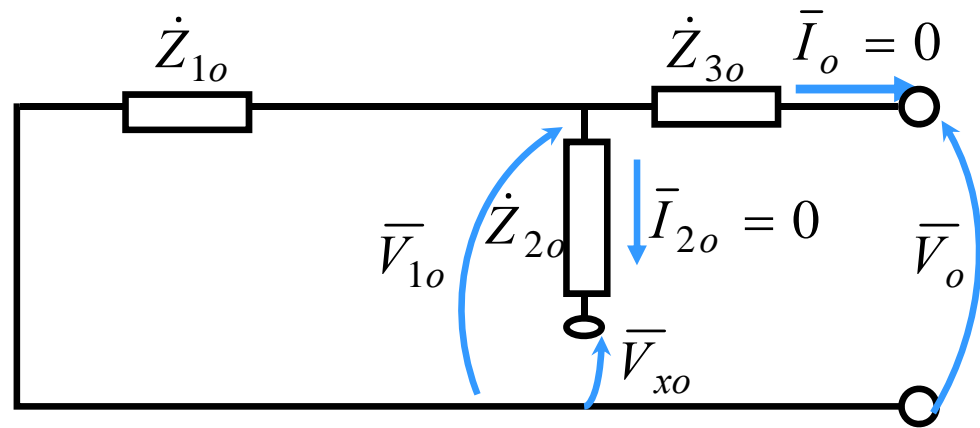
$$(2) \quad \begin{bmatrix} \bar{I}_{1o} \\ \bar{I}_{1d} \\ \bar{I}_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{I}_{2o} \\ \bar{I}_{2d} \\ \bar{I}_{2i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{I}_o \\ \bar{I}_d \\ \bar{I}_i \end{bmatrix} \quad (4) \quad \begin{bmatrix} \bar{V}_{1o} \\ \bar{V}_{1d} \\ \bar{V}_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{3o} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Z}_{3d} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Z}_{3i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{I}_o \\ \bar{I}_d \\ \bar{I}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{V}_o \\ \bar{V}_d \\ \bar{V}_i \end{bmatrix}$$

Applichiamo le condizioni al contorno:



PER LE COMPONENTI OMOPOLARI

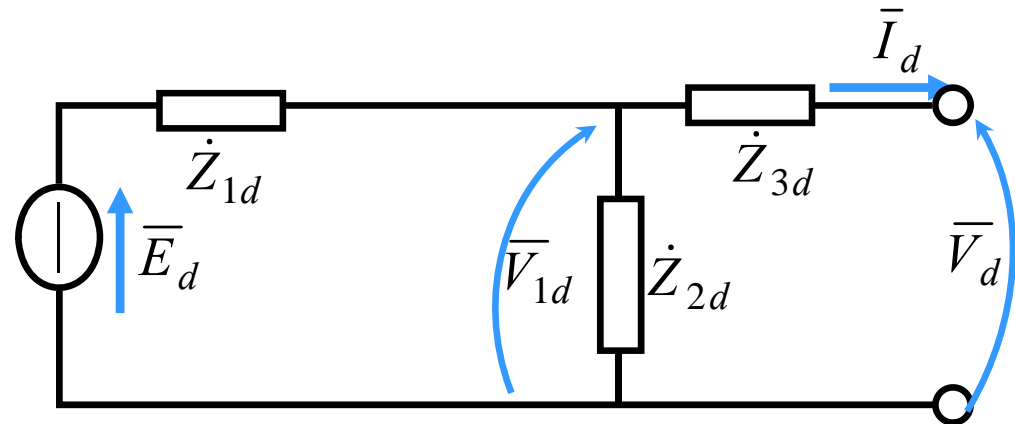
$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \dot{Z}_{1o} \bar{I}_{1o} + \bar{V}_{1o} \\ \bar{I}_{1o} = \bar{I}_{2o} + \bar{I}_o \\ \bar{V}_{1o} = \dot{Z}_{2o} \bar{I}_{2o} + \bar{V}_{xo} \\ \bar{V}_{1o} = \dot{Z}_{3o} \bar{I}_o + \bar{V}_o \\ \bar{I}_o = 0 \\ \bar{I}_{2o} = 0 \end{array} \right.$$



\dot{Z}_{2o} e \dot{Z}_{3o} rimangono appese per rispettare i vincoli $\bar{I}_o = 0; \bar{I}_{2o} = 0$

