TRASFORMATE DI LAPLACE

INGRESSO CISOIDALE

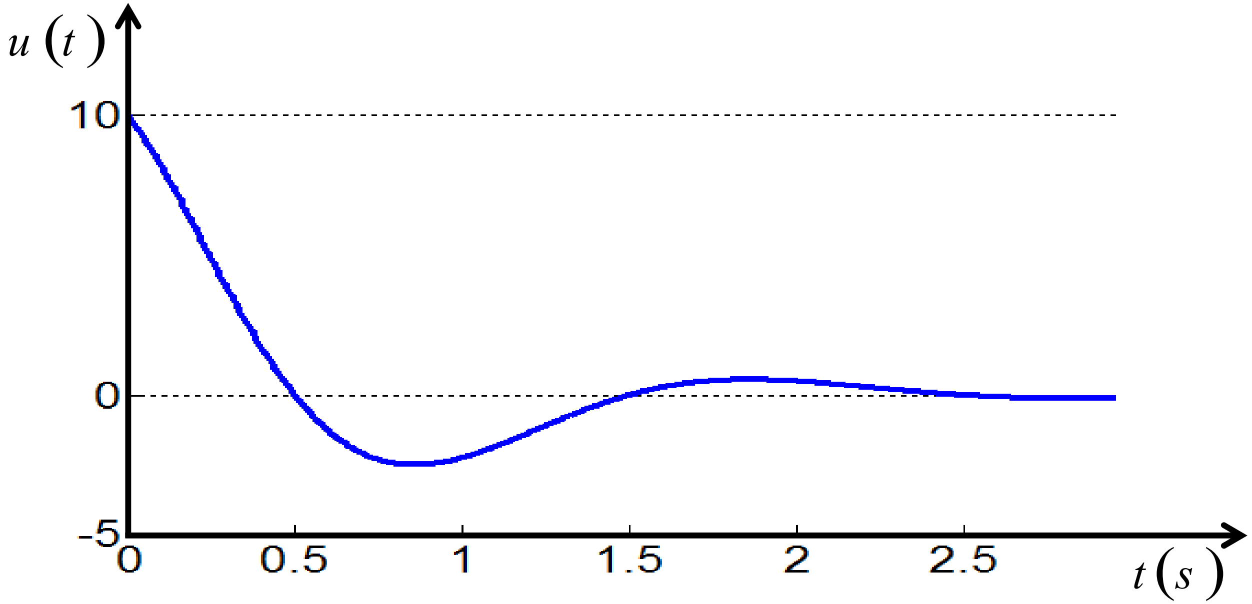
$$u(t) = Ue^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi)\delta_{-1}(t) \qquad U > 0$$

a) $\sigma = 0; \omega = 0 \Rightarrow u(t) = U\cos\varphi\,\delta_{-1}(t)$ ⟶ Gradino

b) $\sigma = 0; \omega \neq 0 \Rightarrow u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)\delta_{-1}(t)$ ⟶ Sinusoide

c) $\sigma < 0; \omega = 0 \Rightarrow u(t) = Ue^{\sigma t}\cos\varphi\,\delta_{-1}(t)$ ⟶ Esponenziale decrescente

d) $\sigma < 0; \omega \neq 0 \Rightarrow u(t) = Ue^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi)\delta_{-1}(t)$ ⟶ Oscillatorio smorzato



INGRESSO CISOIDALE

$$u(t) = Ue^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi)\delta_{-1}(t) \qquad U > 0$$

$$u(t) = \Re e\left\{\overline{U}e^{st}\right\} \qquad \mathrm{s} = \sigma + j\varpi \quad \overline{U} = \left|\overline{U}\right|e^{j\varphi}$$

$$y_p(t) = \Re e\left\{\overline{Y}e^{st}\right\}\text{con } \overline{Y} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}\overline{U} = H(s)\cdot\overline{U}$$

$$H(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad \text{Funzione di Trasferimento}$$

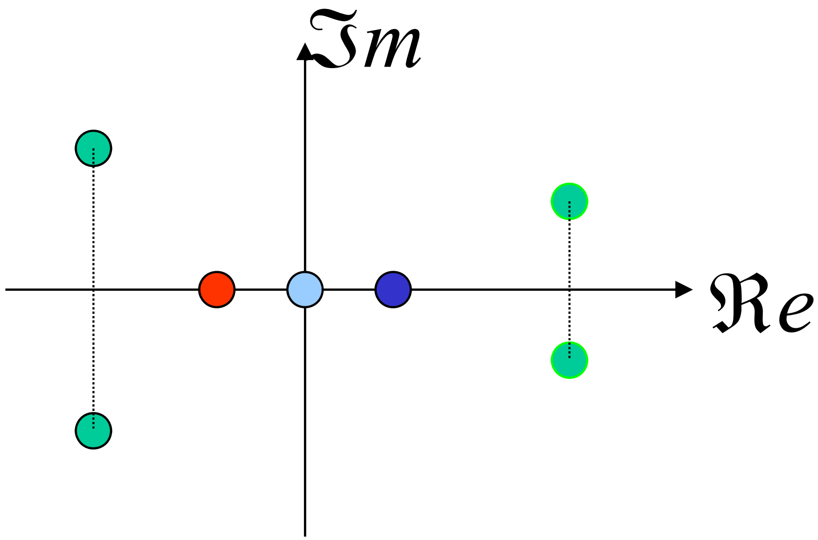
DIPENDE DALLE CARATTERISTICHE DELLA RETE E NON DALL'INGRESSO

$$y(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t}}_{\text{Risposta libera}} + \underbrace{\Re e\left\{H(s)\cdot U(s)\cdot e^{st}\right\}}_{\text{Risposta forzata}} \qquad t > 0$$

La risposta libera rappresenta il modo di evolvere nel tempo della rete indipendentemente dall'ingresso

La risposta forzata evolve nel tempo come l'ingresso

FREQUENZE LIBERE



Se $\Re e\{\lambda_i\} < 0 \quad \forall i$
la risposta libera converge a zero dopo un certo tempo

per $t \to \infty$ Rimane la sola risposta forzata

se $\Re e\{\lambda_i\} < 0$ Rete assolutamente stabile

se $\exists i \ni \Re e\{\lambda_i\} = 0$ Rete semplicemente stabile

se $\exists i \ni \Re e\{\lambda_i\} > 0$ Rete instabile se $\sigma = 0 \; s = j\varpi \rightarrow$ Ingresso sinusoidale

$\overline{Y} = H(j\varpi) \cdot \overline{U}$ Fasore $\rightarrow$ Metodo simbolico

Per tempi molto grandi possiamo prescindere dall'origine dei tempi e lavorare direttamente nel campo complesso

La riconversione al dominio del tempo e' immediata:

$y(t) = \Re e\left\{\overline{Y} e^{j\varpi t}\right\}$ se $u(t) = \Re e\left\{\overline{U} e^{j\varpi t}\right\}$

Dimostrazione

$$u(t) = \Re e\left\{\overline{U} e^{st}\right\} \qquad \overline{U} e^{st} = U e^{j\varphi} e^{(\sigma + j\varpi)t} = U e^{\sigma t} e^{j(\varpi t + \varphi)} =$$

$$= U e^{\sigma t}\left[\cos(\varpi t + \varphi) + j sen(\varpi t + \varphi)\right]$$

$$\Re e\left\{\overline{U} e^{st}\right\} = U e^{\sigma t}\left[\cos(\varpi t + \varphi)\right] \quad \text{per } t > 0$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\Re e\left\{\overline{U} e^{st}\right\} = \Re e\left\{\frac{d}{dt}(\overline{U} e^{st})\right\} = \Re e\left\{s \overline{U} e^{st}\right\}$$

.

.

$$\frac{d^k u}{dt^k} = \Re e\left\{s^k \overline{U} e^{st}\right\}$$

$$y_p(t) = \Re e\left\{\overline{Y} e^{st}\right\}; \cdots\cdots; \frac{d^q y}{dt^q} = \Re e\left\{s^q \overline{Y} e^{st}\right\}$$

Sostituendo nella Relazione I/O

$$a_n \Re e\left\{s^n \overline{Y} e^{st}\right\} + \cdots\cdots + a_0 \Re e\left\{\overline{Y} e^{st}\right\} = b_m \Re e\left\{s^m \overline{U} e^{st}\right\} + \cdots\cdots + b_0 \Re e\left\{\overline{U} e^{st}\right\}$$

Dimostrazione (Cnt.)

$$a_n \Re e\left\{s^n \overline{Y} e^{st}\right\} + \cdots\cdots + a_0 \Re e\left\{\overline{Y} e^{st}\right\} = b_m \Re e\left\{s^m \overline{U} e^{st}\right\} + \cdots\cdots + b_0 \Re e\left\{\overline{U} e^{st}\right\}$$

$$\Re e\left\{(a_n s^n + \cdots\cdots + a_0)\overline{Y} e^{st}\right\} = \Re e\left\{(b_m s^m + \cdots\cdots + b_0)\overline{U} e^{st}\right\}$$

$$(a_n s^n + \cdots\cdots + a_0)\overline{Y} = (b_m s^m + \cdots\cdots + b_0)\overline{U}$$

$$\overline{Y} = \frac{b_m s^m + \cdots\cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots\cdots + a_0}\overline{U} = H(s)\cdot\overline{U} \quad \text{c.v.d.}$$

ANALISI NEL DOMINIO DI LAPLACE

$s = \sigma + j\varpi$ Variabile di Laplace

$Y(s) = H(s) \cdot U(s)$ Teorema di Convoluzione

$$H(s) = \frac{b_m s^m + \cdots\cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots\cdots + a_0}$$

La trasformata di Laplace permette di trasformare sistemi di equazioni integro-differenziali nel tempo in sistemi algebrici nel dominio della variabile **s**, detta variabile di Laplace

La trasformata di Laplace consente di calcolare la risposta di un circuito a (quasi) ogni tipo di eccitazione, permettendo ad un tempo, di calcolare la risposta libera e la risposta forzata, a partire da qualsivoglia condizione iniziale

DEFINIZIONE DI L-TRASFORMATA

Sia $f(t): R \rightarrow C$, $\quad f(t) = 0$ per $t \leq 0$

La L – trasformata di $f(t)$ è:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \qquad (*)$$

NOTA: $f(t)$ è funzione di t. La trasformata è funzione di $s = \sigma + j\varpi$

Condizioni di esistenza della L - Trasformata

$\int_{0^-}^{\infty} e^{-\sigma t} |f(t)| dt < \infty$ per qualche valore di $\sigma = \sigma_c$

essendo: $\left| e^{j\varpi t} \right| = 1$ per qualunque valore di t

Regione di convergenza:

$\Re e\{s\} = \sigma > \sigma_c$

ESEMPIO: L-Trasformata del Gradino unitario

$$f(t) = \delta_{-1}(t)$$

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} dt = \lim_{T\to\infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{s}\left[1 - e^{-st}\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{s}\left[1 - e^{-\sigma T} e^{-j\varpi T}\right]$$

se $\sigma < 0$ $\quad e^{-\sigma T}$ diverge e il limite non esiste

se $\sigma = 0$ $\quad e^{-\sigma T} = 1$ il limite non esiste perchè la funzione $e^{-j\varpi T}$ è periodica

se $\sigma > 0$ $\quad e^{-\sigma T}$ tende a zero per T $\to \infty \Rightarrow \lim_{T\to\infty} \frac{1}{s}\left[1 - e^{-\sigma T} e^{-j\varpi T}\right] = \frac{1}{s}$

La regione di convergenza è $\sigma > 0$

$$\boxed{L[\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s}}$$

ESEMPIO: L-Trasformata della funzione esponenziale

$f(t) = e^{at}$ con a reale o complessa

$$F(s) = L\left[e^{at}\right] = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{at} e^{-st} dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-(s-a)t} dt = \lim_{T\to\infty} \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_0^T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{s-a}\left[1 - e^{-(s-a)t}\right] = \frac{1}{s-a}$$

$$\boxed{L\left[e^{at}\right] = \frac{1}{s-a}}$$

NOTA: L'integrale che definisce la L - Trasformata puo' essere calcolato, in genere, solo per valori di s tali che $\Re e\{s\} = \sigma > \sigma_c$

σ_c e' detta ascissa di convergenza

Nel caso di $\delta_{-1}(t)$ per esempio, l'ascissa di convergenza vale 0.

Tuttavia, impropriamente, si considera la funzione $\frac{1}{s}$ come trasformata di $\delta_{-1}(t)$ anche per valori di s che non appartengono al dominio di convergenza

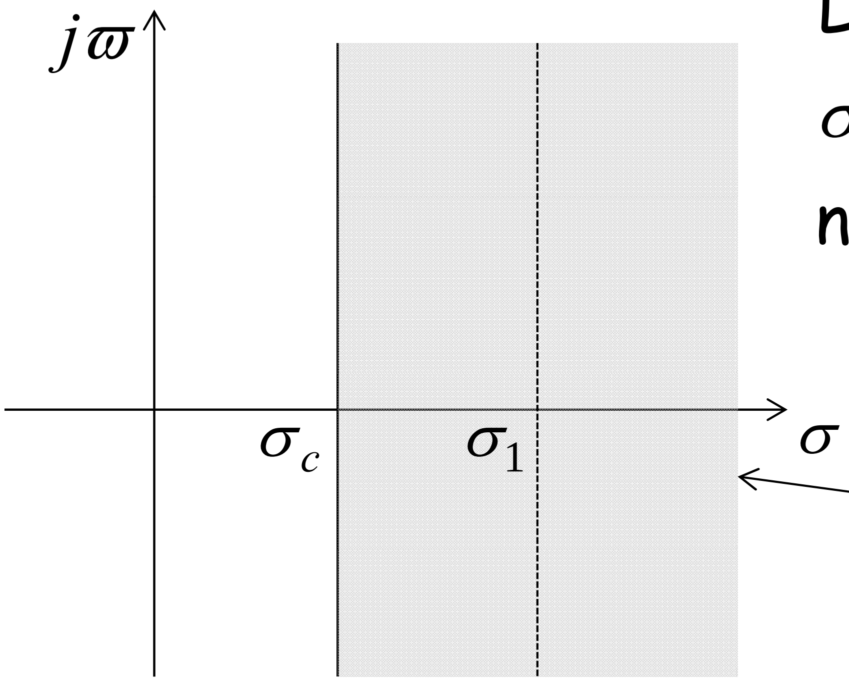
NOTA: L'ipotesi che $f(t) = 0$ per $t < 0$ e' necessaria per garantire la unicità della L - Trasformata

DEFINIZIONE DI ANTI-TRASFORMATA

La anti – trasformata di $F(s)$ è :

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds$$

esiste per t > 0



L'integrale è eseguito lungo una retta

$\sigma_1 + j\varpi$ con $-\infty < \varpi < \infty$

nella regione di convergenza

Regione di convergenza

Proprietà di unicità

Se due funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$ hanno la stessa L-trasformata allora deve essere:

$$f_1(t) \Leftrightarrow f_2(t)$$

$$\Downarrow$$

Esiste una corrispondenza biunivoca tra le funzioni trasformabili e le corrispondenti trasformate

$$\Downarrow$$

$$f(t) \Leftrightarrow F(s)$$

PROPRIETA' DELLE L-TRASFORMATE

LINEARITA': $L\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$

dalla linearità dell'integrale:

$$L\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] = \int_0^{\infty} \left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] e^{-st} dt =$$

$$\int_0^{\infty} \left[c_1 f_1(t)\right] e^{-st} dt + \int_0^{\infty} \left[c_2 f_2(t)\right] e^{-st} dt = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) \quad c.v.d.$$

Esempio: Trasformata della Funzione seno

$$L\left[\sin \varpi t\right] = L\left[\frac{e^{j\varpi t} - e^{-j\varpi t}}{2j}\right] = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\varpi} - \frac{1}{s + j\varpi}\right) =$$

$$= \frac{1}{2j}\frac{2j\varpi}{s^2 + \varpi^2} = \frac{\varpi}{s^2 + \varpi^2} \Rightarrow \boxed{L\left[\sin \varpi t\right] = \frac{\varpi}{s^2 + \varpi^2}}$$

PROPRIETA' DELLE L-TRASFORMATE (Cnt.)

DERIVATA

$$\boxed{L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)}$$

Dimostrazione:

$$F(s) = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{df(t)}{dt} e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\left[\underbrace{f(T)e^{-sT}}_{0} - f(0) - \int_0^T - sf(t)e^{-st}dt\right] = \Big|$$

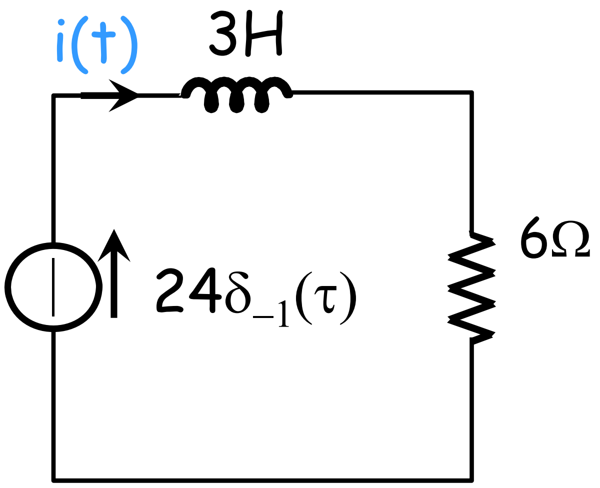
$$= 0 - f(0^-) + sF(s) = sF(s) - f(0) \quad c.v.d.$$

DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

$$\boxed{L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f^{(1)}(0^-) - .... - sf^{(n-2)}(0^-) - f^{(n-1)}(0^-)}$$

dove: $f^{(k)}(0^-) = \left.\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right|_{t=0^-}$

ESEMPIO I



$$i(0^-) = 1A$$

$$3 \cdot \frac{di}{dt} + 6 \cdot i = 24\delta_{-1}(t)$$

$$3\left[s \cdot I(s) - i(0^-)\right] + 6 \cdot I(s) = \frac{24}{s}$$

$$(s+2)I(s) = \frac{8}{s} + 1 \Rightarrow$$

$$I(s) = \frac{\frac{8}{s}+1}{s+2} = \frac{8+s}{s^2+2s}$$

$$i(t) = L^{-1}\left[I(s)\right] = 4 - 3e^{-2t}$$ per $t > 0$

PROPRIETA' DELLE L-TRASFORMATE (**Cnt.**)

Derivazione rispetto ad s

$$\boxed{\frac{dF(s)}{ds} = -L\left[tf(t)\right]}$$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \Rightarrow \frac{dF(s)}{ds} = \int_0^\infty f(t)(-te^{-st})dt =$$

$$= -\int_0^\infty tf(t)(e^{-st})dt = -L\left[tf(t)\right] \quad \text{c.v.d.}$$

Integrazione

$$\boxed{L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}}$$

PROPRIETA' DELLE L-TRASFORMATE (Cnt.)

