ANALISI NEL DOMINIO DEL TEMPO

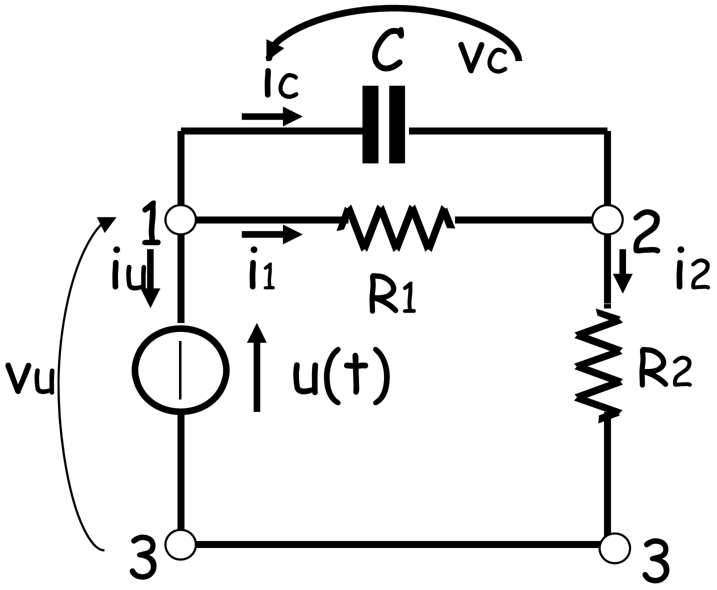
GRAFO DEL CIRCUITO: L lato, N nodi ➔ 2L variabili descrittive del circuito

DOVRANNO ESSERE SCRITTE 2L EQUAZIONI:

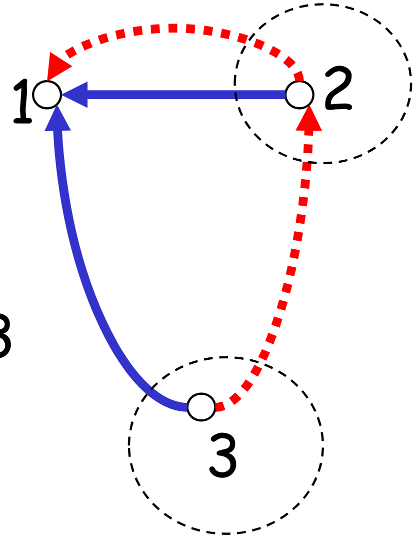
L: Eq. Topologiche
- N-1 ai cocicli fondamentali
- L-N+1 alle maglie fondamentali

L: Eq. dei Componenti

ESEMPIO 1



L=4
N=3



Eq. TOP.
$$\begin{cases} i_1 + i_c - i_2 = 0 \\ i_u + i_2 = 0 \\ v_u - v_c - v_2 = 0 \\ v_c - v_1 = 0 \end{cases}$$

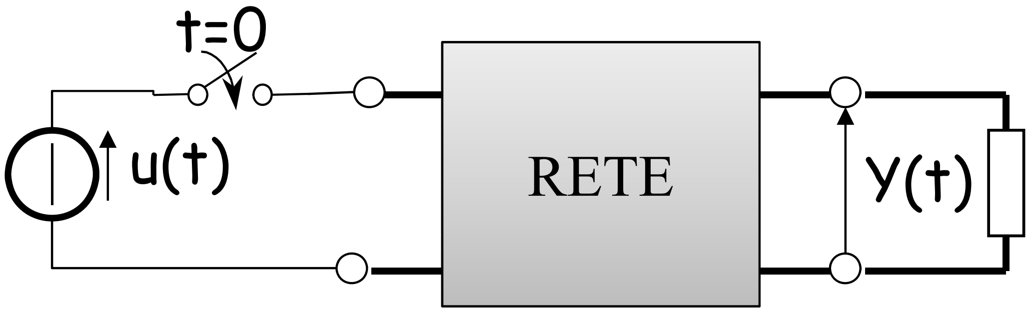
Eq. COMP.
$$\begin{cases} v_u = u(t) \\ v_1 = R_1 i_1 \\ i_c = C\dfrac{dv_c}{dt} \\ v_2 = R_2 i_2 \end{cases}$$

Se siamo interessati ad una sola variabile possiamo ricavare la relazione che lega la variabile desiderata all'ingresso (es. v_c)

$$\begin{cases} u(t) = v_c + R_2 i_2 \\ i_2 = i_1 + i_c = \dfrac{v_c}{R_1} + C\dfrac{dv_c}{dt} \end{cases} \Rightarrow \quad u(t) = v_c + R_2\left(\frac{v_c}{R_1} + C\frac{dv_c}{dt}\right)$$

$$u(t) = R_2 C_1 \frac{dv_c}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_c$$

Relazione ingresso-uscita (I/O)



Sia l'ingresso che l'uscita possono essere sia tensioni che correnti

Ci possono essere 4 possibili combinazioni a seconda della natura dell'ingresso e dell'uscita

La relazione I/O e' un'equazione ordinaria la cui soluzione può essere ricavata sommando l'integrale generale dell'omogenea associata all'integrale particolare dell'equazione completa

Le condizioni iniziali occorrenti sono legate algebricamente allo stato della rete nell'istante iniziale $t=0^+$

ES:

$$u(t) = R_2 C \frac{dv_c}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_c$$

Hp: $\begin{cases} V_c(0^+) = 0 \\ u(t) = E = \text{costante} \end{cases}$

Polinomio caratteristico: $R_2 C\, \lambda + \dfrac{R_1 + R_2}{R_1} = 0 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}$

Omogenea associata: $v_{c_{oa}} = A e^{\lambda t}$

ESEMPIO 1 (CNT)

Integrale particolare: costante

$$v_{cp} = K \Rightarrow E = R_2 C \cdot 0 + \frac{R_1 + R_2}{R_1} K \Rightarrow K = E \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\Downarrow$$

$$v_c(t) = Ae^{\lambda t} + E \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

La costante di integrazione A viene determinata a partire dalla condizione iniziale in 0^+

Ipotesi: condizione iniziale nulla (condensatore scarico) $v_c(0^+) = 0$

$$0 = Ae^{\lambda 0} + E \frac{R_1}{R_1 + R_2} \Rightarrow A = -E \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\Downarrow$$

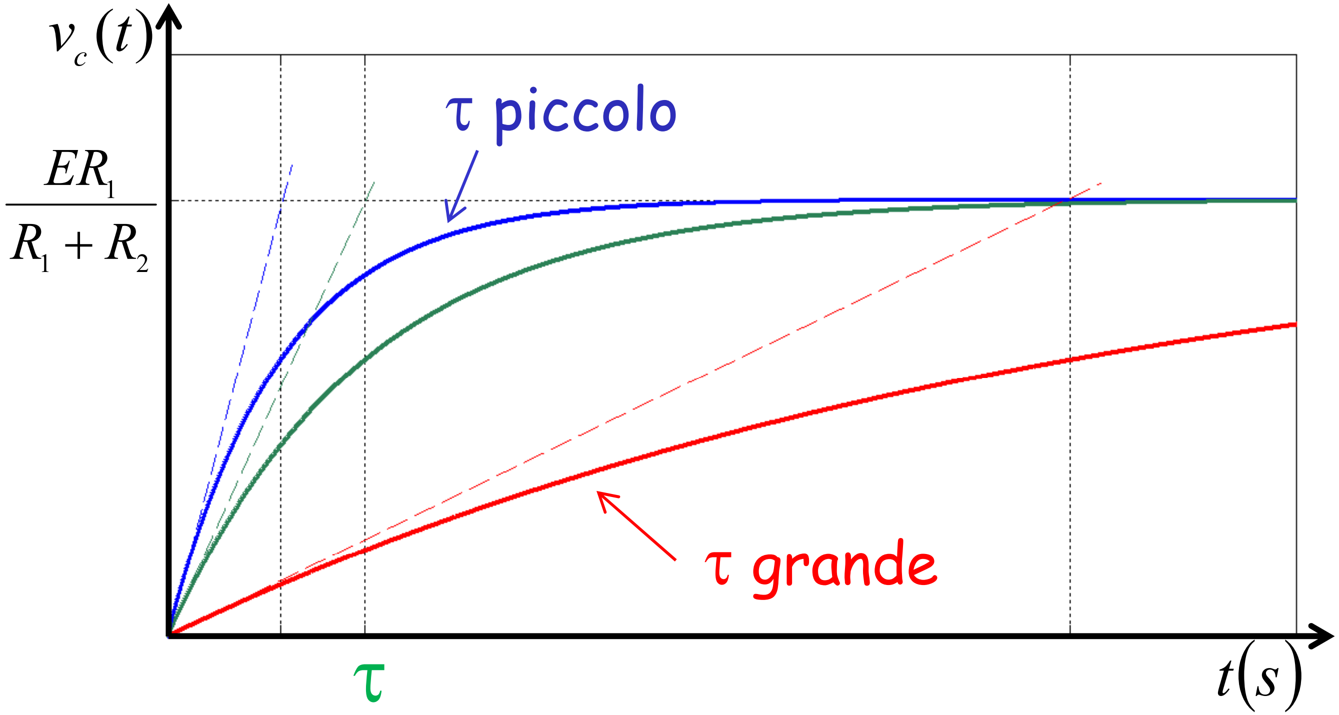
$$v_c(t) = \frac{ER_1}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}\right)$$

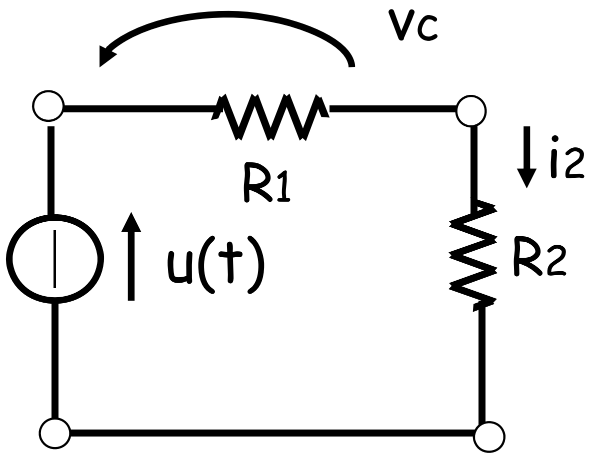
Risposta completa

ESEMPIO 1 (CNT)

$$v_c(t) = \frac{ER_1}{R_1+R_2}\left(1-e^{-\boxed{\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}}t}\right)$$

$1/\tau$



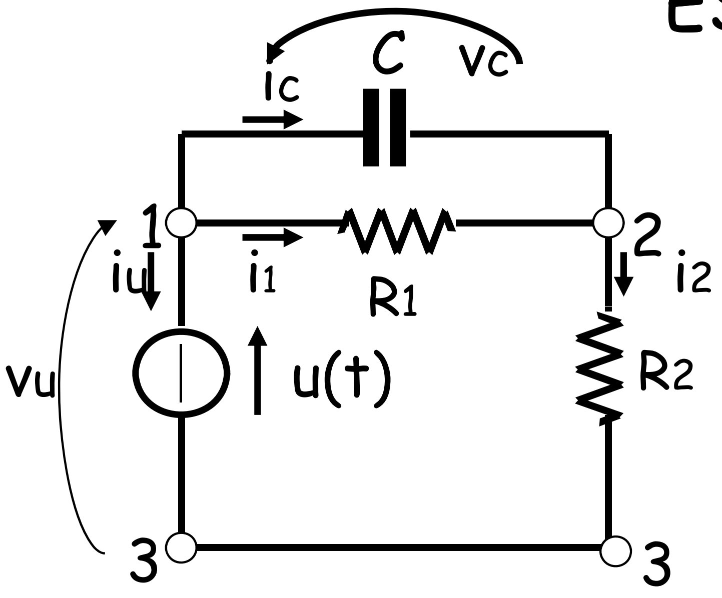


A regime: per t→∞

$$v_c(t) = \frac{ER_1}{R_1+R_2}$$

Poiché la frequenza libera è reale negativa
il regime viene raggiunto da tutte le variabili del circuito

ESEMPIO 1 (CNT)



$$i_1(t) = \frac{v_c}{R_1}$$

$$v_2(t) = u(t) - v_c$$

$$i_2(t) = \frac{u(t) - v_c}{R_2}$$

$$i_c(t) = i_2(t) - i_1(t) = \frac{u(t) - v_c}{R_2} - \frac{v_c}{R_1}$$

$$i_1(t) = \frac{E}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1}t}\right)$$

$$v_2(t) = E - \frac{ER_1}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1}t}\right) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} + \frac{ER_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1}t}$$

$$i_2(t) = \frac{v_2}{R_2} = \frac{E}{R_1 + R_2} + \frac{E}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1}{R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1}t}$$

ESEMPIO 1 (CNT)

$$i_c(t) = i_2(t) - i_1(t) =$$

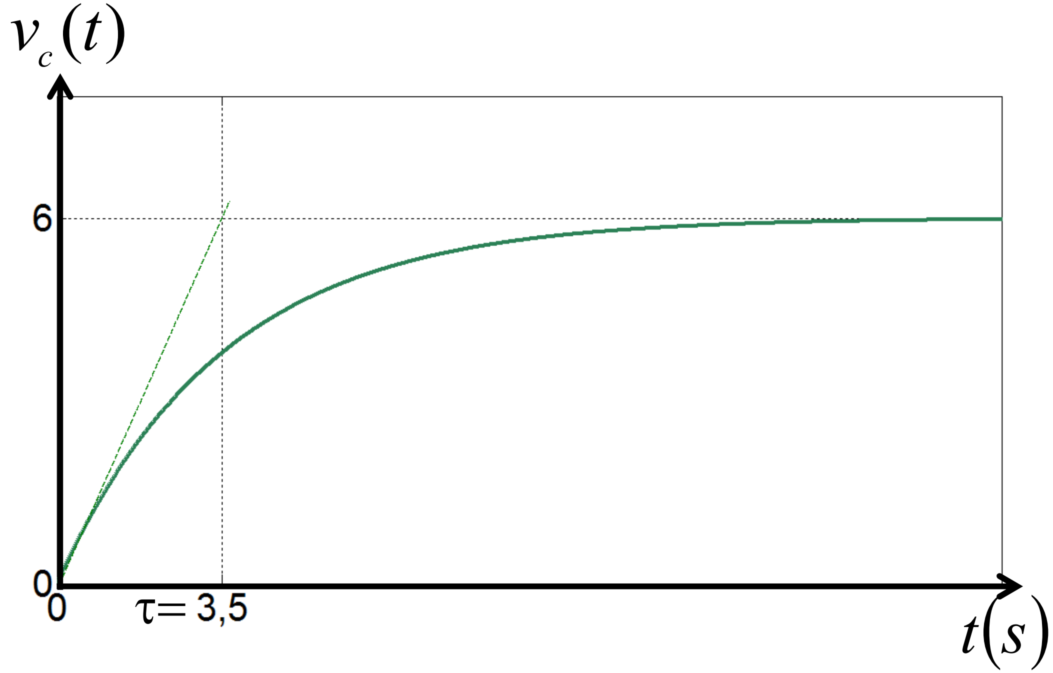
$$= \frac{E}{R_1 + R_2} + \frac{E}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1}{R_2} e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t} - \frac{E}{R_1 + R_2} + \frac{E}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t} \Rightarrow$$

$$i_c(t) = \frac{E}{R_1 + R_2}\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t} = \frac{E}{R_2} e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}$$

ma

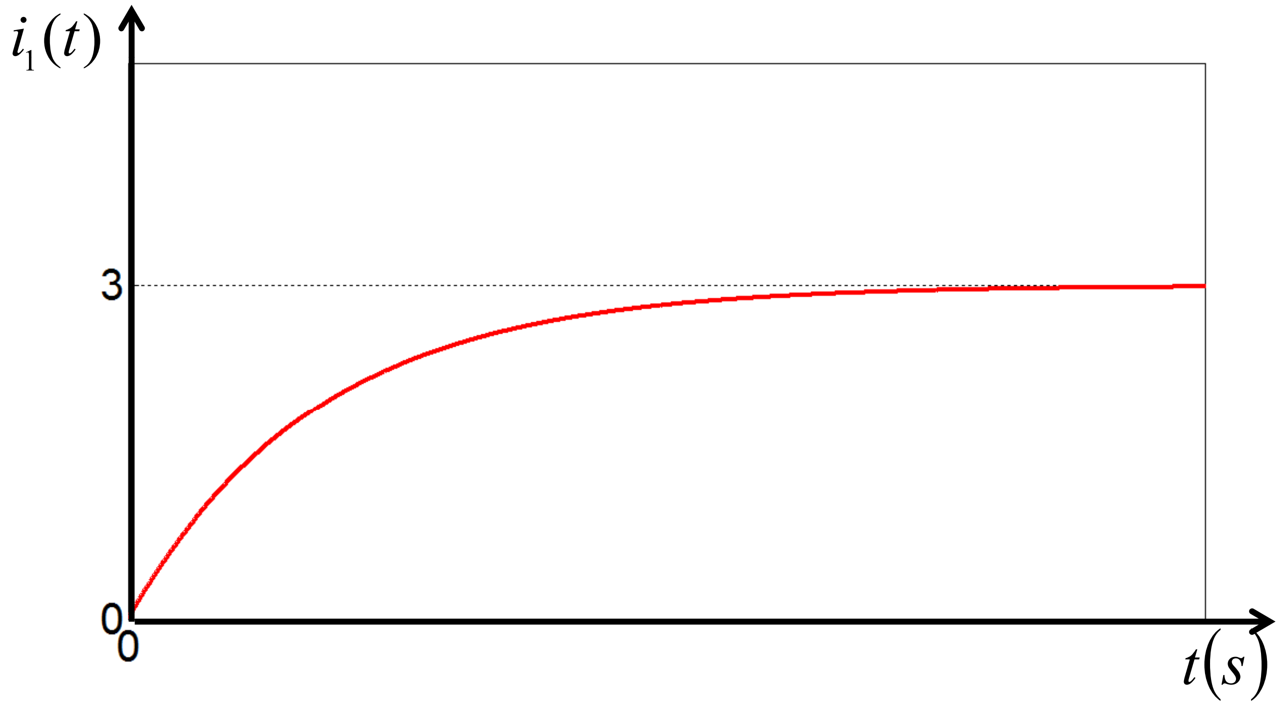
$$i_c(t) = C\frac{dv_c}{dt} = C\left[\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C} \cdot \frac{ER_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}\right] = \frac{E}{R_2} e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t} \qquad \text{c.v.d.}$$

ESEMPIO 1 (CNT) E=12V; $R_1=R_2=2\Omega$; C=3,5F



t = 0 $\quad v_c(t) = 0$

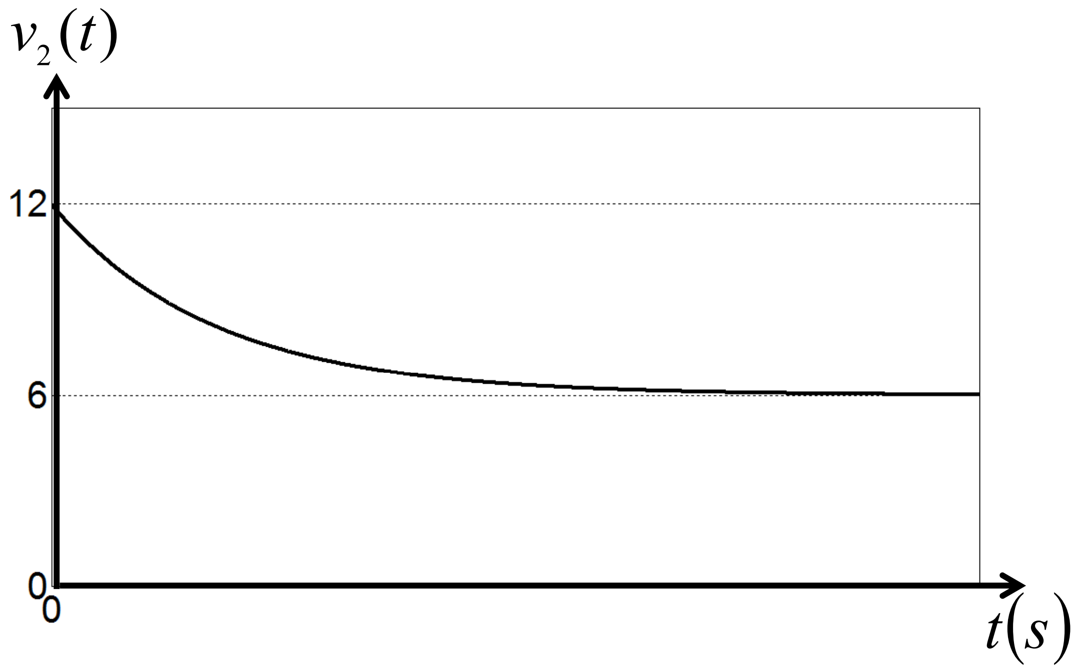
t→∞ $\quad v_c(t) = \dfrac{ER_1}{R_1 + R_2} = 6V$



t = 0 $\quad i_1(t) = 0$

t→∞ $\quad i_1(t) = \dfrac{E}{R_1 + R_2} = 3A$

ESEMPIO 1 (CNT) $E=12V;\ R_1=R_2=2\Omega;\ C=3{,}5F$

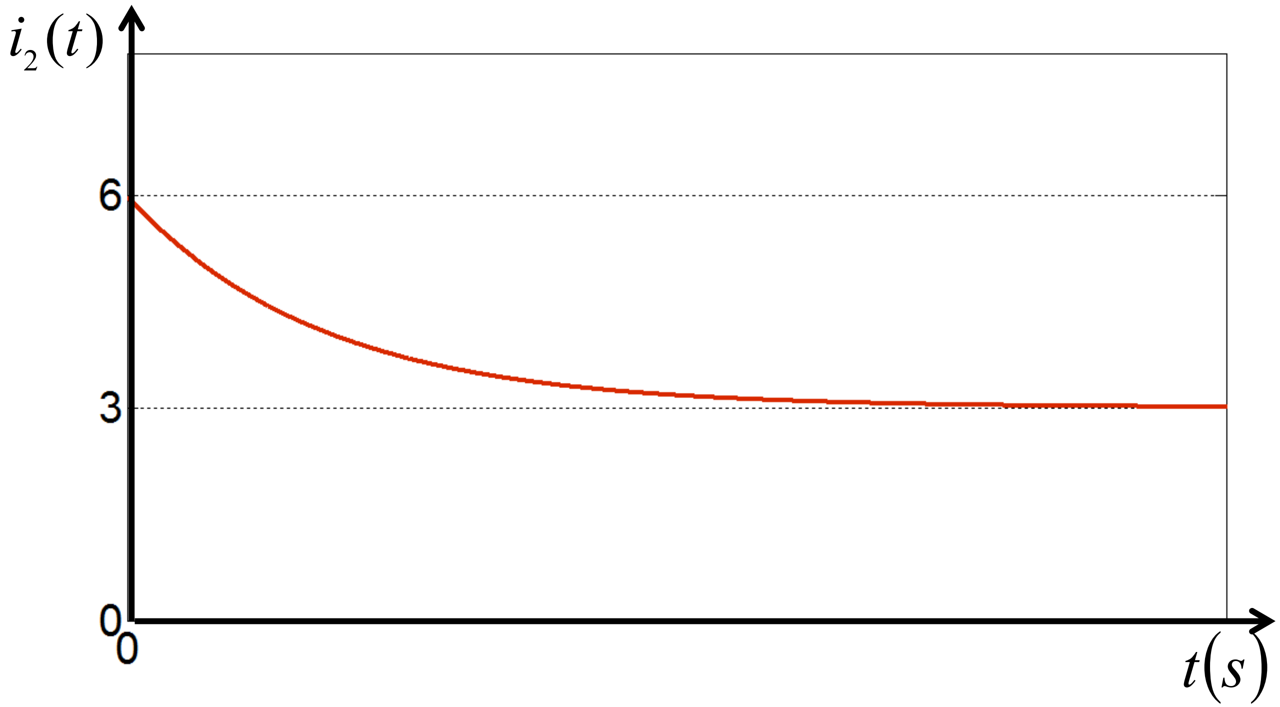


t = 0 $v_2(t) = E = 12V$

t→∞ $v_2(t) = \dfrac{ER_2}{R_1 + R_2} = 6V$

t = 0 $i_2(t) = \dfrac{E}{R_2} = 6A$

t→∞ $i_2(t) = \dfrac{E}{R_1 + R_2} = 3A$



NOTE

Esiste un legame di corrispondenza tra l'ordine dell'equazione differenziale che rappresenta la relazione I/O ed il numero di componenti ai quali e' associabile una variabile di stato

Es. precedente:

- CIRCUITO DEL I° ORDINE
- VARIABILE DI STATO v_c
- EQ. DIFF. DEL I° ORDINE
- STATO INIZIALE NULLO

Come verrà visto più avanti il legame non è sempre uno a uno. Esistono dei teoremi che ci consentono di risalire all'ordine del circuito (e quindi dell'equazione differenziale che rappresenta la relazione I/O) nota la topologia del circuito

PROPRIETA' DELLA RISPOSTA NELLO STATO ZERO

$$u_1 \neq u_2 \rightarrow y_1 \neq y_2$$

$$\text{Hp: } u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$$

se

$$y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

allora

LA RELAZIONE I/O E' LINEARE

Questa proprietà non e' scontata

SI DICE CHE UNA RETE E' LINEARE SE VALE LA PRECEDENTE PROPRIETA' PER QUALUNQUE VARIABILE

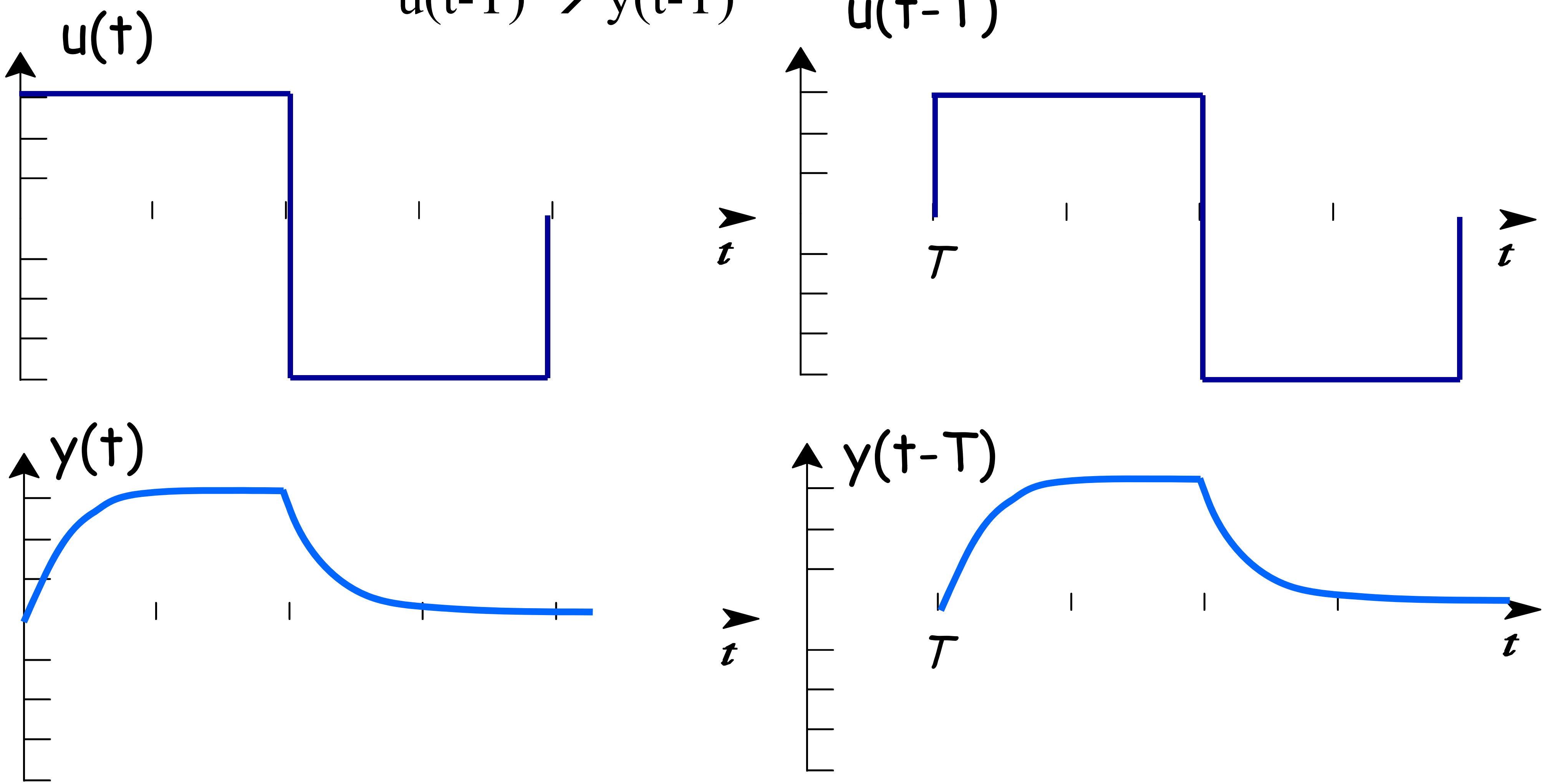
ALLORA

LA RISPOSTA NELLO STATO ZERO E' LINEARE RISPETTO ALL'INGRESSO

LO STATO ZERO E' UNA SPECIFICAZIONE INDISPENSABILE

PROPRIETA' DI TEMPO INVARIANZA

$$u(t) \rightarrow y(t)$$
$$u(t-T) \rightarrow y(t-T)$$



Resistori, induttori, capacitori, mutue, sono componenti tempo-invarianti

Ci sono casi in cui la tempo-varianza e' voluta (es. interruttore)

RETE LINEARE TEMPO-INVARIANTE NELLO STATO ZERO

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\text{Stato zero}} \longrightarrow y(t)$$

tempo-invarianza

$$u(t+h) \longrightarrow \boxed{\text{Stato zero}} \longrightarrow y(t+h)$$

linearità

$$\frac{1}{h}\left[u(t+h)-u(t)\right] \longrightarrow \boxed{\text{Stato zero}} \longrightarrow \frac{1}{h}\left[y(t+h)-y(t)\right]$$

limite per h $\longrightarrow$ 0 (operatore lineare)

$$\frac{du}{dt} \longrightarrow \boxed{\text{Stato zero}} \longrightarrow \frac{dy}{dt}$$

o anche

$$\int_0^t u(\tau)d\tau \longrightarrow \boxed{\text{Stato zero}} \longrightarrow \int_0^t y(\tau)d\tau$$

E' importante che lo stato iniziale sia nullo altrimenti ci sarebbero delle costanti di integrazione che non renderebbero leciti tali passaggi

Equazioni differenziali ordinarie

Condizioni per u(t)

- identicamente nullo per $t<t_0$ con t_0 al finito
- in ogni istante deve assumere valori reali
- in ogni istante deve essere specificato in modo non ambiguo

RELAZIONE I/O

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots.. a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{n-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots.. b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

$$n \geq m$$

con a_i, b_i costanti, reali

Equazioni differenziali ordinarie (Cnt.)

Hp: u(t) noto per $t>t_0$
noti y(t) e le sue n-1 derivate in $t=t_0^+$

$$y(t) = y_{oa}(t) + y_p(t) \text{ per } t > t_0$$

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_0 = 0 \text{ eq. caratteristica}$$

a) radici reali distinte $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$

$$y_{oa}(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} + ... + C_ne^{\lambda_n t}$$

b) se si hanno k radici reali coincidenti, i corrispondenti termini sono :

$$y_{oa}(t) = e^{\lambda_k t}\left(C_1 + C_2t + ... + C_kt^{k-1}\right)$$

Equazioni differenziali ordinarie (Cnt.)

c) se si hanno M coppie uguali di radici
complesse coniugate $\lambda = a \pm jb$ i corrispondenti termini sono :

$$y_{oa}(t) = e^{at}\left[\left(A_1 + A_2 t + \ldots + A_M t^{M-1}\right)\cos(bt) + \left(B_1 + B_2 t + \ldots + B_M t^{M-1}\right)\sin(bt)\right]$$

per una coppia di radici complesse coniugate $a \pm jb$

$$y_{oa}(t) = e^{at}\left[A\cos(bt) + B\sin(bt)\right]$$

per radici immaginarie pure $\pm jb$

$$y_{oa}(t) = \left[A\cos(bt) + B\sin(bt)\right]$$

Equazioni differenziali ordinarie (Cnt.)