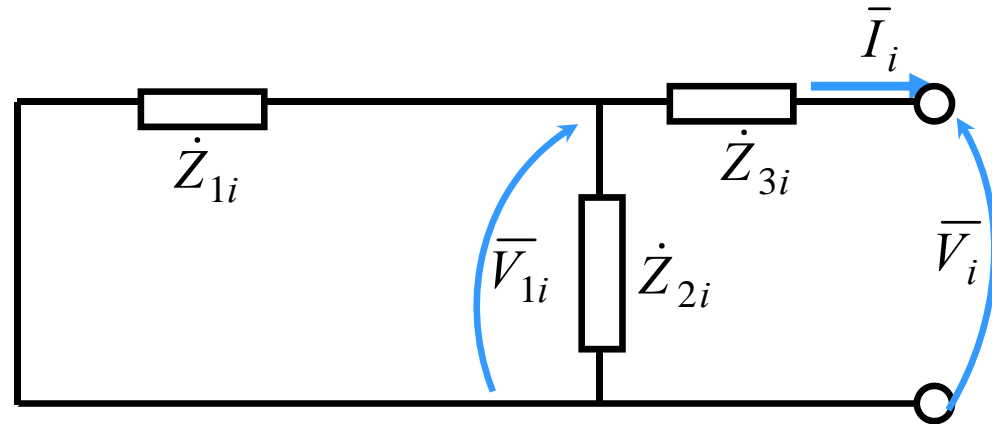
PER LE COMPONENTI DIRETTE

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_d = \dot{Z}_{1d} \bar{I}_{1d} + \bar{V}_{1d} \\ \bar{I}_{1d} = \bar{I}_{2d} + \bar{I}_d \\ \bar{V}_{1d} = \dot{Z}_{2d} \bar{I}_{2d} + \bar{V}_{xd} \\ \bar{V}_{1d} = \dot{Z}_{3d} \bar{I}_d + \bar{V}_d \\ \bar{V}_{xd} = 0 \end{array} \right.$$



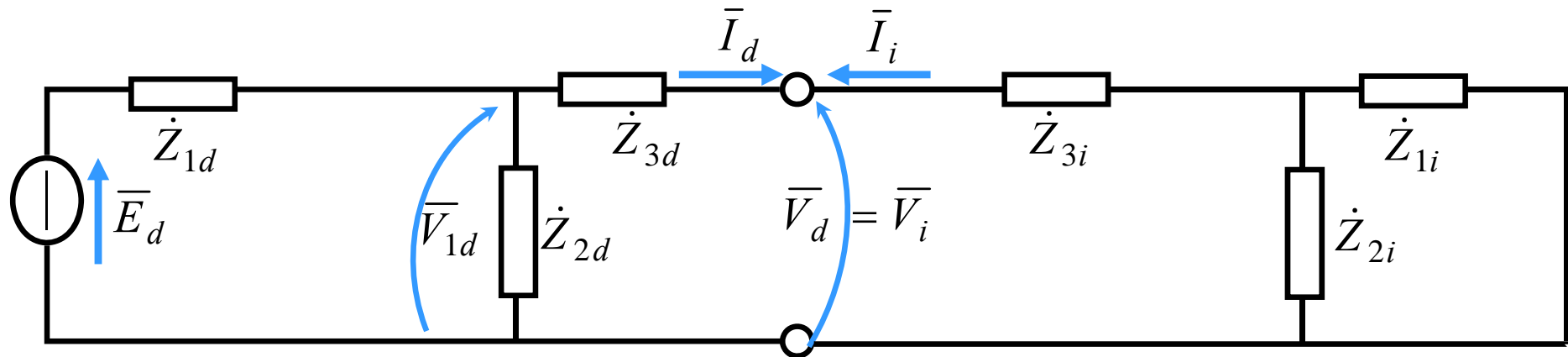
PER LE COMPONENTI INVERSE

$$\begin{cases} \bar{E}_d = \dot{Z}_{1d} \bar{I}_{1d} + \bar{V}_{1d} \\ \bar{I}_{1d} = \bar{I}_{2d} + \bar{I}_d \\ \bar{V}_{1d} = \dot{Z}_{2d} \bar{I}_{2d} + \bar{V}_{xd} \\ \bar{V}_{1d} = \dot{Z}_{3d} \bar{I}_d + \bar{V}_d \\ \bar{V}_{xd} = 0 \end{cases}$$



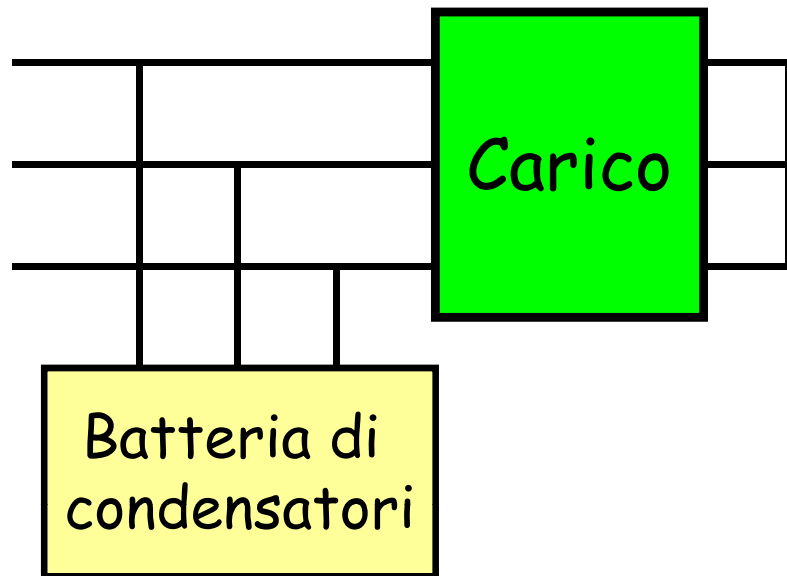
Le tre reti devono soddisfare i vincoli imposti dal guasto:

$$\bar{I}_d = -\bar{I}_i; \bar{V}_d = \bar{V}_i$$



Ogni componente omopolare di corrente è nulla se manca il filo neutro

RIFASAMENTO DEI CARICHI TRIFASE

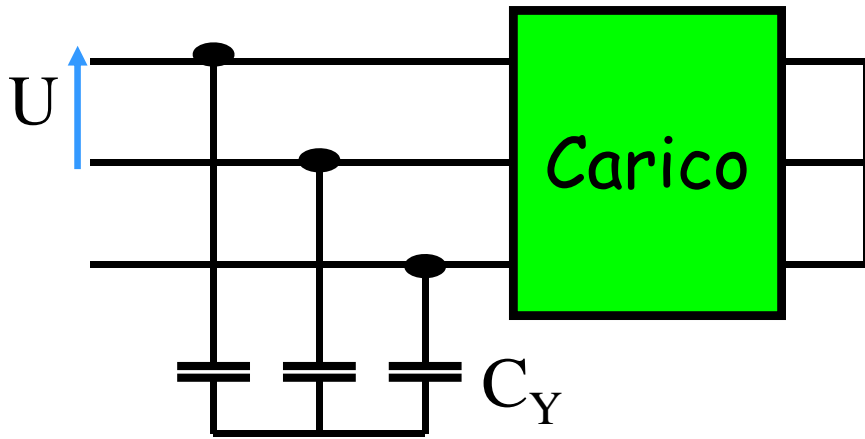


$$P = P'$$

$$Q_c = Q - Q'$$

$$Q_c = (P \tan \varphi - P \tan \varphi')$$

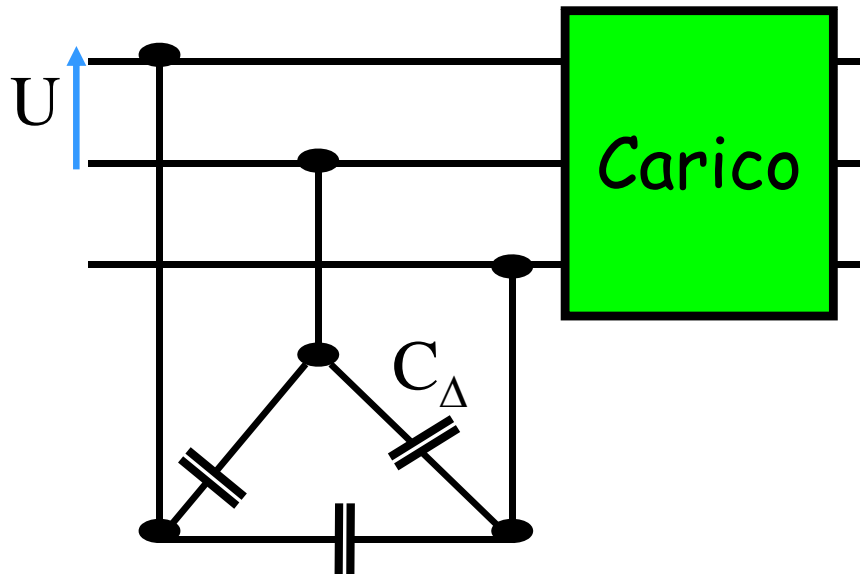
Collegamento a stella



$$Q_{CY} = 3 \frac{E^2}{X_Y} = 3\omega C_Y \frac{U^2}{3} = \omega C_Y U^2$$

$$C_Y = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{\omega U^2}$$

Collegamento a triangolo



$$Q_{C\Delta} = 3 \frac{U^2}{X_{\Delta}} = 3\omega C_{\Delta} U^2$$

$$C_{\Delta} = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{3\omega U^2}$$



$$C_{\Delta} = \frac{1}{3} C_Y$$

- Il costo di una batteria di condensatori e' funzione della capacita' dei condensatori e della tensione applicata, aumentando i costi per l'isolamento



- In bassa tensione, dove, a parita' di potenza reattiva, le capacita' sono grandi, la diminuzione del costo dovuta alla riduzione di capacita' e' notevole, mentre l'incremento del costo dovuto all'aumento di tensione e' modesto. Il contrario avviene ad alta tensione.



TENSIONI BASSE \Rightarrow COLLEGAMENTO A TRIANGOLO

TENSIONI ALTE \Rightarrow COLLEGAMENTO A STELLA