Dimostrazione

$$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]e^{-st}dt$$

Integrando per parti con :

$$u(t) = \left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] \Rightarrow du = f(t)dt$$

$$dv = e^{-st}dt \Rightarrow v = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)e^{-st} f(t)dt =$$

$$= 0 + \cancelto{0}{\frac{1}{s}\int_0^0 f(\tau)d\tau} + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s}F(s) \quad \text{c.v.d.}$$

PROPRIETA' DELLE L-TRASFORMATE (**Cnt.**)

TEOREMA DEL VALORE INIZALE :

$$f(0^+) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

TEOREMA DEL VALORE FINALE :

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s) \quad \left(\text{se esiste} \lim_{t \to \infty} f(t)\right)$$

PROPRIETA' DELLE L-TRASFORMATE (**Cnt.**)

Dimostrazione

$$L\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0) = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt$$

$$\lim_{s\to\infty}\left[sF(s) - f(0)\right] = 0 \Rightarrow sF(s) = f(0) \quad \text{c.v.d.}$$

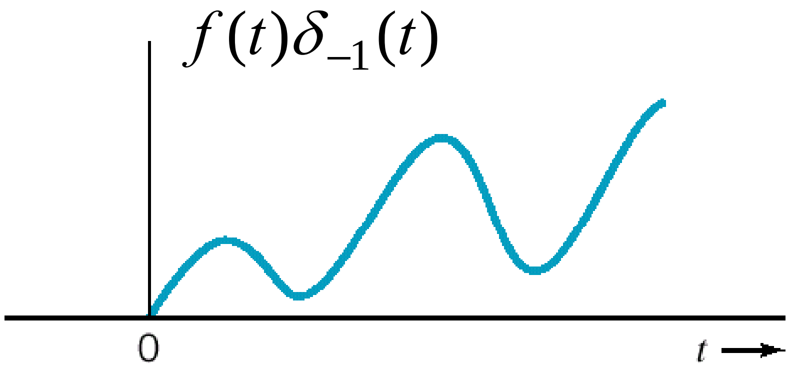
$$\lim_{s\to 0}\left[sF(s) - f(0)\right] = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-0t} dt = \int_0^{\infty} df = f(\infty) - f(0) \Rightarrow$$

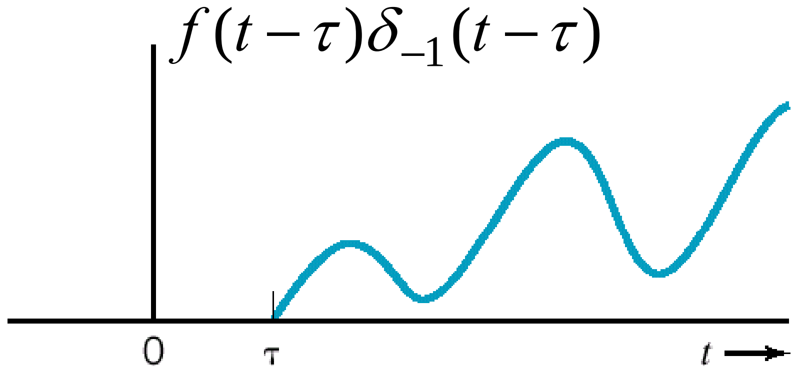
$$\Rightarrow f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s) \quad \text{c.v.d.}$$

PROPRIETA' DELLE L-TRASFORMATE (Cnt.)

TEOREMA DELLA TRASLAZIONE NEL TEMPO:

$$\boxed{L\left[f(t-\tau)\delta_{-1}(t-\tau)\right]=e^{-\tau\cdot s}F(s)}$$





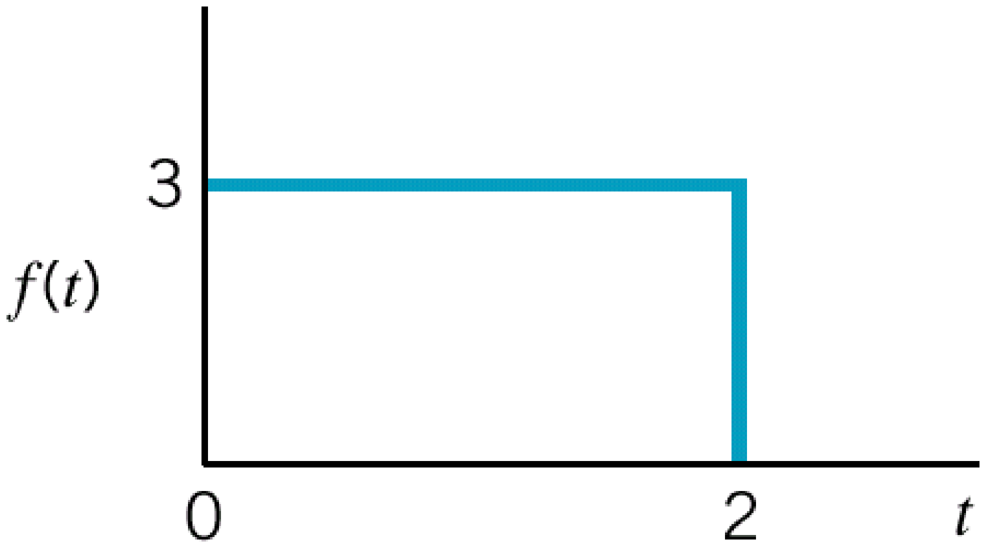
Dimostrazione:

$$L\left[f(t-\tau)\delta_{-1}(t-\tau)\right]=\int_0^\infty f(t-\tau)\delta_{-1}(t-\tau)\cdot e^{-st}dt=\int_\tau^\infty f(t-\tau)\cdot e^{-st}dt$$

ponendo: $x=t-\tau \Rightarrow t=x+\tau \Rightarrow dt=dx$

$$\int_\tau^\infty f(t-\tau)\cdot e^{-st}dt=\int_0^\infty f(x)\cdot e^{-s(x+\tau)}dx=e^{-s\tau}\int_0^\infty f(x)\cdot e^{-sx}dx=e^{-s\tau}F(s)$$

Esempio



$$f(t) = 3[\delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-2)]$$

$$F(s) = \frac{3}{s} - \frac{3e^{-2s}}{s}$$

ESEMPIO: L-Trasformata dell'Impulso unitario (**Cnt**.)

Le L-trasformate permettono anche lo studio di segnali non rappresentabili da funzioni nel senso "classico" del termine.
Si tratta in tal caso di **distribuzioni**

Esempio: Impulso di Dirac

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-st}\Big|_{t=0} = 1$$

ESEMPIO

$$L\left[t^n e^{at}\delta_{-1}(t)\right]=\int_0^\infty t^n e^{at}e^{-st}dt=\int_0^\infty t^n e^{(a-s)t}dt=\left.\frac{t^n e^{(a-s)t}}{a-s}\right|_0^\infty+$$

$$-\frac{n}{a-s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{(a-s)t}dt=0-0+\frac{n}{s-a}L\left[t^{n-1}e^{(a-s)t}\right]=$$

$$\frac{n(n-1)}{(s-a)^2}L\left[t^{n-2}e^{(a-s)t}\right]=\frac{n!}{(s-a)^n}L\left[e^{(a-s)t}\right]=$$

$$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

Trasformate notevoli

$f(t) = L^{-1}[(\mathbf{F(s)}]$	$F(s) = L[F(s)]$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^n + 1}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha}$
$te^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s - \alpha)^2}$
$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(s - \alpha)^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \vartheta)$	$\frac{s \sin \vartheta + \omega \cos \vartheta}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t + \vartheta)$	$\frac{s \cos \vartheta - \omega \sin \vartheta}{s^2 + \omega^2}$
$e^{\alpha t} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$
$e^{\alpha t} \cos(\omega t)$	$\frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$

PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

Date due funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$, si definisce prodotto integrale o prodotto di convoluzione :

$$f_3(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau = f_1(t) * f_2(t)$$

TEOREMA :

La trasformata di Laplace del prodotto di convoluzione e' uguale al prodotto delle trasformate di Laplace delle funzioni

$$F_3(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

ANTI-TRASFORMAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI

Sia $F(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)} = \dfrac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} \cdots + a_1 s + a_0} \qquad m < n$

Caso 1) $D(s) = (s - p_1)\cdot(s - p_2)\cdots(s - p_n)$

con $p_i \neq p_j \quad \text{se}\, i \neq j \quad$ (poli semplici)

allora: $F(s) = \dfrac{N(s)}{(s - p_1)\cdots(s - p_n)} = \dfrac{R_1}{(s - p_1)} + \cdots + \dfrac{R_n}{(s - p_n)}$

R_i : residui

$$L^{-1}\left[\frac{R_i}{(s - p_i)}\right] = R_i e^{p_i t}$$

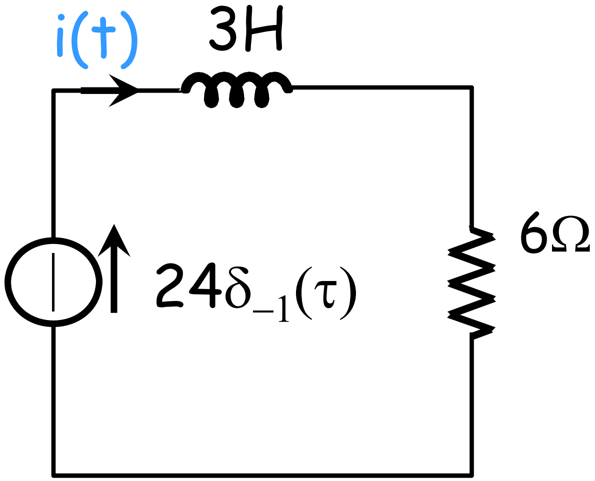
Calcolo dei residui

a) $\rightarrow F(s) = \dfrac{R_1(s - p_2)\cdots(s - p_n) + \cdots + R_n(s - p_1)\cdots(s - p_{n-1})}{(s - p_1)\cdots(s - p_n)}$

eguagliando i coefficienti in termini di R_i ai coefficienti b_i

si ottengono n equazioni in n incognite

ESEMPIO I



$$\boxed{i(0^-) = 1A}$$

$$I(s) = \frac{8+s}{s^2+2s} = \frac{8+s}{s(s+2)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+2}$$

$$I(s) = \frac{R_1(s+2) + R_2 s}{s(s+2)} \Rightarrow \begin{cases} (R_1 + R_2) = 1 \Rightarrow R_2 = -3 \\ 2R_1 = 8 \Rightarrow R_1 = 4 \end{cases}$$

$$I(s) = \frac{4}{s} - \frac{3}{s+2} \Rightarrow i(t) = (4 - 3e^{-2t})\delta_{-1}(t)$$

ANTITRASFORMAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI (**Cnt.**)

Calcolo dei residui

b) $\rightarrow (s-p_i)\cdot F(s) = R_i + \sum_{i\neq j}(s-p_i)\cdot\dfrac{R_j}{(s-p_j)}$

$$R_i = \lim_{s\to p_i}(s-p_i)\cdot F(s)$$

Esempio I: $I(s) = \dfrac{8+s}{s^2+2s} = \dfrac{8+s}{s(s+2)} = \dfrac{R_1}{s} + \dfrac{R_2}{s+2}$

$p_1 = 0$; $p_2 = -2$

$$R_1 = \lim_{s\to 0} s\cdot I(s) = \lim_{s\to 0}\frac{8+s}{s+2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$R_2 = \lim_{s\to -2}(s+2)\cdot I(s) = \lim_{s\to -2}\frac{8+s}{s} = \frac{6}{-2} = -3$$

$F(s) = \dfrac{4}{s} - \dfrac{3}{s+2}$ c.v.d.

ANTITRASFORMAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI (**Cnt.**)

Nel caso di poli complessi essi sono presenti in coppie coniugate:

$$p_1 = \sigma_1 + j\varpi_1 \quad ; \quad p_2 = \sigma_1 - j\varpi_1 = p_1^*$$

I residui sono: $\rightarrow R_1 = u_1 + jv_1 \quad ; \quad R_2 = u_1 - jv_1 = R_1^*$

$$F(s) = \frac{R_1}{s - p_1} + \frac{R_1^*}{s - p_1^*}$$

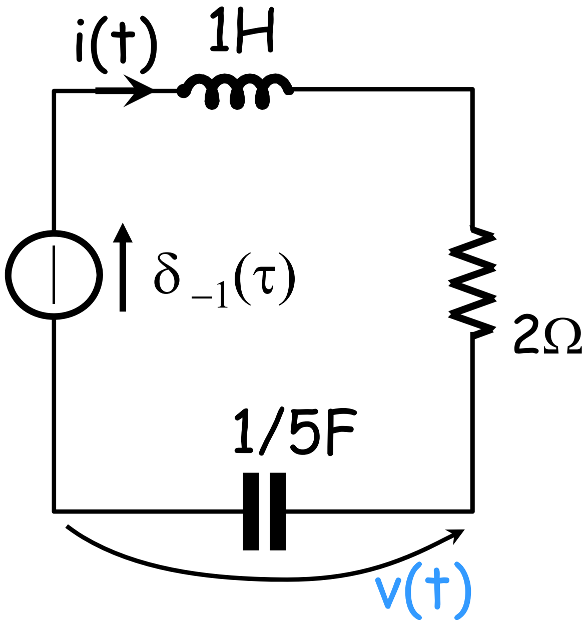
se $M = \sqrt{u_1^2 + v_1^2}$; $\varphi = arctg\dfrac{v_1}{u_1}$

$$F(s) = M\left[\frac{e^{j\varphi}}{s - p_1} + \frac{e^{-j\varphi}}{s - p_1^*}\right]$$

$$L^{-1}\left[F(s)\right] = M\left[e^{p_1 t + j\varphi} + e^{p_1^* t - j\varphi}\right] = M\left[e^{\sigma_1 t + j(\varpi_1 t + \varphi)} + e^{\sigma_1 t - j(\varpi_1 t + \varphi)}\right] =$$

$$= 2Me^{\sigma_1 t}\cos(\varpi_1 t + \varphi)$$

ESEMPIO II



$$\boxed{i(0^-)=0\,;\;\; v(0^-)=0}$$

$$\delta_{-1}(t)=\frac{di}{dt}+2\cdot i+5\int_0^t i(\tau)d\tau$$

$$\frac{1}{s}=s\cdot I(s)+2\cdot I(s)+5\frac{I(s)}{s}$$

$$I(s)=\frac{1}{s^2+2s+5}\Rightarrow\begin{cases}p_1=-1+j2\\ p_1{}^*=-1-j2\end{cases}$$

$$R_1=\lim_{s\to-1+j2}\frac{1}{s+1+j2}=\frac{1}{j4}=-j\frac{1}{4}$$

$$M=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}\qquad \varphi=-\frac{\pi}{2}$$

$$I(s)=\frac{1}{4}\left[\frac{e^{-j\pi/2}}{s-p_1}+\frac{e^{j\pi/2}}{s-p_1^*}\right]\Rightarrow i(t)=2\frac{1}{4}e^{-t}\cos\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$$

ANTITRASFORMAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI (**Cnt.**)

Caso2) Poli Multipli

Hp.: sia presente un polo p_i di molteplicità $\ell > 1$

$$F(s) = \ldots\ldots + \frac{R_{i,1}}{(s-p_i)} + \frac{R_{i,2}}{(s-p_i)^2} + \ldots. + \frac{R_{i,\ell}}{(s-p_i)^\ell} + \ldots$$

Si dimostra che: $R_{i,j} = \dfrac{1}{(\ell - j)!}\left[\dfrac{d^{\ell-j}}{ds^{\ell-j}}(s-p_i)^\ell F(s)\right]_{s=p_i} \quad j = 1, \ldots., \ell$

Si noti che: $L^{-1}\left[\dfrac{R_{i,j}}{(s-p_i)^j}\right] = R_{i,j}\dfrac{t^{j-1}e^{p_i t}}{(j-1)!} \quad j = 1, \ldots., \ell$

Se $\ell = 2$ (polo doppio): $\Rightarrow F(s) = \ldots\ldots + \dfrac{R_{i,1}}{(s-p_i)} + \dfrac{R_{i,2}}{(s-p_i)^2} + \ldots$

$$R_{i,1} = \left[\frac{d}{ds}(s-p_i)^2 F(s)\right]_{s=p_i} \qquad R_{i,2} = \left[(s-p_i)^2 F(s)\right]_{s=p_i}$$

$$L^{-1}\left[\frac{R_{i,1}}{(s-p_i)} + \frac{R_{i,2}}{(s-p_i)^2}\right] = R_{i,1}e^{p_i t} + R_{i,2}te^{p_i t}$$

ANTI-TRASFORMAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI IMPROPRIE

Sia $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} \cdots + a_1 s + a_0} \quad m = n$

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)}$$

$Q(s)$ quoziente si riduce ad una costante K se m = n

$R(s)$ resto di grado inferiore a D(s) $\Rightarrow \frac{R(s)}{D(s)}$ funzione razionale propria

$$L^{-1}[Q(s)] = K\delta(t)$$

La funzione Q(s) si riduce ad una costante e la sua anti-trasformata è un impulso di area pari a K

La funzione razionale propria rimanente si può anti-trasformare calcolandone i residui

ESEMPIO

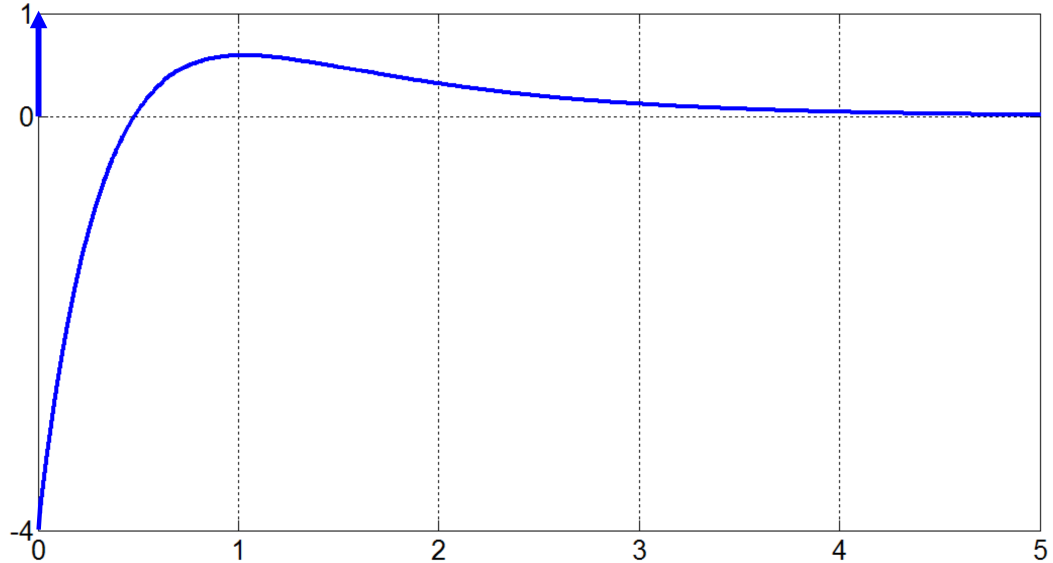
$$F(s)=\frac{s^2+4}{s^2+4s+3}=\frac{s^2+4s-4s+4}{s^2+4s+3}=\frac{(s^2+4s+3)-4s+1}{s^2+4s+3}=$$

$$=1-\frac{4s-1}{s^2+4s+3}=1-\frac{4s-1}{(s+3)(s+1)}=1-\frac{R_1}{(s+3)}-\frac{R_2}{(s+1)}$$