- Per il calcolo dell'integrale particolare non esiste un metodo generale

- In casi particolari (ingresso polinomiale, cisoidale, etc.) il calcolo è agevole

a) Ingresso costante $u(t) = \text{cost} \Rightarrow y_p(t) = \text{cost}_1$

b) Ingresso lineare $u(t) = A + Bt \Rightarrow y_p(t) = C + Dt$

c) Ingresso esponenziale $u(t) = Ae^{\sigma t} \Rightarrow y_p(t) = Be^{\sigma t}$

d) Ingresso sinusoidale $u(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \Rightarrow y_p(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$

e)Ingresso polinomiale $u(t) = a_n t^n + \ldots\ldots.. + a_1 t + a_0 \Rightarrow y_p(t) = b_n t^n + \ldots\ldots.. + b_1 t + b_0$

f) Ingresso cisoidale $u(t) = Ae^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow y_p(t) = Be^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta)$

Noto l'andamento dell'integrale si determinano i coefficienti imponendo il soddisfacimento della **Relazione I/O**

$$y(t) = y_{oa}(t) + y_p(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{t\lambda_i} + y_p$$

Le costanti di integrazione A_i si determinano imponendo le condizioni iniziali

$$y(0^+)$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{0^+}$$

$$\left.\frac{d^2 y}{dt^2}\right|_{0^+}$$

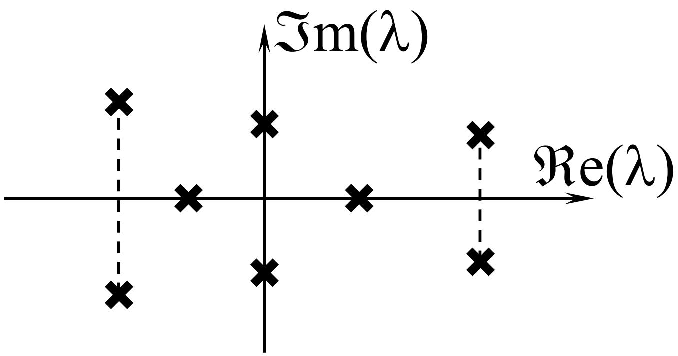
-
-
-

$$\left.\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\right|_{0^+}$$

LE CONDIZIONI INIZIALI SI POSSONO DETERMINARE NOTO LO STATO DEL CIRCUITO IN 0^+

FREQUENZE LIBERE λ

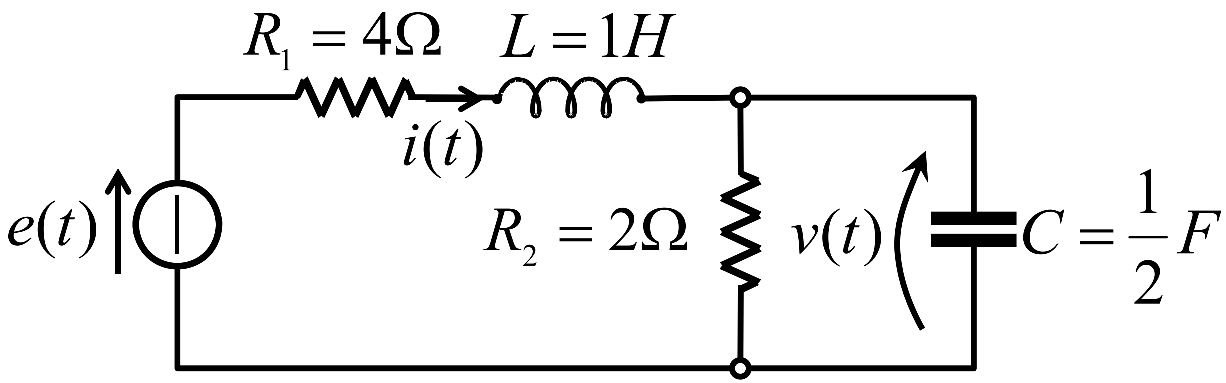
- sono le radici dell'equazione caratteristica e prendono il nome di ***frequenze libere***
- hanno le dimensioni dell'inverso di un tempo
- sono indipendenti dall'ingresso (si pone u(t)=0), per questo prendono il nome di ***libere***
- il loro inverso 1/ λ=τ sono le costanti di tempo
- se tutte le λ sono a parte reale negativa, dopo un tempo sufficientemente lungo i termini $A\,e^{\lambda t}$ si attenuano e l'uscita del circuito segue l'ingresso



se $\Re e\{\lambda_i\} < 0 \quad \forall i$ la risposta libera converge a zero dopo un certo tempo. Per $t \to \infty$ RIMANE LA SOLA RISPOSTA FORZATA

- se $\Re e\{\lambda_i\} < 0 \quad \forall i$ RETE ASSOLUTAMENTE STABILE
- se $\exists i \ni \Re e\{\lambda_i\} = 0$ RETE SEMPLICEMENTE STABILE
- se $\exists i \ni \Re e\{\lambda_i\} > 0$ RETE INSTABILE

ESEMPIO 2



Determinare $v(t)$ e $i(t)$ per t>0.

$$e(t) = f(t)\cdot\delta_{-1}(t) \quad f(0^+) \neq 0$$

$$v(0^+) = 12; \quad i(0^+) = 0$$

Ricaviamo la relazione I/O per $v(t)$

$$* \begin{cases} i = \dfrac{v}{R_2} + C\dfrac{dv}{dt} \\ e(t) = R_1 i + L\dfrac{di}{dt} + v \end{cases} \qquad \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{R_2}\frac{dv}{dt} + C\frac{d^2v}{dt^2}$$

Sostituiamo nella seconda

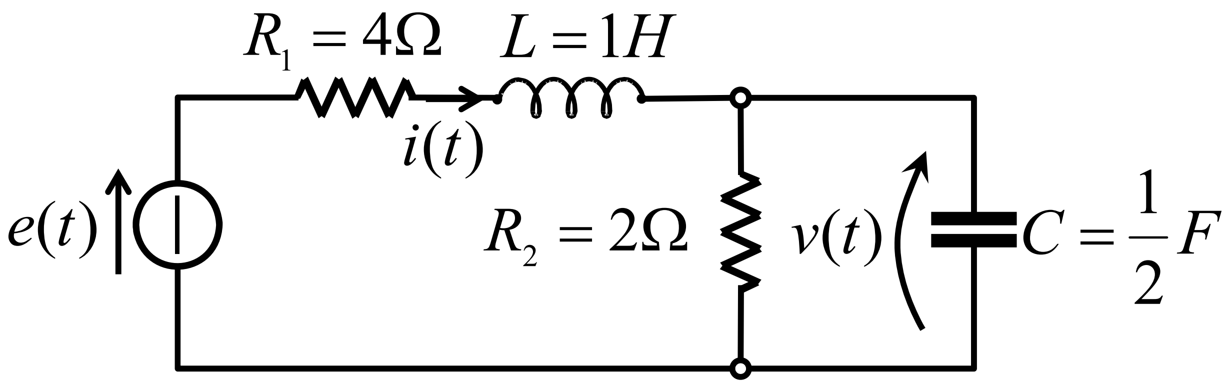
$$e(t) = R_1\left[\frac{v}{R_2} + C\frac{dv}{dt}\right] + L\left[\frac{1}{R_2}\frac{dv}{dt} + C\frac{d^2v}{dt^2}\right] + v$$

$$e(t) = \frac{R_1}{R_2}v + \left(CR_1 + \frac{L}{R_2}\right)\frac{dv}{dt} + LC\frac{d^2v}{dt^2} + v$$

Riordinando

$$\xrightarrow{\text{Riordinando}} LC\frac{d^2v}{dt^2} + \left(CR_1 + \frac{L}{R_2}\right)\frac{dv}{dt} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)v = e(t)$$

ESEMPIO 2



Determinare $v(t)$ e $i(t)$ per t>0.

$$e(t) = f(t)\cdot\delta_{-1}(t) \quad f(0^+) \neq 0$$

$$v(0^+) = 12; \quad i(0^+) = 0$$

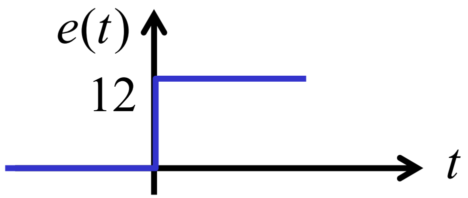
Sostituendo i valori numerici:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{5}{2}\frac{dv}{dt} + 3v = e(t) \;\rightarrow\; \frac{d^2v}{dt^2} + 5\frac{dv}{dt} + 6v = 2e(t)$$

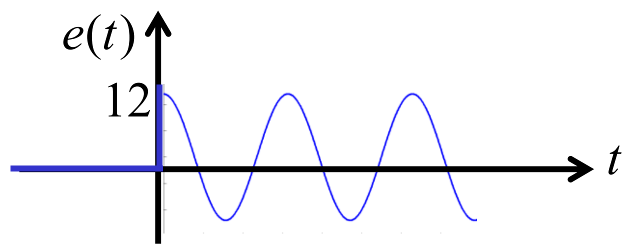
Omogenea associata: $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \qquad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{-5 \mp \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$

$$v_{oa}(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t} \qquad v_p(t) = ?$$

Caso a) $e(t) = E\cdot\delta_{-1}(t) \quad E = 12$



Caso b) $e(t) = 12\cos 2t\cdot\delta_{-1}(t)$



ESEMPIO 2

$$
\star \begin{cases} i = \dfrac{v}{R_2} + C\dfrac{dv}{dt} \\ e(t) = R_1 i + L\dfrac{di}{dt} + v \end{cases}
$$

Caso a) $e(t) = E \cdot \delta_{-1}(t) \quad E = 12$

$v_p(t) = k$ (costante) → Sostituendo nella relazione I/O:

$$0 + 5 \cdot 0 + 6k = 2 \cdot 12 \Rightarrow k = 4$$

$$v(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t} + 4$$

C_1 e C_2 si determinano note le condizioni iniziali $v(0^+)$ e $\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{0^+}$

Sapendo che $v(0^+) = 12$ dalla prima delle * si ottiene:

$$C\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{R_2} + i \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{R_2 C} + \frac{1}{C}i \Rightarrow \left.\frac{dv}{dt}\right|_{0^+} = -\frac{v(0^+)}{R_2 C} + \frac{1}{C}i(0^+) = -12$$

Applicando le condizioni iniziali:

$$v(0^+) = 12 = C_1 + C_2 + 4 \Rightarrow C_1 + C_2 = 8$$

$$\frac{dv}{dt} = -3C_1 e^{-3t} - 2C_2 e^{-2t} \Rightarrow \left.\frac{dv}{dt}\right|_{0^+} = -3C_1 - 2C_2 = -12$$

ESEMPIO 2

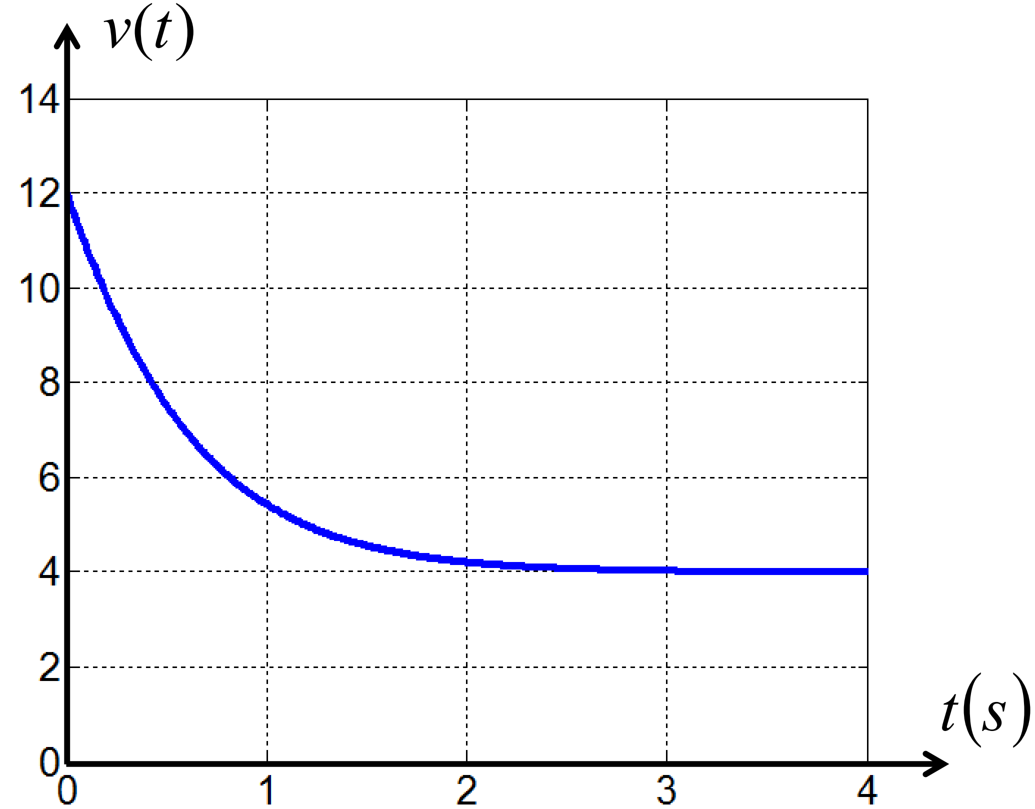
Caso a) $e(t) = E \cdot \delta_{-1}(t) \quad E = 12$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ -3C_1 - 2C_2 = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2C_1 + 2C_2 = 16 \\ -3C_1 - 2C_2 = -12 \end{cases}$$

$$-C_1 = 4 \Rightarrow C_1 = -4$$

$$C_2 = 8 - C_1 = 8 + 4 = 12$$

$$\boxed{v(t) = -4e^{-3t} + 12e^{-2t} + 4}$$



ESEMPIO 2

$$* \begin{cases} i = \dfrac{v}{R_2} + C\dfrac{dv}{dt} \\ e(t) = R_1 i + L\dfrac{di}{dt} + v \end{cases}$$

Caso a) $e(t) = E \cdot \delta_{-1}(t) \quad E = 12$

Calcoliamo ora la corrente $i(t)$. Dalla seconda delle * si ottiene:

$$v = e(t) - R_1 i - L\frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{de}{dt} - R_1\frac{di}{dt} - L\frac{d^2 i}{dt^2}$$

Sostituendo nella prima delle * si ottiene:

$$v = e(t) - R_1 i - L\frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{de}{dt} - R_1\frac{di}{dt} - L\frac{d^2 i}{dt^2}$$

$$i = \frac{1}{R_2}\left(e(t) - R_1 i - L\frac{di}{dt}\right) + C\left(\frac{de}{dt} - R_1\frac{di}{dt} - L\frac{d^2 i}{dt^2}\right)$$

$$LC\frac{d^2 i}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_2} + R_1 C\right)\frac{di}{dt} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)i = C\frac{de}{dt} + \frac{1}{R_2}e$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{5}{2}\frac{di}{dt} + 3i = \frac{1}{2}\frac{de}{dt} + \frac{1}{2}e \quad \rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + 5\frac{di}{dt} + 6i = \frac{de}{dt} + e$$

ESEMPIO 2

$$* \begin{cases} i = \frac{v}{R_2} + C\frac{dv}{dt} \\ e(t) = R_1 i + L\frac{di}{dt} + v \end{cases}$$

Caso a) $e(t) = E \cdot \delta_{-1}(t) \quad E = 12$

$$\rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + 5\frac{di}{dt} + 6i = \frac{de}{dt} + e$$

Omogenea associata: $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \qquad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-5 \mp \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$

$i_p(t) = H$ (costante) $6H = 12 \rightarrow H = 2$

$$i(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t} + 2 \qquad\qquad i(0^+) = 0$$

Determiniamo la seconda condizione iniziale dalla seconda delle * :

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{L}v - \frac{R_1}{L}i + \frac{1}{L}e = -v - 4i + e \Rightarrow \left.\frac{di}{dt}\right|_{0^+} = -12 - 0 + 12 = 0$$

Applicando le condizioni iniziali:

$$i(0^+) = 0 = C_1 + C_2 + 2 \Rightarrow C_1 + C_2 = -2 \qquad \left.\frac{di}{dt}\right|_{0^+} = -3C_1 - 2C_2 = 0$$

ESEMPIO 2

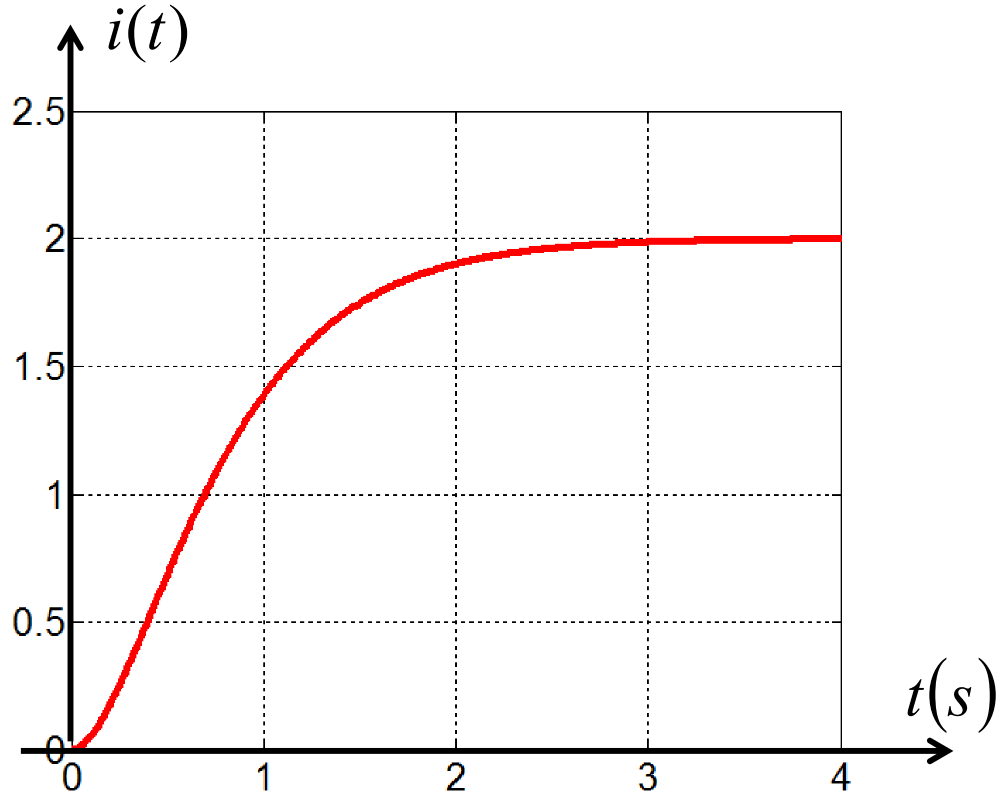
Caso a) $e(t) = E \cdot \delta_{-1}(t) \quad E = 12$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -2 \\ -3C_1 - 2C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2C_1 + 2C_2 = -4 \\ -3C_1 - 2C_2 = 0 \end{cases}$$

$$-C_1 = -4 \Rightarrow C_1 = 4$$

$$C_2 = -2 - C_1 = -6$$

$$\boxed{i(t) = 4e^{-3t} - 6e^{-2t} + 2}$$



ESEMPIO 2

Caso b) $e(t) = 12\cos 2t \cdot \delta_{-1}(t)$

Rel. I/O: $\dfrac{d^2 v}{dt^2} + 5\dfrac{dv}{dt} + 6v = 24\cos 2t$

$$\begin{cases} v_p(t) = M\cos 2t + N\sin 2t \\ \dfrac{dv_p}{dt} = -2M\sin 2t + 2N\cos 2t \\ \dfrac{dv_p^2}{dt^2} = -4M\cos 2t - 4N\sin 2t \end{cases}$$

Sostituendo nella relazione I/O:

$$-4M\cos 2t - 4N\sin 2t + 5(-2M\sin 2t + 2N\cos 2t) + 6(M\cos 2t + N\sin 2t) = 24\cos 2t$$

Da cui, eguagliando i coefficienti dei termini cos e sin si ottiene:

$$\begin{cases} -4M + 10N + 6M = 24 \\ -4N - 10M + 6N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2M + 10N = 24 \\ -10M + 2N = 0 \rightarrow N = 5M \end{cases}$$

$$2M + 50M = 24 \rightarrow M = \frac{6}{13} \quad \text{e} \quad N = \frac{30}{13}$$

$$v_p(t) = \frac{6}{13}\cos 2t + \frac{30}{13}\sin 2t = 0{,}4615\cos 2t + 2{,}308\sin 2t = 2{,}354\cos(2t - 78{,}69°)$$

ESEMPIO 2

Caso b) $e(t) = 12\cos 2t \cdot \delta_{-1}(t)$

$$v(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t} + 2{,}354\cos(2t - 78{,}69°)$$

Le condizioni iniziali sono le stesse calcolate precedentemente in quanto non dipendono dall'ingresso:

$$v(0^+) = 12 \quad \left.\frac{dv}{dt}\right|_{0^+} = -12$$

$$v(0^+) = 12 = C_1 + C_2 + 0{,}4616 \Rightarrow C_1 + C_2 = 11{,}538$$

$$\frac{dv}{dt} = -3C_1 e^{-3t} - 2C_2 e^{-2t} - 2 \cdot 0{,}4615\sin 2t + 2 \cdot 2{,}308\cos 2t$$

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{0^+} = -3C_1 - 2C_2 + 4{,}616 = -12 \Rightarrow -3C_1 - 2C_2 = -16{,}616$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 11{,}538 \\ 3C_1 + 2C_2 = 16{,}616 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2C_1 + 2C_2 = 23{,}076 \\ 3C_1 + 2C_2 = 16{,}616 \end{cases}$$

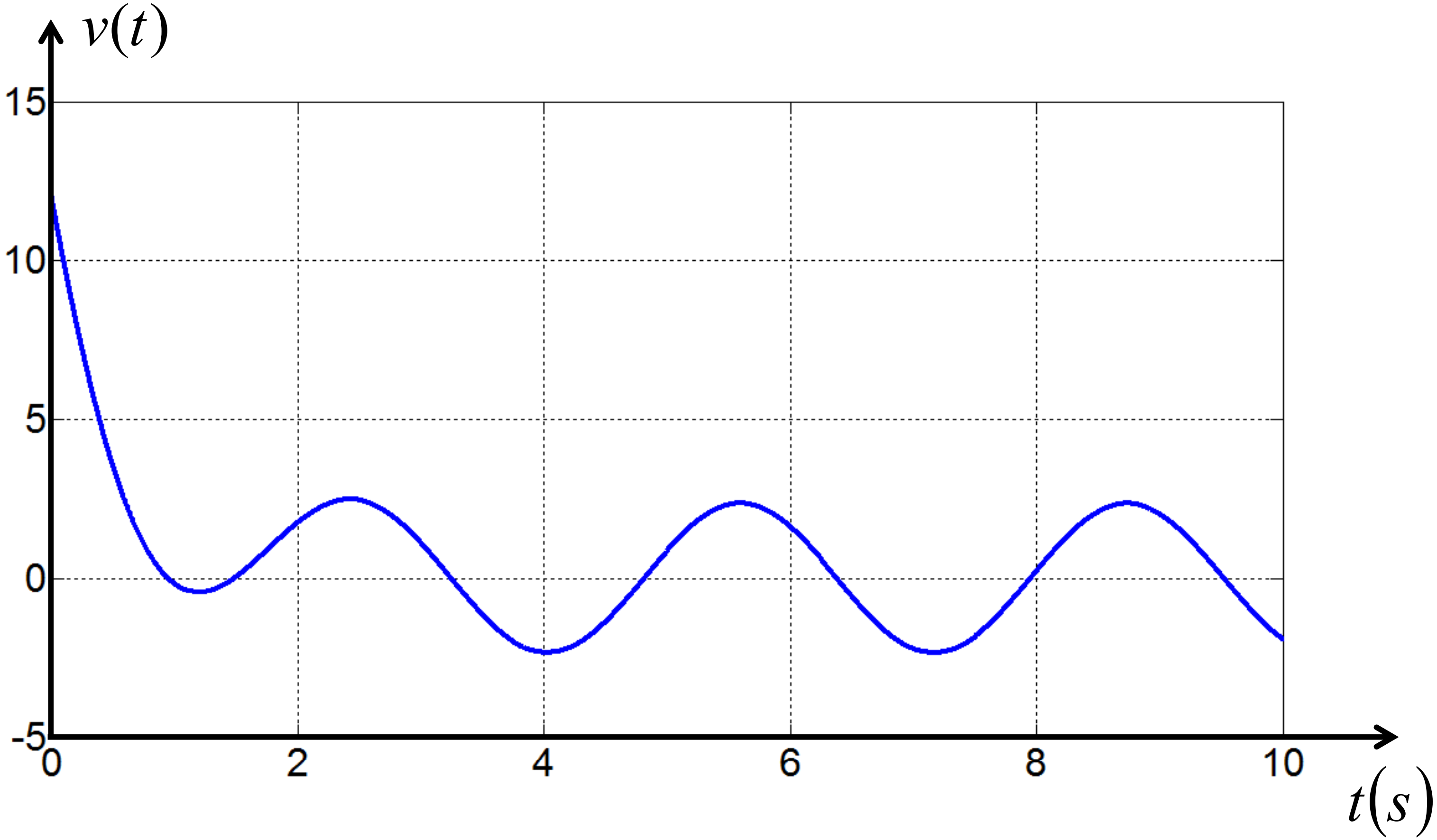
$$-C_1 = 6{,}46 \Rightarrow C_1 = -6{,}46$$

$$C_2 = 11{,}538 + 6{,}46 = 18$$

ESEMPIO 2

Caso b) $e(t) = 12\cos 2t \cdot \delta_{-1}(t)$

$$\boxed{v(t) = -6{,}46e^{-3t} + 18e^{-2t} + 2{,}354\cos(2t - 78{,}69°)}$$



ESEMPIO 2

Caso b) $e(t)=12\cos 2t\cdot\delta_{-1}(t)$ La relazione I/O per la corrente i(t) diventa:

$$\frac{d^2 i}{dt^2}+5\frac{di}{dt}+6i=-24\sin 2t+12\cos 2t \quad \left\{\begin{array}{l} i_p(t)=H\cos 2t+K\sin 2t \\ \dfrac{di_p}{dt}=-2H\sin 2t+2K\cos 2t \\ \dfrac{di_p^2}{dt^2}=-4H\cos 2t-4K\sin 2t \end{array}\right.$$

Sostituendo nella relazione I/O:

$$-4H\cos 2t-4K\sin 2t+5(-2H\sin 2t+2K\cos 2t)+6(H\cos 2t+K\sin 2t)=-24\sin 2t+12\cos 2t$$

Da cui, eguagliando i coefficienti dei termini cos e sin si ottiene:

$$\begin{cases} -4H+10K+6H=12 \\ -4K-10H+6K=-24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2H+10K=12 \\ -10H+2K=-24 \end{cases}$$

$$H=2{,}5385 \qquad K=0{,}6923$$

$$i_p(t)=2{,}5385\cos 2t+0{,}6923\sin 2t=2{,}63\cos(2t-15{,}25°)$$

ESEMPIO 2

Caso b) $e(t) = 12\cos 2t \cdot \delta_{-1}(t)$

$$i(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t} + 2{,}63\cos(2t - 15{,}25°)$$

Le condizioni iniziali sono: $i(0^+) = 0$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{L}v - \frac{R_1}{L}i + \frac{1}{L}e = -v - 4i + 12\cos 2t \qquad \left.\frac{di}{dt}\right|_{0^+} = -12 + 0 + 12 = 0$$

Coincidono con il caso precedente perché nell'istante 0^+ e(t)=12 in entrambi i casi.

$$i(0^+) = 0 = C_1 + C_2 + 2{,}5385 \Rightarrow C_1 + C_2 = -2{,}5385$$

$$\frac{di}{dt} = -3C_1 e^{-3t} - 2C_2 e^{-2t} - 2 \cdot 2{,}5385\sin 2t + 2 \cdot 0{,}6923\cos 2t$$

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{0^+} = -3C_1 - 2C_2 + 1{,}3846 = 0 \Rightarrow -3C_1 - 2C_2 = -1{,}3846$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -2{,}5385 \\ 3C_1 + 2C_2 = 1{,}3846 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2C_1 + 2C_2 = -5{,}077 \\ 3C_1 + 2C_2 = 1{,}3846 \end{cases}$$

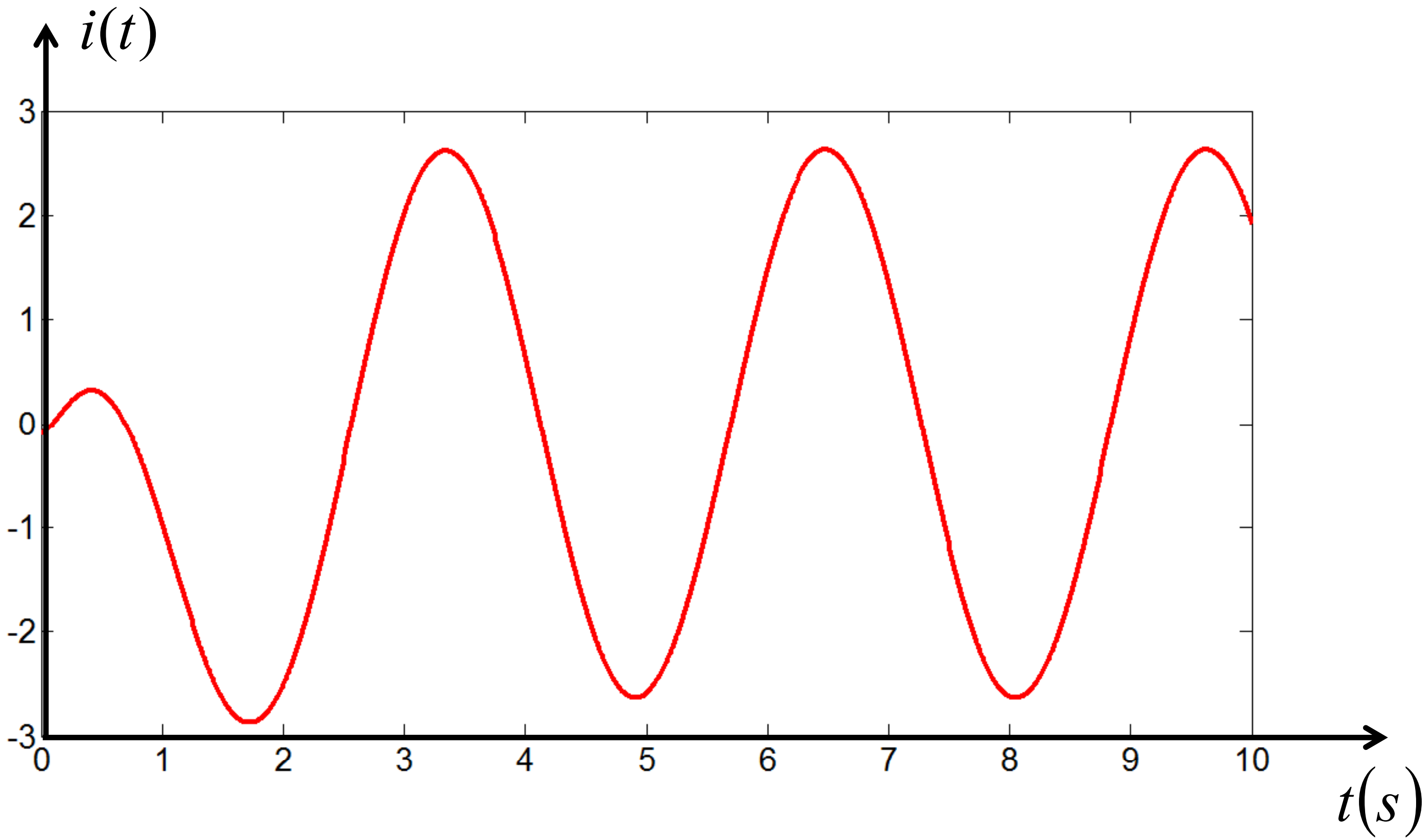
$$-C_1 = -6{,}46 \Rightarrow C_1 = 6{,}46$$

$$C_2 = -2{,}54 - 6{,}46 = -9$$

ESEMPIO 2

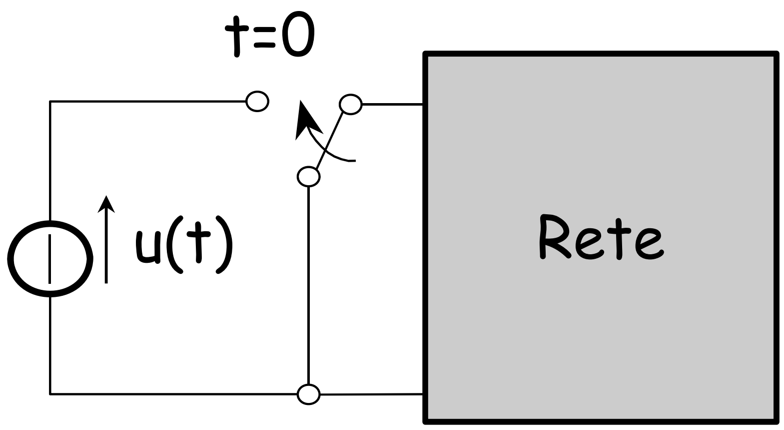
Caso b) $e(t) = 12\cos 2t \cdot \delta_{-1}(t)$

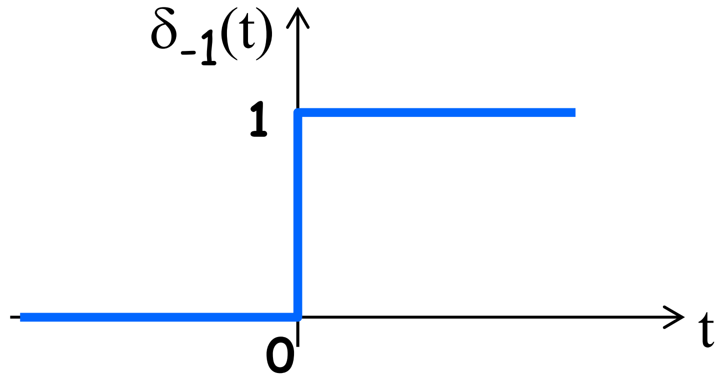
$$\boxed{i(t) = 6{,}462e^{-3t} - 9e^{-2t} + 2{,}6312\cos(2t - 15{,}25°)}$$