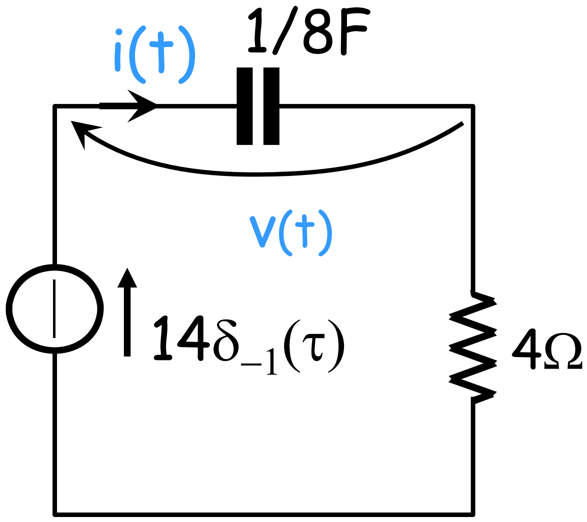
$$R_1=\left.\frac{4s-1}{(s+1)}\right|_{s=-3}=6{,}5;\quad R_2=\left.\frac{4s-1}{(s+3)}\right|_{s=-1}=-2{,}5$$

$$F(s)=1-\frac{6{,}5}{(s+3)}+\frac{2{,}5}{(s+1)}$$

$$\Rightarrow f(t)=\delta(t)-6{,}5e^{-3t}+2{,}5e^{-t}$$



ESEMPIO III



$$\boxed{v(0^-) = 2V}$$

$$14 = 4 \cdot i(t) + v(0^-) + 8 \cdot \int_0^t i(\tau)d\tau \Rightarrow$$

$$12 = 4 \cdot i(t) + 8 \cdot \int_0^t i(\tau)d\tau$$

$$\Downarrow$$

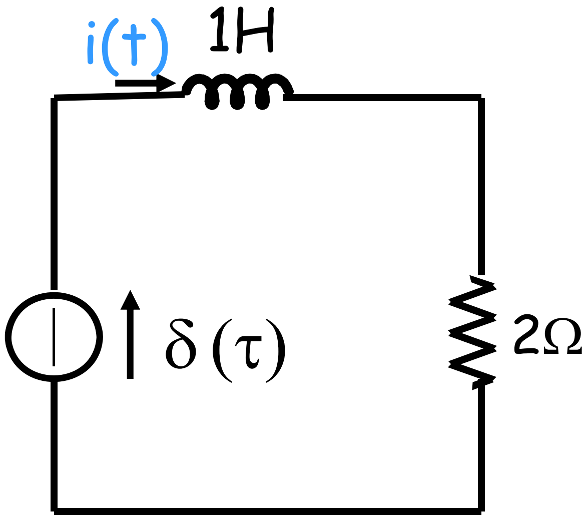
$$\frac{12}{s} = 4 \cdot I(s) + 8\frac{I(s)}{s}$$

$$(s+2) \cdot I(s) = 3 \Rightarrow I(s) = \frac{3}{s+2}$$

$$i(t) = 3 \cdot e^{-2t}\delta_{-1}(t)$$

NOTA COME LE CONDIZIONI INIZIALI ENTRANO NEL CALCOLO IN MODO NATURALE

ESEMPIO IV



$$i(0^-) = 0$$

$$\delta(t) = \frac{di}{dt} + 2 \cdot i$$

$$1 = s \cdot I(s) - i(0^-) + 2 \cdot I(s)$$

$$I(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$i(t) = e^{-2t}\delta_{-1}(t)$$

Nota:

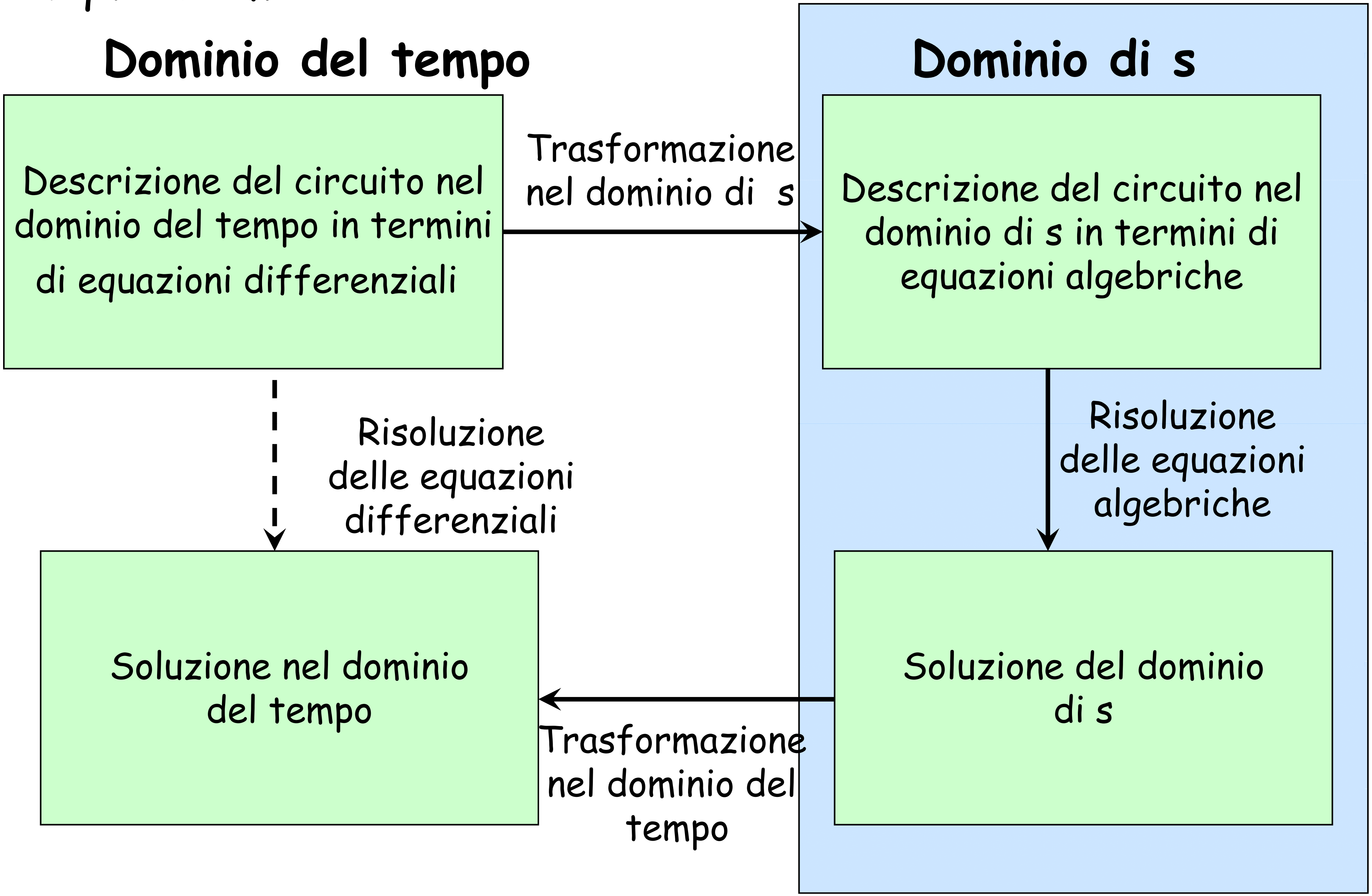
$$i(0^-) = 0$$

$$i(0^+) = 1$$

Lo stato non si e' conservato

ANALISI CIRCUITALE

L'unicità tra f(t) e F(s) permette di risolvere vari problemi in questo modo:



ANALISI CIRCUITALE

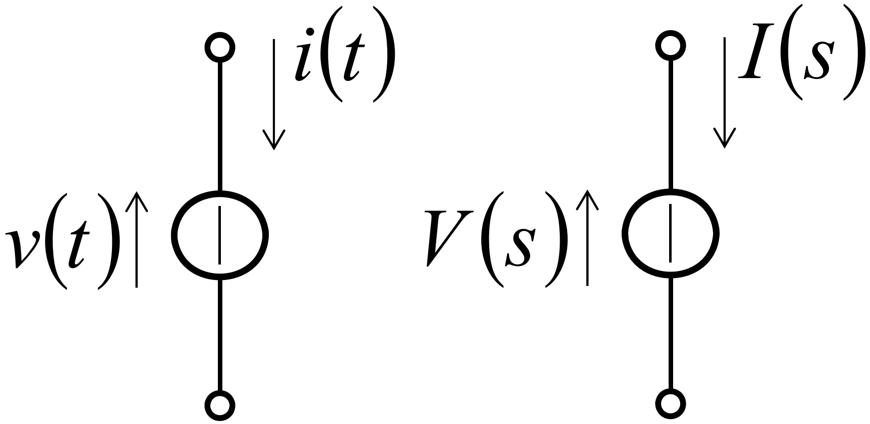
- I calcoli sono effettuati nell'ambito della teoria delle distribuzioni in modo da includere l'eventuale presenza di distribuzioni singolari nell'origine

- Le condizioni iniziali sono sempre le variabili di stato in 0-

- Tutte le F(s) possono essere anti-trasformate

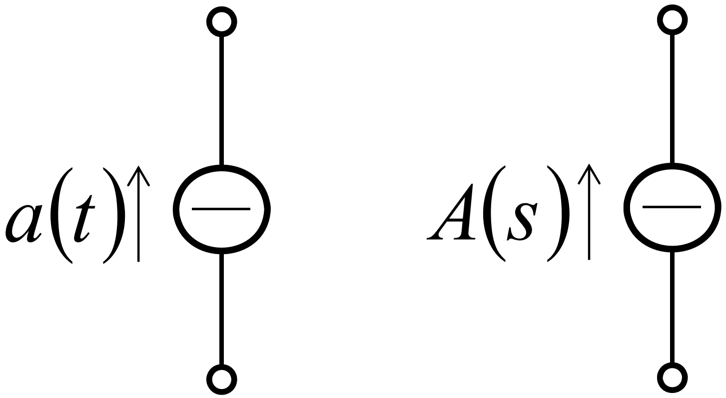
- Non e' necessario ricavare la relazione I/O ma si possono scrivere le equazioni topologiche e dei componenti nel dominio di s

EQUAZIONI DEI COMPONENTI



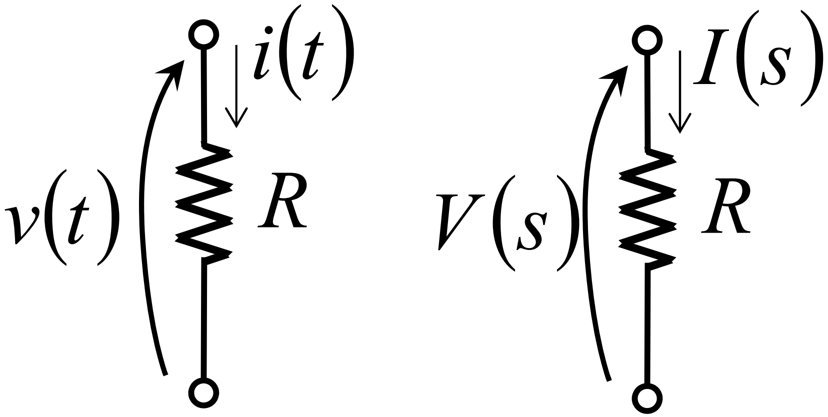
Generatore Indipendente di tensione

Hp: v(t) L-trasformabile



Generatore Indipendente di corrente

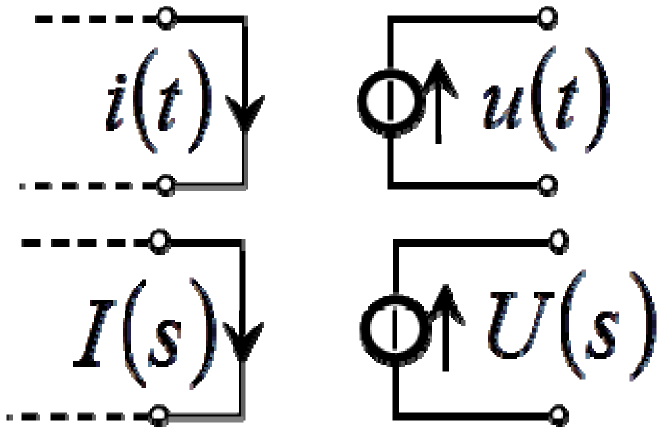
Hp: a(t) L-trasformabile



Resistore

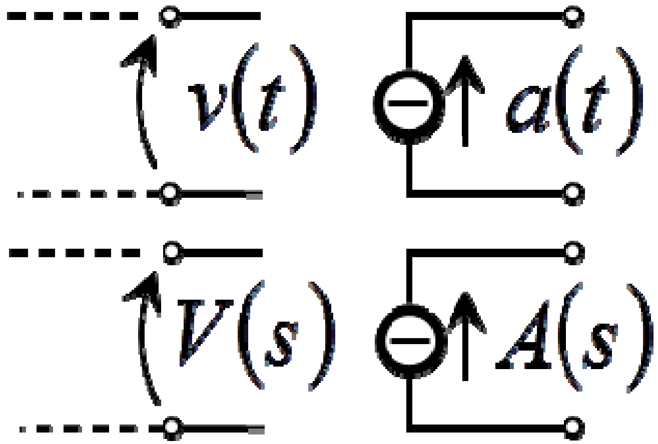
$$v(t) = R \cdot i(t) \Rightarrow V(s) = R \cdot I(s)$$

$$i(t) = G \cdot v(t) \Rightarrow I(s) = G \cdot V(s)$$



Generatore di tensione pilotato in corrente

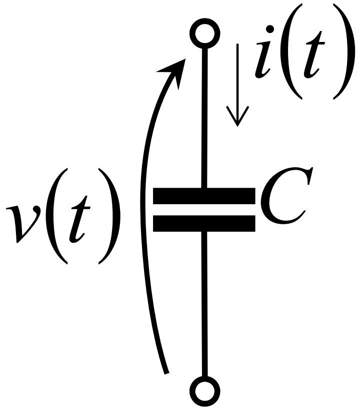
$$u(t) = r \cdot i(t) \Rightarrow U(s) = r \cdot I(s)$$

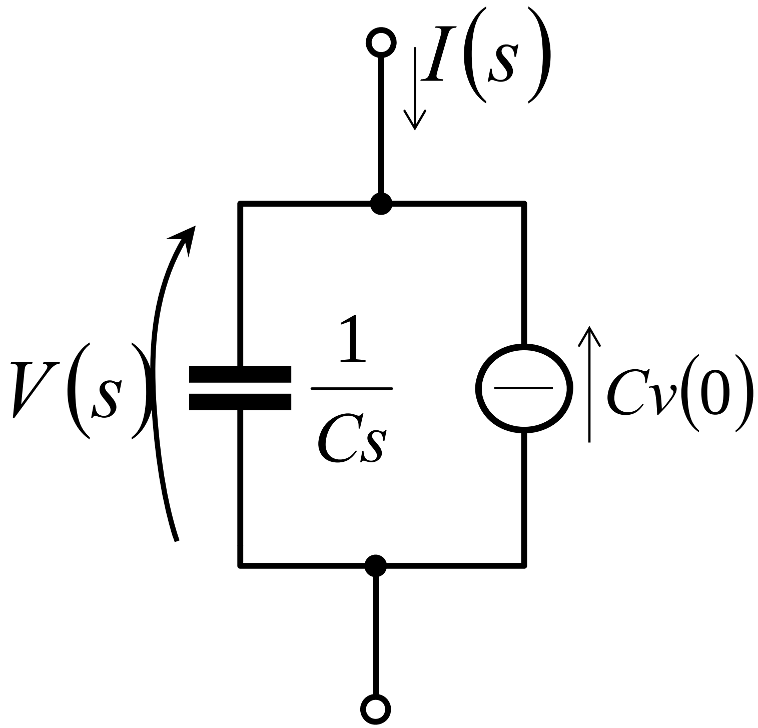


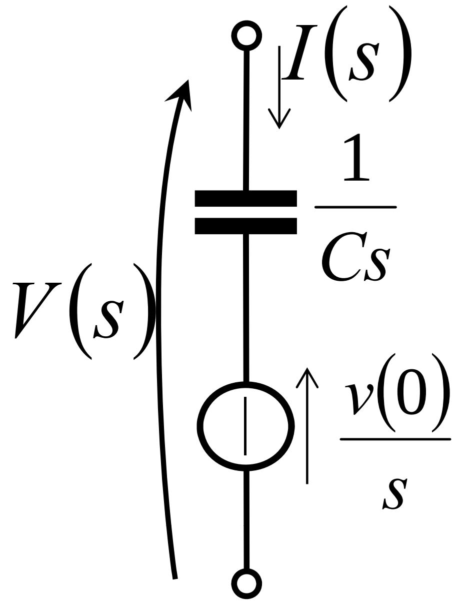
Generatore di corrente pilotato in tensione

$$a(t) = g \cdot v(t) \Rightarrow A(s) = g \cdot V(s)$$

Condensatore





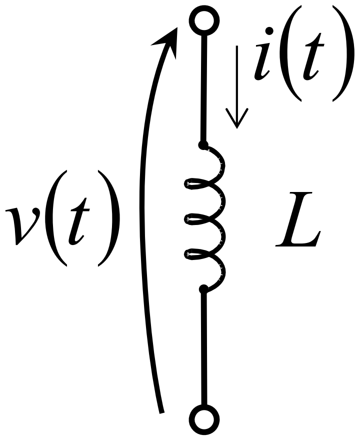


$$\begin{cases} i(t) = C \cdot \dfrac{dv}{dt} \\ v(0^-) = V_0 \end{cases}$$

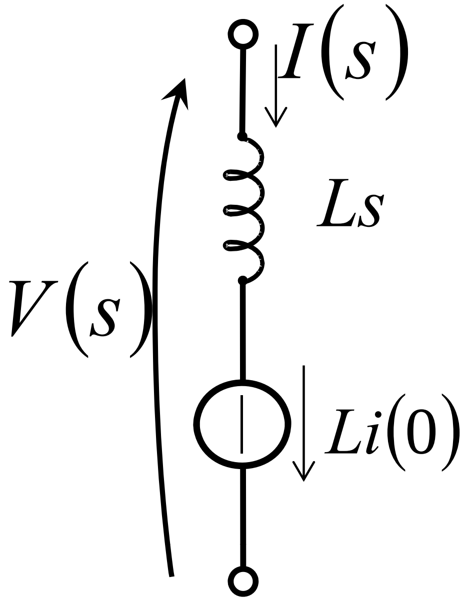
$$I(s) = sC \cdot V(s) - C \cdot V_0$$

$$V(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{V_0}{s}$$

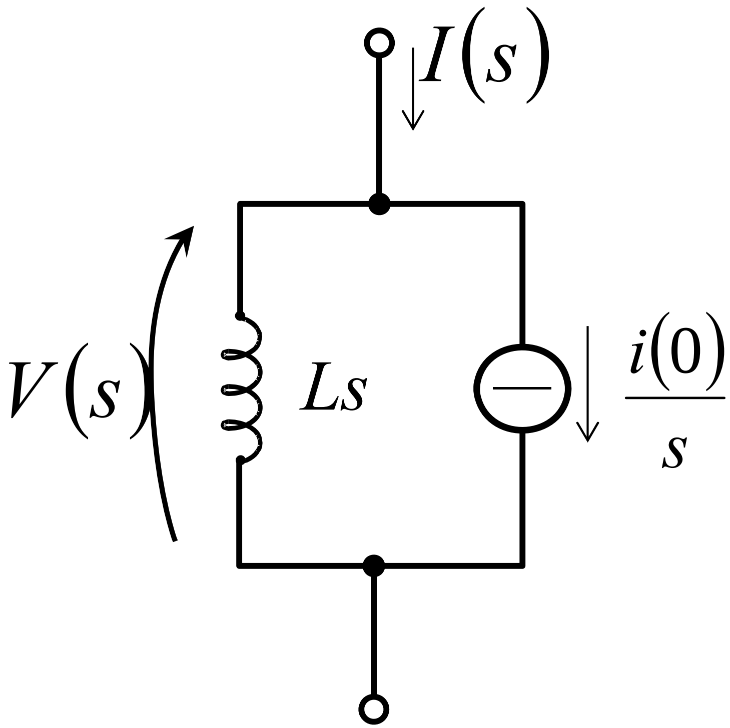
Induttore



$$\begin{cases} v(t) = L \cdot \dfrac{di}{dt} \\ i(0^-) = I_0 \end{cases}$$

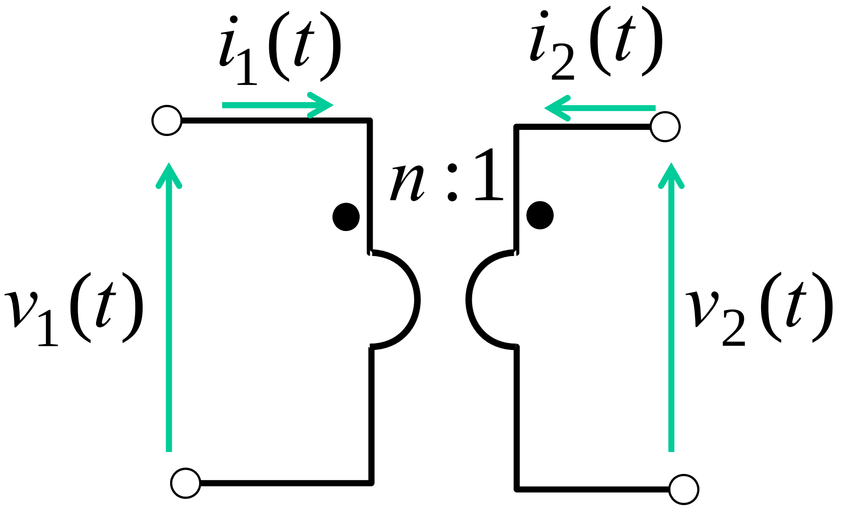


$$V(s) = sL \cdot I(s) - L \cdot I_0$$

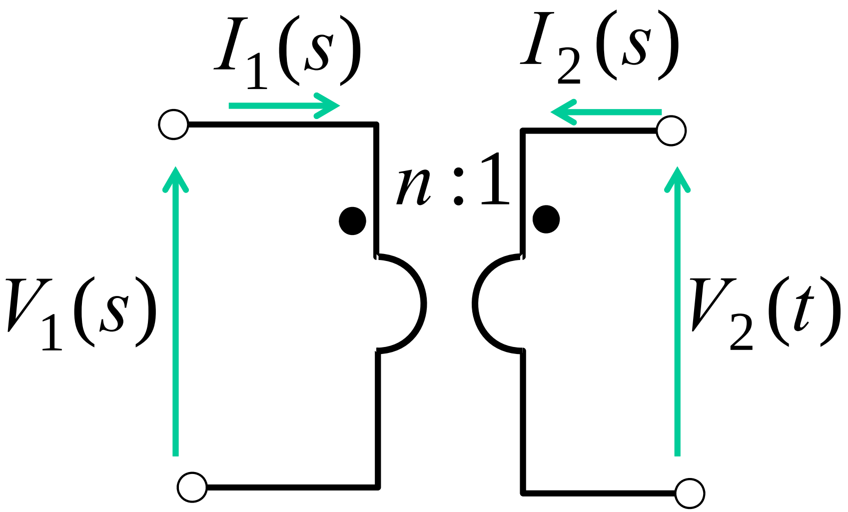


$$I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{I_0}{s}$$

Trasformatore ideale

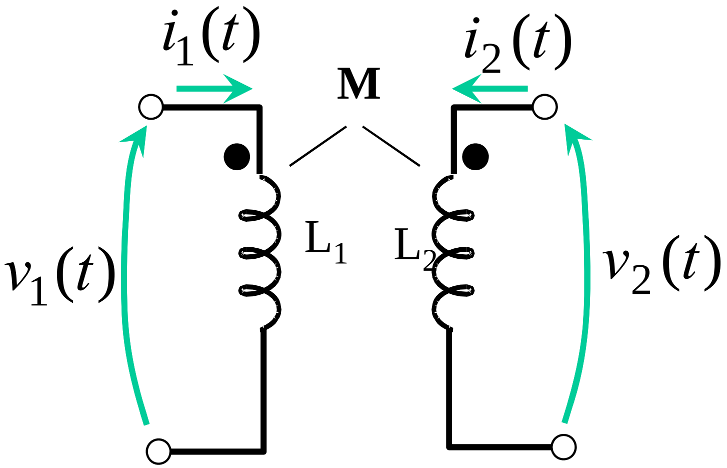


$$\begin{cases} v_1(t) = n \cdot v_2(t) \\ i_1(t) = -\dfrac{1}{n} \cdot i_2(t) \end{cases}$$

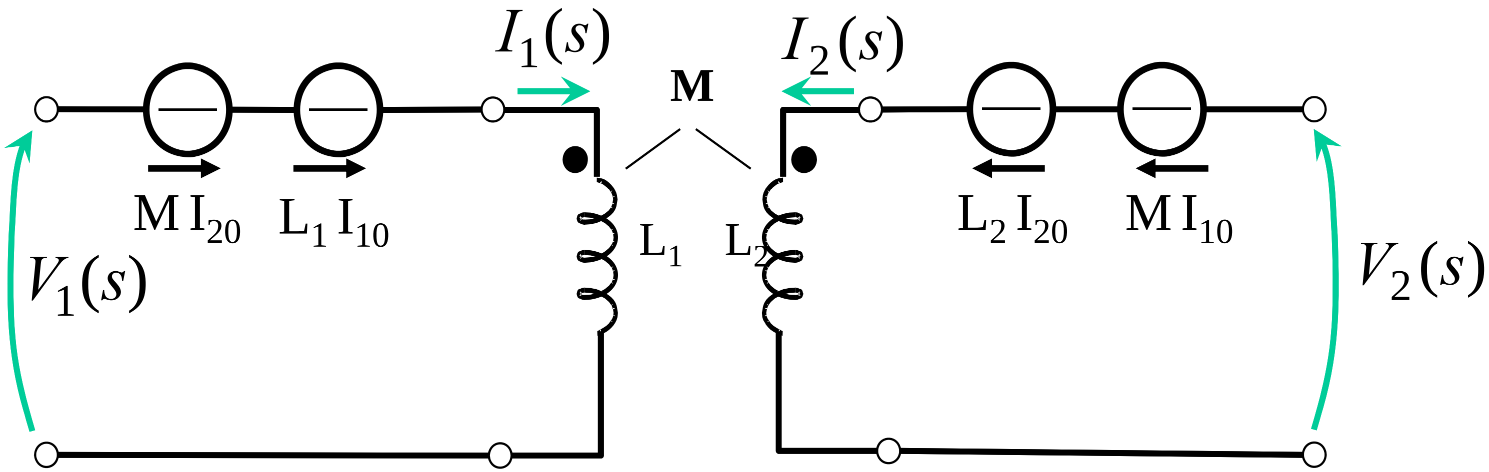


$$\begin{cases} V_1(s) = n \cdot V_2(s) \\ I_1(s) = -\dfrac{1}{n} \cdot I_2(s) \end{cases}$$

Induttori mutuamente accoppiati

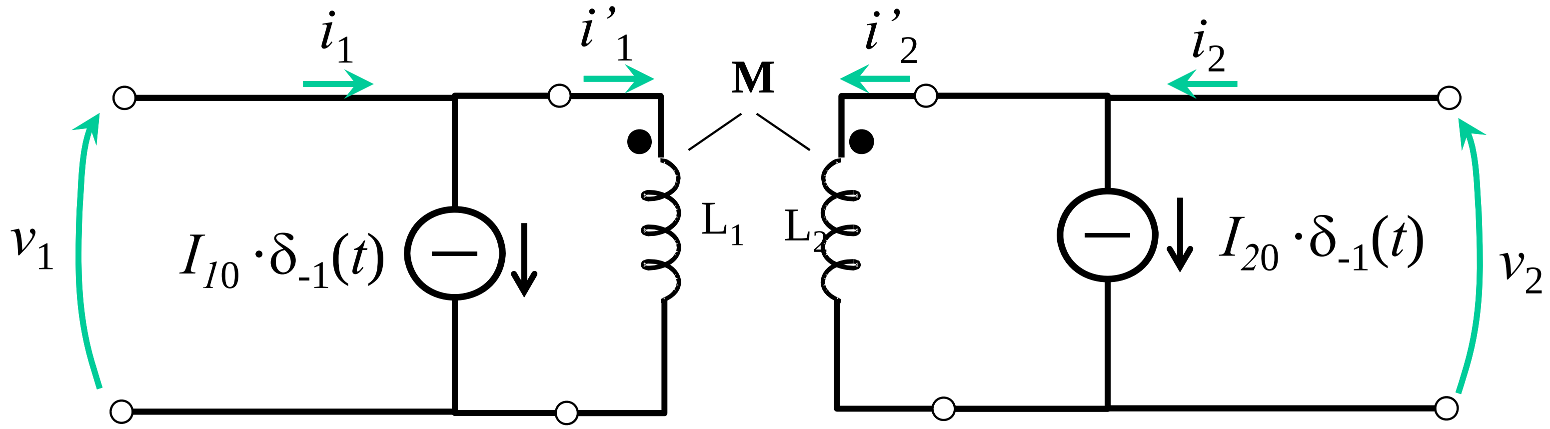


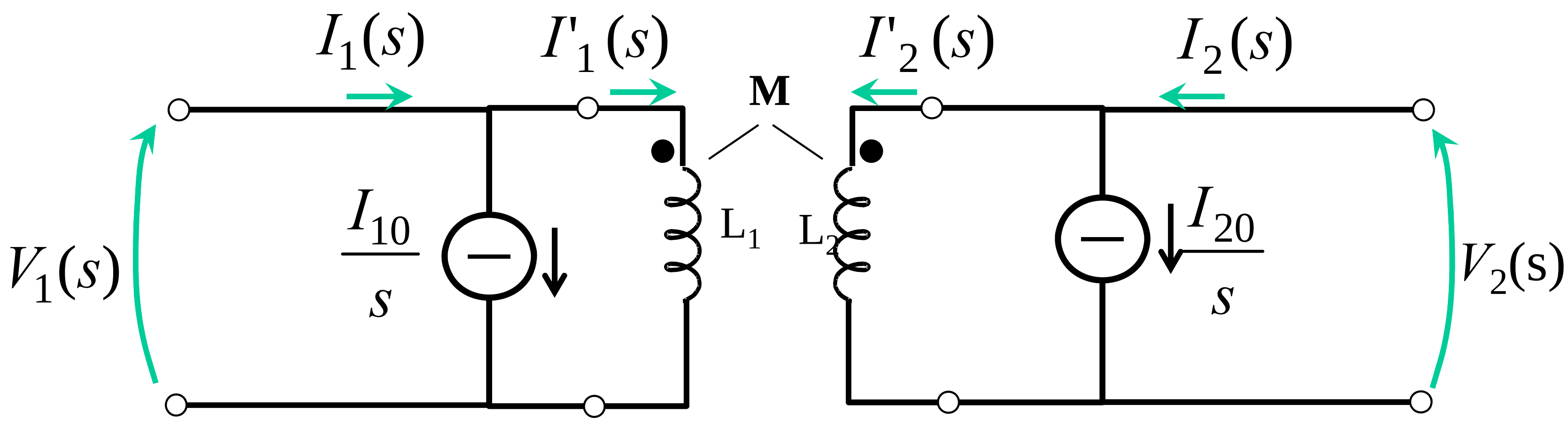
$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \cdot \dfrac{di_1}{dt} + M \cdot \dfrac{di_2}{dt} & i_1(0^-) \neq 0 = I_{10} \\ v_2(t) = M \cdot \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \cdot \dfrac{di_2}{dt} & i_2(0^-) \neq 0 = I_{20} \end{cases}$$



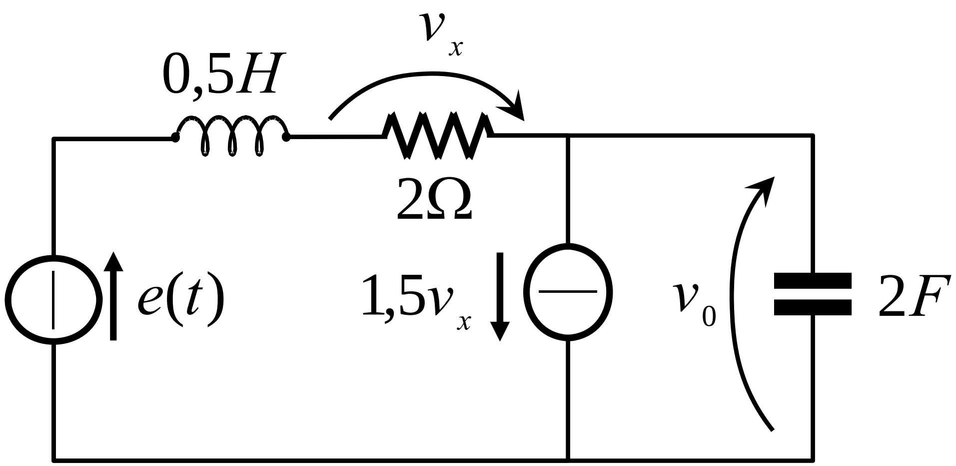
$$\begin{cases} V_1(s) = sL_1I_1(s) + sMI_2(s) - L_1I_{10} - MI_{20} \\ V_2(s) = sMI_1(s) + sL_2I_2(s) - L_2I_{20} - MI_{10} \end{cases}$$

Induttori mutuamente accoppiati



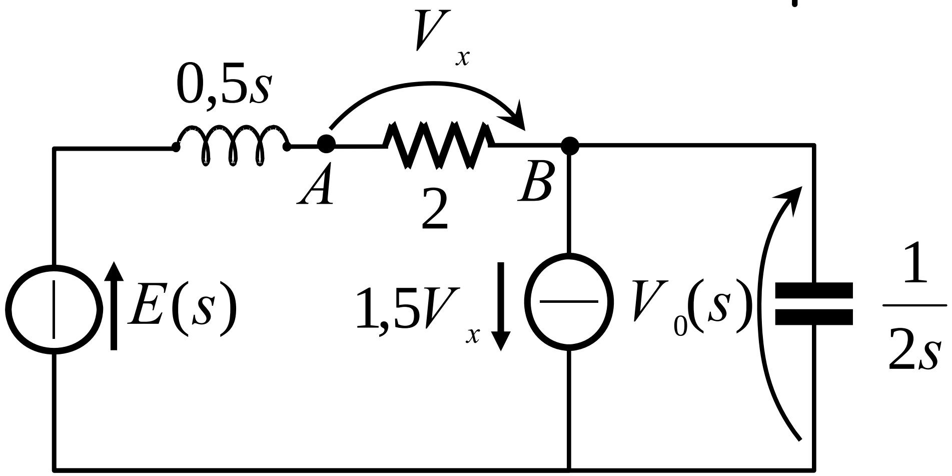


ESEMPIO: Generatore pilotato e poli multipli



Per t=0⁻ lo stato del circuito è nullo. Calcolare la $v_0(t)$ in risposta ad un ingresso e(t) a gradino unitario.

Il circuito nel dominio di Laplace è il seguente:



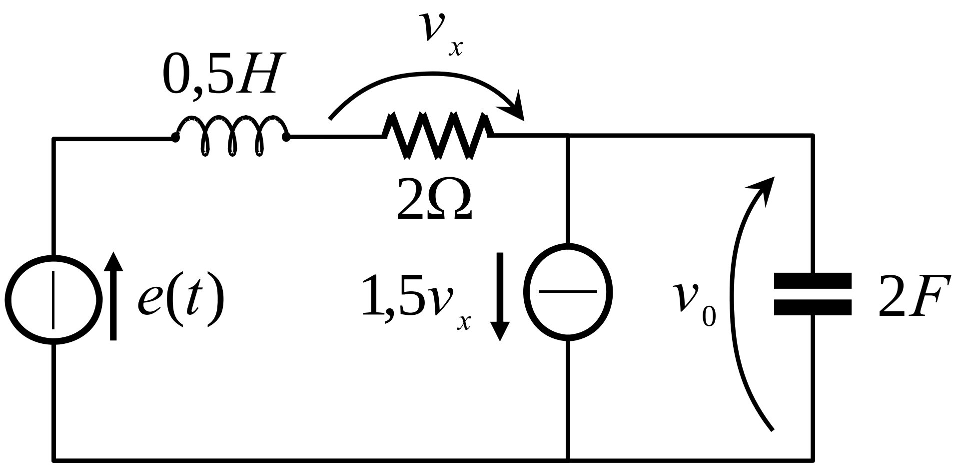
Applichiamo l'equilibrio ai nodi A e B

nodo A $\quad \dfrac{V_A - E(s)}{0{,}5s} - \dfrac{V_B - V_A}{2} = 0$

nodo B $\quad \dfrac{V_B - V_A}{2} + 1{,}5(V_B - V_A) + 2sV_B = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (4+s)V_A - sV_B = 4E(s) \\ (1+s)V_B = V_A \end{cases} \qquad \begin{cases} V_A = \dfrac{sV_B + 4E(s)}{(4+s)} \\ (1+s)V_B = \dfrac{sV_B + 4E(s)}{(4+s)} \Rightarrow V_B = \dfrac{4E(s)}{(s+2)^2} = \dfrac{4}{s(s+2)^2} \end{cases}$$

ESEMPIO: Generatore pilotato e poli multipli



Per t=0⁻ lo stato del circuito è nullo. Calcolare la $v_0(t)$ in risposta ad un ingresso e(t) a gradino unitario.

$$V_0(s) = V_B(s) = \frac{4}{s(s+2)^2} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s+2)} + \frac{R_3}{(s+2)^2}$$

$$R_1 = \left.\frac{4}{(s+2)^2}\right|_{s=0} = 1 \qquad R_2 = \frac{d}{ds}\left[V_0(s+2)^2\right]_{s=-2} = \left.\frac{d}{ds}\frac{4}{s}\right|_{s=-2} = -\left.\frac{4}{s^2}\right|_{s=-2} = -1$$

$$R_3 = \left[V_0(s+2)^2\right]_{s=-2} = \left.\frac{4}{s}\right|_{s=-2} = -2$$

$$\boxed{v_0(t) = \left[1-(1+2t)e^{-2t}\right]\delta_{-1}(t)}$$

EQUAZIONI TOPOLOGICHE

- **AI COCICLI FONDAMENTALI**

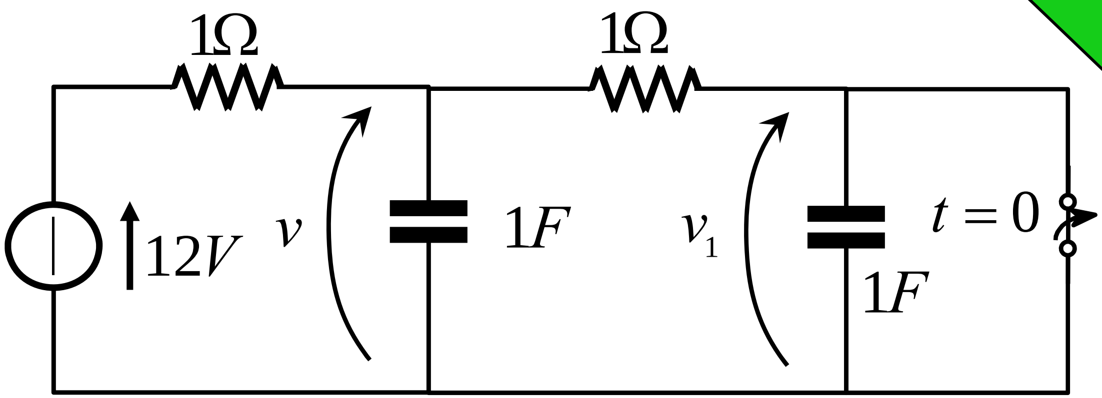
$$\sum i(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum I(s) = 0$$

- **ALLE MAGLIE FONDAMENTALI**

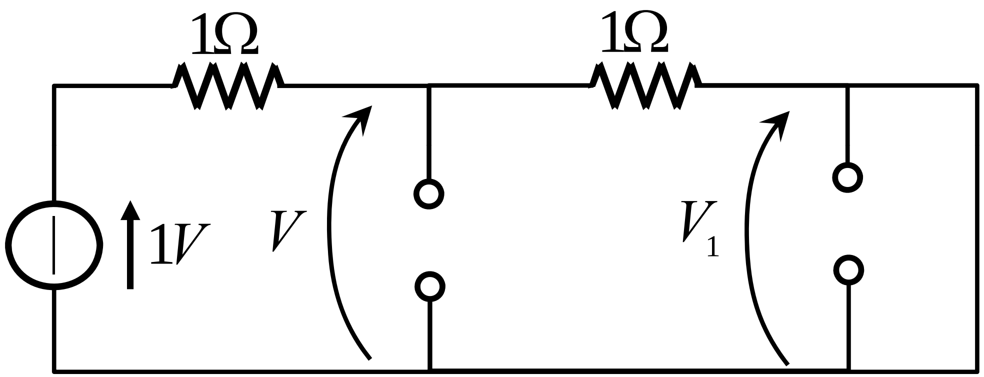
$$\sum v(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum V(s) = 0$$

ESEMPIO: Equilibrio ai nodi

L'interruttore si apre per t=0.
Il circuito è a regime per t < 0.
Ricavare v(t).