Segnali elettrici

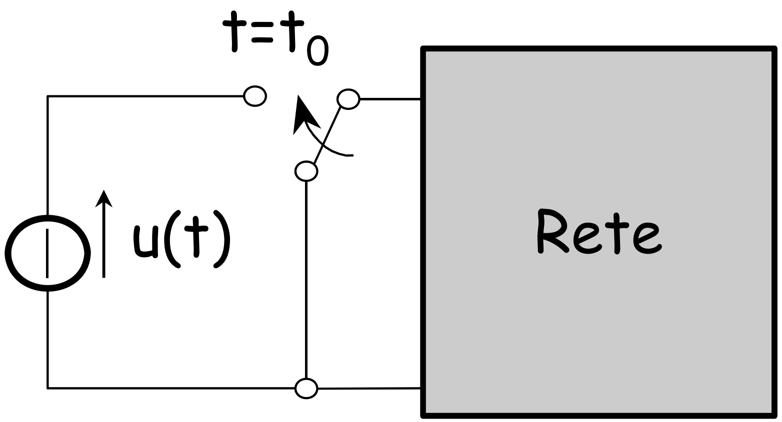
Ingresso a Gradino Unitario→δ_{-1}

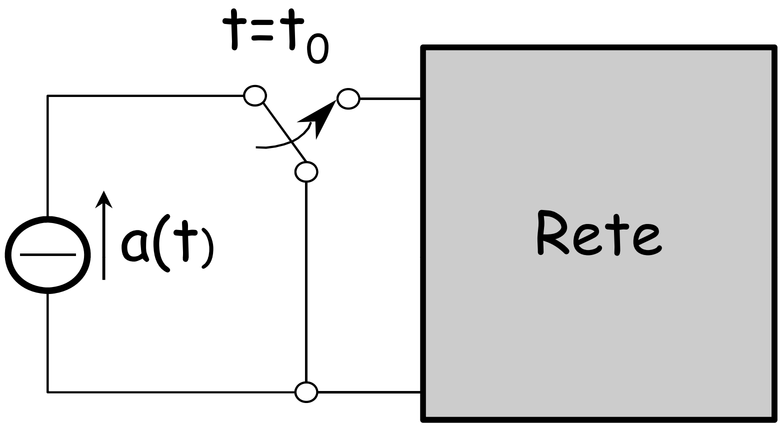


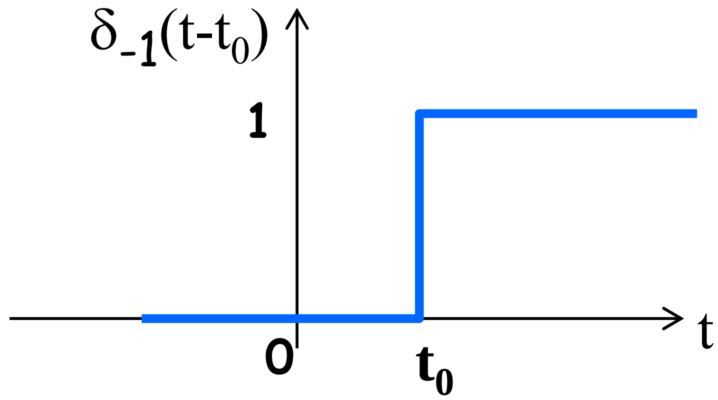


$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \text{indefinita} & \text{per } t = 0 \\ 1 & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

- Dal punto di vista fisico, corrisponde all'inserzione di un generatore di valore unitario all'istante t=0
- La funzione a gradino e' discontinua in t=0 e in questo punto non e' definita
- Moltiplicare una funzione continua nel tempo per δ_{-1} consente automaticamente di considerare tale funzione identicamente nulla per t<0



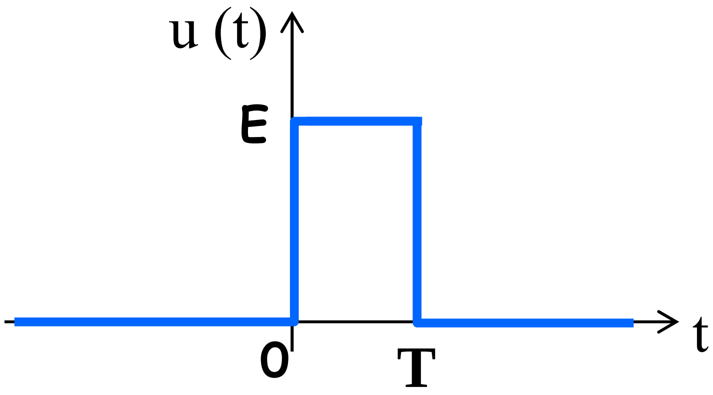


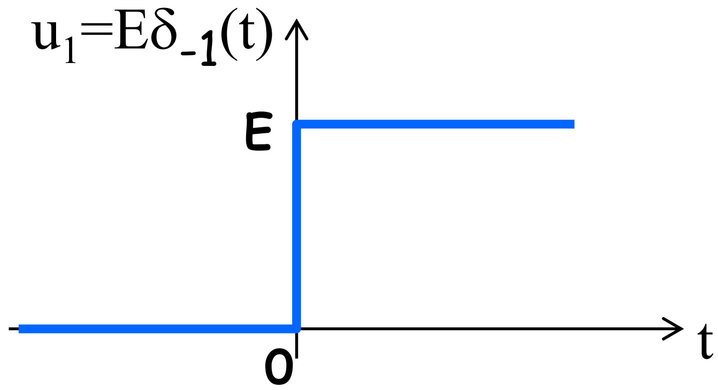


$$\delta_{-1}(t-t_0)=\begin{cases}0 & \text{per } t<t_0\\ 1 & \text{per } t>t_0\end{cases}$$

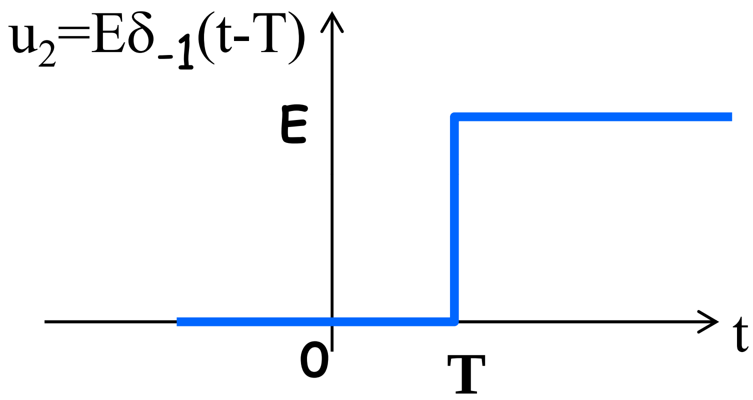
Un segnale traslato nel tempo di t_0 può essere visto come un generatore che viene inserito all'istante t_0

Ingresso rettangolare



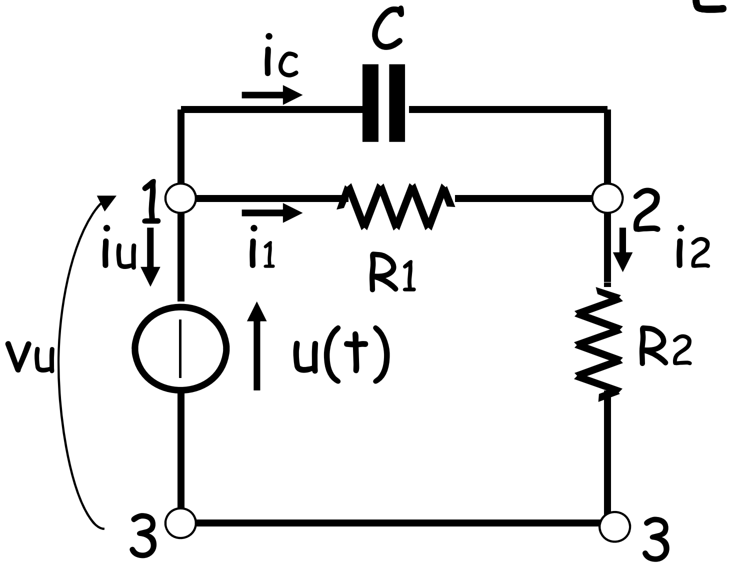


Si ottiene sottraendo
le due funzioni a gradino



Se $u(t) = u_1 - u_2$ posso trovare l'uscita di un circuito per un ingresso rettangolare sottraendo le uscite relative ai due ingressi a gradino

ESEMPIO 1 (CNT)

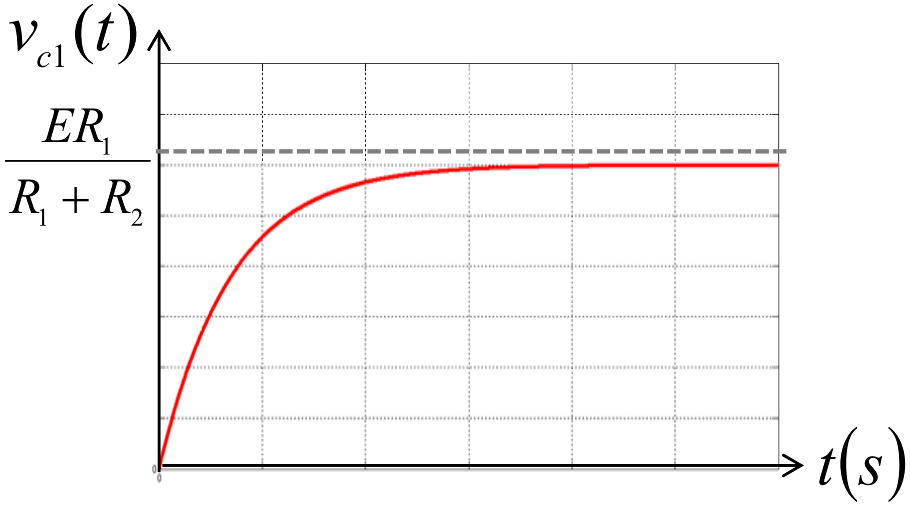


Risposta $v_c(t)$ ad un ingresso rettangolare

$$v_{c1}(t) = \frac{ER_1}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}\right)\delta_{-1}(t) \text{ per } u_1(t) = E\delta_{-1}(t)$$

$$v_{c2}(t) = \frac{ER_1}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}(t-T)}\right)\delta_{-1}(t-T) \text{ per } u_2(t) = E\delta_{-1}(t-T)$$

$$v_c(t) = \frac{ER_1}{R_1 + R_2}\left[\left(1 - e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}\right)\delta_{-1}(t) - \left(1 - e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}(t-T)}\right)\delta_{-1}(t-T)\right]$$



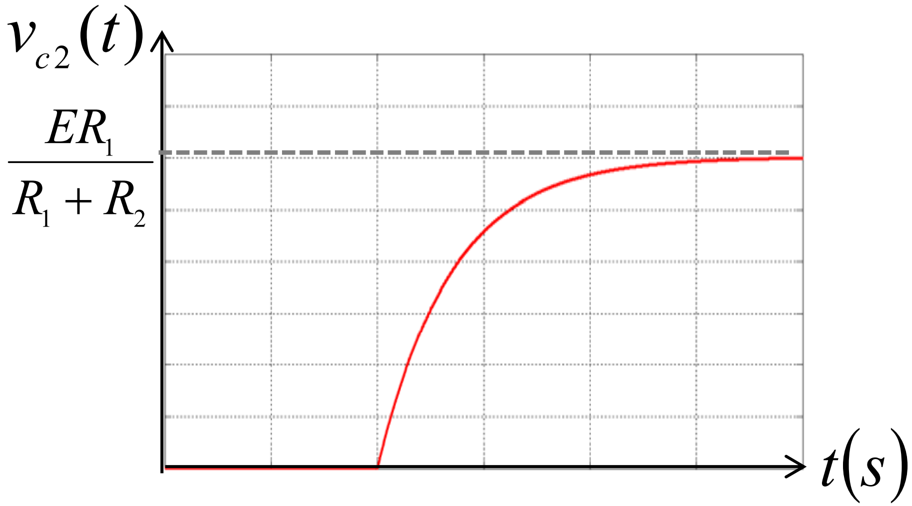
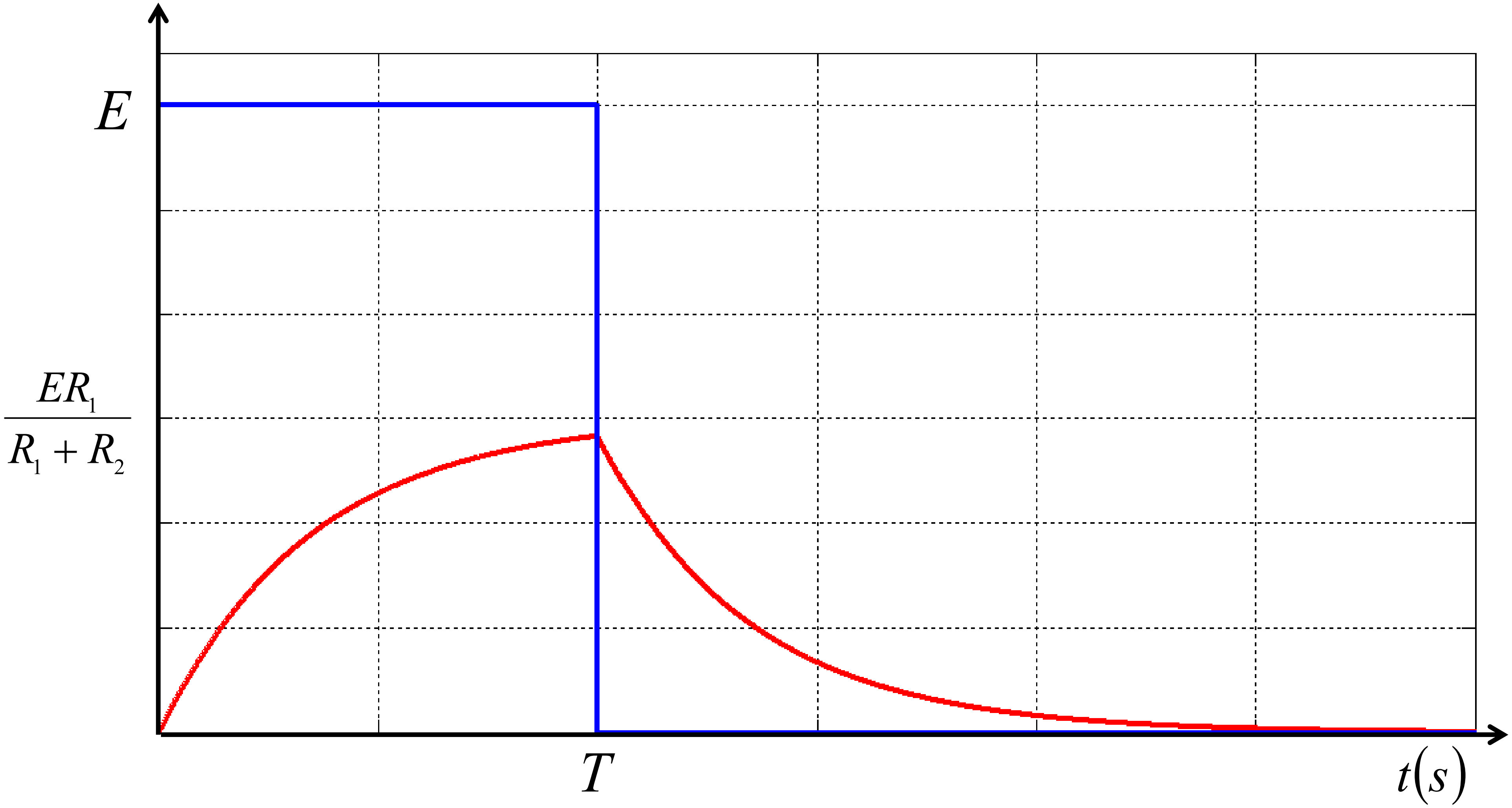


Grafico della **u(t)** (blu) e della **v_c(t)** (rosso)



Il risultato trovato e' conseguenza della proprietà di linearità e di tempo invarianza del circuito considerato

FUNZIONE IMPULSO UNITARIO

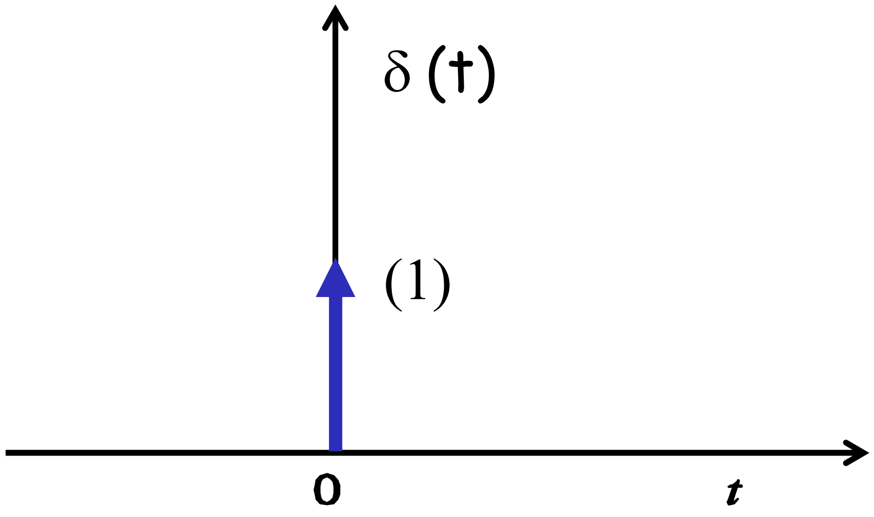
$\delta_0(t)$ oppure $\delta(t)$ → distribuzione impulsiva unitaria o di DIRAC

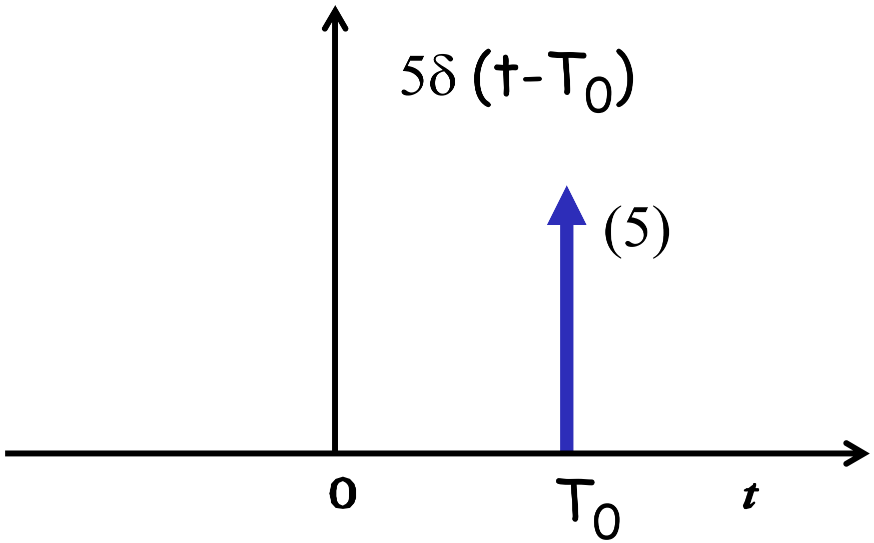
$$\delta(t) = \frac{d}{dt}\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \text{indefinita} & \text{per } t = 0 \\ 0 & \text{per } t > 0 \end{cases} \quad \text{o anche} \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{T} \delta(\tau)d\tau = 0 & \text{per } T < 0 \\ \int_{-\infty}^{T} \delta(\tau)d\tau = 1 & \text{per } T > 0 \end{cases}$$

PER OGNI FUNZIONE CONTINUA *f(t)* si ha:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{T} \delta(\tau)\cdot f(\tau)d\tau = 0 & \text{per } T < 0 \\ \int_{-\infty}^{T} \delta(\tau)\cdot f(\tau)d\tau = f(0) & \text{per } T > 0 \end{cases}$$

FUNZIONE IMPULSO UNITARIO (Cnt)





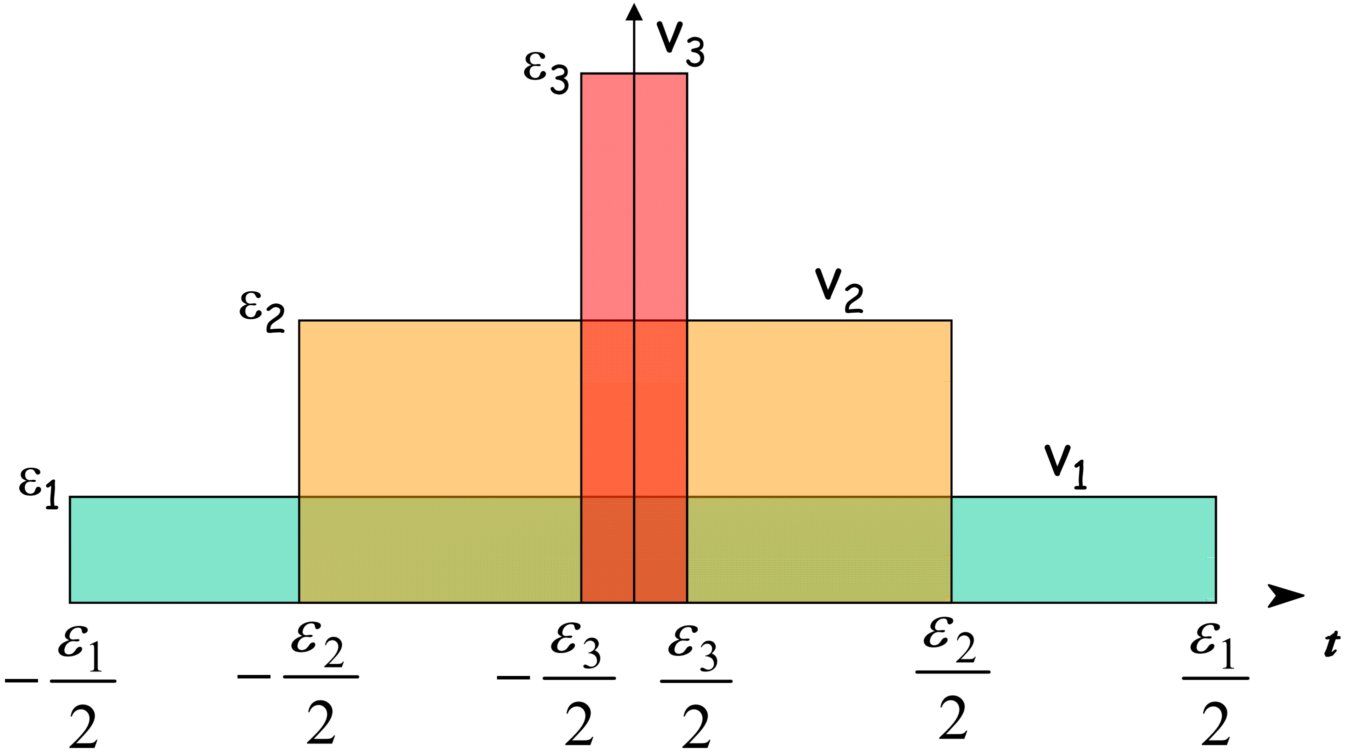
$$\delta_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) \cdot d\tau$$

La funzione gradino e' l'integrale della funzione impulso di Dirac

- Deve essere pensata come una funzione di **area unitaria**, **durata nulla**, **ampiezza infinita** nel punto in cui esiste

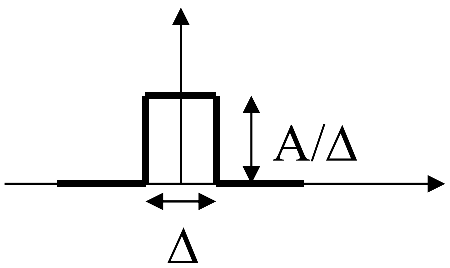
- La funzione impulsiva non può essere realizzata ma solo approssimata

FUNZIONE IMPULSO UNITARIO (Cnt)



$$\lim_{n \to \infty} v_n(t) = \delta(t)$$

Si definisce $A\delta(t)$ come il limite di $A\delta_\Delta(t)$ quando Δ tende a zero



Se A=1 si ottiene l'impulso unitario $\delta_0(t)$ o $\delta(t)$

NOTE

COMPENSAZIONE (o IDENTIFICAZIONE) DEGLI IMPULSI:

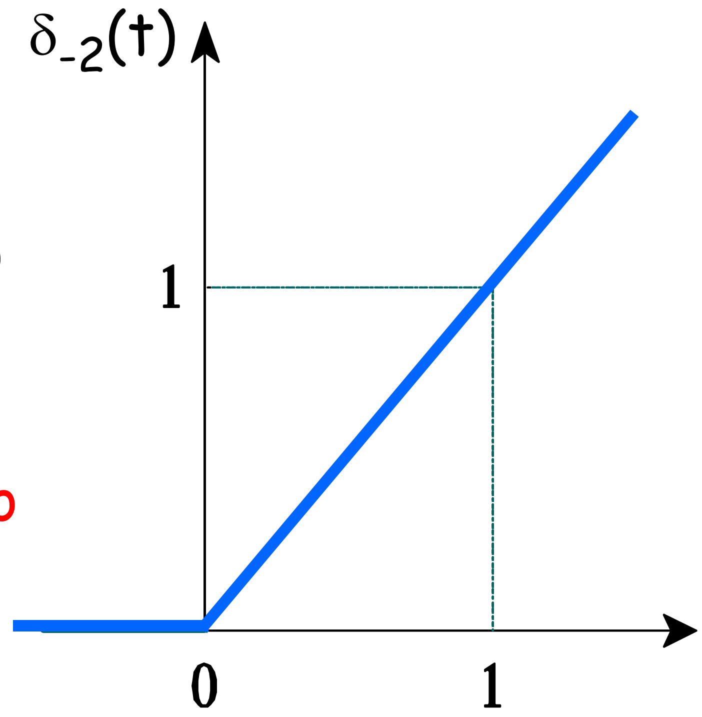
- Se e' assegnata un'eguaglianza $\varphi(t)=\psi(t)$ e $\psi(t)$ presenta, in $t=t_0$, un impulso di ordine non negativo $A\delta^k(t-t_0)$, l'uguaglianza con $\varphi(t)$ può essere verificata solo se, in $t=t_0$, anche $\varphi(t)$ presenza un impulso dello stesso ordine e con uguale costante moltiplicativa.

- Se l'ordine massimo di derivazione che compare a secondo membro della relazione I/O (m) e' maggiore dell'ordine massimo al primo membro (n), allora l'uscita è più impulsiva dell'ingresso.

- L'ordine più elevato d'impulso nella risposta e' uguale all'ordine più elevato d'impulso all'ingresso aumentato di (m-n)

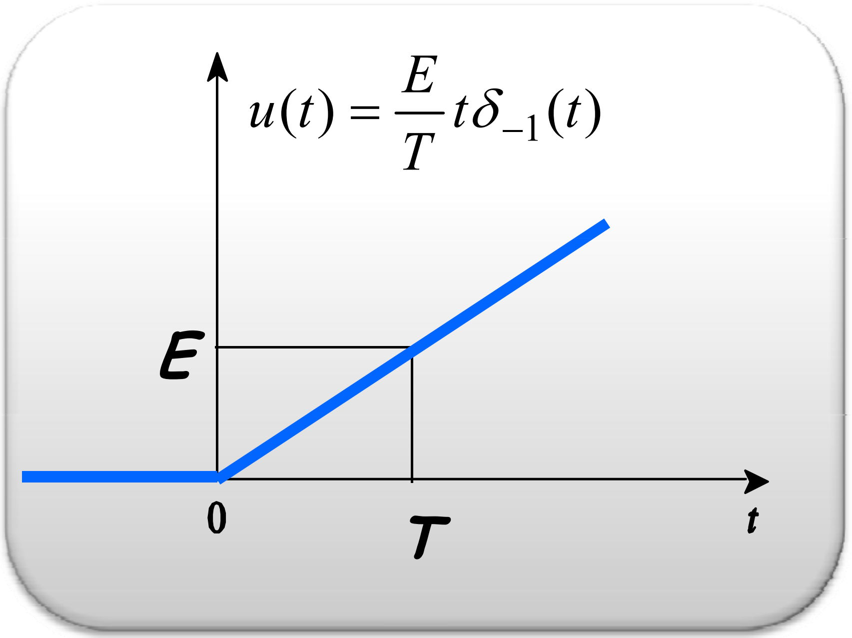
Ingresso a rampa

$$\delta_{-2}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta_{-1}(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 \text{ per } t < 0 \\ \int_0^t 1 \cdot d\tau \text{ per } t > 0 \end{cases} = t\delta_{-1}(t)$$



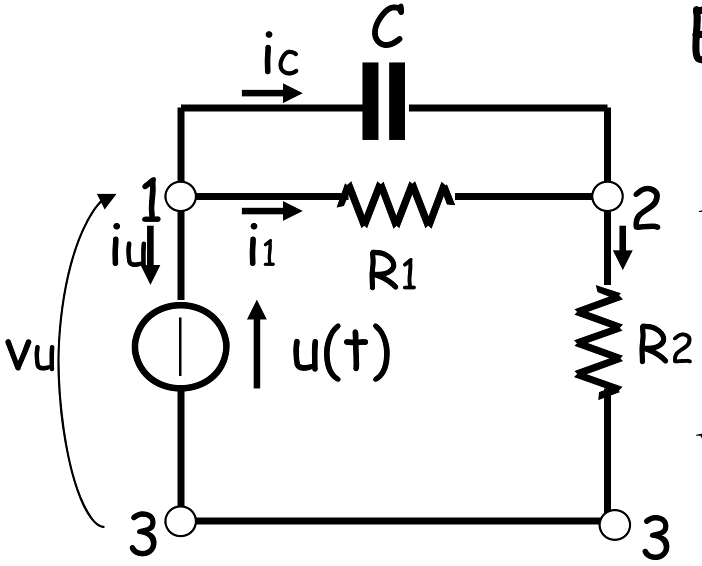
La rampa unitaria e' l'integrale del gradino unitario

Una rampa di pendenza diversa sarà:



Se conosco l'uscita relativa all'ingresso a gradino posso calcolare l'uscita alla rampa integrando opportunamente la precedente uscita

ESEMPIO 1 (Circuito del I ordine) (CNT)



$$v_c(t) = \frac{ER_1}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}\right)\delta_{-1}(t) \text{ per } u_1(t) = E\delta_{-1}(t)$$

$$v'_c(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}\right)\delta_{-1}(t) \text{ per } u_1(t) = 1\delta_{-1}(t)$$

$$\text{Se } u(t) = \delta_{-2}(t) \Rightarrow v''_c(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{R_1}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{\lambda\tau}\right)\delta_{-1}(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 \text{ per t} < 0 \\ \int_0^t \frac{R_1}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{\lambda\tau}\right)d\tau \text{ per t} > 0 \end{cases}$$

$$\text{per t} > 0 \;\; v''_c(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\int_0^t \left(1 - e^{\lambda\tau}\right)d\tau = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\left[\tau - \frac{1}{\lambda}e^{\lambda\tau}\right]_0^t =$$

$$= \frac{R_1}{R_1 + R_2}\left[t - \frac{1}{\lambda}e^{\lambda t} + \frac{1}{\lambda}\right] = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\left[t + \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{\lambda t}\right)\right]$$

$$\text{Se } u(t) = \frac{E}{T}t\delta_{-1}(t) \Rightarrow v'''_c(t) = \frac{E}{T}\frac{R_1}{R_1 + R_2}\left[t + \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{\lambda t}\right)\right]\delta_{-1}(t)$$

VERIFICHIAMOLO →

VERIFICA

$$u(t) = R_2 C\,\frac{dv_c}{dt} + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1}\right) v_c$$

Relazione I/O

$$v_c(t) = Ae^{\lambda t} + v_{cp} \rightarrow v_{cp} = Mt + N \rightarrow \frac{dv_{cp}}{dt} = M \rightarrow R_2 CM + \frac{R_1 + R_2}{R_1}(Mt + N) = \frac{E}{T}t$$

$$\begin{cases} R_2 CM + \dfrac{R_1 + R_2}{R_1} N = 0 \\ \dfrac{R_1 + R_2}{R_1} M = \dfrac{E}{T} \Rightarrow M = \dfrac{E}{T}\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

$$-R_2 CM\,\frac{R_1}{R_1 + R_2} = N \Rightarrow N = -\frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}\,\frac{E}{T}\,\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{E}{\lambda T}\,\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

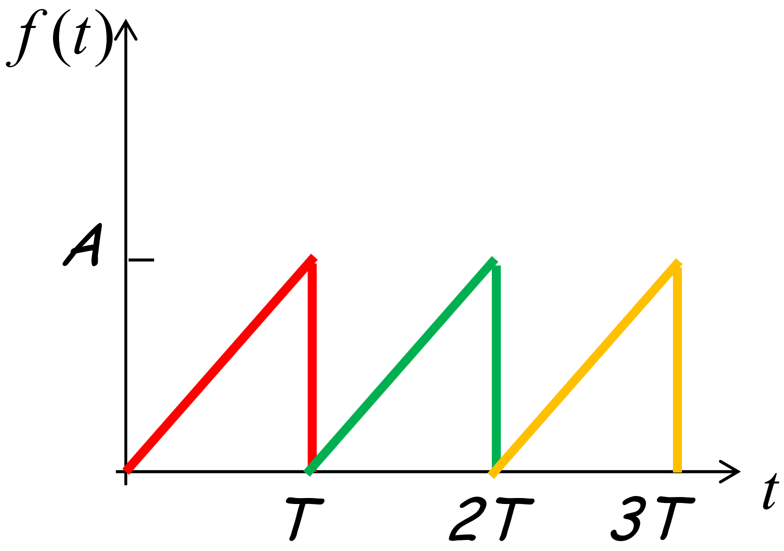
$$v_c(t) = Ae^{\lambda t} + \frac{E}{T}\frac{R_1}{R_1 + R_2}t + \frac{E}{\lambda T}\frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad per\ \ t = 0^+ \quad v_c(0^+) = 0$$