Per t < 0 il circuito è in regime stazionario:



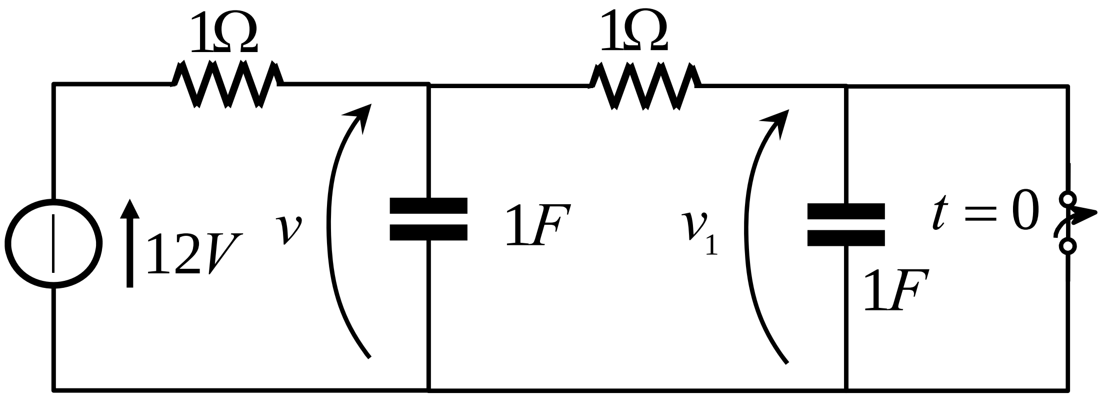
V_1 = 0 per via del c.to-c.to.

Per determinare ***v*** applichiamo la regola del partitore di tensione:

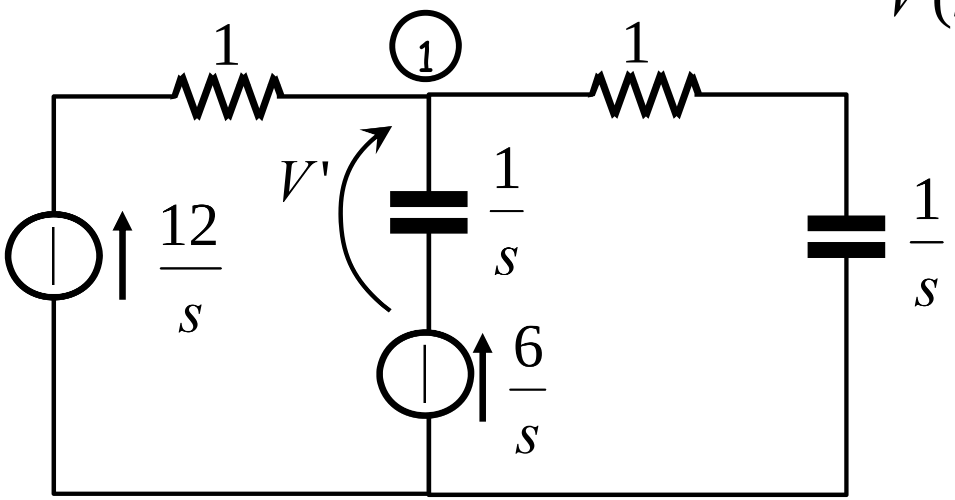
$$V = 12 \cdot \frac{1}{1+1} = 6(V) \qquad \text{da cui} \quad v\left(0^-\right) = 6; \quad v_1\left(0^-\right) = 0$$

ESEMPIO: Equilibrio ai nodi

L'interruttore si apre per t=0.
Il circuito è a regime per t < 0.
Ricavare v(t).



Per t > 0 disegniamo il circuito nel dominio di Laplace scaricando il condensatore.



$$V(s) = V'(s) + \frac{6}{s}$$

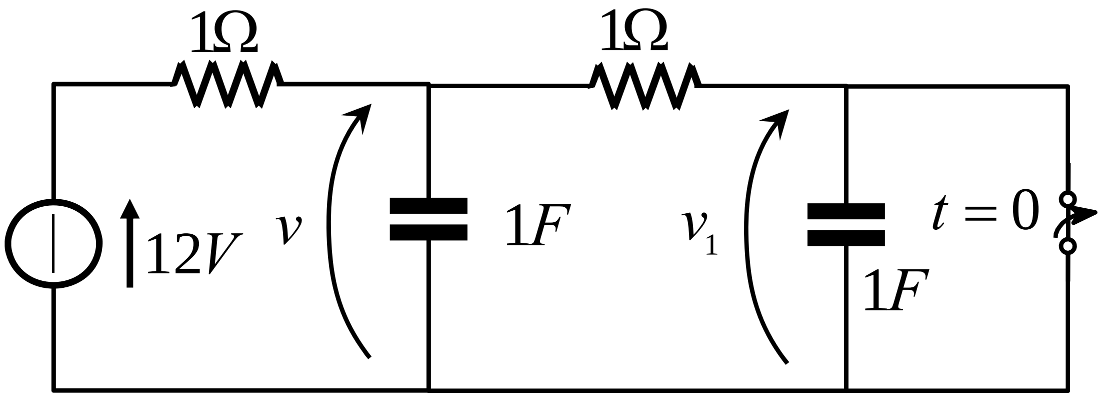
Applichiamo l'analisi nodale al nodo 1

$$\frac{\frac{12}{s} - \left(V' + \frac{6}{s}\right)}{1} = sV' + \frac{(sV' + \frac{6}{s})}{1 + \frac{1}{s}}$$

$$\frac{12}{s} - V' - \frac{6}{s} = sV' + \frac{sV' + 6}{s+1} \Rightarrow \frac{6}{s} - V' = sV' + \frac{sV' + 6}{s+1} \Rightarrow \frac{6}{s} - (s+1)V' = \frac{sV' + 6}{s+1}$$

ESEMPIO: Equilibrio ai nodi

L'interruttore si apre per t=0.
Il circuito è a regime per t < 0.
Ricavare v(t).



$$6(s+1)-s(s+1)^2V' = s^2V'+6s \Rightarrow \cancel{6s}+6-s(s^2+2s+1)V' = s^2V'+\cancel{6s}$$

$$s(s^2+2s+1)V'+s^2V' = 6 \Rightarrow s(s^2+2s+1+s)V' = 6$$

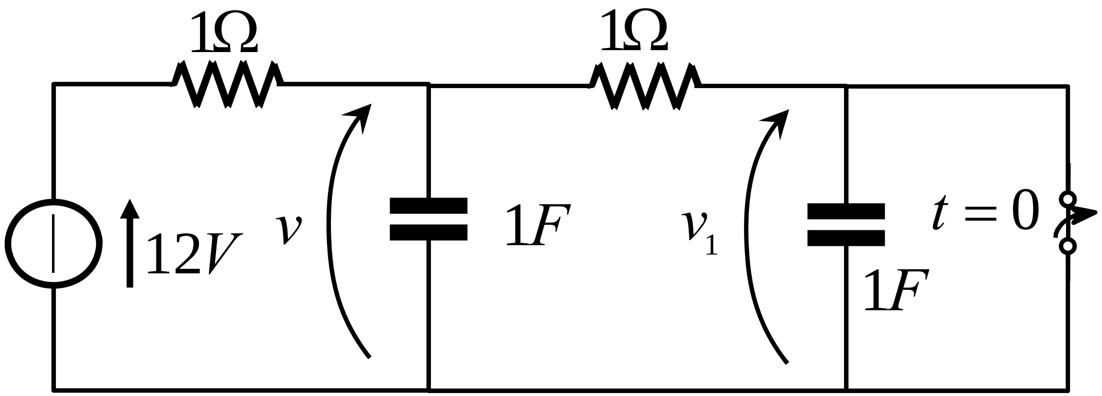
$$V'(s) = \frac{6}{s(s^2+3s+1)} \qquad p_1 = 0; \qquad p_{2,3} = \frac{-3\mp\sqrt{9-4}}{2} = \begin{cases} -0.38 \\ -2.62 \end{cases}$$

$$V'(s) = \frac{6}{s(s+0.38)(s+2.62)} = \frac{R_1}{s}+\frac{R_2}{s+0.38}+\frac{R_3}{s+2.62}$$

$$R_1 = \left.\frac{6}{(s+0.38)(s+2.62)}\right|_{s=0} = 6 \qquad R_2 = \left.\frac{6}{s(s+2.62)}\right|_{s=-0,38} = -7 \qquad R_3 = \left.\frac{6}{s(s+0.38)}\right|_{s=-2,62} = 1$$

ESEMPIO: Equilibrio ai nodi

L'interruttore si apre per t=0.
Il circuito è a regime per t < 0.
Ricavare v(t).

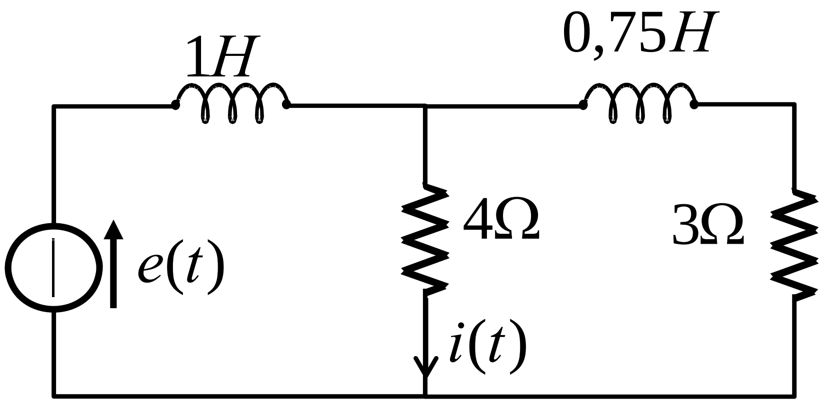


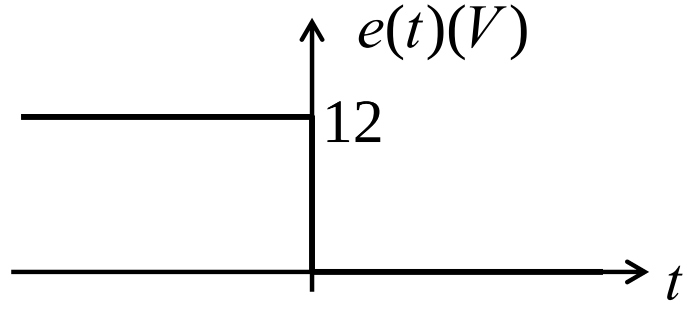
$$V'(s) = \frac{6}{s} - \frac{7}{s+0.38} + \frac{1}{s+2.62}$$

$$V(s) = V'(s) + \frac{6}{s} = \frac{12}{s} - \frac{7}{s+0.38} + \frac{1}{s+2.62}$$

$$\boxed{v(t) = \left[12 - 7e^{-0,38t} + e^{-2,62t}\right]\delta_{-1}(t)}$$

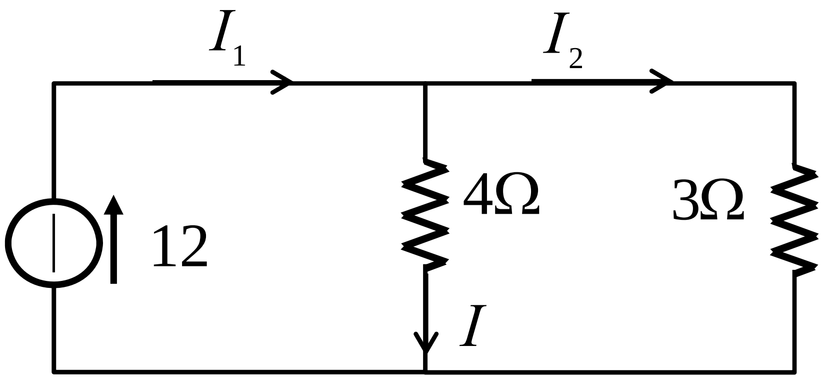
ESEMPIO:





Ricavare i(t) sapendo che il circuito è a regime per t < 0.

Per t < 0 il circuito è in regime stazionario:

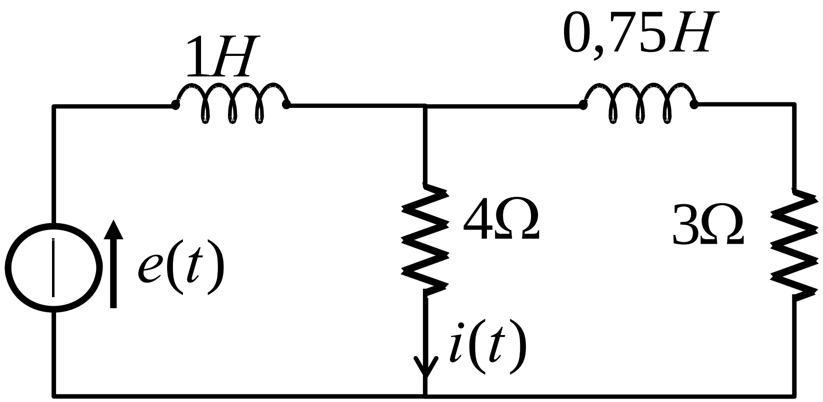


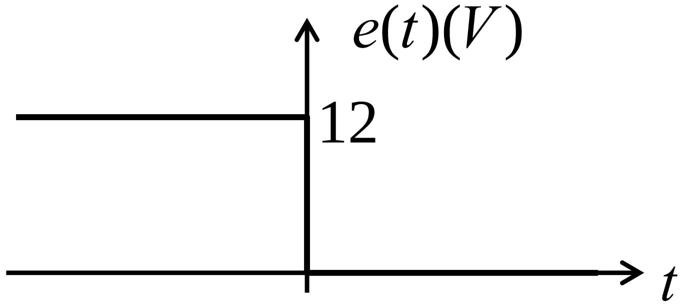
$$I = \frac{12}{4} = 3A \qquad I_2 = \frac{12}{3} = 4A$$

$$I_1 = I + I_2 = 7A$$

Da cui lo stato in t=0$^-$ è $\quad i_1(0^-) = 7A \qquad i_2(0^-) = 4A$

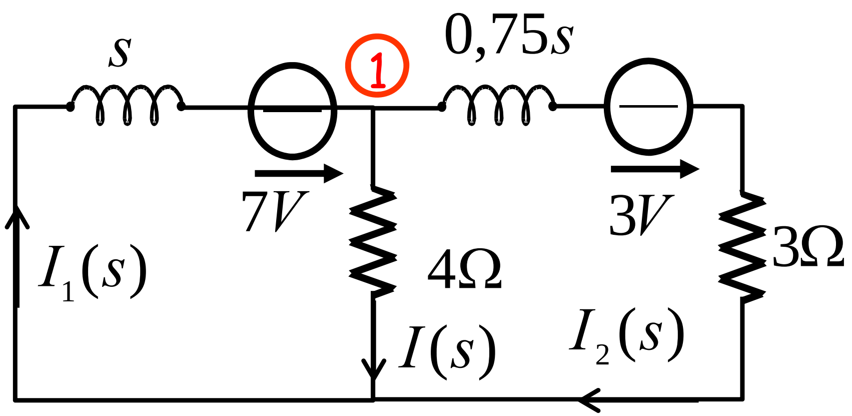
ESEMPIO:





Ricavare i(t) sapendo che il circuito è a regime per t < 0.

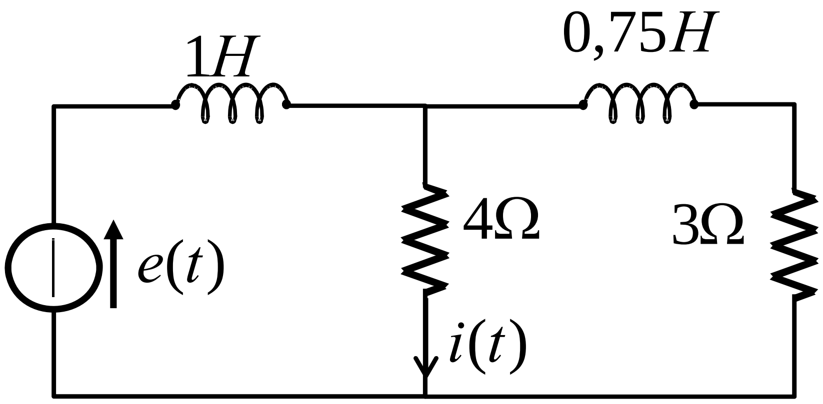
Per t >0 il circuito nel dominio di Laplace è:

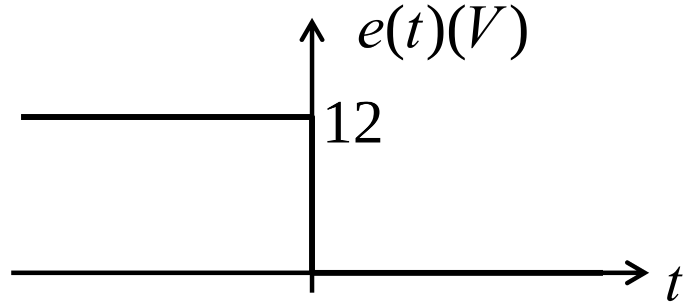


Applichiamo l'equilibrio delle correnti al nodo 1 con il metodo dei potenziali nodali

$$\frac{V_1(s)-7}{s}+\frac{V_1(s)}{4}+\frac{V_1(s)+3}{3+0{,}75s}=0 \Rightarrow 3s^2V_1(s)+40sV_1(s)+48V_1(s)=336+36s$$

ESEMPIO:





Ricavare i(t) sapendo che il circuito è a regime per t < 0.

$$V_1(s) = \frac{336+36s}{3s^2+40s+48} = \frac{112+12s}{s^2+40/3s+16}$$

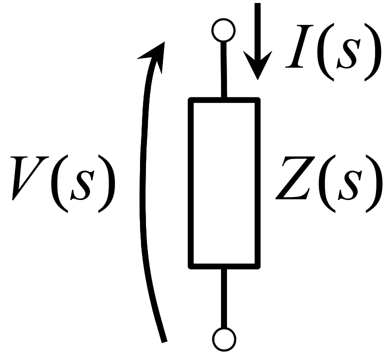
$$I(s) = \frac{V_1(s)}{4} = \frac{28+3s}{s^2+40/3s+16} \Rightarrow p_{1,2} = -\frac{20}{3} \pm \sqrt{\frac{400}{9}-16} = \begin{cases} -12 \\ -4/3 \end{cases}$$

$$I(s) = \frac{28+3s}{(s+12)(s+4/3)} = \frac{R_1}{(s+12)} + \frac{R_2}{(s+4/3)}$$

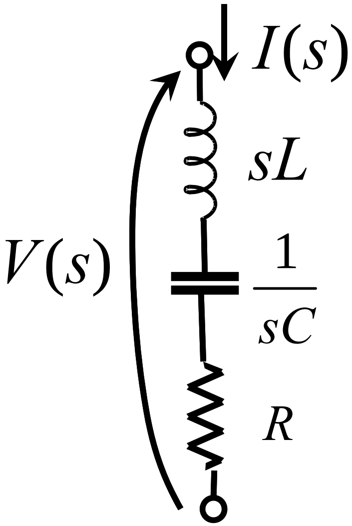
$$R_1 = \left.\frac{28+3s}{s+4/3}\right|_{s=-12} = \frac{3}{4} \qquad R_2 = \left.\frac{28+3s}{s+12}\right|_{s=-\frac{4}{3}} = \frac{9}{4}$$

$$\boxed{i(t) = \left[\frac{3}{4}e^{-12t} + \frac{9}{4}e^{-\frac{4}{3}t}\right] \cdot \delta_{-1}(t)}$$

Legge di OHM generalizzata

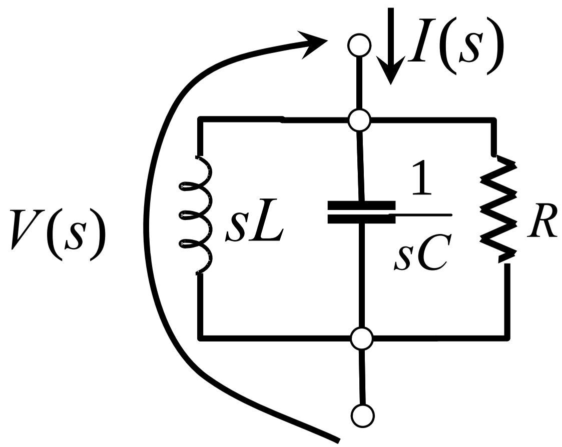


$$V(s) = Z(s)I(s)$$
$$I(s) = Y(s)V(s)$$



Applicando le regole per la serie di bipoli:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = R + sL + \frac{1}{sC}$$

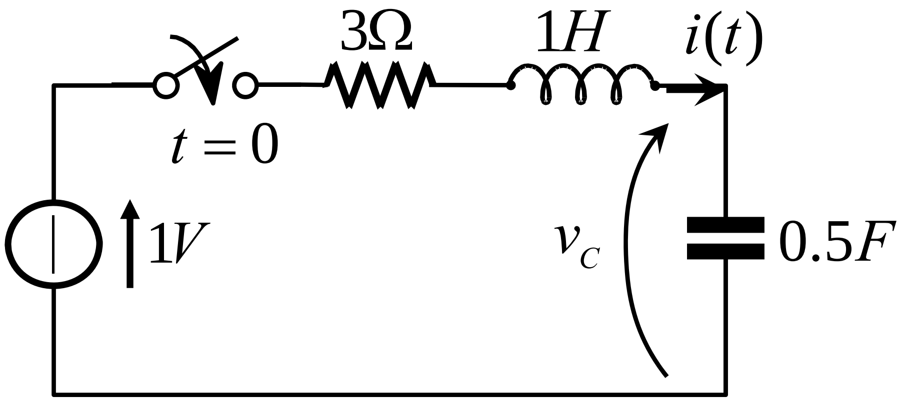


Applicando le regole per il parallelo di bipoli:

$$Y(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC \Rightarrow$$

$$Z(s) = \frac{1}{Y(s)} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC} = \frac{sRL}{s^2 LC + sL + R}$$

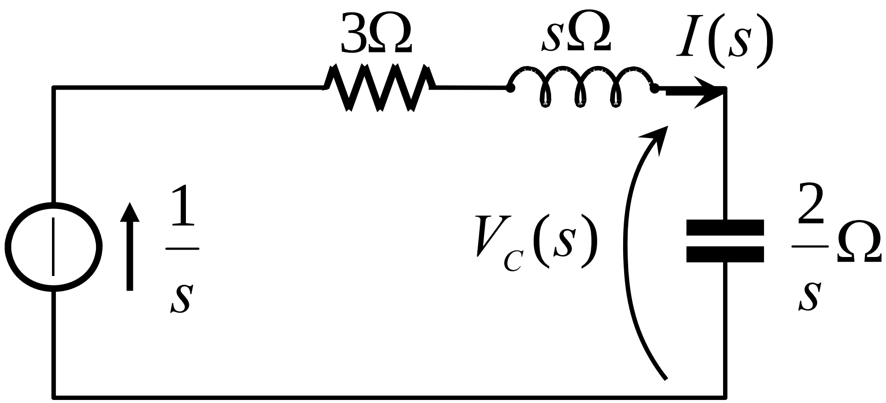
ESEMPIO: Serie di Impedenze



Ricavare la corrente i(t) per t>0 sapendo che lo stato del circuito in t=0⁻ è nullo

Per t < 0 il circuito è scarico quindi: $i(0^-)=0; \quad v_C(0^-)=0$

Per t > 0 il circuito nel dominio della variabile di Laplace è il seguente:

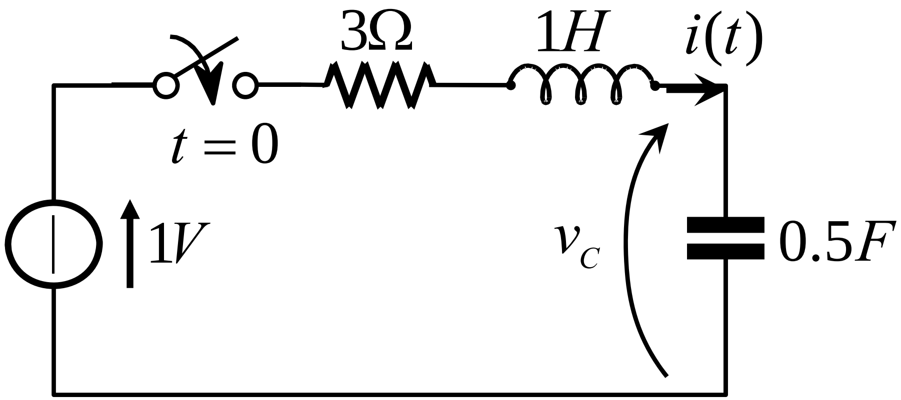


Scriviamo l'equazione di Kirchhoff alle tensioni per l'unica maglia del circuito:

$$\frac{1}{s}=\left(3+s+\frac{2}{s}\right)I(s)$$

Infatti i 3 bipoli sono in serie e si possono sommare le impedenze.

ESEMPIO: Serie di Impedenze



Ricavare la corrente i(t) per t>0 sapendo che lo stato del circuito in t=0⁻ è nullo

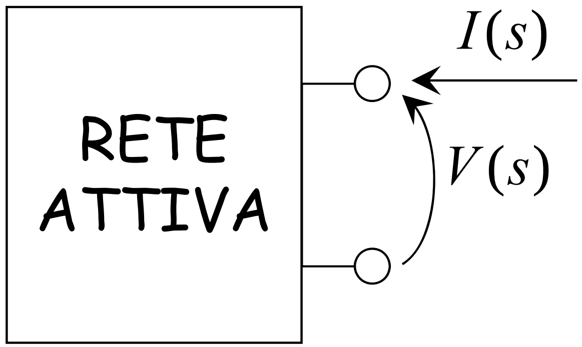
$$I(s)=\frac{1/s}{\left(3+s+\frac{2}{s}\right)}=\frac{s}{s^2+3s+2}\Rightarrow p_{1,2}=\frac{-3\mp\sqrt{9-8}}{2}=\begin{cases}-2\\-1\end{cases}$$

$$I(s)=\frac{s}{(s+2)(s+1)}=\frac{R_1}{s+2}+\frac{R_2}{s+1}$$ (2 poli semplici)

$$R_1=\left.\frac{1}{(s+1)}\right|_{s=-2}=\frac{1}{-2+1}=-1 \qquad R_2=\left.\frac{1}{(s+2)}\right|_{s=-1}=\frac{1}{-1+2}=1$$

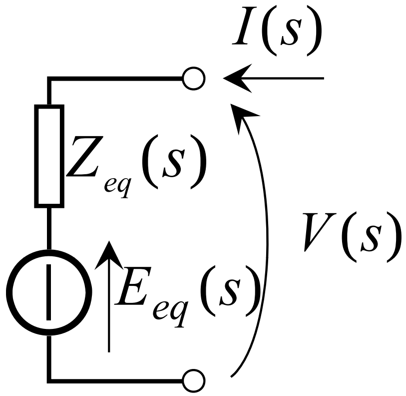
$$I(s)=-\frac{1}{(s+2)}+\frac{1}{(s+1)}\Rightarrow \boxed{i(t)=\left(-e^{-2t}+e^{-t}\right)\delta_{-1}(t) \quad \text{per } t>0}$$

TEOREMI DI THEVENIN E NORTON



Rete attiva costituita da componenti lineari tempo-invarianti

THEVENIN

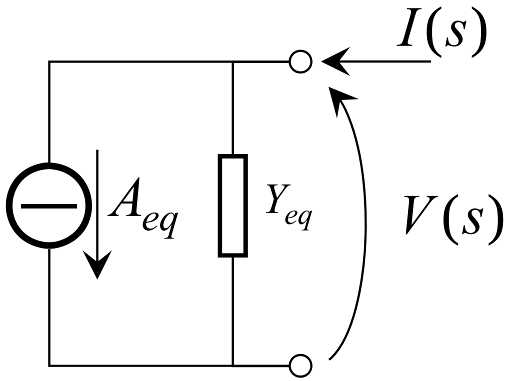


EQUIVALENTE CIRCUITALE

$$\boxed{V(s) = Z_{eq}(s)I(s) + E_{eq}(s)}$$

Il duale è il teorema di Norton

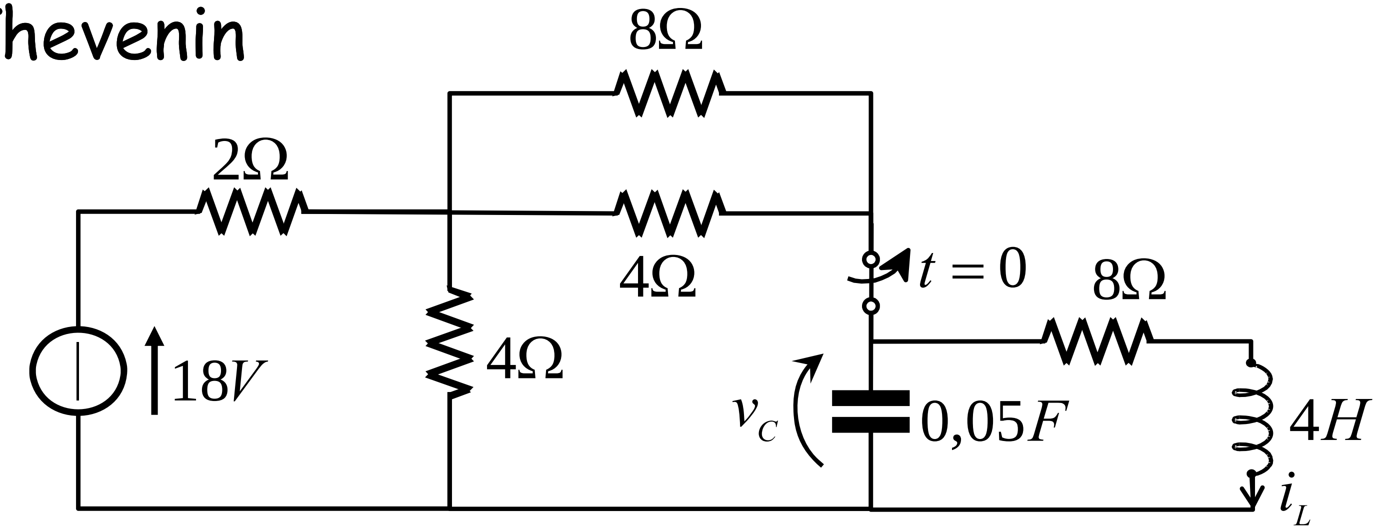
NORTON



EQUIVALENTE CIRCUITALE

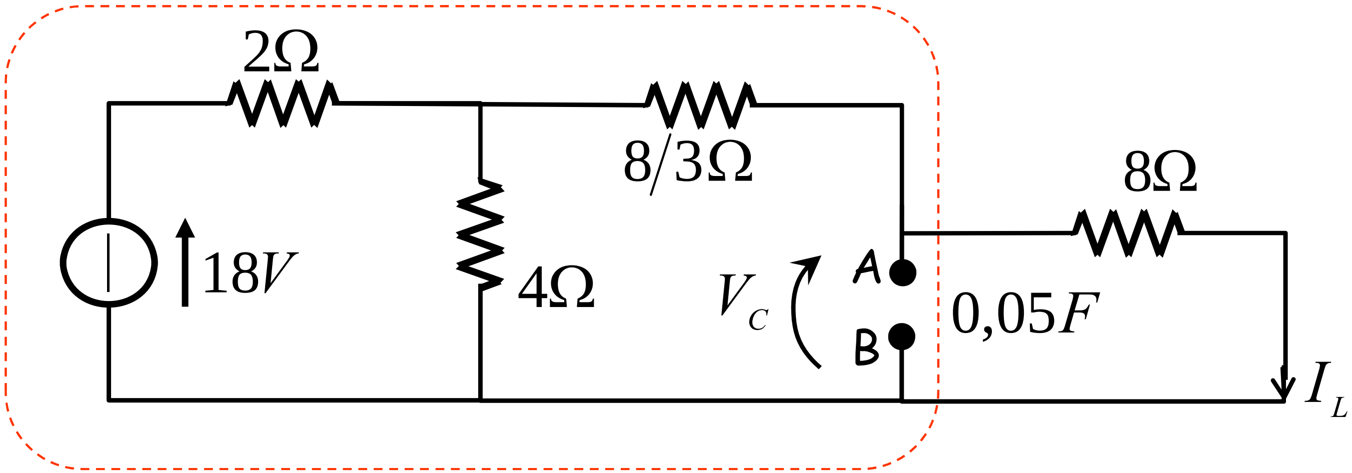
$$\boxed{I(s) = Y_{eq}(s) \cdot V(s) + A_{eq}(s)}$$

ESEMPIO: Thevenin



Il tasto si apre per t=0. Il circuito è a regime per t < 0. Ricavare $i_L(t)$ per t > 0.

Per t < 0 il circuito è in regime stazionario:

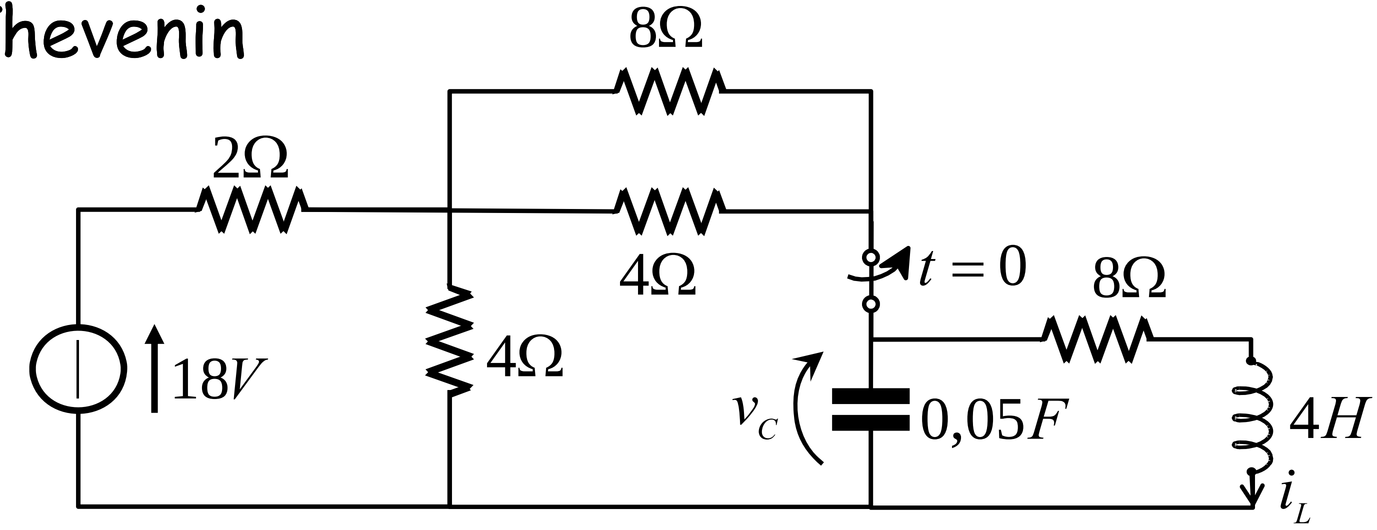


Applichiamo il teorema di Thevenin ai morsetti A-B

$$R_{TH} = (2 // 4 + \frac{8}{3}) = \frac{8}{6} + \frac{8}{3} = 4$$

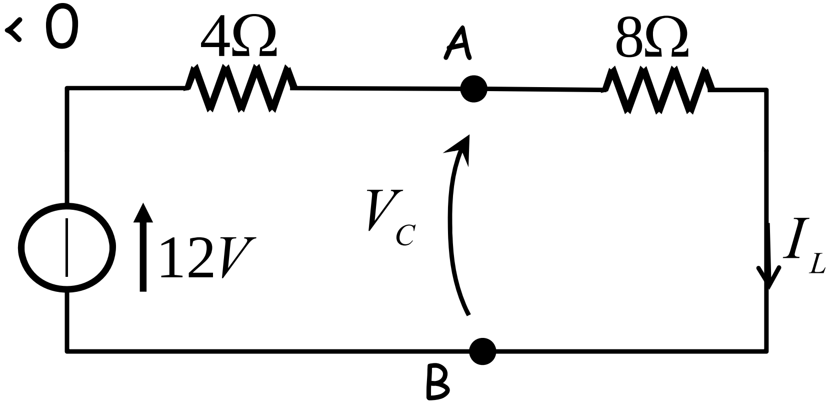
$$E_{TH} = 18 \cdot \frac{4}{4+2} = 12V$$

ESEMPIO: Thevenin



Il tasto si apre per t=0. Il circuito è a regime per t < 0. Ricavare $i_L(t)$ per t > 0.

t < 0



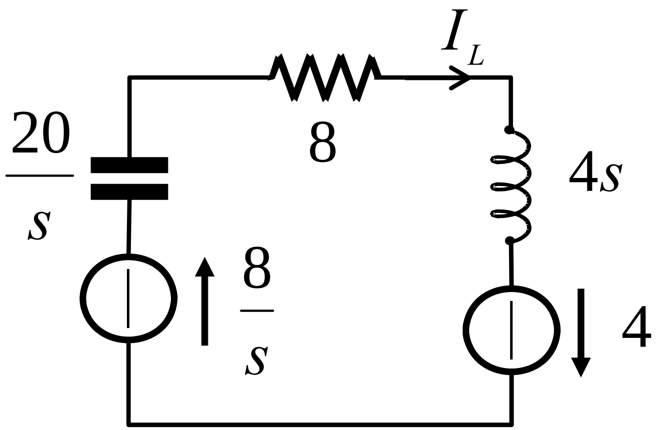
$$V_C = 12\frac{8}{8+4} = 8V$$

$$I_L = \frac{12}{4+8} = 1A$$

$$v_C(0^-) = 8V$$

$$i_L(0^-) = 1A$$

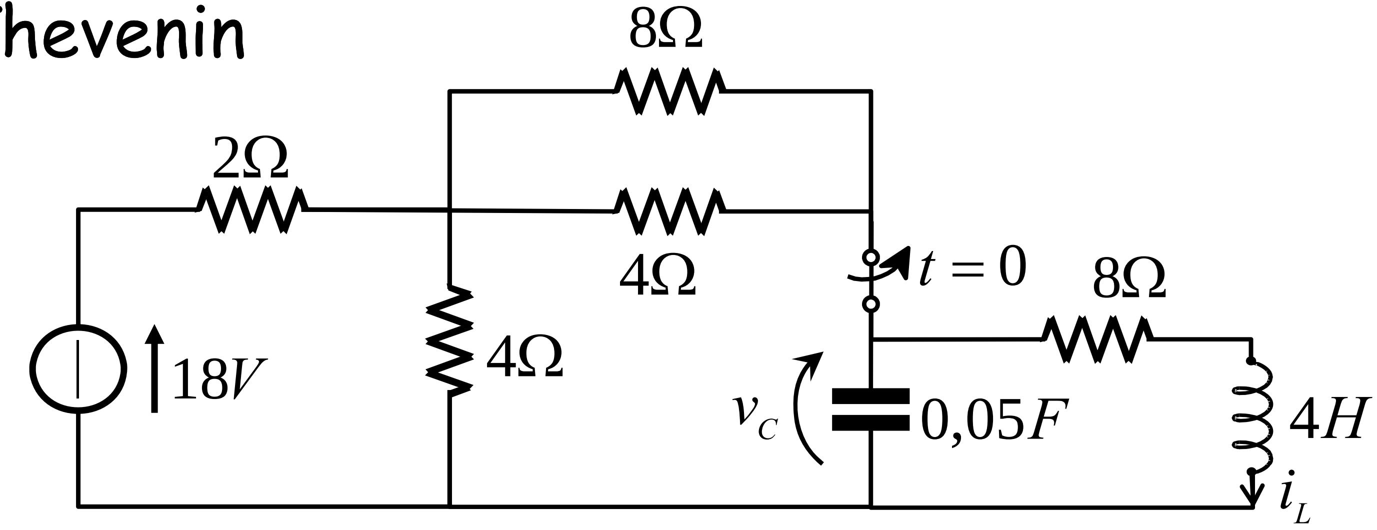
Per t > 0 disegniamo il circuito nel dominio di Laplace:



$$\frac{8}{s} - \left(\frac{20}{s} + 8 + 4s\right) I_L(s) + 4 = 0$$

$$\left(20 + 8s + 4s^2\right) I_L(s) = 4s + 8$$

ESEMPIO: Thevenin



Il tasto si apre per t=0. Il circuito è a regime per t < 0. Ricavare $i_L(t)$ per t > 0.