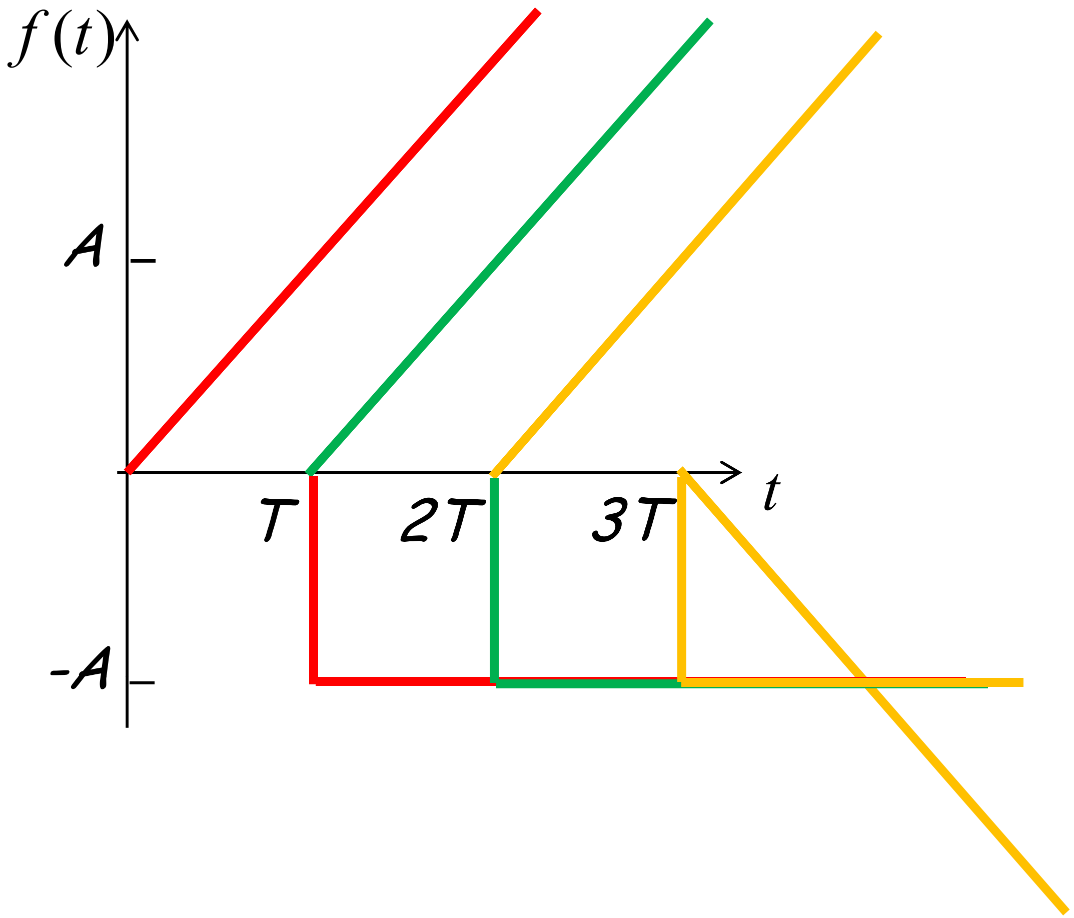
$$0 = A + \frac{E}{\lambda T}\frac{R_1}{R_1 + R_2} \Rightarrow A = -\frac{E}{\lambda T}\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$v_c(t) = \frac{E}{T}\frac{R_1}{R_1 + R_2}\left[t + \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{\lambda t}\right)\right]\delta_{-1}(t)$$

c.v.d

Segnale lineare a tratti (Esempio 1)

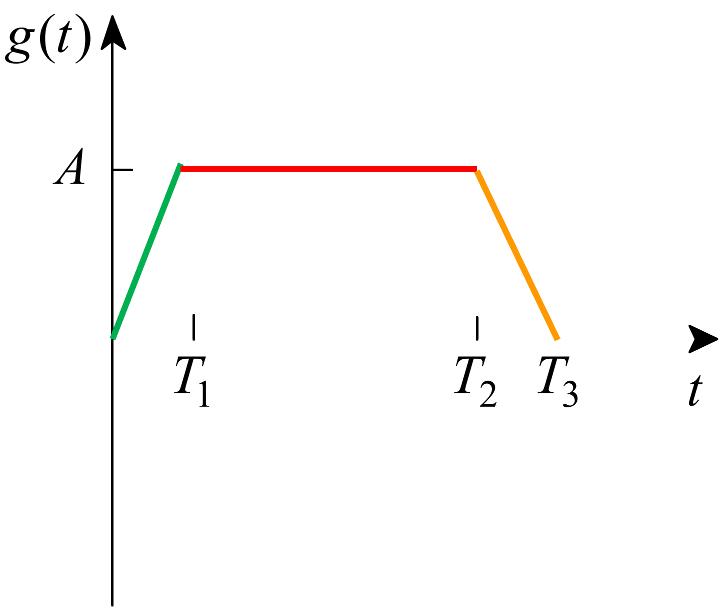


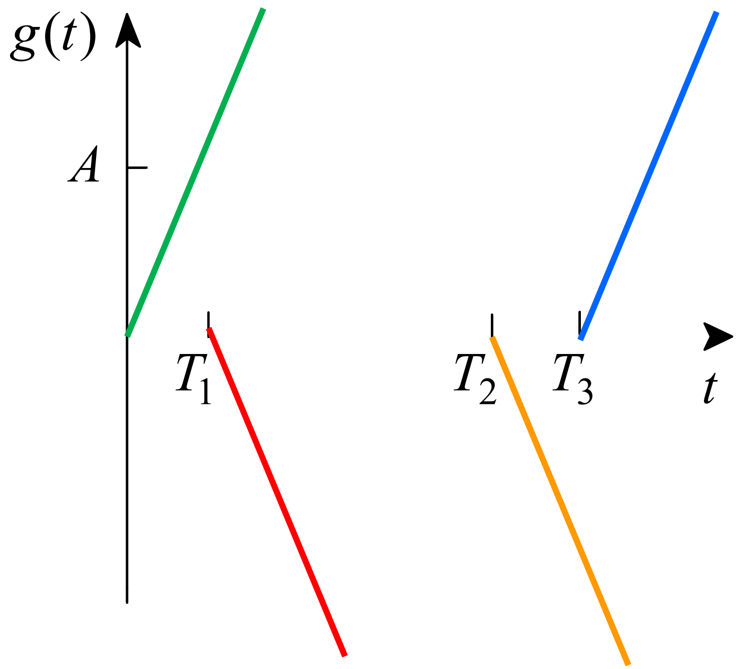


$$f(t) = \frac{A}{T} t\delta_{-1}(t) - A\delta_{-1}(t-T) - A\delta_{-1}(t-2T) - A\delta_{-1}(t-3T) - \frac{A}{T}(t-3T)\delta_{-1}(t-3T)$$

Note la risposta al gradino ed alla rampa
si sanno ricavare le risposte ad ingressi approssimabili con spezzate

Segnale lineare a tratti (Esempio 2)





$$g(t)=\frac{A}{T_1}t\delta_{-1}(t)-\frac{A}{T_1}(t-T_1)\delta_{-1}(t-T_1)-\frac{A}{T_3-T_2}(t-T_2)\delta_{-1}(t-T_2)+\frac{A}{T_3-T_2}(t-T_3)\delta_{-1}(t-T_3)$$

QUALUNQUE FUNZIONE LINEARE A TRATTI PUO' ESSERE DECOMPOSTA IN GRADINI E RAMPE E SI PUO' SCRIVERE IN FORMA GENERALE COME:

$$u(t) = \sum_i G_i \cdot \delta_{-1}(t - t_i) + \sum_j R_j \cdot \delta_{-2}(t - t_j)$$

Per la linearità e tempo invarianza della relazione I/O la risposta alla u(t) puo' essere ottenuta come somma delle risposte a ciascuno dei termini delle sommatorie a secondo membro. Allora se h(t) e' la risposta all'impulso e $k(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau \;\; ; \;\; e(t) = \int_{-\infty}^{t} k(\tau)d\tau$

$$y(t) = \sum_i G_i \cdot k(t - t_i) + \sum_j R_j \cdot e(t - t_j)$$

INGRESSO CISOIDALE

$$u(t) = Ue^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi)\delta_{-1}(t) \qquad U > 0$$

a) $\sigma = 0; \omega = 0 \Rightarrow u(t) = U\cos\varphi\,\delta_{-1}(t) \longrightarrow$ Gradino

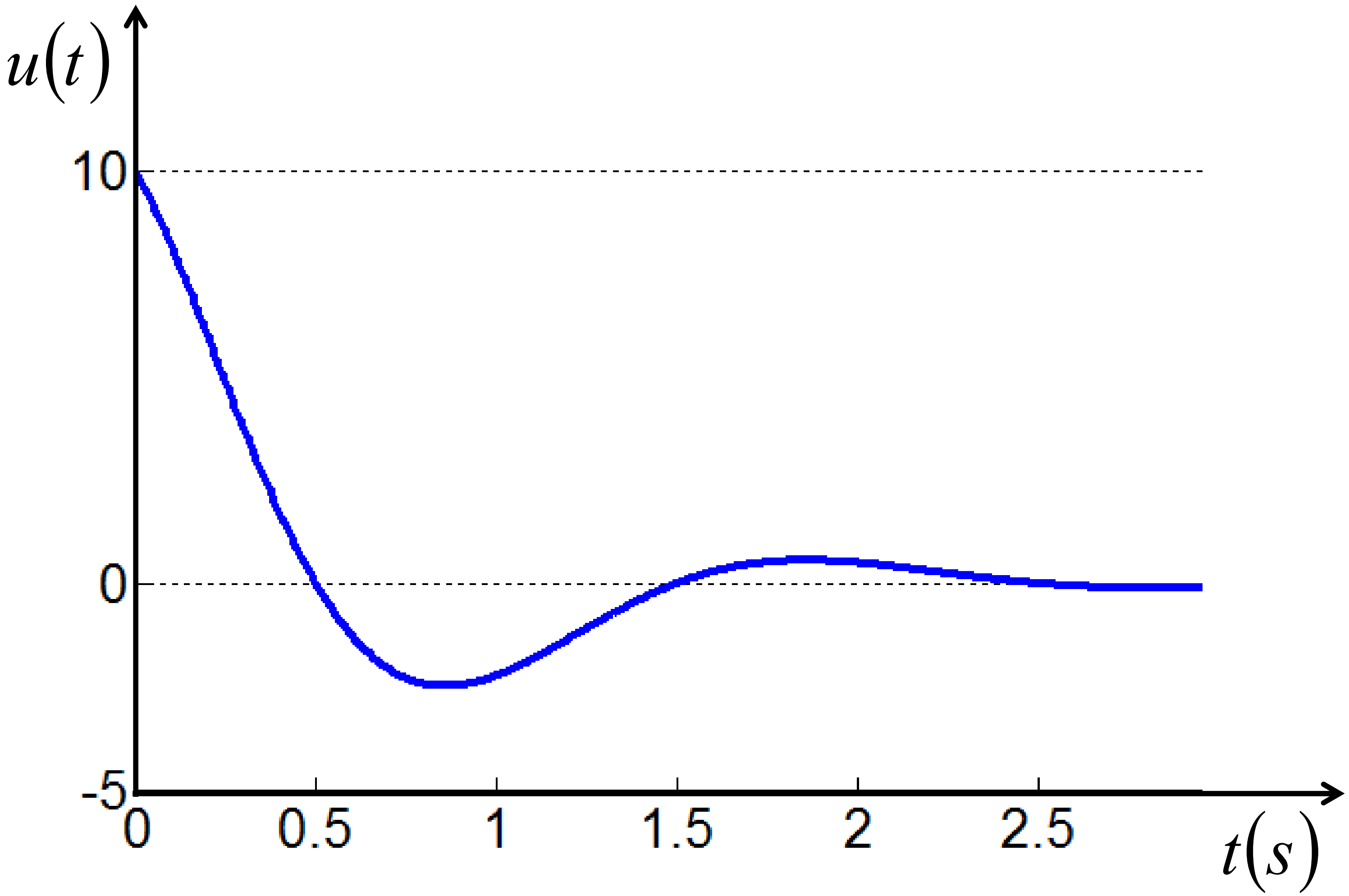
b) $\sigma = 0; \omega \neq 0 \Rightarrow u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)\delta_{-1}(t) \longrightarrow$ Sinusoide

c) $\sigma < 0; \omega = 0 \Rightarrow u(t) = Ue^{\sigma t}\cos\varphi\,\delta_{-1}(t) \longrightarrow$ Esponenziale decrescente

d) $\sigma < 0; \omega \neq 0 \Rightarrow u(t) = Ue^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi)\delta_{-1}(t) \longrightarrow$ Oscillatorio smorzato

E' un ingresso generalizzato

Esempio di segnale oscillatorio smorzato



Segnali periodici

Serie di Fourier FORMA REALE

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)\,dt \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Segnali periodici

Serie di Fourier FORMA COMPLESSA

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right); \quad \sin x = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

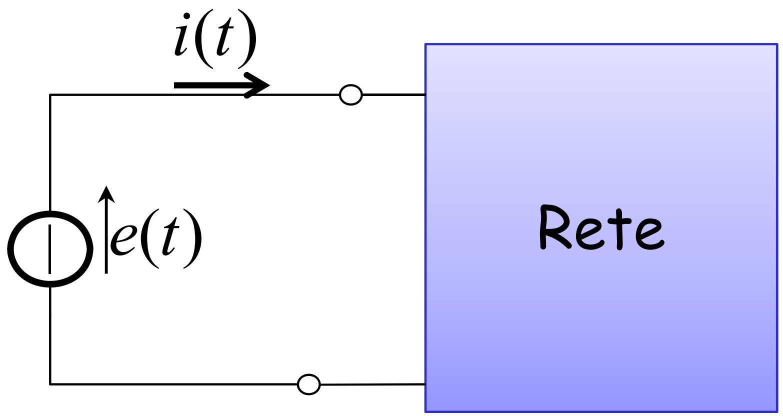
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot e^{-jn\omega t}\,dt \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

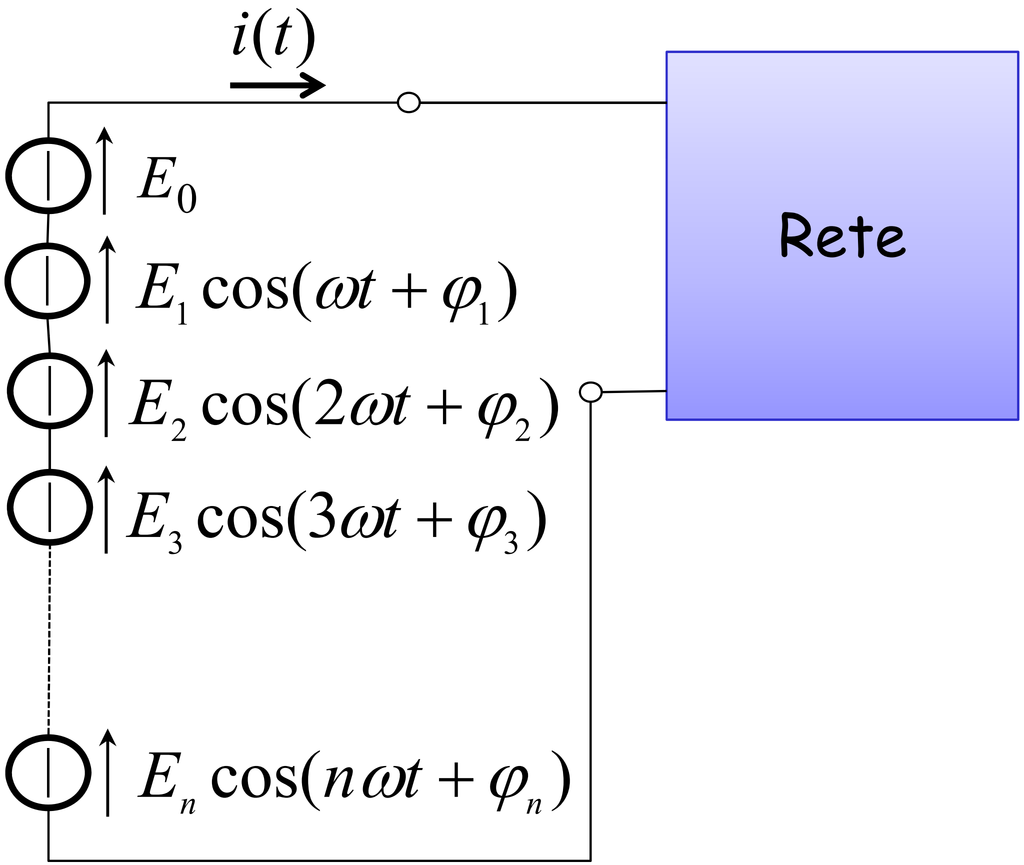
$$c_0 = \frac{a_0}{2}; \qquad c_n = \frac{1}{2}\left(a_n - jb_n\right) \qquad n = 1,2,3,\ldots;$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}\left(a_n + jb_n\right) = c_n^* \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Rete lineare eccitata con un generatore di tensione periodica

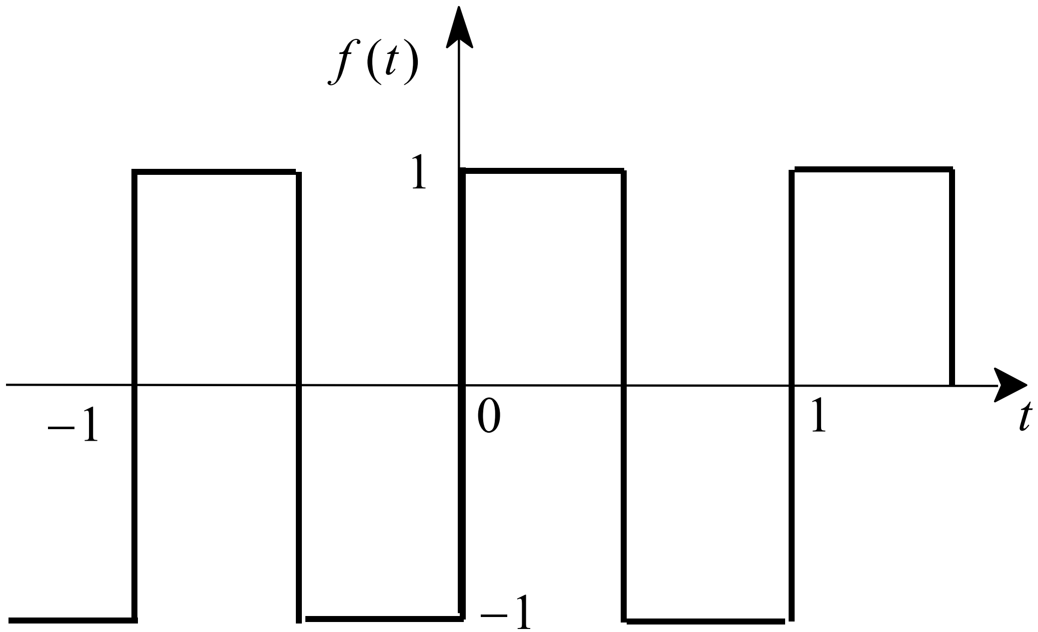


Rete lineare eccitata con una serie di generatori di tensione sinusoidali: approssimazione del circuito di sinistra

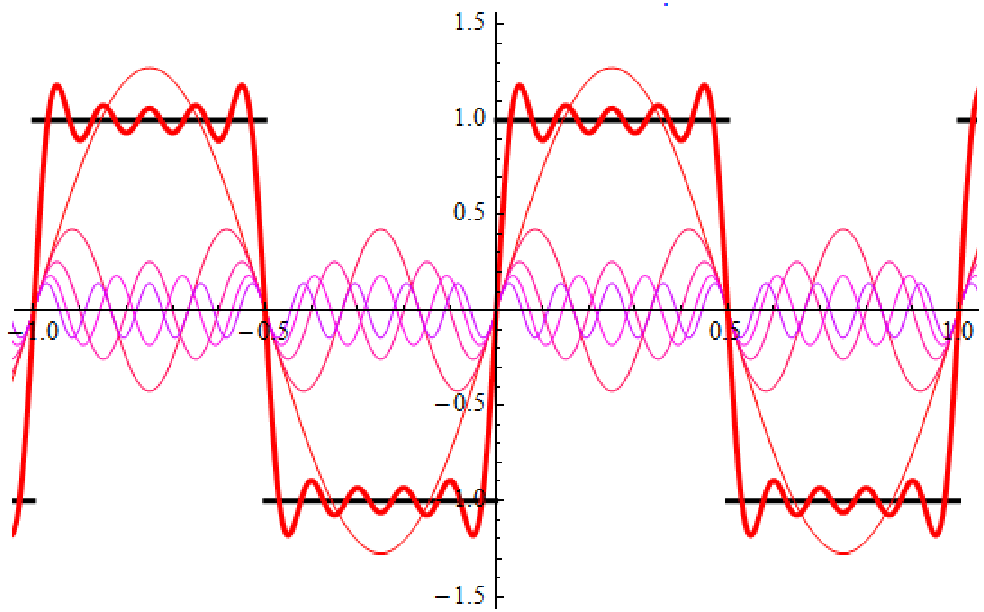


Segnali periodici (Esempio)

Onda quadra



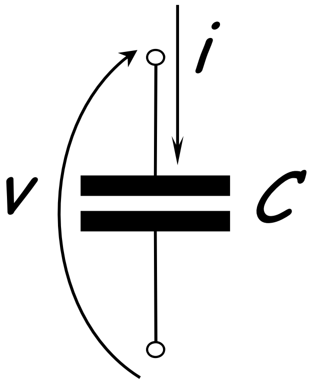
Sviluppo in serie di Fourier



$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{\pi\left(2i+1\right)} \sin(2i+1)\omega t$$

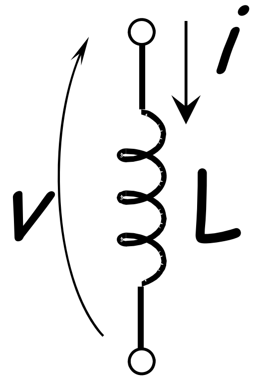
Essendo una funzione dispari sono nulle la componente continua e tutti i coefficienti dei termini in coseno

Variabili di stato



$$i = C \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$W_E = \frac{1}{2} C v^2$$



$$v = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$W_M = \frac{1}{2} L i^2$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$ vettore di stato

$$\underline{x}(0^-) = \begin{bmatrix} x_1(0^-) \\ . \\ . \\ . \\ x_n(0^-) \end{bmatrix}$$ stato in $t = 0^-$

Circuiti di ordine n

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots.. a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots.. b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

$$n \geq m$$

$$\underline{x}(0^-) = \begin{bmatrix} x_1(0^-) \\ x_2(0^-) \\ x_3(0^-) \\ . \\ . \\ . \\ x_n(0^-) \end{bmatrix} \qquad \underline{x}(0^+) = \begin{bmatrix} x_1(0^+) \\ x_2(0^+) \\ x_3(0^+) \\ . \\ . \\ . \\ x_n(0^+) \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} y(0^+) \\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{0^+} \\ \left.\frac{d^2 y}{dt^2}\right|_{0^+} \\ . \\ . \\ . \\ \left.\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\right|_{0^+} \end{matrix}$$

Stato in 0^- → Stato in 0^+ → Condizioni iniziali in 0^+

TEOREMA

Quando la rete non contiene percorsi chiusi (maglie) di soli generatori di tensione e condensatori,
o co-cicli di soli generatori di corrente e induttori, allora le variabili di stato sono meno discontinue dell'ingresso

CONSEGUENZA

Quando si applica un ingresso che ha nell'istante iniziale una discontinuità di I^a^ specie
le variabili di stato si conservano, cioè non cambiano tra 0- e 0+ salvo per i casi in cui si abbiano condizioni "***patologiche***"

EQUAZIONI DI STATO

- SONO EQUAZIONI CHE CONTENGONO SOLO VARIABILI DI STATO E INGRESSI

$$\frac{d}{dt}\underline{x} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{B}u$$

o anche

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{B}u$$

dove

$\underline{x}$	Vettore di stato nx1
$\underline{\underline{A}}$	Matrice nxn
$\underline{B}$	Vettore nx1

- TUTTE LE ALTRE VARIABILI SI POSSONO TROVARE COME COMBINAZIONE LINEARE DEGLI INGRESSI E DELLE VARIABILI DI STATO

$$y = \underline{C}^T\,\underline{x} + Du$$

dove

y	Variabile di uscita
$\underline{C}$	Vettore nx1
D	Scalare

EQUAZIONI DI STATO

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{B}u$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \underline{\dot{x}}(t)dt = \underline{\underline{A}} \int_{0^-}^{0^+} \underline{x}(t)dt + \underline{B} \int_{0^-}^{0^+} u(t)dt \Rightarrow \underline{x}(0^+) - \underline{x}(0^-) = \underline{\underline{A}} \int_{0^-}^{0^+} \underline{x}(t)dt + \underline{B} \int_{0^-}^{0^+} u(t)dt$$

Caso a) L'ingresso non è impulsivo

$$\int_{0^-}^{0^+} \underline{x}(t)dt = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x}(0^+) = \underline{x}(0^-)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} u(t)dt = 0$$

Le variabili di stato sono continue

L'ingresso ha al più una discontinuità di I specie

Caso b) Ingresso impulsivo $E\delta(t)$

$$\int_{0^-}^{0^+} \underline{x}(t)dt = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x}(0^+) = \underline{x}(0^-) + \underline{B}E$$

$$\int_{0^-}^{0^+} u(t)dt = E$$

Le variabili di stato hanno al più una discontinuità di I specie

L'integrale dell'ingresso tra 0^- e 0^+ è l'area dell'impulso (E)

$$y = \underline{C}^T \underline{x} + Du \quad \rightarrow y(0^+) = \underline{C}^T \underline{x}(0^+) + Du(0^+)$$

$$\frac{dy}{dt} = \underline{C}^T \frac{d\underline{x}}{dt} + D\frac{du}{dt} = \underline{C}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{C}^T \underline{B}u + D\frac{du}{dt} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\frac{dy}{dt}\right|_{0_+} = \underline{C}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x}(0^+) + \underline{C}^T \underline{B}u(0^+) + D\left.\frac{du}{dt}\right|_{0_+}$$

LE CONDIZIONI IN 0^+ SI OTTENGONO DAL SISTEMA:

$$\begin{cases} \text{EQUAZIONI DI STATO} \\ \text{RELAZIONE I/O} \end{cases}$$

NELLE SITUAZIONI PATOLOGICHE LE VARIABILI DI STATO POSSONO ESSERE DISCONTINUE QUANTO GLI INGRESSI

METODO DI RISOLUZIONE

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\underline{x} = \underline{\underline{A}}\underline{x} + Bu & \text{Equazioni di stato} \\ y = \underline{C}^T \underline{x} + Du & \text{Equazione di uscita} \end{cases}$$

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots\dots a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y =$$

I/O

$$= b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{n-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots\dots b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

con m ≤ n

Noti:

Stato in 0- $\underline{x}(0^-)$

Ingresso $u(t) = f(t) \cdot \delta_{-1}(t)$

METODO DI RISOLUZIONE (Cnt)

Integriamo le equazioni di stato tra 0- e 0+ → si trova lo stato in 0+

Si calcolano le condizioni iniziali:

$$y(0^+); \left.\frac{dy}{dt}\right|_{0^+}; \left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{0^+} \cdots; \left.\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right|_{0^+}$$

$$y(0^+) = \underline{C}^T \cdot \underline{x}(0^+) + Du(0^+);$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{0^+} = \left[\underline{C}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} + \underline{C}^T \cdot \underline{B} \cdot u + D\frac{du}{dt}\right]_{0^+};$$

$$\left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{0^+} = \left[\underline{C}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} + \underline{C}^T \cdot \underline{B} \cdot \frac{du}{dt} + D\frac{d^2u}{dt^2}\right]_{0^+} =$$

$$= \underline{C}^T \cdot \underline{\underline{A}}\left[\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot u\right]_{0^+} + \left[\underline{C}^T \cdot \underline{B} \cdot \frac{du}{dt} + D\frac{d^2u}{dt^2}\right]_{0^+}; \qquad \text{...etc.}$$

METODO DI RISOLUZIONE (Cnt)

$$y(t) = y_{oa} + y_p \qquad t > 0$$

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \rightarrow \lambda_i \quad i = 1, \cdots, n$$

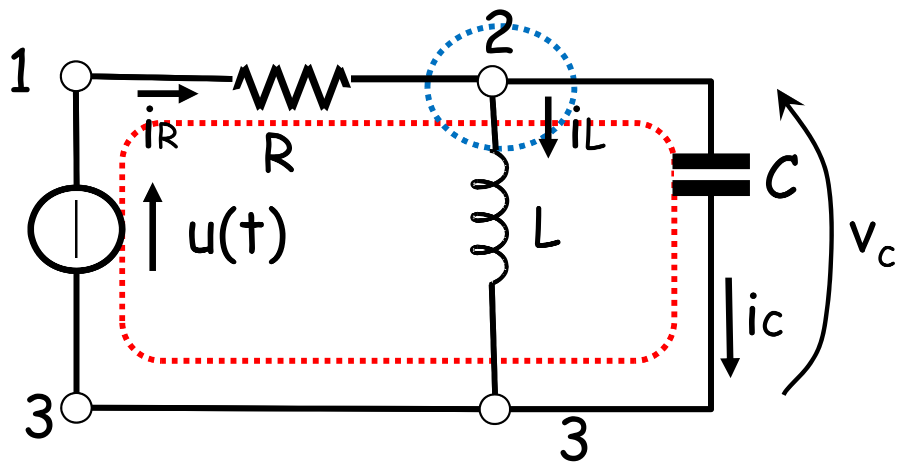
$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} + y_p(t)$$

$\Rightarrow$ Le A_i si determinano con le condizioni iniziali

$\Rightarrow$ La forma di $y_p(t)$ dipende da $u(t)$

$\Rightarrow$ La $y_p(t)$ deve soddisfare identicamente l'equazione differenziale per $t > 0$ e per una determinata $u(t)$

ESEMPIO 3 (circuito del secondo ordine)



$$\underline{x} = \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix}$$ vettore di stato

Variabile di uscita i_R
(N.B. non e' una variabile di stato)

$$\begin{cases} u = Ri_R + v_c \\ i_R = C\dfrac{dv_c}{dt} + i_L \\ v_c = L\dfrac{di_L}{dt} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = Ri_R + L\dfrac{di_L}{dt} \\ i_R = CL\dfrac{d^2 i_L}{dt^2} + i_L \end{cases}$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}\left[u - Ri_R\right]$$

$$\frac{du}{dt} = R\frac{di_R}{dt} + L\frac{d^2 i_L}{dt^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow L\frac{d^2 i_L}{dt^2} = \frac{du}{dt} - R\frac{di_R}{dt} \rightarrow$$

$$\rightarrow i_R = C\left[\frac{du}{dt} - R\frac{di_R}{dt}\right] + i_L \rightarrow \frac{di_R}{dt} = C\left[\frac{d^2 u}{dt^2} - R\frac{d^2 i_R}{dt^2}\right] + \frac{di_L}{dt}$$

ESEMPIO 3 (CNT)

$$\rightarrow \frac{di_R}{dt} = C\frac{d^2u}{dt^2} - RC\frac{d^2 i_R}{dt^2} + \frac{1}{L}u - \frac{R}{L}i_R \rightarrow$$

$$\rightarrow RC\frac{d^2 i_R}{dt^2} + \frac{di_R}{dt} + \frac{R}{L}i_R = C\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{L}u$$ RELAZIONE I/O

La presenza delle derivate dell'ingresso si verifica spesso quando l'uscita non e' una variabile di stato

---

IN GENERALE SI OTTIENE UNA RELAZIONE I/O DELTIPO:

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y =$$

$$= b_m\frac{d^m u}{dt^m} + b_{n-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + \ldots\ldots b_1\frac{du}{dt} + b_0 u$$

ESEMPIO 3 (CNT)

$$RC\frac{d^2 i_R}{dt^2}+\frac{di_R}{dt}+\frac{R}{L}i_R = C\frac{d^2 u}{dt^2}+\frac{1}{L}u$$ RELAZIONE I/O

$$RC\lambda^2+\lambda+\frac{R}{L}=0$$ EQUAZIONE CARATTERISTICA $\rightarrow$

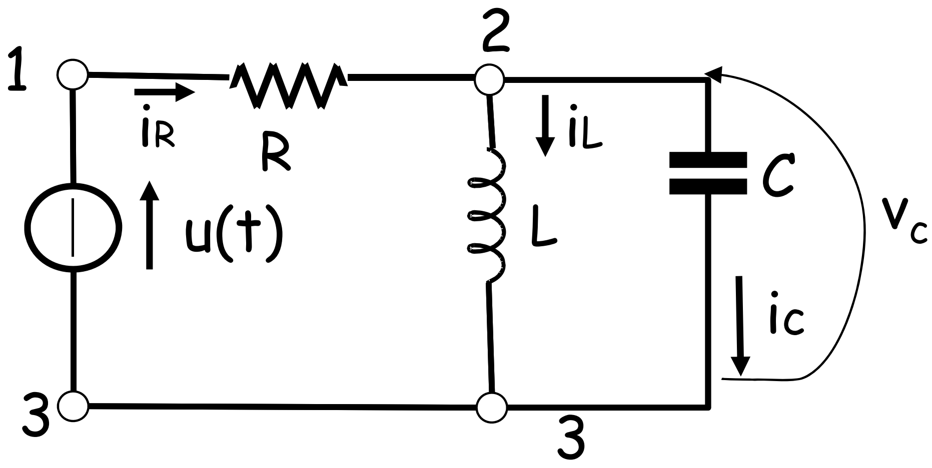
$$\lambda_{1,2}=\frac{-1\mp\sqrt{1-4\frac{R^2C}{L}}}{2RC}=\frac{-1\mp\sqrt{\Delta}}{2RC}$$

se $\Delta > 0$ $\quad \lambda_{1,2}$ reali

se $\Delta < 0$ $\quad \lambda_{1,2}$ complesse coniugate

$\Delta < 0 \Rightarrow R > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$ $\quad$ se R $\rightarrow \infty$ il circuito diventa un oscillatore

ESEMPIO 3 (CNT)



Ricaviamo le equazioni di stato

$$\begin{cases} u = Ri_R + v_c \\ i_R = C\dfrac{dv_c}{dt} + i_L \\ v_c = L\dfrac{di_L}{dt} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_R = -\dfrac{1}{R}v_c + \dfrac{1}{R}u \\ -\dfrac{1}{R}v_c + \dfrac{1}{R}u = C\dfrac{dv_c}{dt} + i_L \\ v_c = L\dfrac{di_L}{dt} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv_c}{dt} = -\dfrac{1}{RC}v_c - \dfrac{1}{C}i_L + \dfrac{1}{RC}u \\ \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{1}{L}v_c \end{cases}$$

<u>Equazioni di stato</u>

ESEMPIO 3 (CNT)

Ipotesi:

$$\begin{cases} \text{Radici complesse} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -\sigma + j\omega_0 \\ \lambda_2 = -\sigma - j\omega_0 \end{matrix} \quad \text{con } \sigma = \dfrac{1}{2RC} \text{ e } \omega_0 = \dfrac{1}{2RC}\sqrt{4\dfrac{R^2C}{L} - 1} \\ u(t) = E\delta_{-1}(t) \quad \text{GRADINO} \\ \text{Stato nullo in } t = 0^- \rightarrow \begin{cases} v_c(0^-) = 0 \\ i_L(0^-) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_c(0^+) = v_c(0-) = 0 \\ i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Inoltre:

$$i_{Rp}(t) = K \rightarrow \frac{R}{L}K = \frac{1}{L}E \rightarrow K = \frac{E}{R}$$

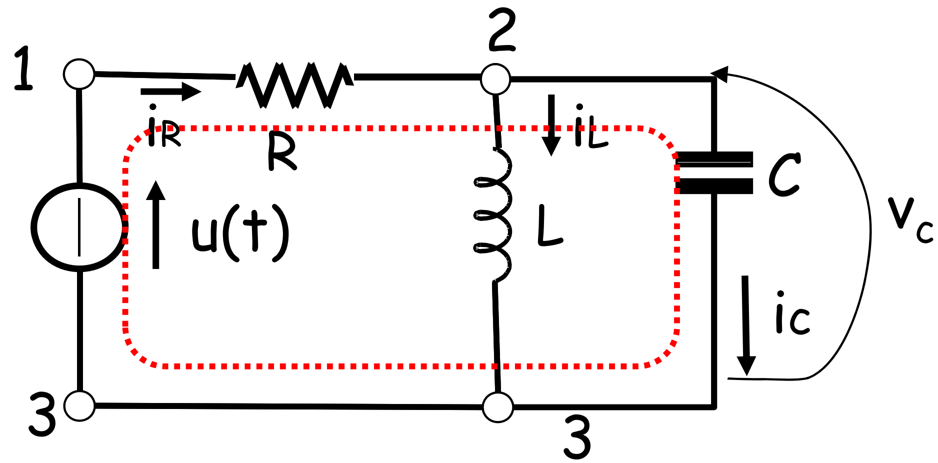
$$i_R(t) = e^{-\sigma t}\left[A_1 \cos\omega_0 t + A_2 \sin\omega_0 t\right] + \frac{E}{R}$$

Per determinare A_1 e A_2 dobbiamo conoscere le condizioni iniziali:

$$i_R(0^+) \qquad ; \qquad \left.\frac{di_R}{dt}\right|_{0^+}$$

ESEMPIO 3 (CNT)

$$v_c\left(0^+\right)=0; \quad i_L\left(0^+\right)=0$$



$$y(t)=\underline{C}^T\cdot\underline{x}+\underline{B}u$$

$$u=Ri_R+v_c \Rightarrow$$

$$i_R=-\frac{1}{R}v_c+\frac{1}{R}u \Rightarrow$$

$$i_R(0^+)=-\frac{1}{R}v_c(0^+)+\frac{1}{R}u(0^+)=\frac{E}{R}$$

L'ingresso presenta una discontinuità di prima specie passando da 0^- a 0^+

ESEMPIO 3 (CNT)

$$\frac{di_R}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{R}\frac{du}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{di_R}{dt} = -\frac{1}{R}\left[-\frac{1}{RC}v_c - \frac{1}{C}i_L + \frac{1}{RC}u\right] + \frac{1}{R}\frac{du}{dt}$$

$$\left.\frac{di_R}{dt}\right|_{0^+} = -\frac{1}{R}\left[-\frac{1}{RC}\underbrace{v_c(0^+)}_{=0} - \frac{1}{C}\underbrace{i_L(0^+)}_{=0} + \frac{1}{RC}u(0^+)\right] + \frac{1}{R}\underbrace{\left.\frac{du}{dt}\right|_{0^+}}_{=0} \Rightarrow$$

$$\left.\frac{di_R}{dt}\right|_{0^+} = -\frac{E}{R^2C} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} i_R(0^+) = \dfrac{E}{R} \\ \left.\dfrac{di_R}{dt}\right|_{0^+} = -\dfrac{E}{R^2C} \end{cases}$$

<u>Condizioni iniziali</u>

ESEMPIO 3 (CNT)

$$i_R(t) = e^{-\sigma t}\left[A_1 \cos\omega_0 t + A_2 \sin\omega_0 t\right] + \frac{E}{R}$$

$$i_R(0^+) = \frac{E}{R} = A_1 + \frac{E}{R} \Rightarrow A_1 = 0$$

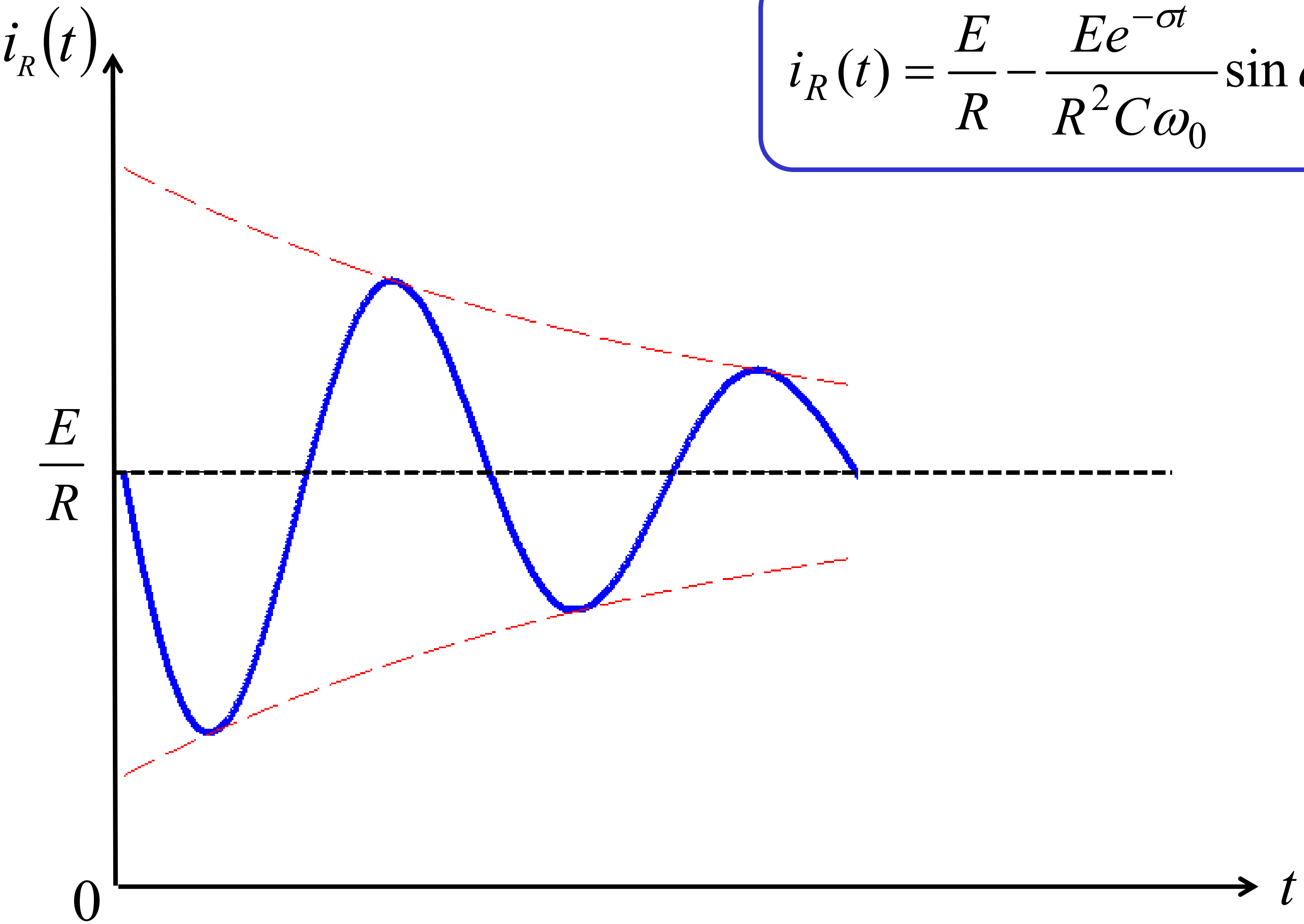
$$\frac{di_R}{dt} = -\sigma e^{-\sigma t}\left[A_1 \cos\omega_0 t + A_2 \sin\omega_0 t\right] + e^{-\sigma t}\left[-A_1\omega_0 \sin\omega_0 t + A_2\omega_0 \cos\omega_0 t\right]$$

$$\left.\frac{di_R}{dt}\right|_{0^+} = -\frac{E}{R^2C} = A_2\omega_0 \Rightarrow A_2 = -\frac{E}{\omega_0 R^2 C} \Rightarrow$$

$$i_R(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{\omega_0 R^2 C} e^{-\sigma t} \sin\omega_0 t$$

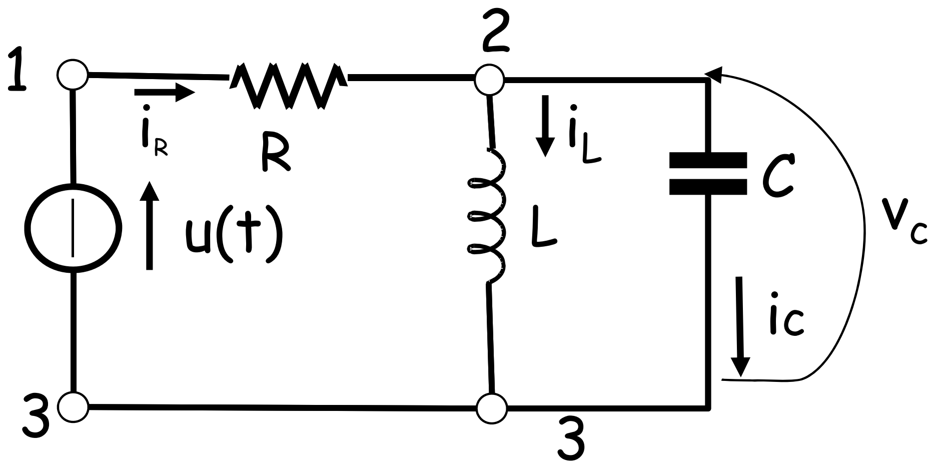
ESEMPIO 3 (CNT)

$$i_R(t) = \frac{E}{R} - \frac{Ee^{-\sigma t}}{R^2 C \omega_0} \sin \omega_0 t$$



QUANTO FATTO SINO AD ORA SI PUO' METTERE IN FORMA SISTEMATICA

ESEMPIO 3 (CNT)



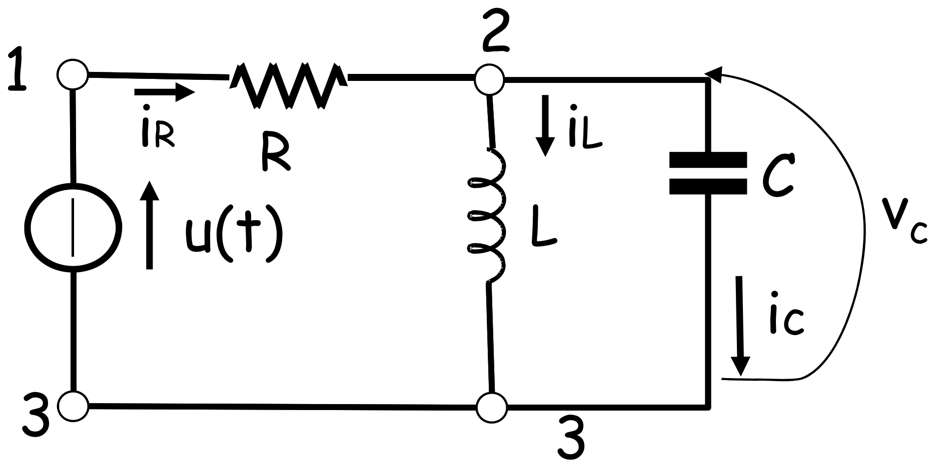
stato in 0^- : $v(0^-) = 0;\ i(0^-) = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = -\dfrac{1}{RC} v_C - \dfrac{1}{C} i_L + \dfrac{1}{RC} u \\ \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{1}{L} v_C \end{cases}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} \text{Vettore di Stato}$$

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{RC} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} u \rightarrow \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}u$$

ESEMPIO 3 (CNT)



Supponiamo di voler trovare i_R

$$y = \underline{C}^T \underline{x} + Du$$

$$i_R = \frac{u - v_C}{R} \rightarrow i_R = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \frac{1}{R} u$$

$$i_R(0^+) = \frac{u(0^+) - v(0^+)}{R}$$

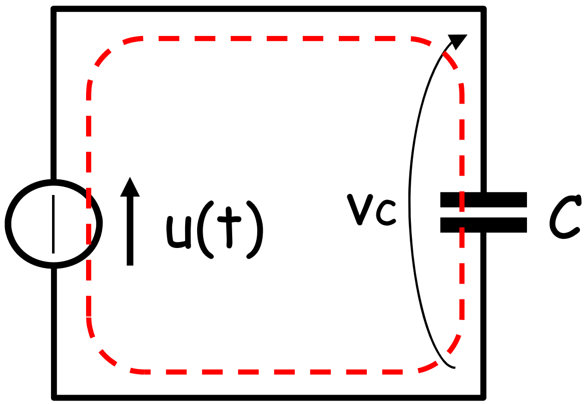
Non ci sono condizioni patologiche, quindi lo stato tra 0- e 0+ si conserva

$$v(0^+) = v(0^-) = 0 \qquad i(0^+) = i(0^-) = 0$$

$$i_R(0^+) = \frac{E}{R}$$

$$\left.\frac{di_R}{dt}\right|_{0^+} = \frac{1}{R}\left.\frac{du}{dt}\right|_{0^+} - \frac{1}{R}\left.\frac{dv}{dt}\right|_{0^+} = 0 - \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{RC} E = -\frac{E}{R^2 C}$$

CONDIZIONI PATOLOGICHE



MAGLIA C-E

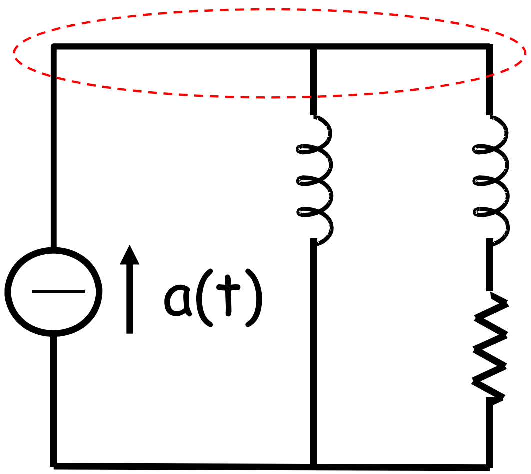
$$u(t) = \delta_{-1}(t) \ \text{GRADINO}$$

$$v_c(0^-) = 0$$

$$v_c(0^+) = E$$

$$i(t) = C\frac{dv_c}{dt} = CE\delta(t)$$

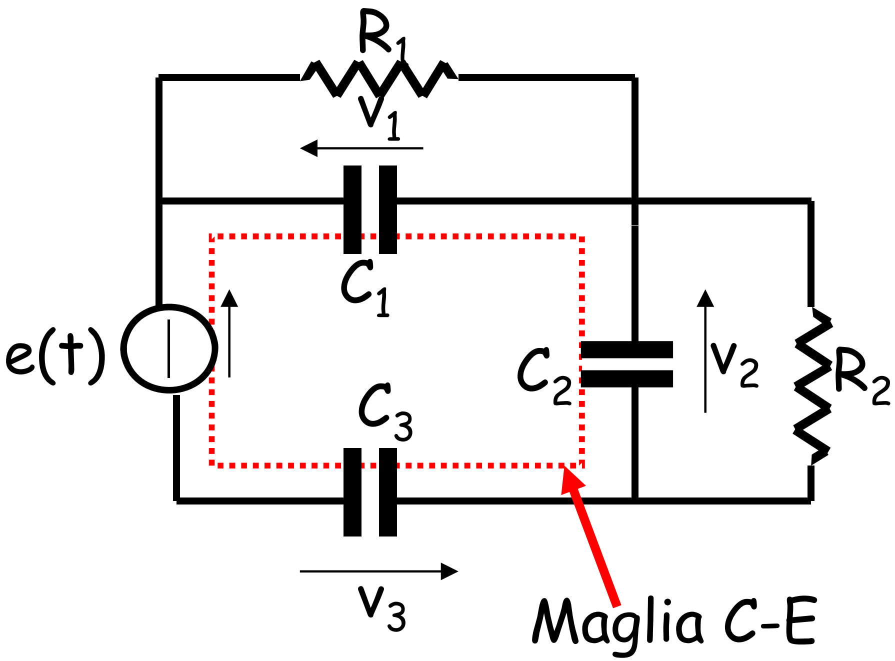
E' PRESENTE UN IMPULSO DI CORRENTE



COCICLO L-A

SONO PRESENTI IMPULSI DI TENSIONE

ESEMPIO 4



Noto : stato in 0^- : nullo

$e(t) = f(t) \cdot \delta_{-1}(t)$ con $f(0^+) \neq 0$

$$\begin{cases} e = v_1 + v_2 + v_3 \\ C_1 \dfrac{dv_1}{dt} + \dfrac{v_1}{R_1} = C_3 \dfrac{dv_3}{dt} \\ C_2 \dfrac{dv_2}{dt} + \dfrac{v_2}{R_2} = C_3 \dfrac{dv_3}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (C_1 + C_3)\dfrac{dv_1}{dt} + C_3 \dfrac{dv_2}{dt} + \dfrac{v_1}{R_1} = C_3 \dfrac{de}{dt} \\ C_3 \dfrac{dv_1}{dt} + (C_2 + C_3)\dfrac{dv_2}{dt} + \dfrac{v_2}{R_2} = C_3 \dfrac{de}{dt} \end{cases}$$

Eq. di stato

ESEMPIO 4 (Cnt)

Integriamole tra 0 - e 0 +

$$\begin{cases} (C_1 + C_3)v_1(0^+) + C_3 v_2(0^+) = C_3 e(0^+) \\ C_3 v_1(0^+) + (C_2 + C_3)v_2(0^+) = C_3 e(0^+) \end{cases}$$

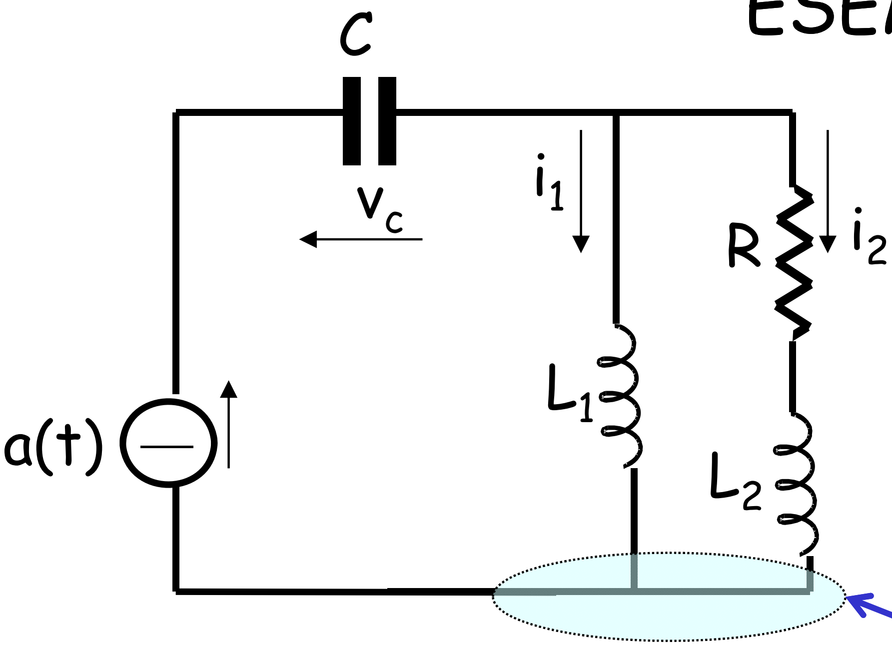
$$\begin{cases} v_1(0^+) = \dfrac{C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} e(0^+) \\ v_2(0^+) = \dfrac{C_1 C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} e(0^+) \end{cases}$$ lo stato non si conserva

Ricaviamo la relazione I/O

$$\frac{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}{C_3 (C_2 + C_3)} \frac{d^2 v_1}{dt^2} + \left[\frac{1}{R_1 C_3} + \frac{1}{R_2 C_3} \frac{C_1 + C_3}{C_2 + C_3} \right] \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{R_1 R_2 C_3 (C_2 + C_3)} v_1 =$$

$$\frac{1}{R_2 (C_2 + C_3)} \frac{de}{dt} + \frac{C_2}{C_2 + C_3} \frac{d^2 e}{dt^2} \qquad \mathrm{n = m}$$

ESEMPIO 5



Co-ciclo L-A

Noto : stato in 0^- : nullo

$a(t) = f(t)\cdot\delta_{-1}(t)$ con $f(0^+) \neq 0$

$a(t) = i_1 + i_2$

Le variabili di stato effettive sono due

$$\begin{cases} a(t) = i_1 + i_2 \\ L_1 \dfrac{di_1}{dt} = Ri_2 + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \\ a(t) = C\dfrac{dv_c}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di_1}{dt} = \dfrac{da}{dt} - \dfrac{di_2}{dt} \\ L_1 \dfrac{di_1}{dt} = Ri_2 + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \\ a(t) = C\dfrac{dv_c}{dt} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} L_1 \dfrac{da}{dt} - L_1 \dfrac{di_2}{dt} = Ri_2 + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \\ a(t) = C\dfrac{dv_c}{dt} \end{cases} \Rightarrow \otimes \begin{cases} (L_1 + L_1)\dfrac{di_2}{dt} + Ri_2 = L_1 \dfrac{da}{dt} \\ \dfrac{dv_c}{dt} = \dfrac{1}{C} a(t) \end{cases}$$

<u>Equazioni di stato</u>

ESEMPIO 5 (Cnt)

Condizioni in 0+ : dalle $\otimes$ integrando fra 0 - e 0+ :

$$\begin{cases} (L_1 + L_2) i_2(0^+) = L_1 a(0^+) = L_1 f(0^+) \\ 0 = C v_c(0^+) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_2(0^+) = \dfrac{L_1}{L_1 + L_2} f(0^+) \\ v_c(0^+) = 0 \end{cases}$$

$$i_1(0^+) = a(0^+) - i_2(0^+) = f(0^+)\left[1 - \frac{L_1}{L_1 + L_2}\right] = \frac{L_2}{L_1 + L_2} f(0^+)$$

ESEMPIO 5 (Cnt)

Ingresso a gradino: $a(t) = A\delta_{-1}(t)$ dalle $\otimes$ si ha:

$$(L_1 + L_2)\frac{di_2}{dt} + Ri_2 = 0 \Rightarrow i_{2p} = 0$$

$$(L_1 + L_2)\lambda + R = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{R}{L_1 + L_2}$$ freq. libera

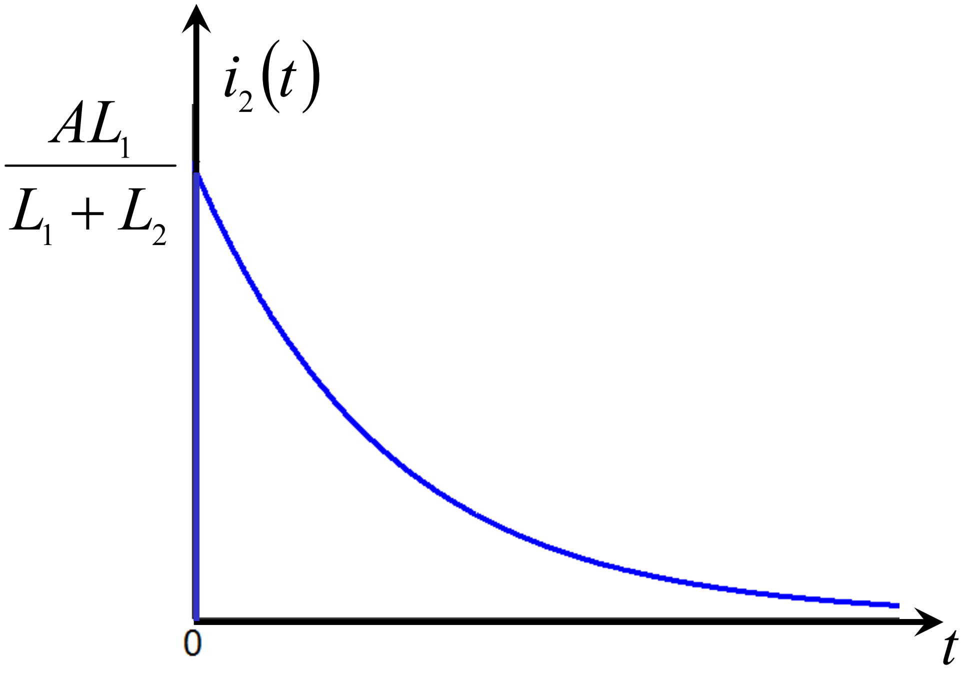
$$i_2(t) = Ke^{\lambda t}$$

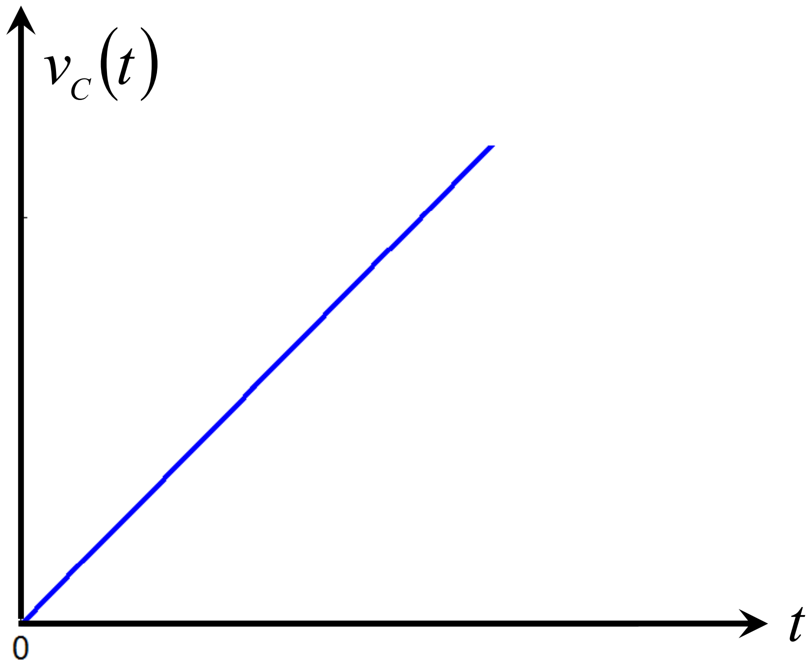
$$i_2(0^+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2}A = K \Rightarrow i_2(t) = \frac{L_1}{L_1 + L_2}Ae^{-\frac{R}{L_1+L_2}t} \qquad t > 0$$

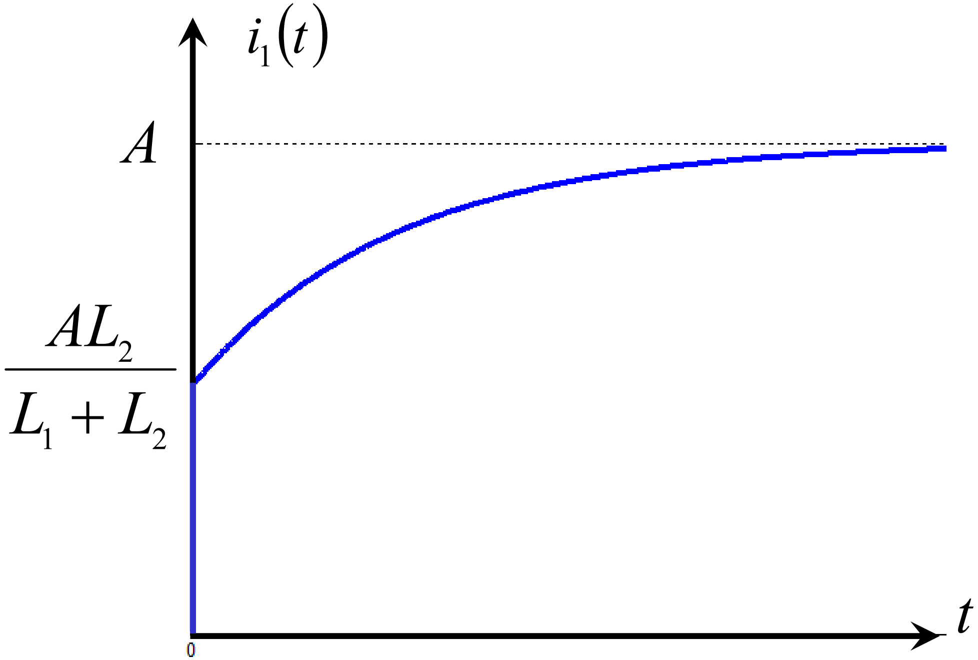
$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int_{0^+}^{t} A \cdot d\tau + v_c(0^+) = \frac{A}{C}t \qquad t > 0$$

$$i_1(t) = a(t) - i_2(t) = A\left[1 - \frac{L_1}{L_1 + L_2}Ae^{-\frac{R}{L_1+L_2}t}\right] \qquad t > 0$$

ESEMPIO 5 (Cnt)

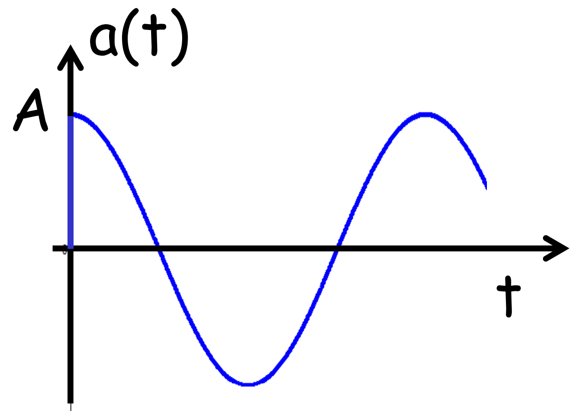






ESEMPIO 5 (Cnt)

Ingresso cosinusoidale: $a(t) = A\cos(\omega_0 t)\cdot\delta_{-1}(t)$



$$\lambda = -\frac{R}{L_1 + L_2}$$

$$i_{2p}(t) = H\cos\omega_0 t + K\sin\omega_0 t$$

$$\frac{di_{2p}}{dt} = \omega_0\left[-H\sin\omega_0 t + K\cos\omega_0 t\right]$$

$$(L_1 + L_2)\frac{di_2}{dt} + Ri_2 = L_1\frac{da}{dt}$$

$$(L_1 + L_2)\omega_0\left[-H\sin\omega_0 t + K\cos\omega_0 t\right] + R\left[H\cos\omega_0 t + K\sin\omega_0 t\right] =$$
$$= L_1 A(-\omega_0\sin\omega_0 t)$$

eguagliando i termini in seno e coseno:

$$\begin{cases} -\omega_0(L_1 + L_2)H + RK = -\omega_0 L_1 A \\ \omega_0(L_1 + L_2)K + RH = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad H = \frac{-\omega_0(L_1 + L_2)K}{R}$$

ESEMPIO 5 (Cnt)