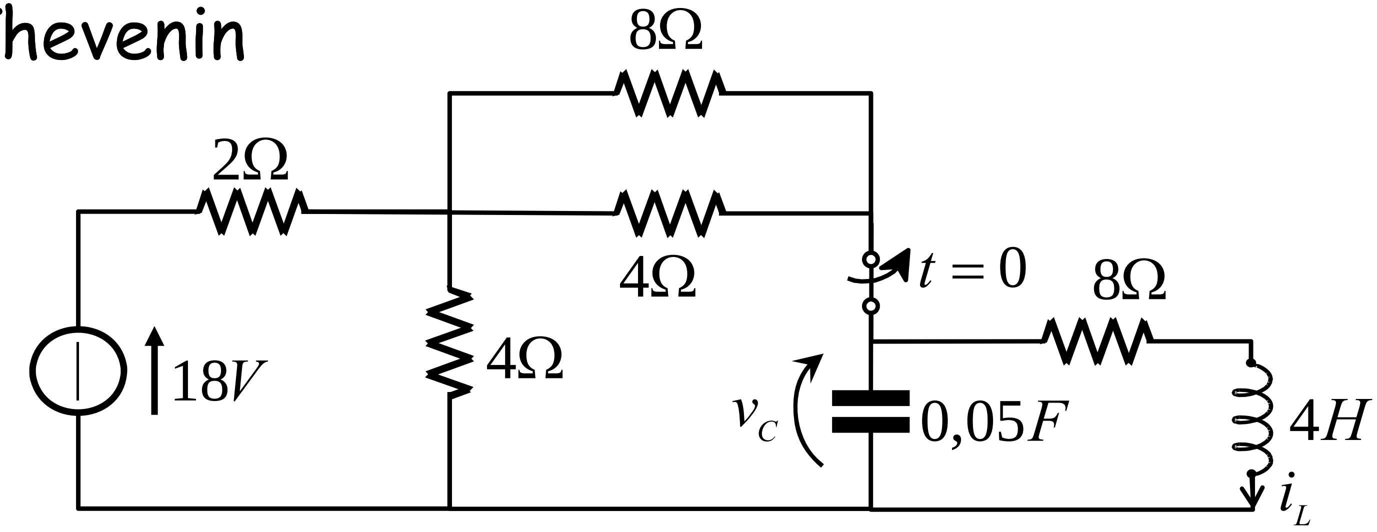
$$I_L(s) = \frac{4s+8}{\left(20+8s+4s^2\right)} = \frac{s+2}{\left(5+2s+s^2\right)}$$

$$p_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm j2$$ poli complessi coniugati

$$I_L(s) = \frac{s+2}{(s+1-j2)(s+1+j2)} = \frac{R}{s+1-j2} + \frac{R^*}{s+1+j2}$$

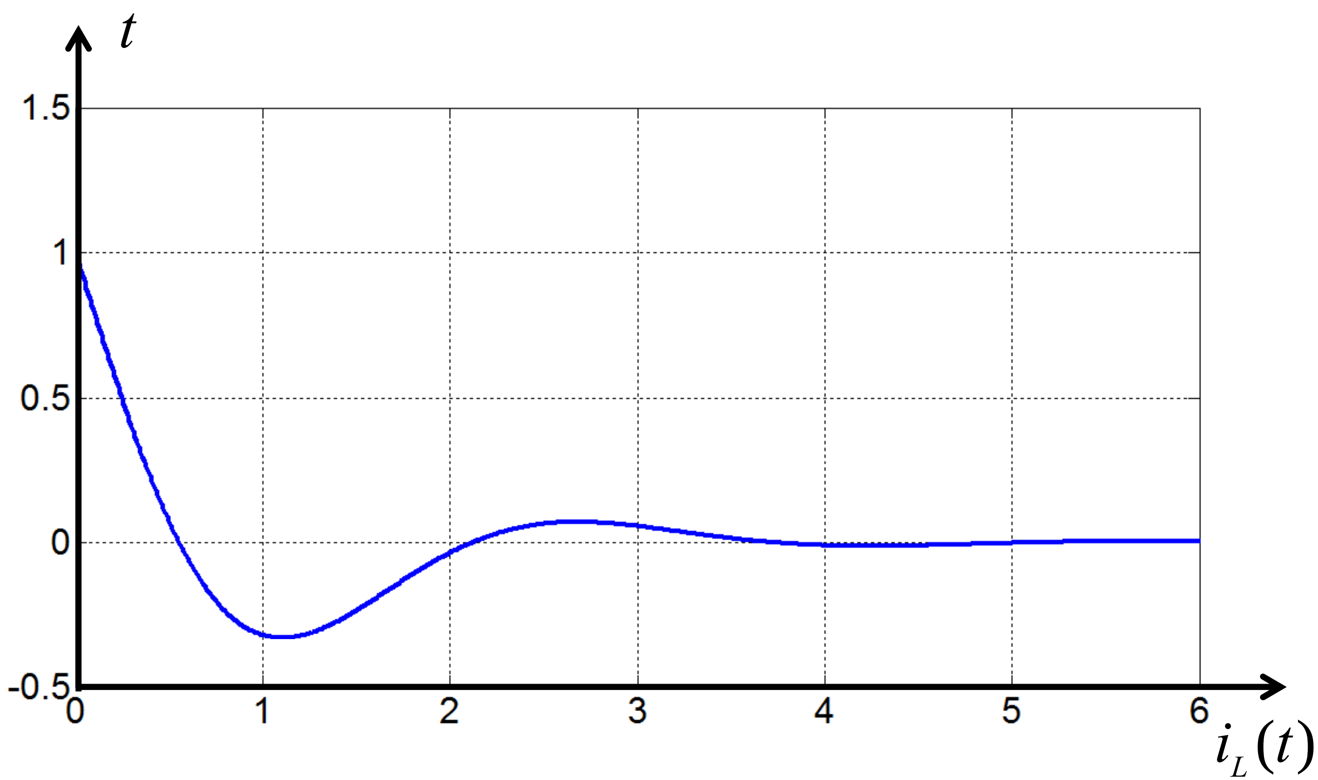
$$R = \left.\frac{s+2}{(s+1+j2)}\right|_{s=-1+j2} = \frac{-1+j2+2}{-1+j2+1+j2} = \frac{1+j2}{j4} = \frac{2-j}{4} = \frac{\sqrt{5}}{4}\angle -26{,}56°$$

ESEMPIO: Thevenin



Il tasto si apre per t=0. Il circuito è a regime per t < 0. Ricavare $i_L(t)$ per t > 0.

$$i_L(t) = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-t} \cos(2t - 26{,}56°)$$



METODO DELLE CORRENTI CICLICHE

$$\left[Z(s)\right]\cdot \underline{J}(s) = \underline{E}(s)$$

$$\left[Z(s)\right]=\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1M} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{M1} & Z_{M2} & \cdots & Z_{MM} \end{bmatrix}$$

$Z_{ii}(s)$ Impedenza propria della maglia *i*

$Z_{ji}(s)$ Impedenza mutua tra le maglie *i* e *j* della maglia *i*

$M = l - (N - 1)$

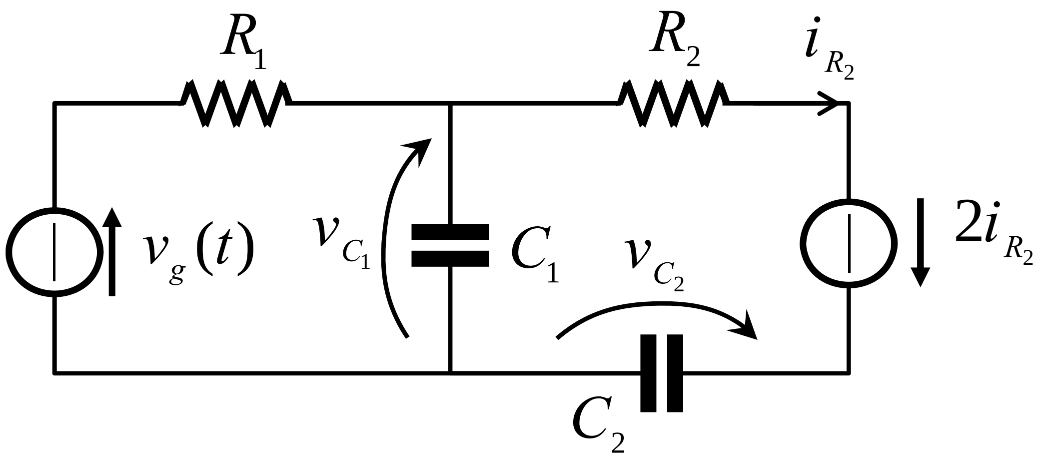
$$\underline{J}(s)=\begin{bmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_M \end{bmatrix}$$

Correnti cicliche nelle maglie

$$\underline{E}(s)=\begin{bmatrix} E_{v1} \\ \vdots \\ E_{vM} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} E_{i1} \\ \vdots \\ E_{iM} \end{bmatrix}$$

- E_{vi} è la somma dei generatori di tensione nella maglia *i*, prese con segno + se concordi con il verso di J_i e viceversa
- E_{ii} è la somma delle tensioni dovute ai generatori di corrente collegati agli estremi dei lati della maglia *i* (prodotto della corrente per l'impedenza del ramo a cui è collegato) preso con il segno + se la caduta di tensione provocata in quel ramo dalla sola corrente del generatore è concorde con J_i e viceversa

ESEMPIO: Metodo delle correnti cicliche



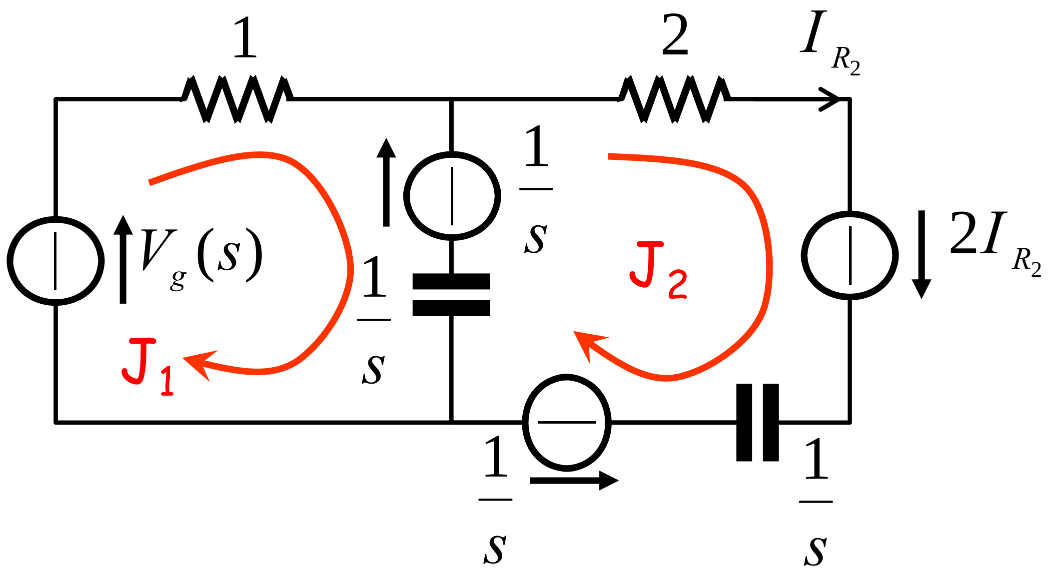
$R_1 = 1\Omega; \quad R_2 = 2\Omega$

$C_1 = C_2 = 1F$

$v_{C1}(0^-) = v_{C2}(0^-) = 1V$

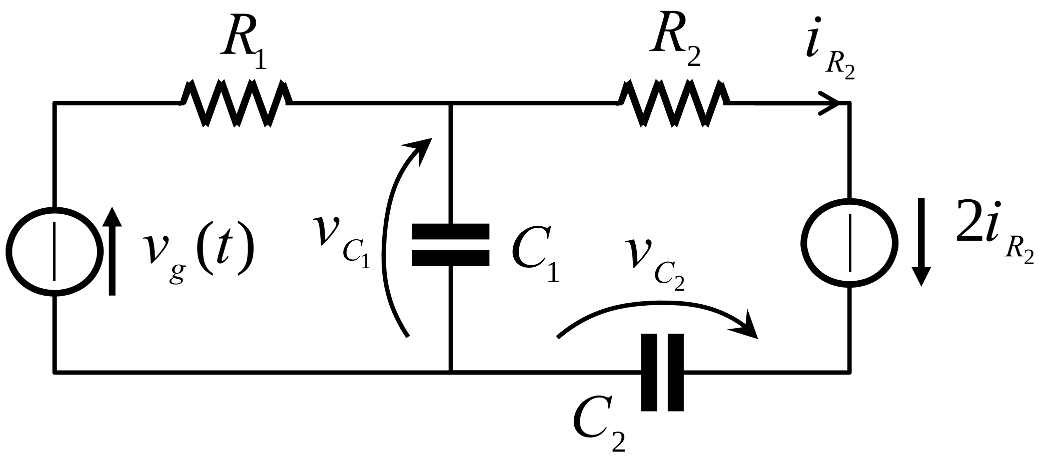
Calcolare $v_g(t)$ per $t \geq 0$ in modo che risulti $v_{c2}(t) = \delta_{-1}(t)$.

Il circuito nel dominio di Laplace è il seguente:



Applichiamo il metodo delle correnti cicliche, scegliendo le due finestre del circuito come maglie fondamentali.

ESEMPIO: Metodo delle correnti cicliche



$$R_1 = 1\Omega; \quad R_2 = 2\Omega$$

$$C_1 = C_2 = 1F$$

$$v_{C1}(0^-) = v_{C2}(0^-) = 1V$$

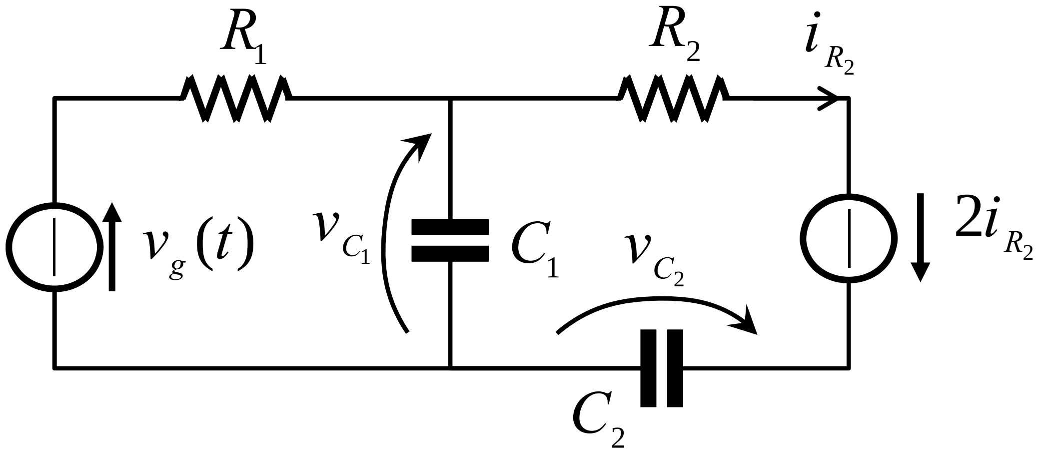
Calcolare $v_g(t)$ per $t \geq 0$ in modo che risulti $v_{c2}(t)=\delta_{-1}(t)$.

$$\begin{bmatrix} 1+\dfrac{1}{s} & -\dfrac{1}{s} \\ -\dfrac{1}{s} & 2+\dfrac{2}{s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g - \dfrac{1}{s} \\ \dfrac{1}{s} + 2I_{R_2} - \dfrac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g - \dfrac{1}{s} \\ 2J_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+\dfrac{1}{s} & -\dfrac{1}{s} \\ -\dfrac{1}{s} & \dfrac{2}{s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g - \dfrac{1}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \frac{2}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s^2} = \frac{2s+1}{s^2}$$

ESEMPIO: Metodo delle correnti cicliche



$$R_1 = 1\Omega; \quad R_2 = 2\Omega$$

$$C_1 = C_2 = 1F$$

$$v_{C1}(0^-) = v_{C2}(0^-) = 1V$$

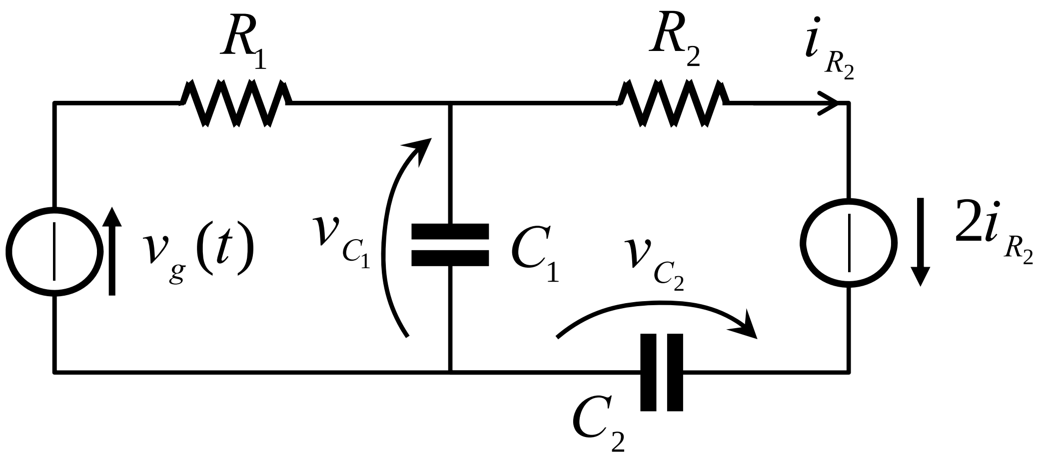
Calcolare $v_g(t)$ per $t \geq 0$ in modo che risulti $v_{c2}(t)=\delta_{-1}(t)$.

$$J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{s} & V_g - \frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\frac{V_g}{s} - \frac{1}{s^2}}{\frac{2s+1}{s^2}} = \frac{V_g s - 1}{2s+1}$$

$$V_{C2}(s) = \frac{1}{s} + V'_{C2}(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s} J_2 = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}\frac{V_g s - 1}{2s+1} = \frac{2s+1+V_g s - 1}{(2s+1)s} = \frac{V_g + 2}{(2s+1)}$$

Dobbiamo imporre che $V_{C2}(s) = \frac{1}{s}$

ESEMPIO: Metodo delle correnti cicliche



$R_1 = 1\Omega; \quad R_2 = 2\Omega$

$C_1 = C_2 = 1F$

$v_{C1}(0^-) = v_{C2}(0^-) = 1V$

Calcolare $v_g(t)$ per $t \geq 0$ in modo che risulti $v_{c2}(t)=\delta_{-1}(t)$.

$$V_{C2}(s) = \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s} = \frac{V_g + 2}{(2s+1)} \Rightarrow V_g = \frac{1}{s} + 2 - 2 \Rightarrow \boxed{v_g(t) = \delta_{-1}(t) + 2\delta(t) - 2\delta(t)}$$

Si noti che i due impulsi nell'origine tengono conto del fatto che il condensatore C_2 ha la stessa tensione (1V) prima e dopo l'istante iniziale, ma per ipotesi esso è un gradino e questo significa che il condensatore si scarica e poi si ricarica istantaneamente.