Eguagliando i coefficienti dei termini in seno e coseno:

$$\begin{cases} -\omega_0(L_1 + L_2)H + RK = -\omega_0 L_1 A \\ \omega_0(L_1 + L_2)K + RH = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad H = \frac{-\omega_0(L_1 + L_2)K}{R}$$

$$\left[\frac{\omega_0^{\ 2}(L_1 + L_2)^2}{R} + R\right]K = -\omega_0 L_1 A \Rightarrow \begin{cases} K = \dfrac{-\omega_0 L_1 AR}{R^2 + \omega_0^{\ 2}(L_1 + L_2)^2} \\ H = \dfrac{\omega_0^{\ 2} L_1 (L_1 + L_2) A}{R^2 + \omega_0^{\ 2}(L_1 + L_2)^2} \end{cases}$$

$$i_{2p} = \frac{\omega_0 L_1 A}{R^2 + \omega_0^{\ 2}(L_1 + L_2)^2}\left[\omega_0(L_1 + L_2)\cos\omega_0 t - R\sin\omega_0 t\right]$$

$$i_2(t) = Ne^{\lambda t} + i_{2p} = Ne^{\lambda t} + \frac{\omega_0 L_1 A}{R^2 + \omega_0^{\ 2}(L_1 + L_2)^2}\left[\omega_0(L_1 + L_2)\cos\omega_0 t - R\sin\omega_0 t\right]$$

ESEMPIO 5 (Cnt)

$$i_2 = Ne^{\lambda t} + \frac{\omega_0 L_1 A}{R^2 + \omega_0^{\ 2}(L_1 + L_2)^2}\left[\omega_0 (L_1 + L_2)\cos\omega_0 t - R\sin\omega_0 t\right]$$

$$i_2(0^+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} f(0^+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} A$$

$$i_2(0^+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} A = N + i_{2p}(0^+) = N + \frac{\omega_0 L_1 A}{R^2 + \omega_0^{\ 2}(L_1 + L_2)^2}\left[\omega_0 (L_1 + L_2)\right]$$

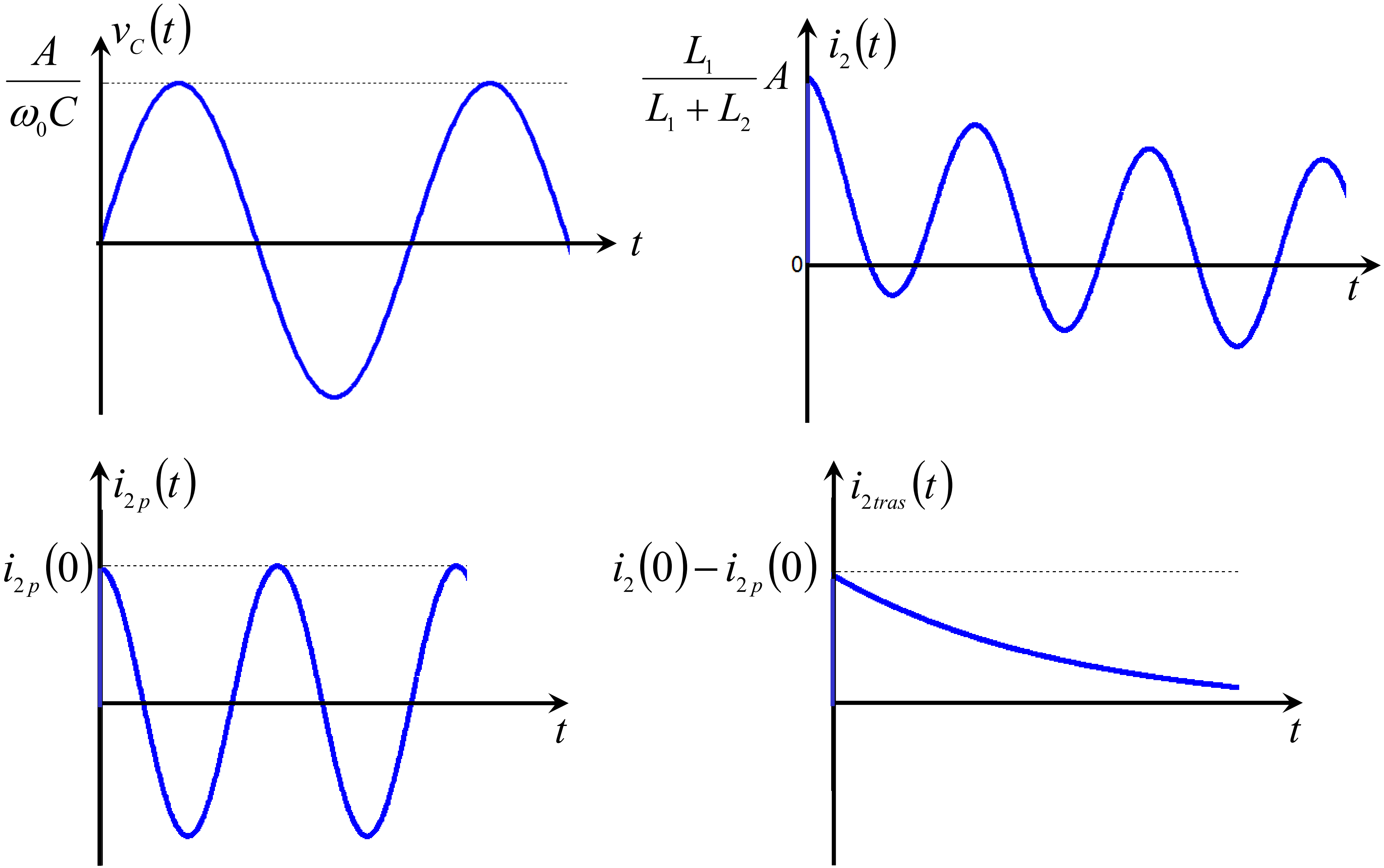
$$\Rightarrow N = \frac{L_1}{(L_1 + L_2)} A - \frac{\omega_0 L_1 A}{R^2 + \omega_0^{\ 2}(L_1 + L_2)^2}\left[\omega_0 (L_1 + L_2)\right]$$

$$i_2(t) = A\left[\frac{L_1}{(L_1 + L_2)} - \frac{\omega_0^{\ 2} L_1 (L_1 + L_2)}{R^2 + \omega_0^{\ 2}(L_1 + L_2)^2}\right] e^{\lambda t} +$$

$$+ A\frac{\omega_0 L_1}{R^2 + \omega_0^{\ 2}(L_1 + L_2)^2}\left[\omega_0 (L_1 + L_2)\cos\omega_0 t - R\sin\omega_0 t\right]$$

$$v_c = v_c(0^+) + \frac{1}{C}\int_{0^+}^{t} a(\tau)d\tau = \frac{1}{C}\int_{0^+}^{t} A\cos(\omega_0 \tau)d\tau = \frac{1}{\omega_0 C} A\sin(\omega_0 t)$$

ESEMPIO 5 (Cnt)



Per t grande i_2 coincide con $i_{2p} \Rightarrow$ regime sinusoidale

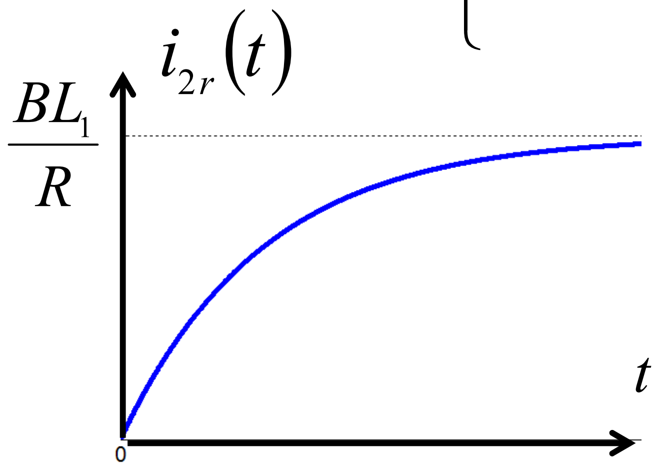
ESEMPIO 5 (Cnt)

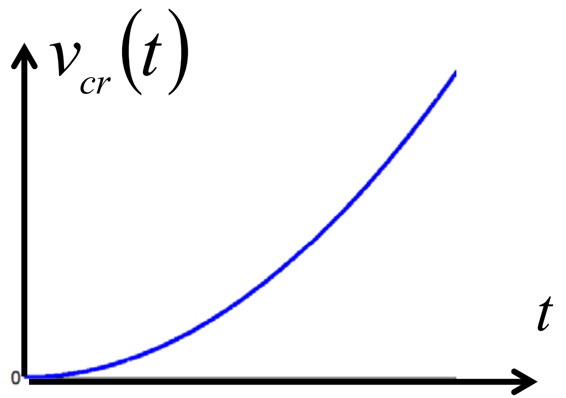
Ingresso a rampa : $a(t) = Bt\delta_{-1}(t)$

La risposta alla rampa è l'integrale della risposta al gradino :

$$Gradino : A\delta_{-1}(t) \Rightarrow \begin{cases} i_{2g} = \dfrac{AL_1 e^{-\frac{R}{L_1+L_2}t}}{L_1 + L_2} \\ v_{cg} = \dfrac{A}{C}t \end{cases} \Rightarrow \delta_{-1}(t) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{i_{2g}}{A} = \dfrac{L_1 e^{-\frac{R}{L_1+L_2}t}}{L_1 + L_2} \\ \dfrac{v_{cg}}{A} = \dfrac{1}{C}t \end{cases}$$

$$Rampa : Bt\delta_{-1}(t) \Rightarrow \begin{cases} i_{2r} = \dfrac{BL_1}{L_1 + L_2}\displaystyle\int_0^t e^{-\frac{R}{L_1+L_2}\tau} d\tau = \dfrac{BL_1}{L_1 + L_2}\left(-\dfrac{L_1 + L_2}{R}\right)\left[e^{\lambda t} - 1\right] \\ v_{cr} = \dfrac{B}{C}\displaystyle\int_0^t \tau \cdot d\tau = \dfrac{1}{2}\dfrac{B}{C}t^2 \end{cases}$$



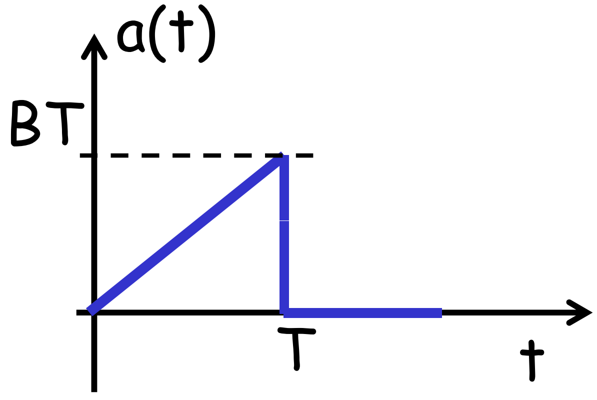


ESEMPIO 5 (Cnt)

Ingresso Triangolare:

$$a(t) = \begin{cases} Bt\delta_{-1}(t) & \text{per } t < T \\ 0 & \text{per } t > T \end{cases}$$

$$a(t) = Bt\delta_{-1}(t) - B(t-T)\delta_{-1}(t-T) - BT\delta_{-1}(t-T)$$



$$Gradino : \delta_{-1}(t) \Rightarrow i_{2g} = \frac{L_1}{L_1 + L_2} e^{-\frac{R}{L_1+L_2}t} \delta_{-1}(t)$$

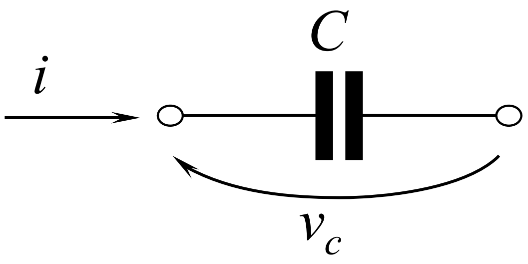
$$Rampa : t\delta_{-1}(t) \Rightarrow i_{2r} = \frac{L_1}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L_1+L_2}t}\right]\delta_{-1}(t)$$

$$\Downarrow$$

$$i_2 = Bi_{2r} - Bi_{2r}(t-T) - BTi_{2g}(t-T)$$

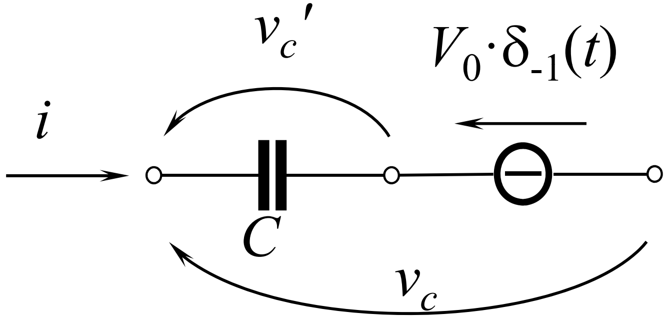
MEMORIZZAZIONE DELLO STATO INIZIALE

SE NON SI E' NELLO STATO ZERO NON SI PUO' PARLARE DI IMPEDENZA DI UN COMPONENTE



$$v_c(t) = \int_0^t \frac{1}{C} i(\tau)\, d\tau + \text{cost} \qquad v_c(t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i\, d\tau + V_0 = \frac{1}{C} \cdot q\left(t \geq 0^-\right) + V_0$$



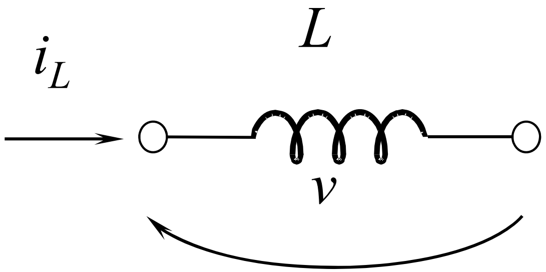
$$v_c'\left(0^-\right) = 0 \quad i(t) = C\frac{dv_c'}{dt}$$

$$v_c(t) = v_c'(t) + V_0$$

Lo stato del capacitore può essere "memorizzato" mediante un generatore di tensione

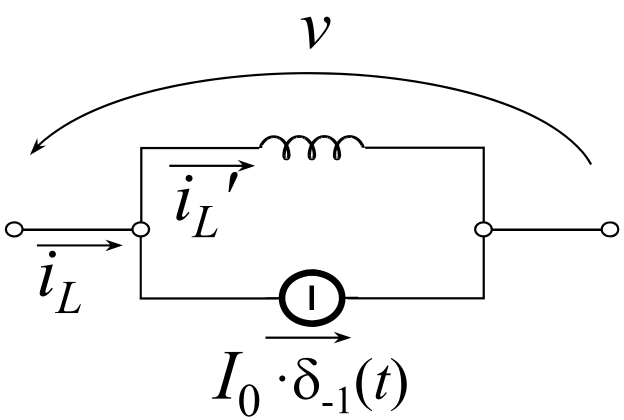
MEMORIZZAZIONE DELLO STATO INIZIALE

SE NON SI E' NELLO STATO ZERO NON SI PUO' PARLARE DI IMPEDENZA DI UN COMPONENTE



$$i_L(t) = \int_0^t \frac{1}{L} v(\tau)\, d\tau + \mathrm{cost} \qquad i_L(t) = \frac{\varphi(t)}{L}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{0^-}^{t} v\, d\tau + I_0 = \frac{1}{L}\cdot\varphi\left(t \geq 0^-\right) + I_0$$

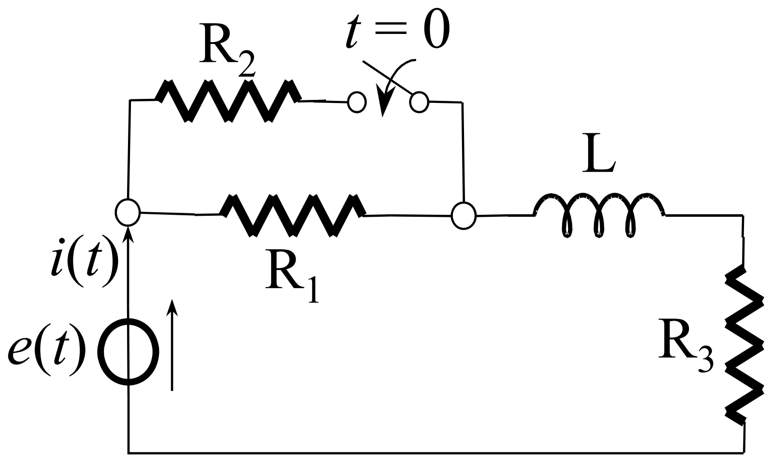


$$i_L'\left(0^-\right) = 0 \qquad v(t) = L\frac{di_L'}{dt}$$

$$i_L(t) = i_L'(t) + I_0$$

Lo stato dell'induttore può essere "memorizzato" mediante un generatore di corrente

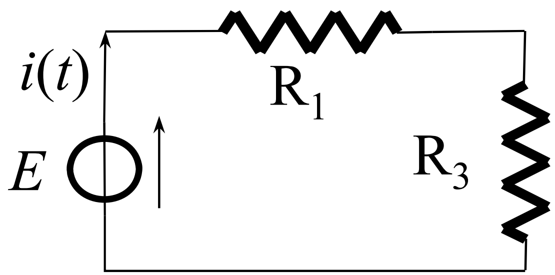
ESEMPIO



$e(t) = E = 10$ V
Per $t < 0$ il circuito è a regime

Determinare $i\ (t)$ per $t > 0$
$R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $L = 1$ H

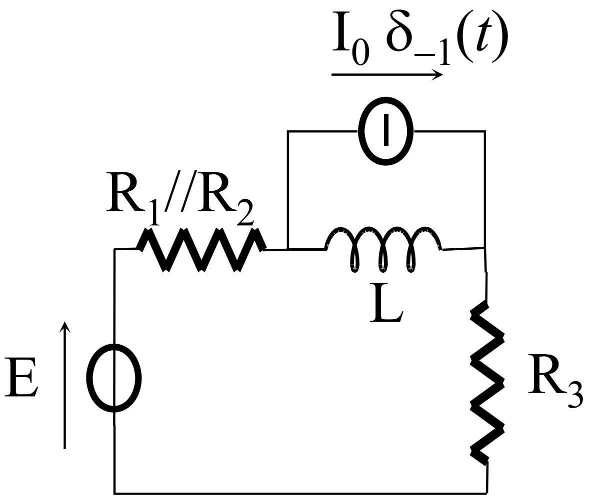
$t < 0$ il circuito è a regime e l'induttore si comporta come un cto-cto

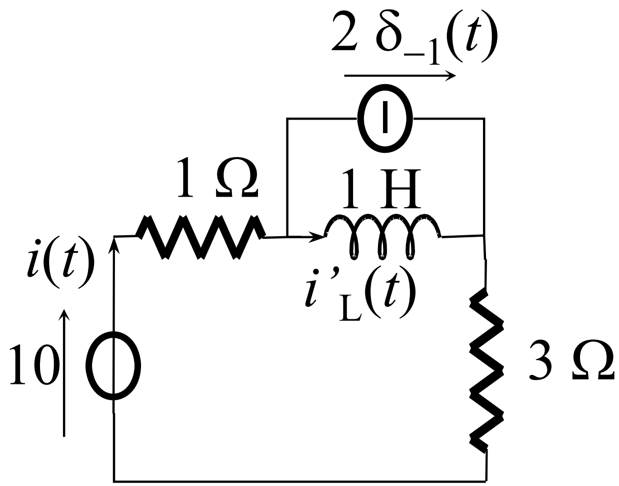


$$i(t) = I_0 = \frac{E}{R_1 + R_3} = \frac{10}{5} = 2\ A$$

$$i_L(0^-) = I_0$$

$t > 0$ chiude il tasto e il circuito scaricato diventa:





$$i(t) = i'_L(t) + 2$$
$$i(0^+) = i'_L(0^+) + 2$$
$$i(0^+) = 2$$

$$10 = 4 \cdot i(t) + 1 \cdot \frac{d[i(t) - 2]}{dt} \quad \Rightarrow \quad 10 = 4 \cdot i(t) + \frac{di}{dt}$$

$$\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -4$$

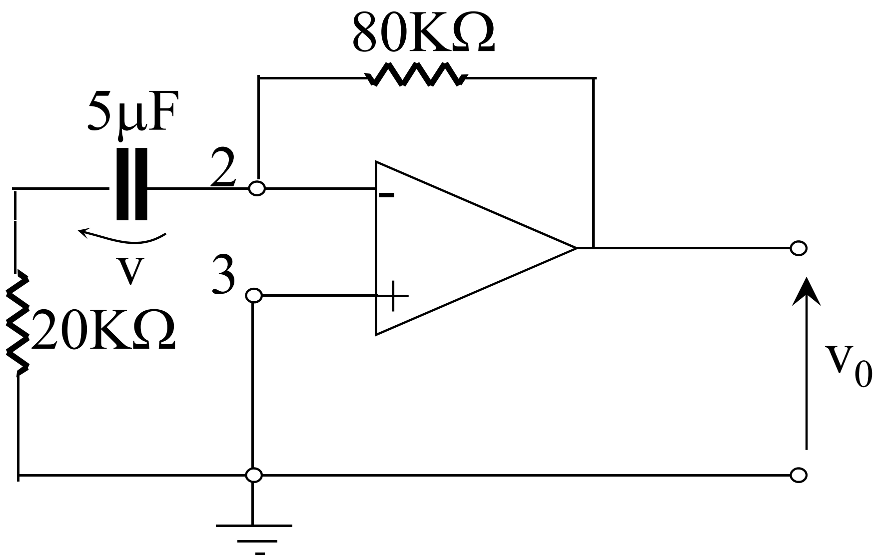
$$i(t) = A \cdot e^{-4t} + I_p$$

$$i_p = K \quad \Rightarrow \quad 10 = 4 \cdot K \quad \Rightarrow \quad i_p = 10/4 \quad \Rightarrow \quad i(t) = A \cdot e^{-4t} + 10/4$$

$$i(0^+) = 2 = A + 10/4 \quad \Rightarrow \quad A = -1/2$$

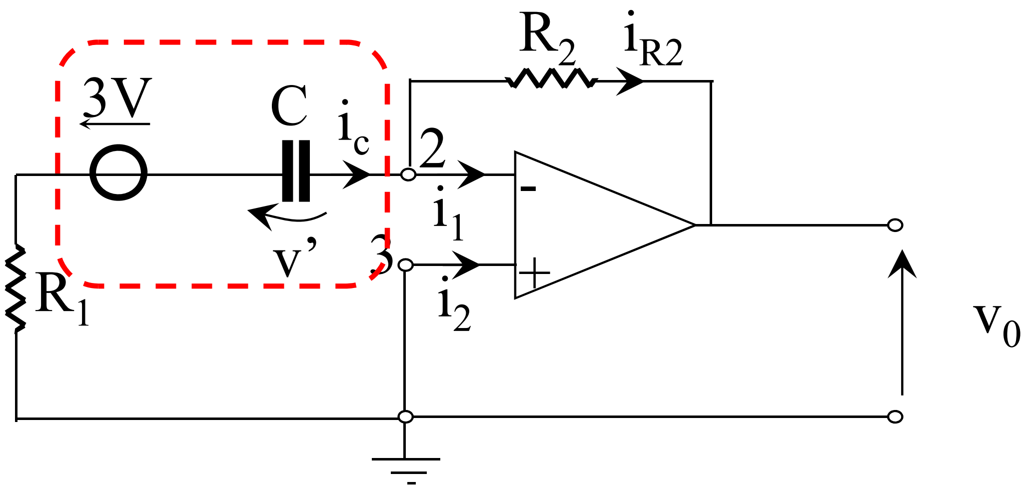
$$\boxed{i(t) = -0{,}5 \cdot e^{-4t} + 2{,}5}$$

ESEMPIO



Sapendo che per $t=0^-$ la tensione del condensatore è $v(0^-)=3V$, determinare $v_o(t)$ per $t>0$.

Scarichiamo il circuito



$$v_2 = v_3$$

$$i_1 = 0; \quad i_2 = 0 \Rightarrow i_{R2} = i_c$$

$$i_c = C\frac{dv'}{dt}$$

$$v_0 + R_2 i_{R2} = 0$$

$$v' + 3 + R_1 C\frac{dv'}{dt} = 0$$

$$v_0 + R_2 i_{R2} = 0 \Rightarrow v_0 + R_2 C \frac{dv'}{dt} = 0 \Rightarrow v_0 = -R_2 C \frac{dv'}{dt} \Rightarrow \frac{dv'}{dt} = -\frac{1}{R_2 C} v_0$$

$$v' + 3 + R_1 C \frac{dv'}{dt} = 0 \Rightarrow v' + 3 + R_1 C \left(-\frac{1}{R_2 C} v_0 \right) = 0 \Rightarrow v' + 3 - \frac{R_1}{R_2} v_0 = 0 \qquad (*)$$

derivando

$$\frac{dv'}{dt} + 0 - \frac{R_1}{R_2} \frac{dv_0}{dt} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{R_2 C} v_0 - \frac{R_1}{R_2} \frac{dv_0}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dv_0}{dt} + \frac{1}{R_2 C} \cdot \frac{R_2}{R_1} v_0 = 0$$

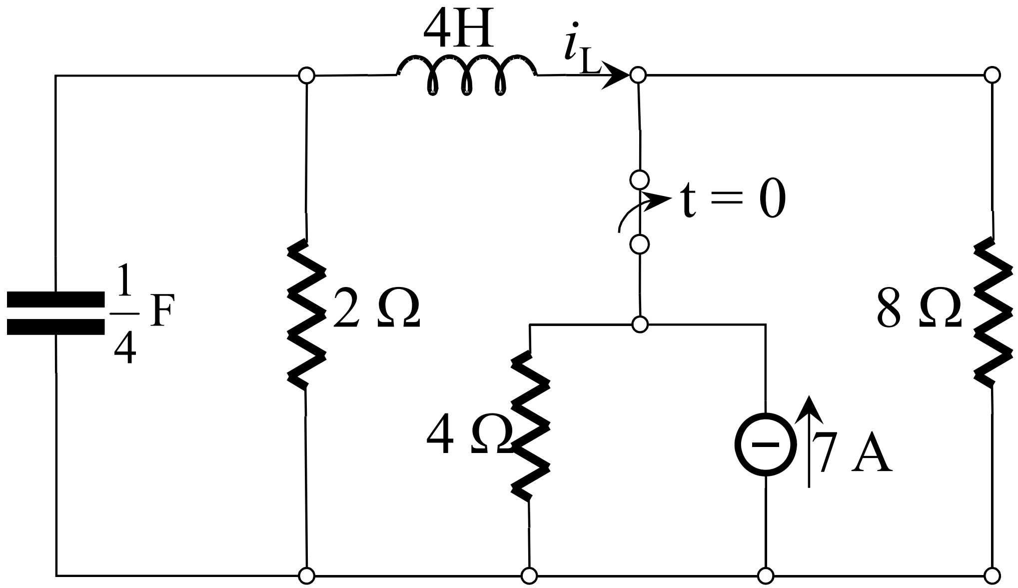
$$\frac{dv_0}{dt} + \frac{1}{R_1 C} v_0 = 0 \qquad \text{relazione I/0}$$

dalla $(*) \Rightarrow v_0 = +\frac{R_2}{R_1}(v' + 3) \Rightarrow v_0(0^+) = +3\frac{R_2}{R_1} = +12$

$$\lambda = -\frac{1}{R_1 C} = -10$$

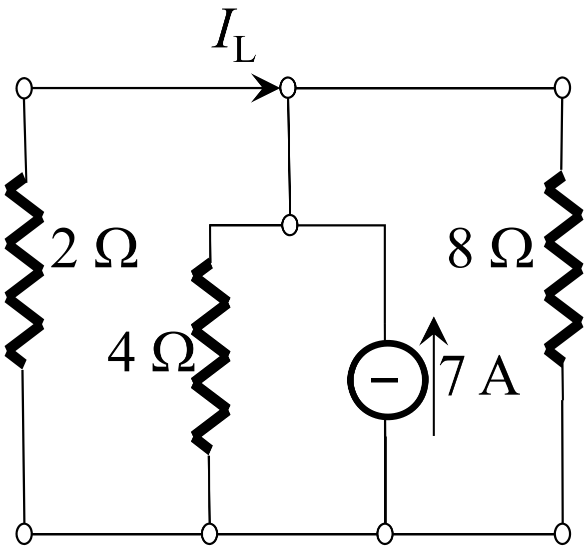
$$v_0(t) = Ae^{\lambda t} \Rightarrow v_0(0^+) = +3\frac{R_2}{R_1} = A \Rightarrow \boxed{v_0(t) = +3\frac{R_2}{R_1} e^{-\frac{1}{R_1 C}t} = +12 e^{-10t} \delta_{-1}(t)}$$

ESEMPIO



Dato il circuito in figura calcolare $i_L(t)$ per $t>0$
Assumere il circuito a regime per $t = <0$

Per t < **0** il circuito è in regime stazionario a causa del generatore di corrente costante

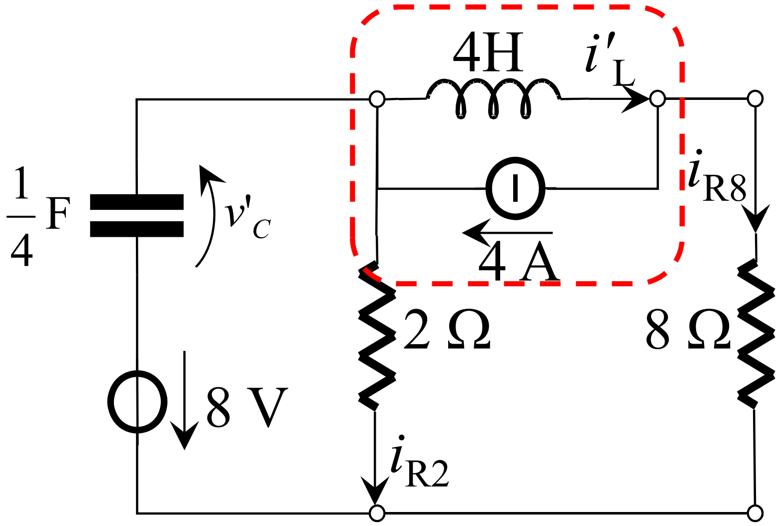


Per calcolare $i_L(0^-)$ e $v_C(0^-)$ posso applicare il partitore resistivo di corrente

$$I_L = -7 \cdot \frac{1/2}{1/2 + 1/4 + 1/8} = -4 \;\Rightarrow\; i_L(0^-) = -4$$

$$V_{AB} = 8 \;\Rightarrow\; v_C(0^-) = 8$$

Per $t>0$ il circuito scaricato diventa: $[\ v'_C(0^-)=0 \quad ; \quad i'_L(0^-)=0\ ]$



Scriviamo le eq.ni alle maglie e ai nodi:

$$v'_C - 8 = 2\cdot i_{R2}$$

$$C\frac{dv'_C}{dt} + i_{R2} + i'_L = 4 \qquad (*)$$

$$i_{R8} - i'_L + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{R8} = i'_L - 4$$

$$v'_C - 8 = L\frac{di'_L}{dt} + 8\cdot(i'_L - 4)$$

$$v'_C = 8 + L\cdot\frac{di'_L}{dt} + 8i'_L - 32 \quad \Rightarrow \quad v'_C = 4\cdot\frac{di'_L}{dt} + 8i'_L - 24 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dv'_C}{dt} = 4\frac{d^2 i'_L}{dt^2} + 8\frac{di'_L}{dt}$$

$$i_{R2} = \frac{v'_C}{2} - 8 = 2\cdot\frac{di'_L}{dt} + 4i'_L - 12 - 8 = 2\cdot\frac{di'_L}{dt} + 4i'_L - 20$$

Sostituendo nella (*)

$$\frac{d^2 i'_L}{dt^2} + 4\frac{di'_L}{dt} + 5i'_L = 20$$

$$\frac{d^2 i'_L}{dt^2}+4\frac{di'_L}{dt}+5i'_L=20 \qquad \lambda^2+4\lambda+5=0 \qquad \lambda_{1,2}=-2\mp\sqrt{4-5}=-2\mp j \begin{cases}\lambda_1=-2-j\\ \lambda_2=-2+j\end{cases}$$

$$i'_L(t)=e^{-2t}(A\cos t+B\sin t)+i'_{Lp}$$

$i'_{Lp}=K$ Integrale particolare costante. Sostituendo nell'eq. diff.le: $5\cdot K=20 \Rightarrow K=4$

Stato : $\begin{cases} i'_L(0^-)=0 \rightarrow i'_L(0^+)=0 \\ v'_C(0^-)=0 \rightarrow v'_C(0^+)=0 \end{cases}$ (non ci sono condizioni patologiche e ingresso con discontinuità di I specie)

Ricaviamo il valore della derivata di i'_{L} in 0^+:

$$v'_C=4\cdot\frac{di'_L}{dt}+8i'_L-24$$ calcolata in 0^+: $0=4\left.\frac{di'_L}{dt}\right|_{0^+}-24 \quad\Rightarrow\quad \left.\frac{di'_L}{dt}\right|_{0^+}=6$

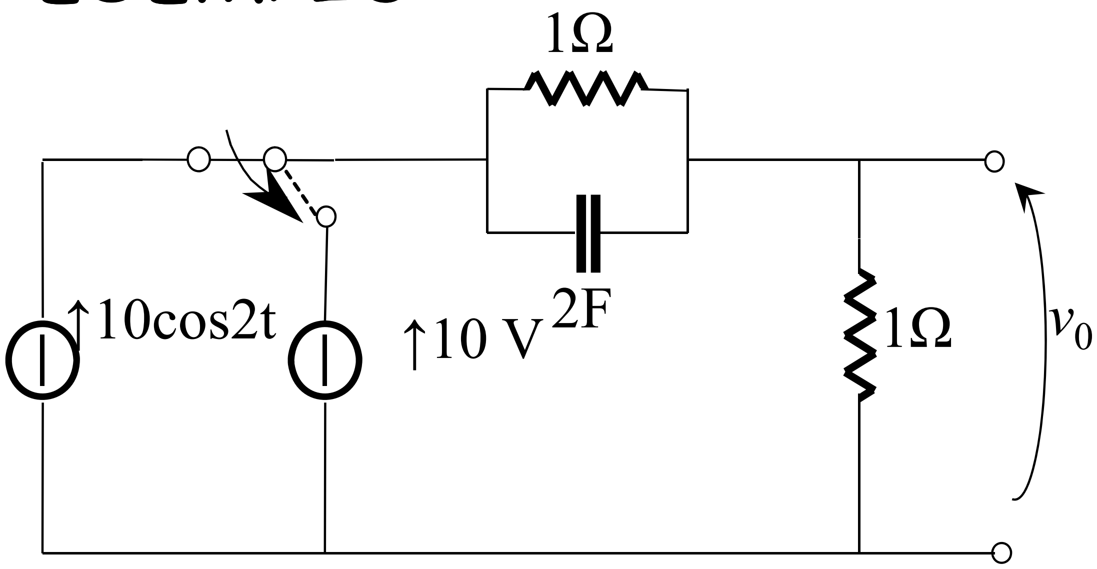
$$\frac{di'_L}{dt}=-2e^{-2t}(A\cos t+B\sin t)+e^{-2t}(-A\sin t+B\cos t)$$ particolarizzando in $t=0^+$:

$$\begin{cases} i'_L(0^+)=A+4=0 \\ \left.\frac{di'_L}{dt}\right|_{0^+}=-2A+B=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-4 \\ B=-2 \end{cases} \qquad i'_L=e^{-2t}(-4\cos t-2\sin t)+4$$

$$i_L(t)=i'_L(t)+I_0=e^{-2t}(-4\cos t-2\sin t)+4-4$$

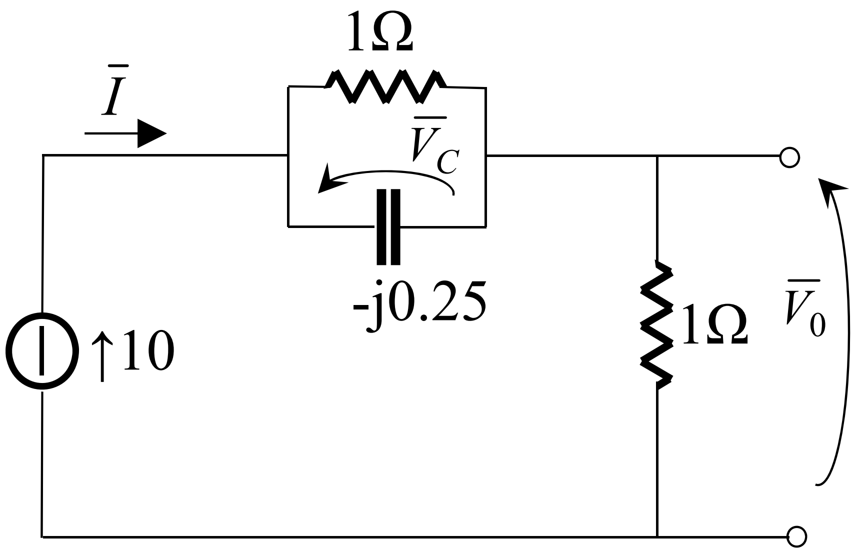
$$\boxed{i_L(t)=e^{-2t}(-4\cos t-2\sin t)}$$

ESEMPIO



Per $t < 0$ il circuito è a regime.
In $t = 0$ il tasto commuta.
Determinare l'andamento di $v_0(t)$ e tracciarne il grafico.

Per $t < 0$ il circuito è in regime sinusoidale. Per ricavare le condizioni iniziali delle grandezze di interesse, si studia il circuito col metodo dei fasori.



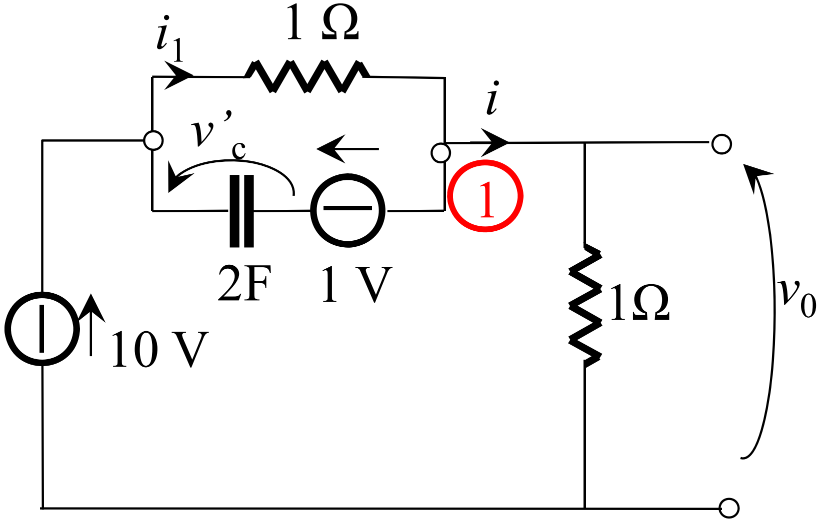
$$\bar{I} = \frac{10}{1 + \frac{-j0.25}{1 - j0.25}} = 9.22\angle 12{,}53° = 9 + j2$$

$$\bar{V}_C = \bar{I} \cdot \frac{-j0.25}{1 - j0.25} = 2.236\angle -63{,}43° = 1 - j2$$

$$v_C(t) = 2.236\cos(2t - 63{,}43°) \Rightarrow v_C(0^-) = 1V$$

$$\bar{V}_0 = 1 \cdot \bar{I} = 9.22\angle 12{,}53° \Rightarrow$$

$$v_0(t) = 9.22\cos(2t + 12{,}53°) \Rightarrow v_0(0^-) = 9V$$



$t > 0$: Circuito scaricato

Non vi sono condizioni patologiche, quindi le condizioni iniziali si conservano.

$$v'_c(0^-) = v'_c(0^+) = 0$$

Maglia $\quad 10 = v'_c + 1 + i \Rightarrow v'_c = 9 - i \quad$ (*)

Nodo 1 $\quad i_1 + 2\dfrac{dv'_c}{dt} = i$

Maglia $\quad i_1 = \dfrac{v'_c + 1}{1} \Rightarrow \dfrac{v'_c + 1}{1} + 2\dfrac{dv'_c}{dt} = i \Rightarrow 9 - i + 1 - 2\dfrac{di}{dt} = i \Rightarrow$

$\dfrac{di}{dt} + i = 5$ Relazione I/O per la i $\qquad i = i_p + i_g \qquad \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

$i_g = Ae^{-t}$

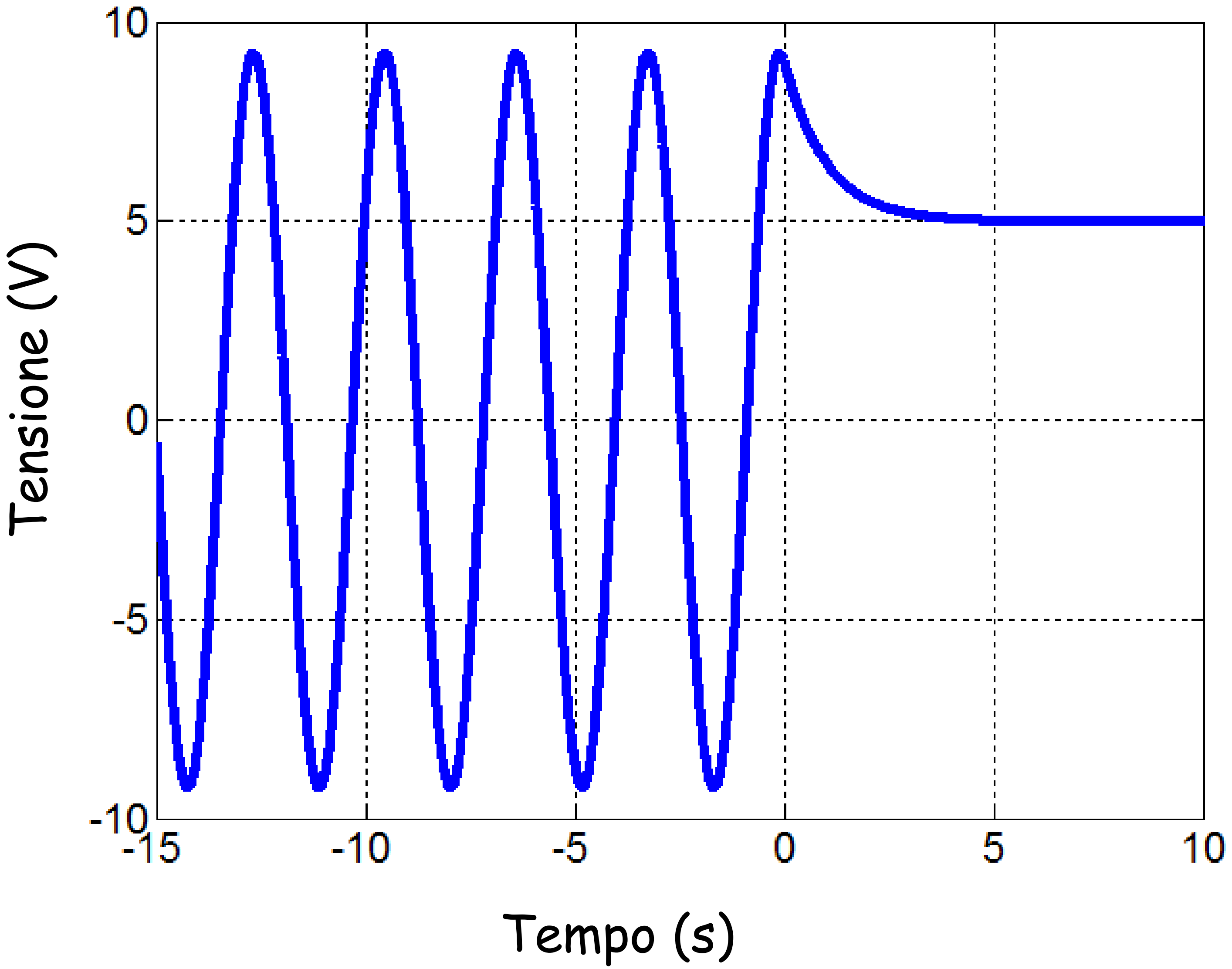
$i_p(t) = K = 5$

$\lambda = -1 \Rightarrow i(t) = Ae^{-t} + 5$

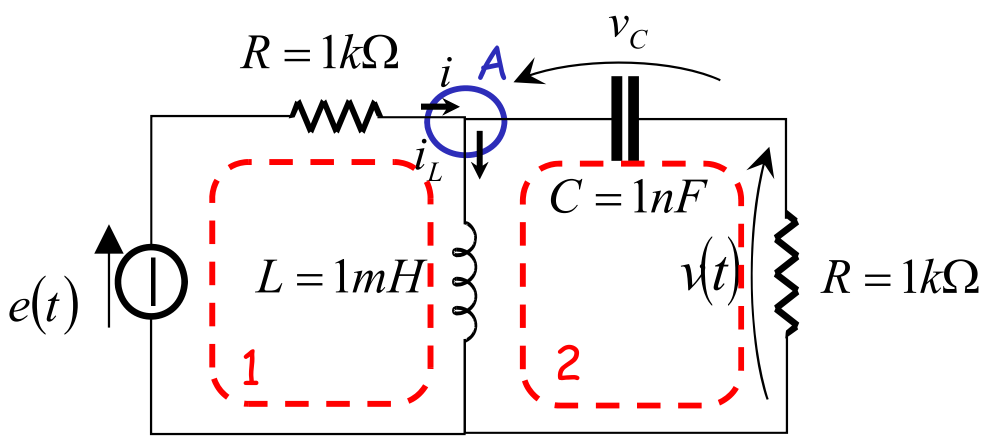
Dalla (*) $\quad i(0^+) = 9 \Rightarrow 9 = A + 5 \Rightarrow A = 4$

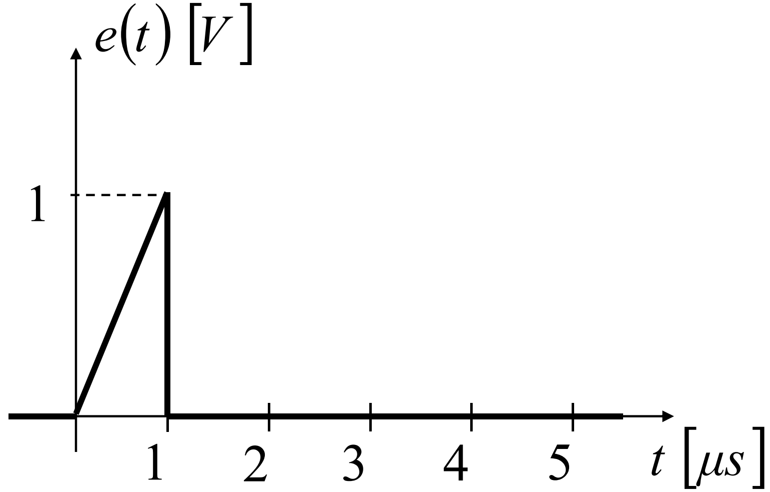
$i(t) = 4e^{-t} + 5 \Rightarrow \boxed{v_0(t) = 1 \cdot i(t) = 4e^{-t} + 5}$

Grafico di $v_0(t)$



ESEMPIO





Calcolare la tensione v(t) nella rete in figura nell'intervallo $0<t<1\mu s$ e tracciarne il grafico. Si suppone che il generatore di tensione abbia la forma d'onda indicata in figura.

Lo stato in 0^- è nullo.

per $t=0^-$ $v_C(0^-)=0$ e $i_L(0^-)=0$

per $t=0^+$ $v_C(0^+)=0$ e $i_L(0^+)=0$

Equazioni dei componenti → $i_C=C\dfrac{dv_C}{dt}$ $\quad v_L=L\dfrac{di_L}{dt}$ $\quad v=Ri_C=RC\dfrac{dv_C}{dt}$

Equazione maglia 1: $e=Ri+L\dfrac{di_L}{dt}$

Equazione maglia 2: $L\dfrac{di_L}{dt}=v_C+v=v_C+RC\dfrac{dv_C}{dt}$

Equazione nodo A: $i=i_L+i_C=i_L+C\dfrac{dv_C}{dt}$

Ricavo la equazioni di stato nella forma:

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + Bu \quad \text{con} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u = e(t)$$

Sostituiamo nell'equazione alla maglia 1 l'equazione al nodo A:

$$e = Ri + L\frac{di_L}{dt} = R\left(i_L + C\frac{dv_C}{dt}\right) + L\frac{di_L}{dt} = (\text{sostituisco eq.ne maglia 2}) = Ri_L + RC\frac{dv_C}{dt} + v_C + v$$

$$e = Ri_L + RC\frac{dv_C}{dt} + v_C + RC\frac{dv_C}{dt} = Ri_L + 2RC\frac{dv_C}{dt} + v_C \Rightarrow \boxed{\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{2RC}v_C - \frac{1}{2C}i_L + \frac{1}{2RC}e}$$

Eq. di Stato per v_c

$$Ri = -L\frac{di_L}{dt} + e \quad \text{(maglia 1)} \qquad Ri_C = v = L\frac{di_L}{dt} - v_C \quad \text{(maglia 2)}$$

$$\Rightarrow i = -\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + \frac{e}{R} \qquad \Rightarrow i_C = \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} - \frac{v_C}{R}$$

Sostituendo nell'equazione al nodo A:

$$i = i_L + i_C \Rightarrow -\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + \frac{e}{R} = i_L + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} - \frac{v_C}{R} \Rightarrow \boxed{\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{2L}v_C - \frac{R}{2L}i_L + \frac{e}{2L}}$$

Eq. di Stato per i_L

Ricaviamo la relazione I/O $v = RC\frac{dv_C}{dt} \Rightarrow \frac{dv_C}{dt} = \frac{v}{RC}$ Sostituendo nella prima eq.ne di stato:

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{v}{RC} = -\frac{1}{2RC}v_C - \frac{1}{2C}i_L + \frac{1}{2RC}e$$

$$\xrightarrow{derivo} \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2RC}\frac{dv_C}{dt} - \frac{1}{2C}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{2RC}\frac{de}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{dv_C}{dt} - \frac{R}{2}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{2}\frac{de}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{v}{RC} - \frac{R}{2}\left(\frac{v_C + v}{L}\right) + \frac{1}{2}\frac{de}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} + \left(\frac{1}{2RC} + \frac{R}{2L}\right)v = -\frac{R}{2L}v_C + \frac{1}{2}\frac{de}{dt}$$

$$\xrightarrow{derivo} \frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{1}{2RC} + \frac{R}{2L}\right)\frac{dv}{dt} = -\frac{R}{2L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2e}{dt^2}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{1}{2RC} + \frac{R}{2L}\right)\frac{dv}{dt} = -\frac{R}{2L}\frac{v}{RC} + \frac{1}{2}\frac{d^2e}{dt^2}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{1}{2RC} + \frac{R}{2L}\right)\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2LC}v = \frac{1}{2}\frac{d^2e}{dt^2}}$$

$$per \quad 0 < t < 1\mu s \quad e(t) = \frac{t}{10^{-6}} \quad \Rightarrow \quad \frac{de}{dt} = 10^6 \quad \frac{d^2 e}{dt^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 v}{dt^2} + 10^6 \frac{dv}{dt} + \frac{10^{12}}{2} v = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-10^6 \mp \sqrt{10^{12} - 2 \cdot 10^{12}}}{2} = \frac{-1 \mp j}{2} \cdot 10^6$$

$$v(t) = e^{-\frac{t}{2} \cdot 10^6} \left(A \cos \frac{10^6}{2} t + B \sin \frac{10^6}{2} t \right)$$

La relazione algebrica che lega la v alle variabili di stato è

$$y = \underline{C}^T \underline{x} + Du \quad \text{con} \quad y(t) = v(t)$$

$$e = Ri + L\frac{di_L}{dt} = R\left(i_L + C\frac{dv_C}{dt} \right) + L\frac{di_L}{dt} = Ri_L + RC\frac{dv_C}{dt} + v_C + v = Ri_L + v + v_C + v$$

$$\Rightarrow 2v = e - Ri_L - v_C \Rightarrow v = -\frac{1}{2} v_C - \frac{R}{2} i_L + \frac{1}{2} e \qquad \Rightarrow v(0^+) = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{dv_C}{dt} - \frac{R}{2}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{2}\frac{de}{dt}$$

dalle eq.ni di stato $\left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{0^+} = 0 \qquad \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+} = 0$

$$\Rightarrow \left.\frac{dv}{dt}\right|_{0^+} = \frac{1}{2}\left.\frac{de}{dt}\right|_{0^+} \qquad \Rightarrow \left.\frac{dv}{dt}\right|_{0^+} = \frac{1}{2} \cdot 10^6$$

Applichiamo le condizioni iniziali alla $v(t) = e^{-\frac{t}{2}\cdot 10^6}\left(A\cos\frac{10^6}{2}t + B\sin\frac{10^6}{2}t \right)$

$$v\left(0^+\right) = A = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}\cdot 10^6 \cdot e^{-\frac{t}{2}\cdot 10^6}\left(A\cos\frac{10^6}{2}t + B\sin\frac{10^6}{2}t \right) + e^{-\frac{t}{2}\cdot 10^6}\left(-\frac{A}{2}\cdot 10^6 \sin\frac{10^6}{2}t + \frac{B}{2}\cdot 10^6 \cos\frac{10^6}{2}t \right)$$

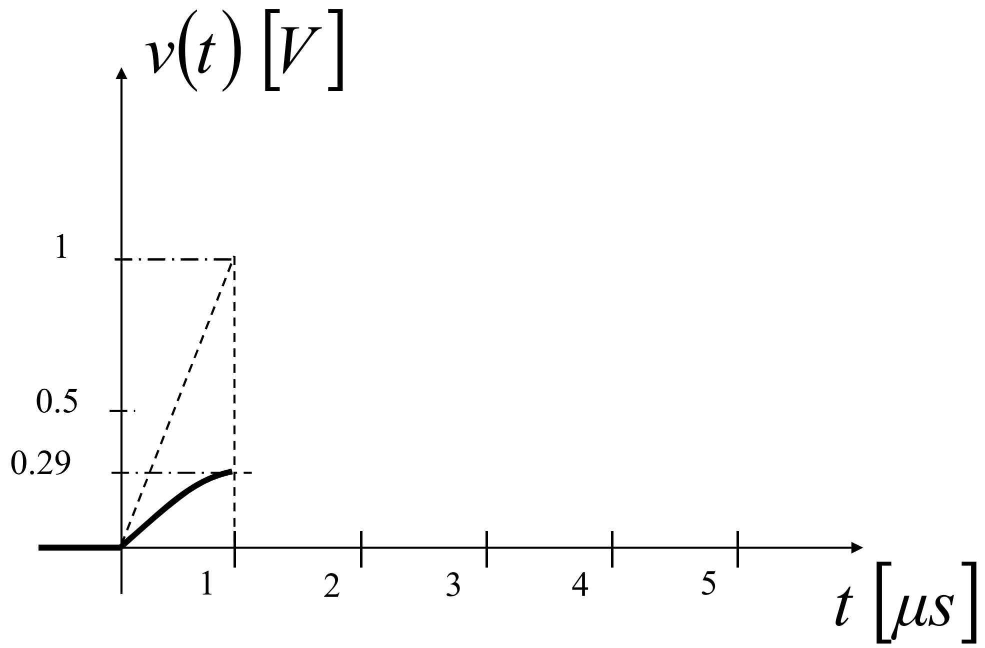
$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{0^+} = \frac{1}{2}\cdot 10^6 = \frac{B}{2}\cdot 10^6 \quad \Rightarrow \quad B = 1$$

per $0 < t < 1\mu s$

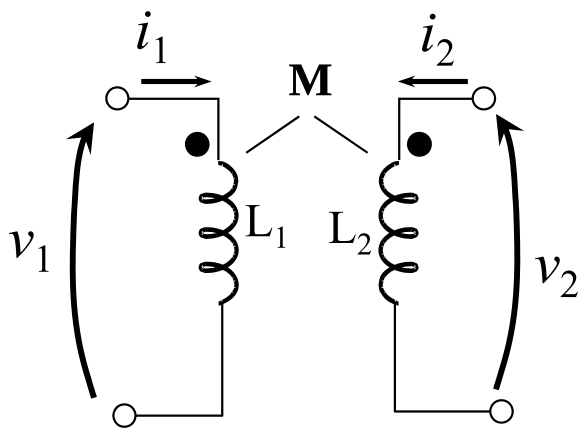
$$v\left(t\right) = e^{-\frac{t}{2}\cdot 10^6} \sin\frac{10^6}{2}t$$

per $t = 1\mu s$

$$v\left(t\right) = e^{-0.5}\sin\left(0.5 rad\right) = 0.29$$



MUTUA INDUTTANZA



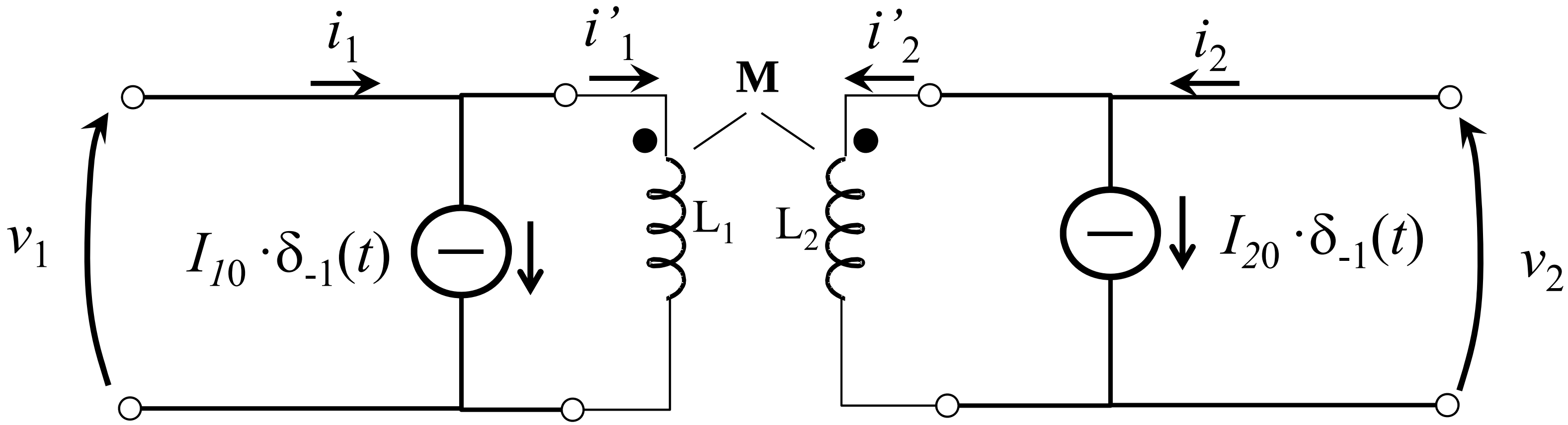
$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{di_1}{dt} \\ \dfrac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{di_1}{dt} = \dfrac{L_2}{L_1L_2 - M^2} v_1 - \dfrac{M}{L_1L_2 - M^2} v_2 \\ \dfrac{di_2}{dt} = -\dfrac{M}{L_1L_2 - M^2} v_1 + \dfrac{L_1}{L_1L_2 - M^2} v_2 \end{cases}$$

$$i_1(0^-) = I_{10}; \quad i_2(0^-) = I_{20}$$

$$\begin{cases} i_1(t) = \left[I_{10} + \displaystyle\int_{0^-}^{t} \dfrac{L_2}{L_1L_2 - M^2} v_1(t)dt - \displaystyle\int_{0^-}^{t} \dfrac{M}{L_1L_2 - M^2} v_2(t)dt \right] \delta_{-1}(t) \\ i_2(t) = \left[I_{20} - \displaystyle\int_{0^-}^{t} \dfrac{M}{L_1L_2 - M^2} v_1(t)dt + \displaystyle\int_{0^-}^{t} \dfrac{L_1}{L_1L_2 - M^2} v_2(t)dt \right] \delta_{-1}(t) \end{cases}$$

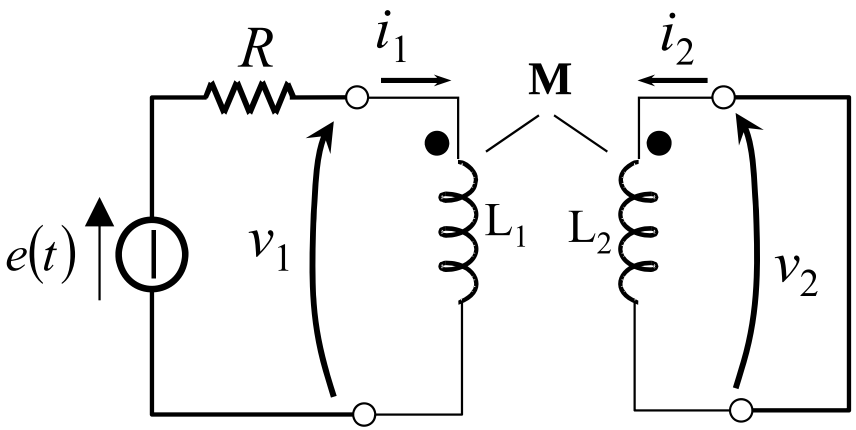
MUTUA INDUTTANZA



$$i_1(t) = i'_1\,(t) + I_{10}$$

$$i_2(t) = i'_2\,(t) + I_{20}$$

ESEMPIO



Hp: stato nullo in t=0$^-$

$$e(t) = E\delta_{-1}(t)$$

Determinare $i_1(t)$ ed $i_2(t)$ per t>0.

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} e(t) = Ri_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} = 0 \Rightarrow \dfrac{di_2}{dt} = -\dfrac{M}{L_2} \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

$$e(t) = \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \frac{di_1}{dt} + Ri_1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \right) \frac{di_1}{dt} + Ri_1 = e(t)$$

$\lambda = -\dfrac{RL_2}{L_1 L_2 - M^2}$ reale negativo infatti $\Delta = L_1 L_2 - M^2 > 0$

$$i_1(t) = Ae^{\lambda t} + i_{1p}$$

$$i_{1p} = k \quad \text{(costante)} \quad \Rightarrow Rk = E \Rightarrow k = \frac{E}{R}$$ in $t = 0^-$ $\quad i_1(0^-) = 0$

Non ci sono condizioni patologiche e l'ingresso ha una discontinuità di Iª specie, quindi lo stato si conserva tra 0^- e 0^+

$$i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0 \qquad 0 = A + \frac{E}{R} \Rightarrow A = -\frac{E}{R}$$

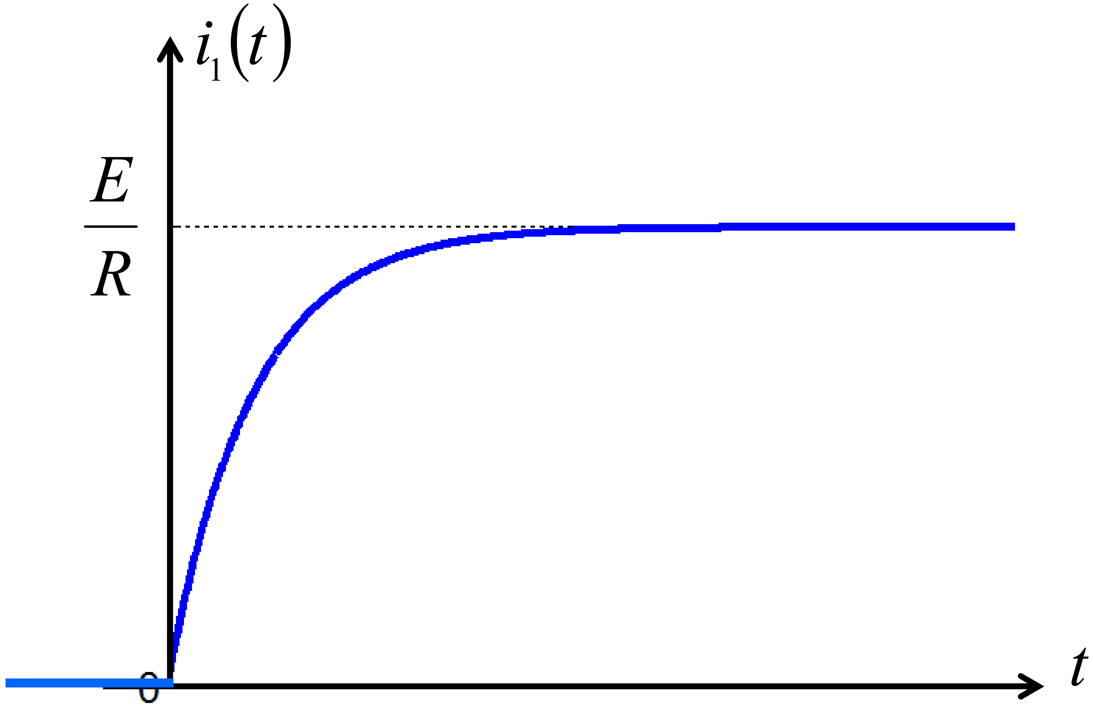
$$\boxed{i_1(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{RL_2}{\Delta}t}\right)\delta_{-1}}$$

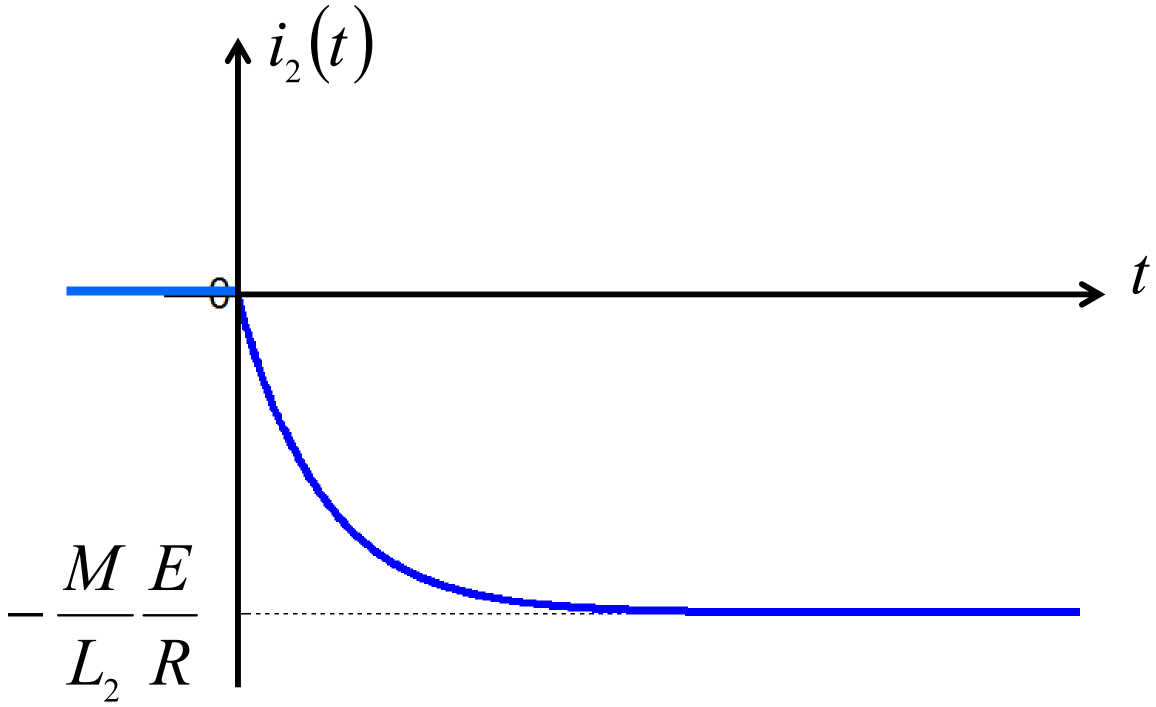
$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{M}{L_2}\frac{di_1}{dt} \Rightarrow \int_{0^-}^{t}\frac{di_2}{dt}dt = -\frac{M}{L_2}\int_{0^-}^{t}\frac{di_1}{dt}dt$$

$$\boxed{i_2(t) = -\frac{M}{L_2}\frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{RL_2}{\Delta}t}\right)\delta_{-1}}$$

$$\Rightarrow i_2(t) - i_2(0^-) = -\frac{M}{L_2}\left[i_1(t) - i_1(0^-)\right] \Rightarrow i_2(t) = -\frac{M}{L_2}i_1(t)$$

$$i_1(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{RL_2}{\Delta}t}\right)\delta_{-1}$$



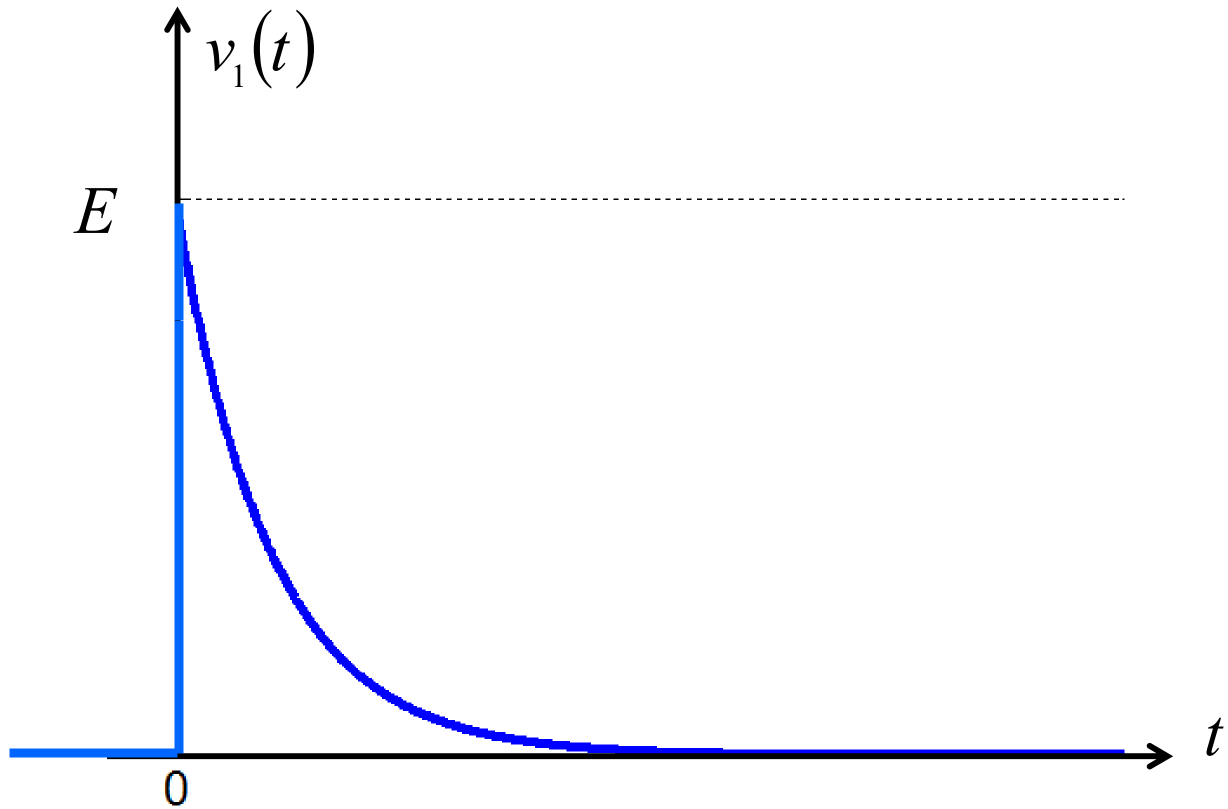


$$i_2(t) = -\frac{M}{L_2}\frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{RL_2}{\Delta}t}\right)\delta_{-1}$$

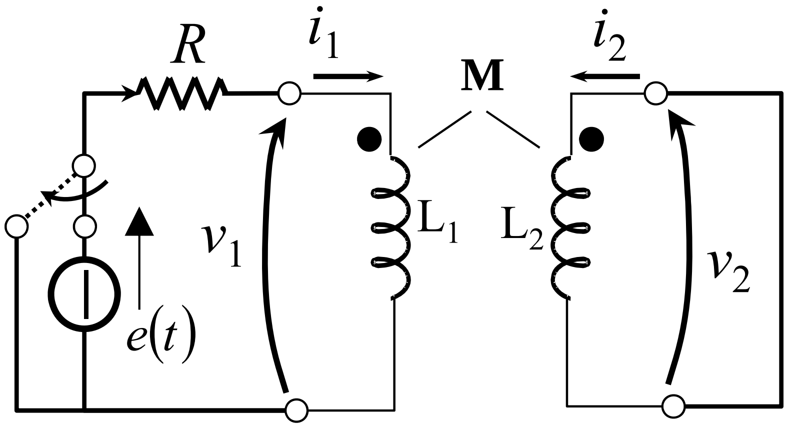
$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt}$$

$$v_2(t) = 0$$

$$v_1 = \frac{\Delta}{L_2} \cdot \left(\frac{RL_2}{\Delta} \cdot \frac{E}{R} e^{-\frac{RL_2}{\Delta} t} \right) \delta_{-1} = \left(E \cdot e^{-\frac{RL_2}{\Delta} t} \right) \delta_{-1}$$



Supponiamo che per $t=t_0$ il generatore di tensione venga cortocircuitato. Questo equivale a considerare il seguente circuito:



$t=t_0$ è una nuova origine dei tempi. Supponiamo che l'istante t_0 sia sufficientemente distante da t=0 da dare al circuito di partenza di raggiungere il regime.

$t<t_0$ → circuito a regime

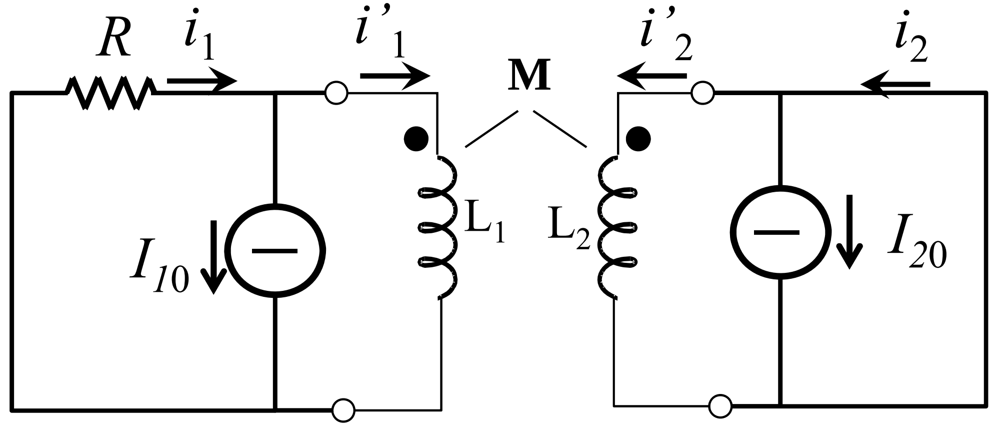
$$i_1(t)=\frac{E}{R}=I_{10} \qquad i_2(t)=-\frac{M}{L_2}\frac{E}{R}=I_{20}$$

Per $t>t_0$ dobbiamo studiare l'evoluzione del circuito a partire da uno stato non nullo:

$$\underline{X}\left(t=t_{0^-}\right)=\begin{bmatrix} i_1\left(t_{0^-}\right) \\ i_2\left(t_{0^-}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_{10} \\ I_{20}\end{bmatrix}$$

Il tasto ha commutato.
Scarichiamo il circuito

$$i'_1\left(0^-\right)=0 \qquad i'_2\left(0^-\right)=0$$



Ci siamo riportati ad un circuito nello stato zero. Le frequenze libere del circuito sono le stesse. Una frequenza libera è λ=0, cioè c'è un termine ke^{0t}. Le equazioni del circuito sono:

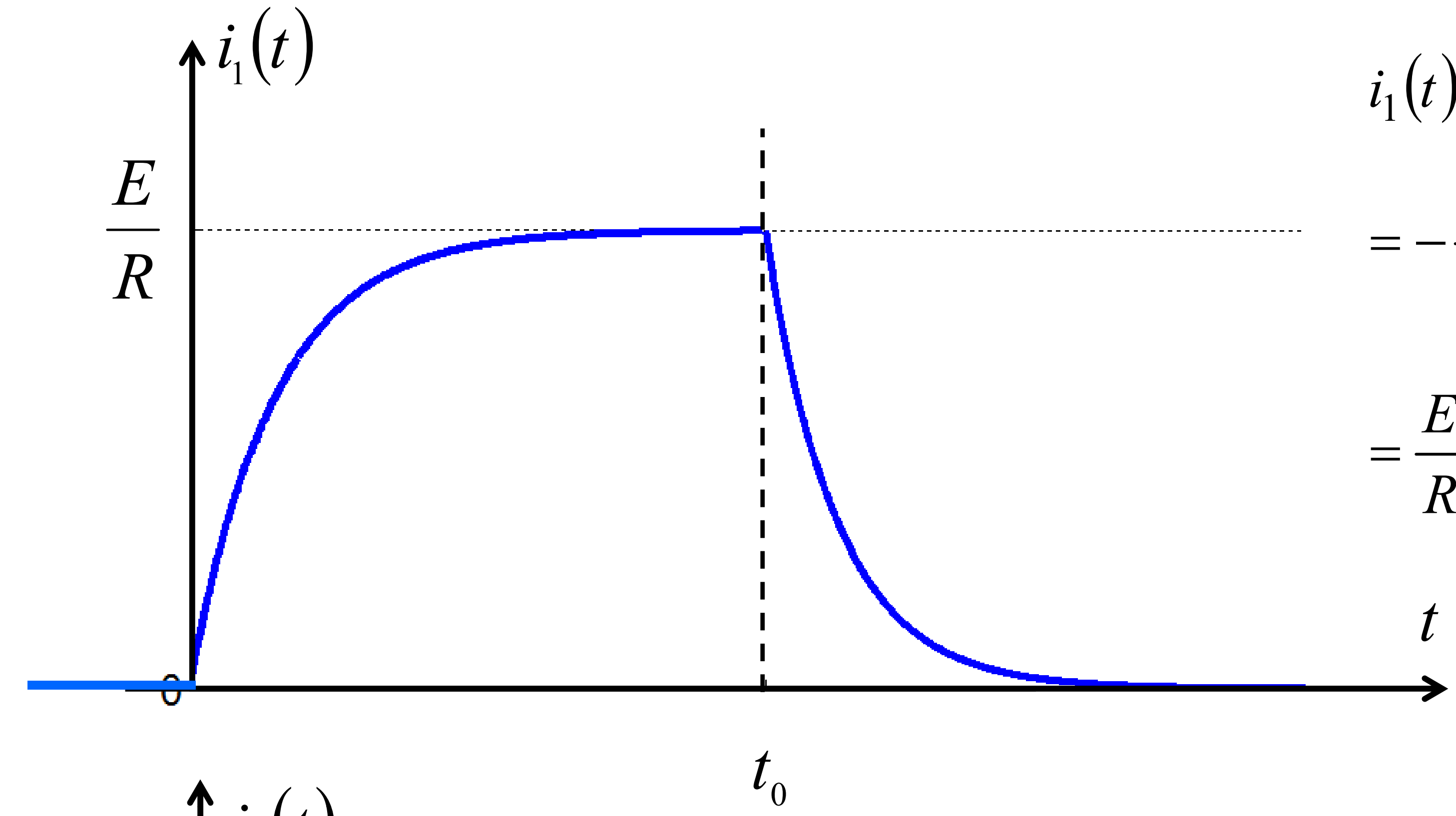
$$\begin{cases} 0 = R(i'_1 + I_{10}) + L_1 \dfrac{di'_1}{dt} + M\dfrac{di'_2}{dt} \\ M\dfrac{di'_1}{dt} + L_2\dfrac{di'_2}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1 \dfrac{di'_1}{dt} - \dfrac{M^2}{L_2}\dfrac{di'_1}{dt} + Ri'_1 = -RI_{10} \\ \dfrac{di'_2}{dt} = -\dfrac{M}{L_2}\dfrac{di'_1}{dt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{L_1L_2 - M^2}{L_2}\right)\frac{di'_1}{dt} + Ri'_1 = -RI_{10} \qquad \lambda = -\frac{RL_2}{\Delta} \quad \text{con} \quad \Delta = L_1L_2 - M^2 > 0$$

$$i'_1(t) = Ae^{\lambda t} + i'_{1p} \qquad i'_{1p} = k \quad \Rightarrow k = -I_{10} \qquad i'_1(t) = Ae^{\lambda t} - I_{10}$$

In t=t$_{0+}$ lo stato si conserva → $i'_1(0^+) = i'_1(0^-) = 0$

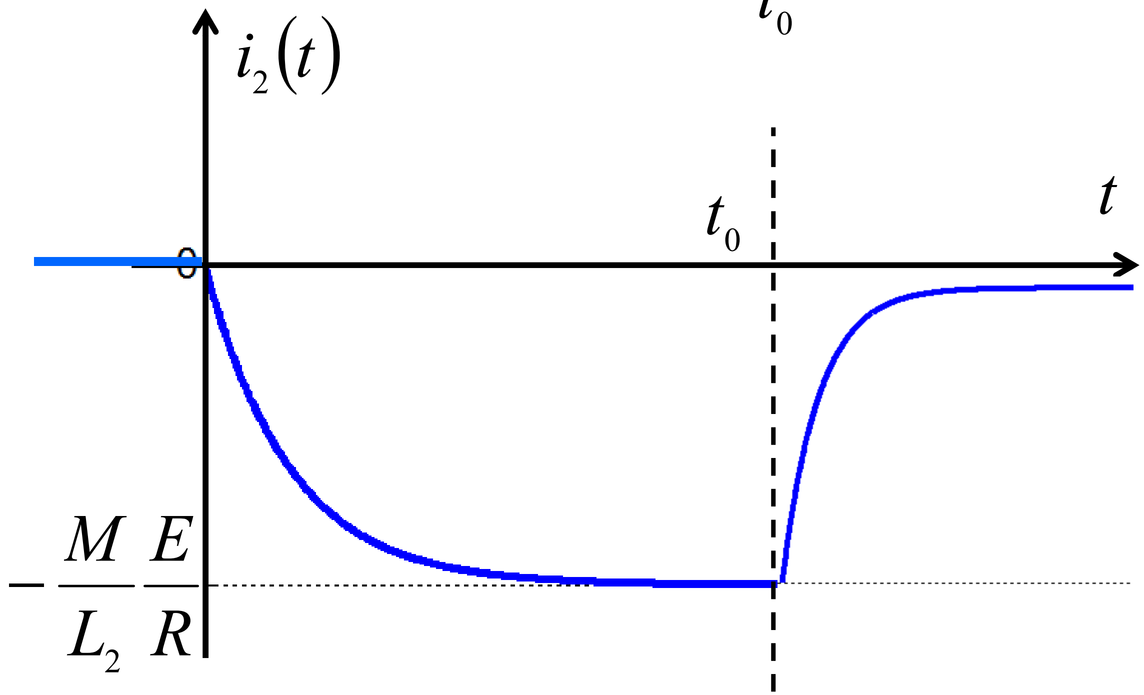
$$0 = A - I_{10} \Rightarrow A = I_{10} = \frac{E}{R} \qquad i'_1(t) = -\frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{RL_2}{\Delta}(t)}\right)$$



$$i_1(t) = i'_1(t) + I_{10} =$$

$$= -\frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{RL_2}{\Delta}(t)}\right) + \frac{E}{R} =$$

$$= \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{RL_2}{\Delta}(t-t_0)} \text{ per t > t}_0$$



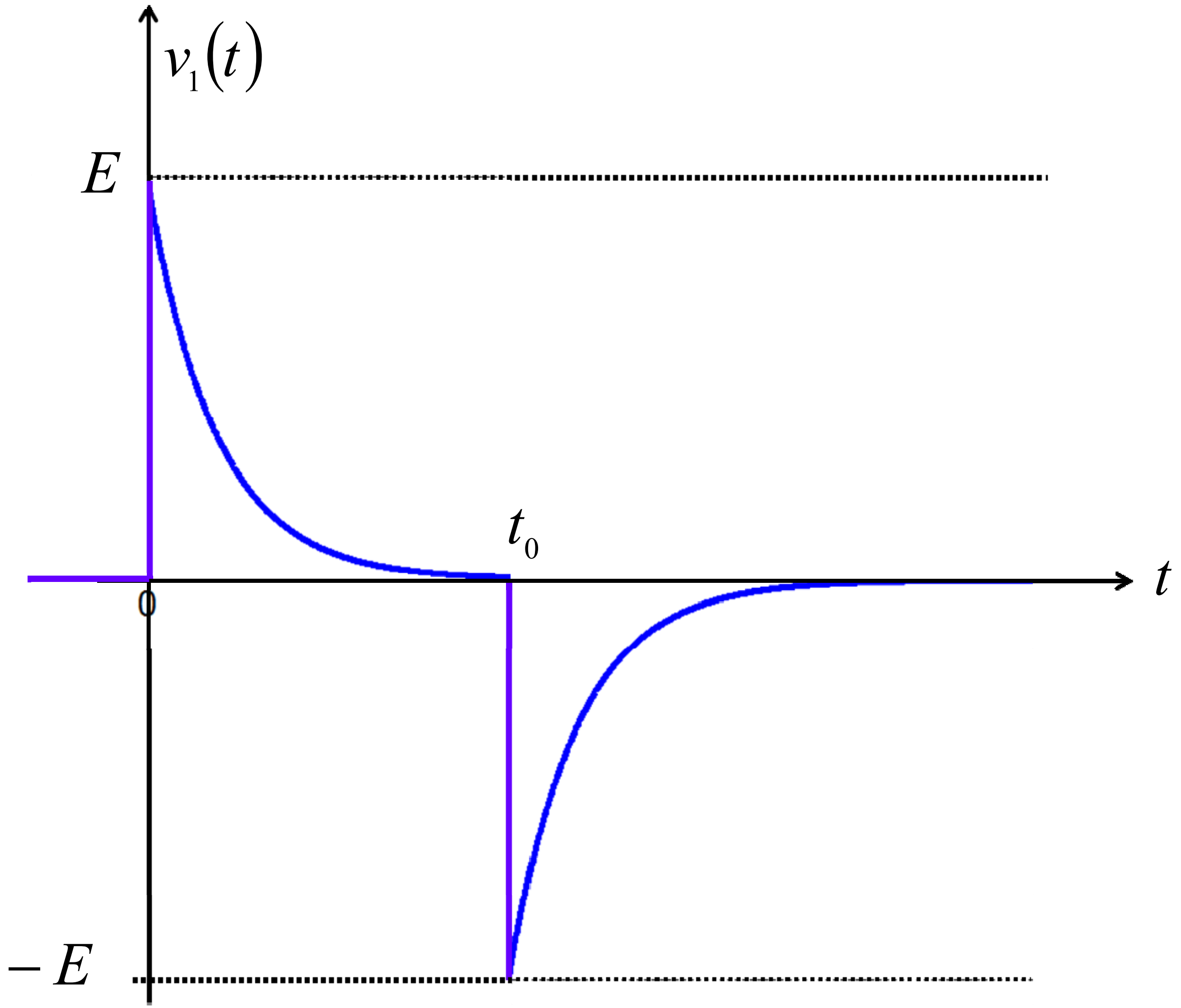
$$i_2(t) = i'_2(t) + I_{20} =$$

$$= \frac{M}{L_2}\frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{RL_2}{\Delta}(t)}\right) - \frac{M}{L_2}\frac{E}{R} =$$

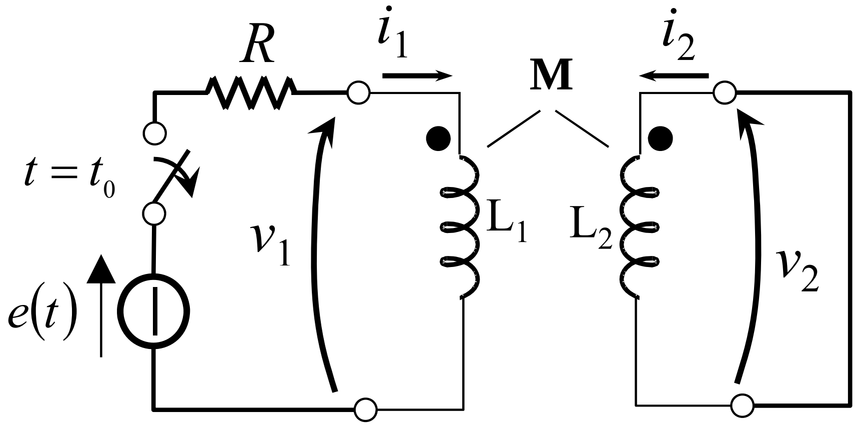
$$= -\frac{M}{L_2}\frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{RL_2}{\Delta}(t)} \text{ per t > t}_0$$

$$v_1(t) = -Ri_1(t) = -E \cdot e^{-\frac{RL_2}{\Delta}(t)}$$

$$v_1 = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \frac{di'_1}{dt} = \frac{\Delta}{L_2} \cdot \left(-\frac{RL_2}{\Delta} \cdot \frac{E}{R} e^{-\frac{RL_2}{\Delta}(t)} \right) = -E \cdot e^{-\frac{RL_2}{\Delta}(t)} \text{ per } t > t_0$$



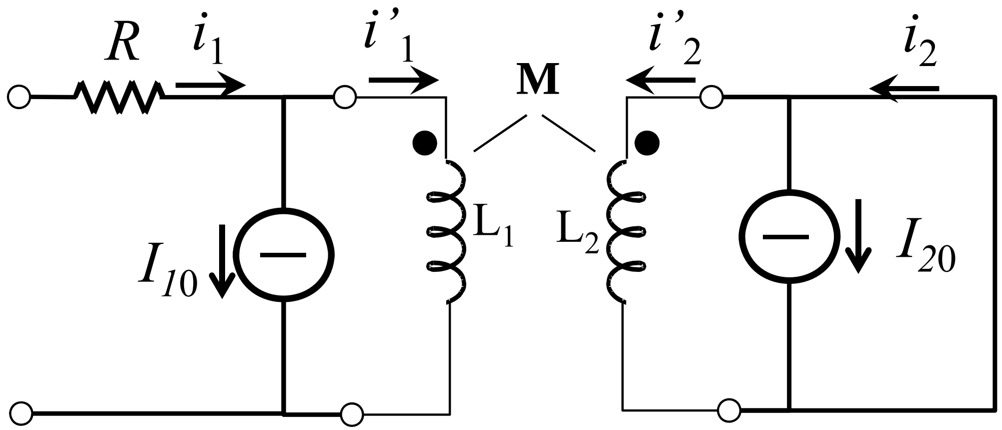
Supponiamo invece di aver commutato il tasto nella posizione di aperto nell'istante che per $t=t_0$



Lo stato in $t=t_{0-}$ è ancora:

$$i_1(t_{0-}) = \frac{E}{R} = I_{10} \qquad i_2(t_{0-}) = -\frac{M}{L_2}\frac{E}{R} = I_{20}$$

In questo caso la resistenza non è attraversata da corrente.
Il circuito scaricato è il seguente:



$$i'_1(0^-) = 0 \qquad i'_2(0^-) = 0$$

$$i_1 = 0 \qquad \Rightarrow i'_1 + I_{10} = 0$$

$$M\frac{di'_1}{dt} + L_2\frac{di'_2}{dt} = 0$$

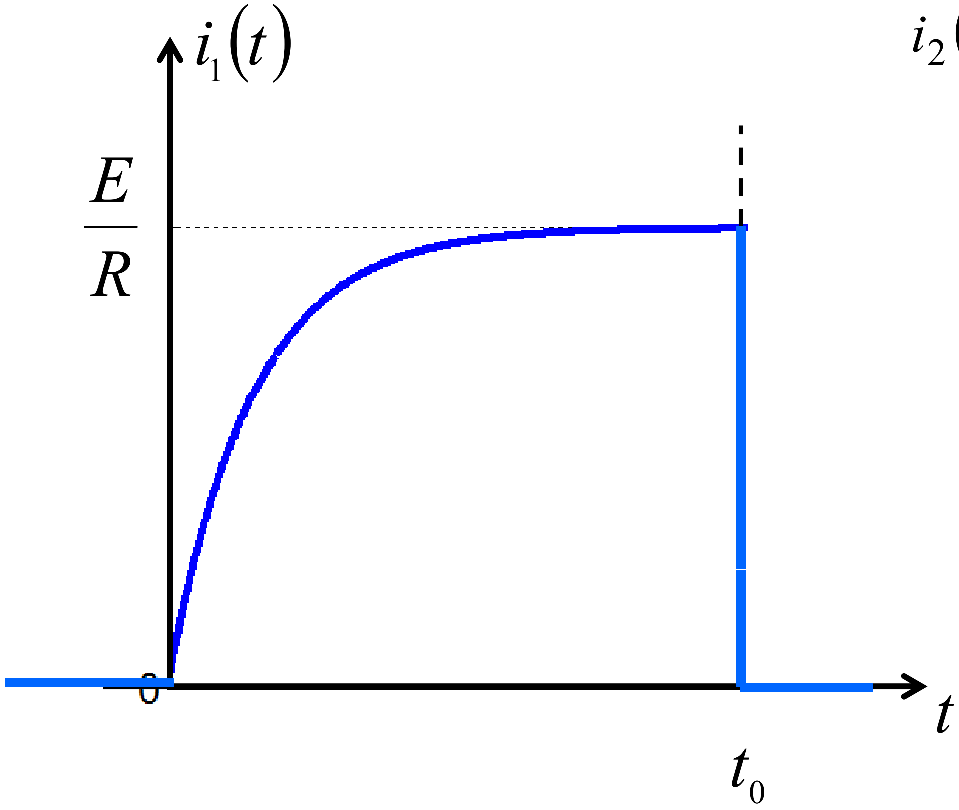
$$i'_1 = -I_{10}$$

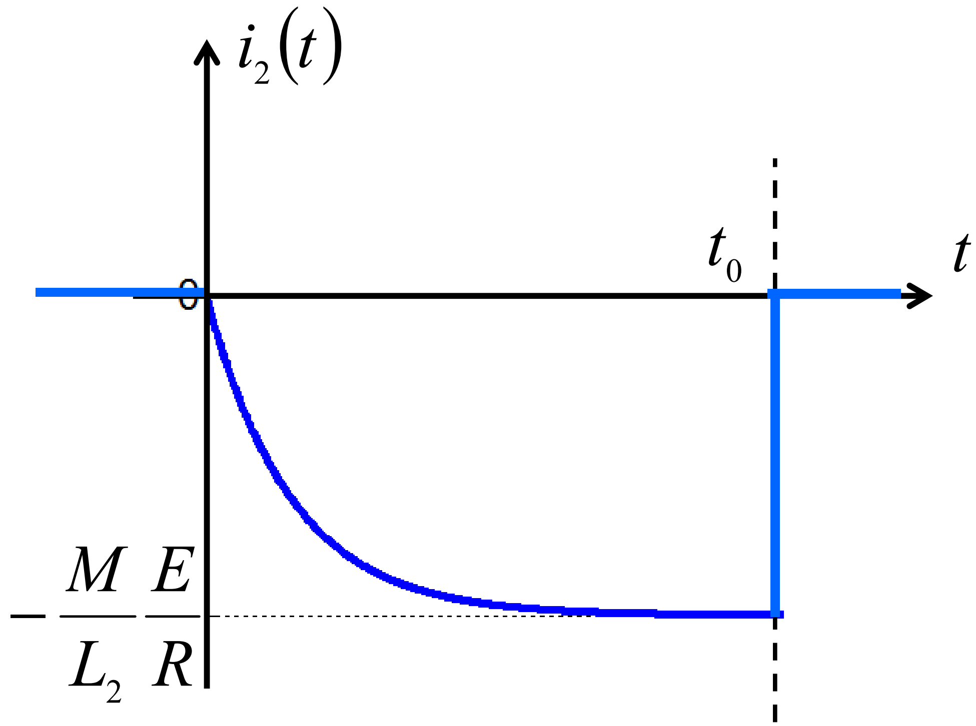
È imposta dal generatore di corrente e non è più una variabile di stato

$$i_1(t) = 0 \text{ per } t > t_0$$

$$\frac{di'_2}{dt} = -\frac{M}{L_2}\frac{di'_1}{dt} \Rightarrow i'_2 = -\frac{M}{L_2} i'_1 \Rightarrow i'_2 = \frac{M}{L_2} I_{10}$$

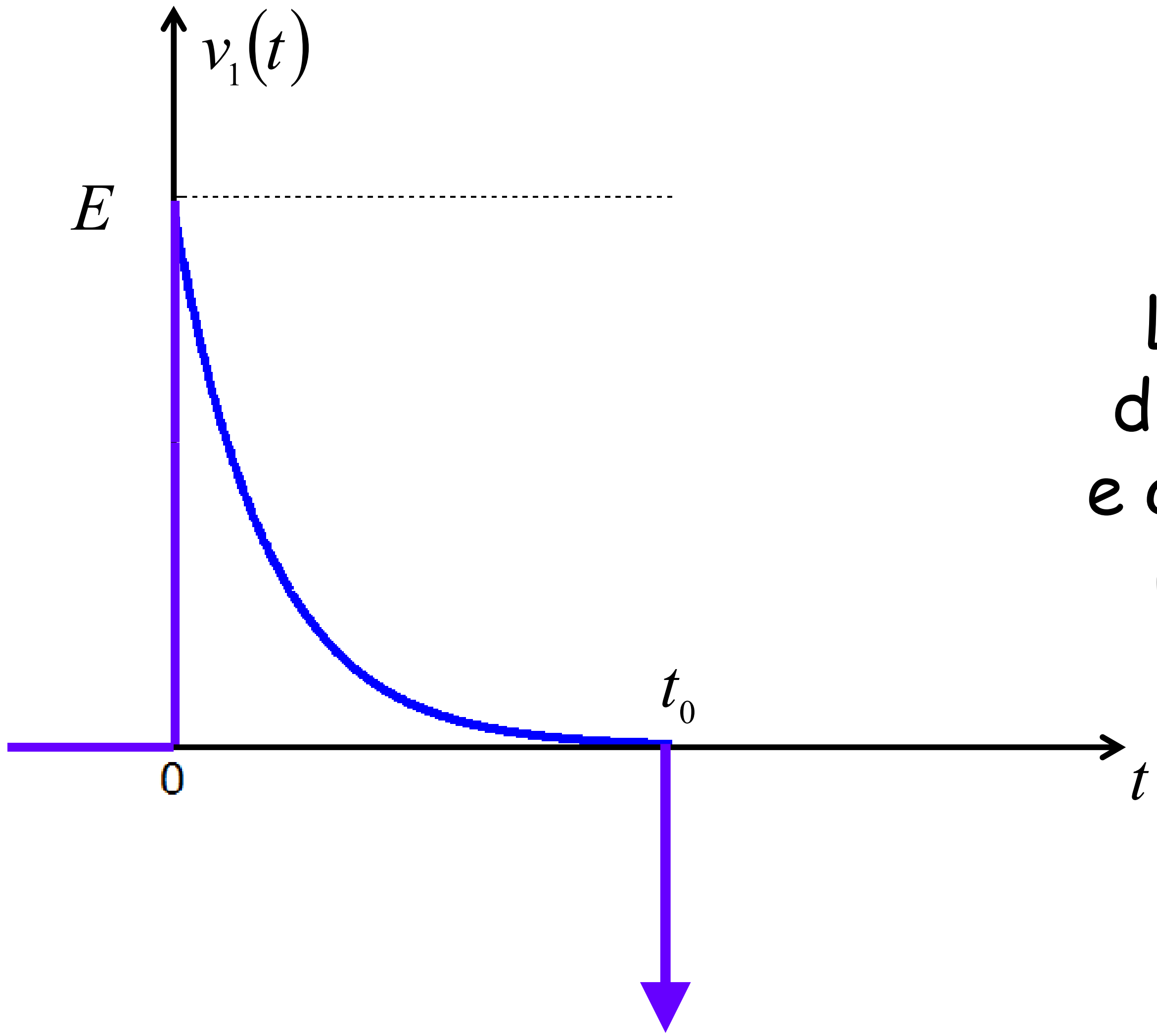
$$i_2(t) = i'_2(t) + I_{20} = \frac{M}{L_2}\frac{E}{R} - \frac{M}{L_2}\frac{E}{R} = 0 \text{ per } t > t_0$$





La tensione v_1 sarà:

$$v_1(t) = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \frac{di'_1}{dt} = \frac{\Delta}{L_2} \cdot \frac{d}{dt}\left[-I_{10}\delta_{-1}(t-t_0)\right] = -\frac{\Delta}{L_2}\frac{E}{R} \cdot \delta(t-t_0)$$



La corrente scende drasticamente a zero e questo equivale ad un impulso di tensione