METODO DEI POTENZIALI NODALI

$$\left[Y(s)\right]\cdot \underline{U}(s) = \underline{A}(s)$$

$$\left[Y(s)\right] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1,N-1} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2,N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{N-1,1} & Y_{N-1,2} & \cdots & Y_{N-1,N-1} \end{bmatrix}$$

$Y_{ii}(s)$ Ammettenza propria della maglia *i*

$Y_{ji}(s)$ Ammettenza mutua tra le maglie *i* e *j* della maglia *i*

$$\underline{U}(s) = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \end{bmatrix}$$

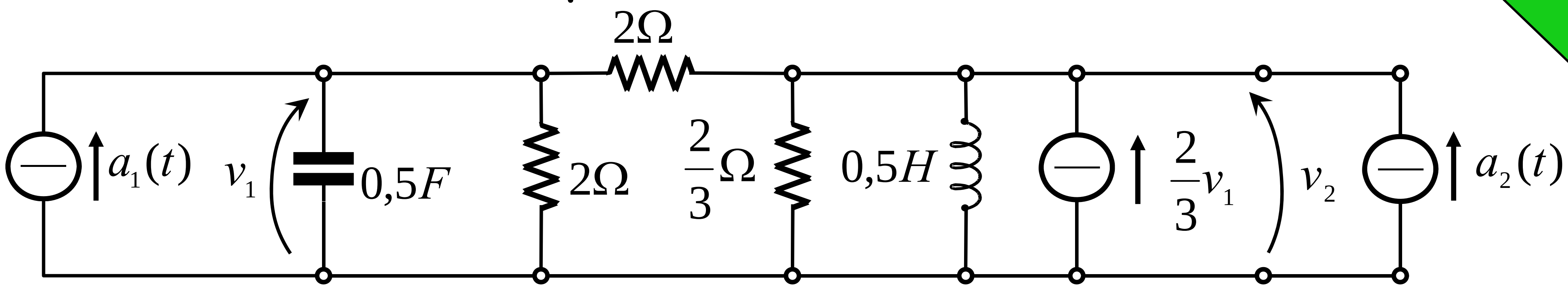
Potenziali nodali

$$\underline{A}(s) = \begin{bmatrix} A_{i1} \\ \vdots \\ A_{i,N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{v1} \\ \vdots \\ A_{v,N-1} \end{bmatrix}$$

A_{ij} = somma delle correnti dei generatori di corrente che incidono sul nodo *i*, positivi se entranti.

A_{vi} = correnti dovute ai generatori di tensione inseriti in lati convergenti nel nodo *i* (f.e.m. $\times$ ammettenza del lato) positivi se il generatore da solo fa circolare corrente entrante.

ESEMPIO: Metodo dei potenziali nodali



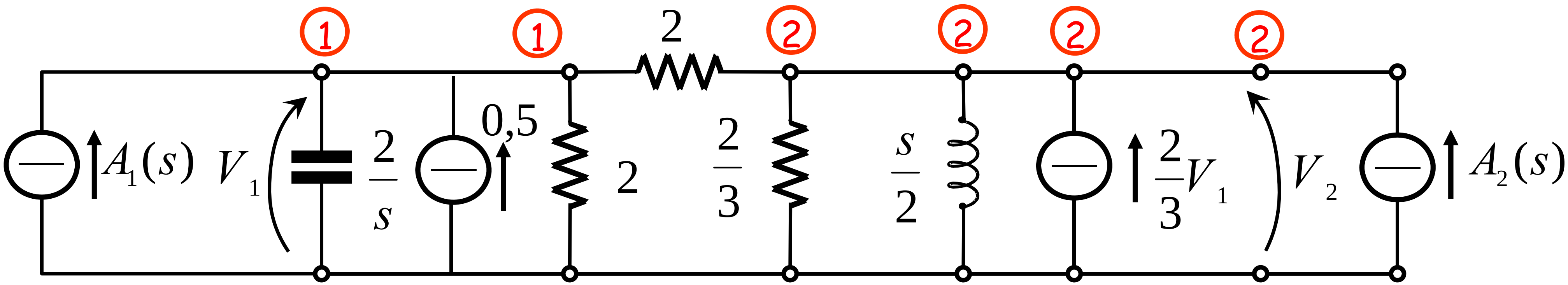
Determinare l'espressione di $v_2(t)$ sapendo che:

$$v_1(0^-) = 1V; \quad i_L(0^-) = 0$$

$$a_1(t) = 2t\delta_{-1}(t); \quad a_2(t) = 2e^{-2t}\delta_{-1}(t)$$

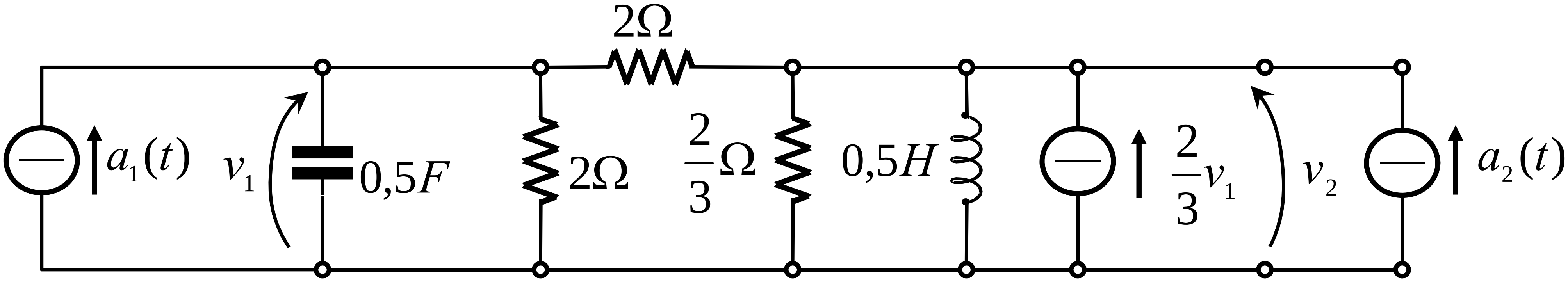
Il circuito nel dominio di Laplace è il seguente:

$$A_1(s) = \frac{2}{s^2}; \quad A_2(s) = \frac{2}{s+2}$$



Applichiamo il metodo dei potenziali nodali al nodo 1 e al nodo 2.

ESEMPIO: Metodo dei potenziali nodali

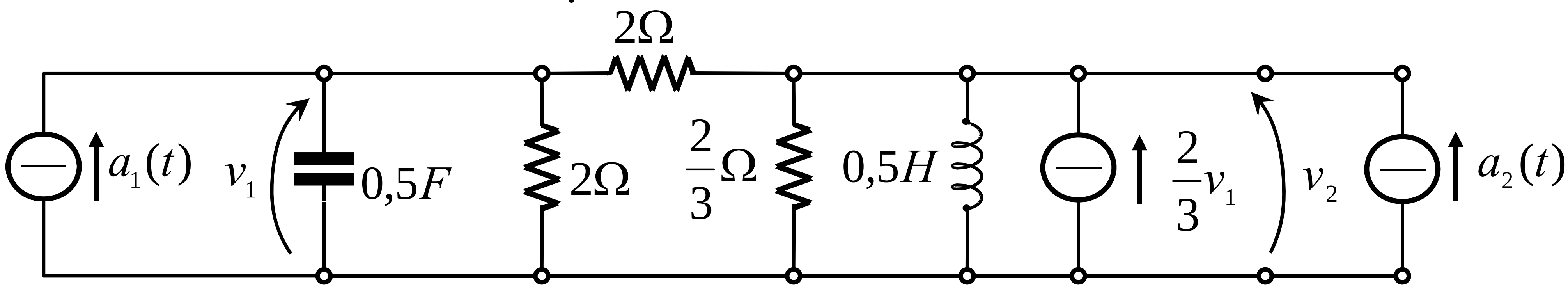


Determinare l'espressione di $v_2(t)$ sapendo che:
$$v_1(0^-)=1V;\quad i_L(0^-)=0$$
$$a_1(t)=2t\delta_{-1}(t);\quad a_2(t)=2e^{-2t}\delta_{-1}(t)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{s}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{2}{s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{2}{s^2} \\ \frac{2}{3}V_1+\frac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{s+2}{2}V_1-\frac{1}{2}V_2=\frac{s^2+4}{2s^2} \Rightarrow V_1=\frac{V_2}{s+2}+\frac{s^2+4}{s^2(s+2)} \\ -\frac{1}{2}V_1+\frac{2(s+1)}{s}V_2=\frac{2}{3}V_1+\frac{2}{(s+2)} \Rightarrow -\frac{7}{6}V_1+\frac{2(s+1)}{s}V_2=\frac{2}{(s+2)} \end{cases}$$

ESEMPIO: Metodo dei potenziali nodali



Determinare l'espressione di $v_2(t)$ sapendo che:

$$v_1(0^-) = 1V\,; \quad i_L(0^-) = 0$$

$$a_1(t) = 2t\delta_{-1}(t); \quad a_2(t) = 2e^{-2t}\delta_{-1}(t)$$

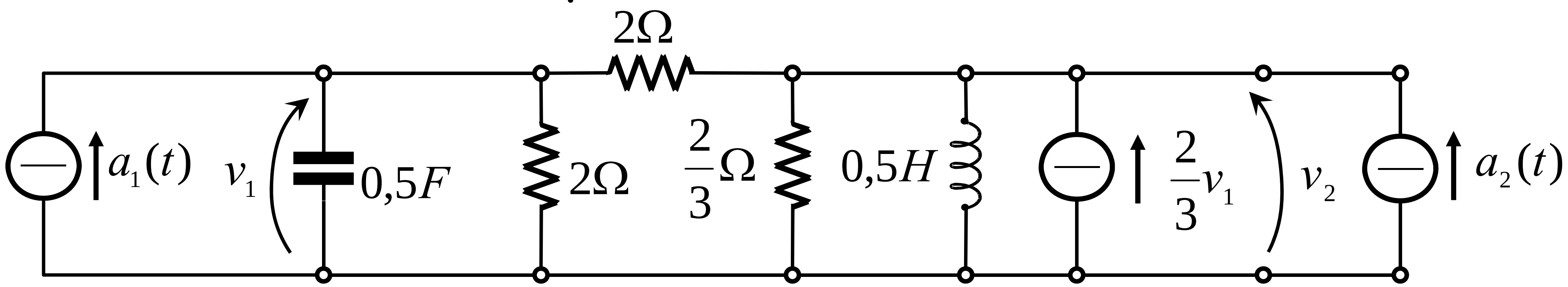
$$-\frac{7}{6}\left(\frac{V_2}{s+2} + \frac{s^2+4}{s^2(s+2)}\right) + \frac{2(s+1)}{s}V_2 = \frac{2}{(s+2)}$$

$$\left(-\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{s+2} + \frac{2(s+1)}{s}\right)V_2 = \frac{2}{(s+2)} + \frac{7}{6}\cdot\frac{s^2+4}{s^2(s+2)}$$

$$\frac{-7s^2 + 12s(s+1)(s+2)}{6s^2(s+2)}V_2 = \frac{12s^2 + 7(s^2+4)}{6s^2(s+2)} \Rightarrow (12s^3 + 29s^2 + 24s)V_2 = 19s^2 + 28$$

$$V_2 = \frac{19s^2 + 28}{s(12s^2 + 29s + 24)}$$

ESEMPIO: Metodo dei potenziali nodali



Determinare l'espressione di $v_2(t)$ sapendo che:

$$v_1(0^-) = 1V; \quad i_L(0^-) = 0$$

$$a_1(t) = 2t\delta_{-1}(t); \quad a_2(t) = 2e^{-2t}\delta_{-1}(t)$$

$$V_2 = \frac{19s^2 + 28}{12s\left(s^2 + \frac{29}{12}s + 2\right)} \Rightarrow p_{1,2} = -1{,}21 \pm \sqrt{1{,}4601 - 2} = -1{,}21 \pm j\sqrt{0.54} = -1{,}21 \pm j0{,}73$$

$$V_2 = \frac{1{,}58s^2 + 2{,}33}{s(s + 1{,}21 - j0{,}73)(s + 1{,}21 + j0{,}73)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s + 1{,}21 + j0{,}73)} + \frac{R_2^*}{(s + 1{,}21 - j0{,}73)}$$

$$R_1 = sV_2(s)\big|_{s=0} = 1{,}167$$

$$R_1 = (s + 1{,}21 - j0{,}73)V_2(s)\big|_{s=(-1{,}21+j0{,}73)} = 0{,}0396 - j0{,}4349 = 0{,}4367\angle -84{,}8°$$

$$\boxed{v_2(t) = \left[1{,}167 + 0{,}87e^{-1{,}21t}\cos(0{,}73t - 84{,}8°)\right]\delta_{-1}(t)}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO E FUNZIONE DI RETE

Si definisce **FUNZIONE DI RETE** il rapporto fra la L-Trasf. della risposta dovuta ad una data eccitazione (ingresso) e la L-Trasf. dell'ingresso:

$$Y(s) = F(s) \cdot U(s) \Rightarrow F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

➢L'inverso della funzione di rete può non essere una funzione di rete, e non gode delle stesse proprietà

➢Per circuiti lineari tempo-invarianti vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Allora nel caso di più eccitazioni (ingressi) l'uscita si ottiene come somma delle uscite dovute ai singoli ingressi

➢La funzione di rete si chiama **FUNZIONE DI TRASFERIMENTO** se l'ingresso e l'uscita si riferiscono a coppie di morsetti diversi

➢La funzione di rete si chiama **IMPEDENZA o AMMETTENZA** se ingresso e uscita si riferiscono alla stessa copia di morsetti (nel primo caso una deve essere una tensione e l'altra una corrente e viceversa nel secondo caso)

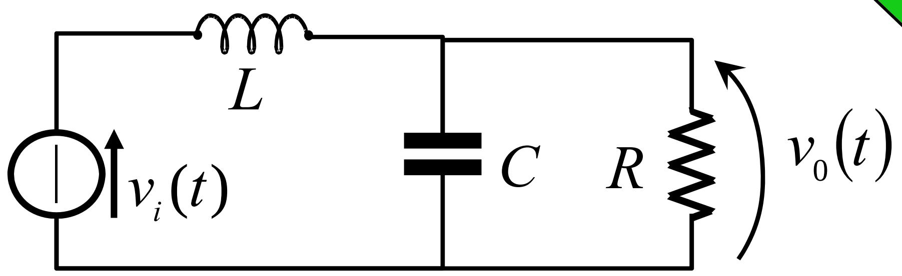
FUNZIONE DI TRASFERIMENTO E FUNZIONE DI RETE (**Cnt.**)

- Se Y(s)= Tensione; U(s)= Tensione ➡ F(s) Funz. di Trasferimento
- Se Y(s)= Tensione; U(s)= Corrente ➡ F(s) Impedenza (Ω)
- Se Y(s)= Corrente; U(s)= Tensione ➡ F(s) Ammettenza (S)
- Se Y(s)= Corrente; U(s)= Corrente ➡ F(s) Funz. di Trasferimento

ESEMPIO: Sintesi di funzioni di trasferimento

Data la funzione di trasferimento

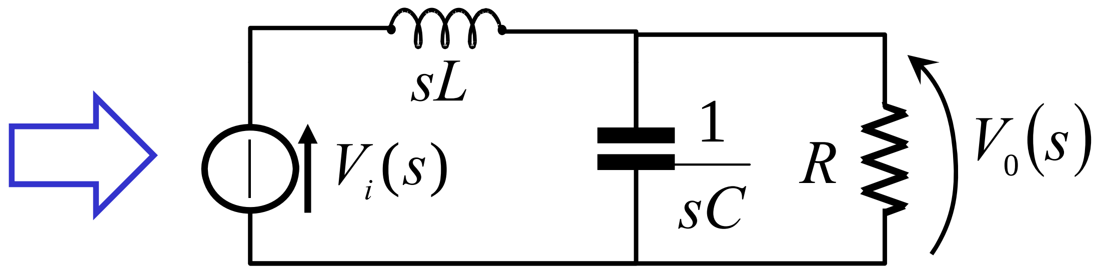
$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{10}{s^2 + 3s + 10}$$



Realizzare la funzione mediante il circuito di figura nei due casi:
a) R = 5Ω b) R = 1Ω

determinando in entrambi i casi i parametri L e C.

Circuito nel dominio di Laplace



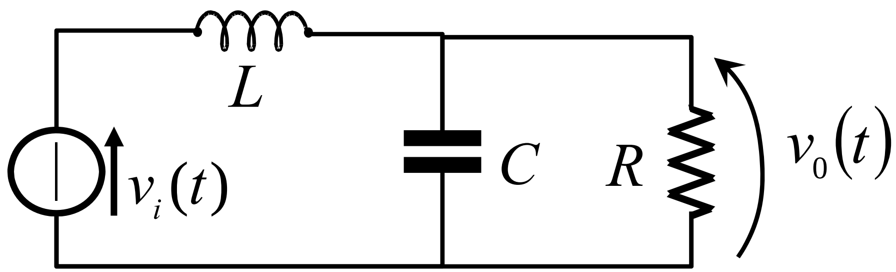
Applicando la regola del partitore di tensione:

$$V_0(s) = V_i(s) \cdot \frac{\frac{1}{sC} // R}{sL + \left(\frac{1}{sC} // R\right)} = V_i(s) \cdot \frac{\frac{R}{1+sRC}}{sL + \frac{R}{1+sRC}} = V_i(s) \cdot \frac{R}{s^2 RLC + sL + R}$$

ESEMPIO: Sintesi di funzioni di trasferimento

Data la funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{10}{s^2 + 3s + 10}$$



Realizzare la funzione mediante il circuito di figura nei due casi:
a) R = 5Ω b) R = 1Ω

determinando in entrambi i casi i parametri L e C.

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}} = \frac{10}{s^2 + 3s + 10} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{LC} = 10 \\ \frac{1}{RC} = 3 \end{cases}$$

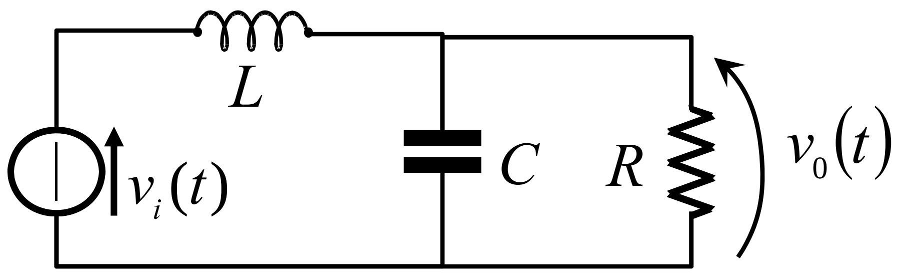
Caso a)

$$\begin{cases} \frac{1}{RC} = \frac{1}{5C} = 3 \rightarrow C = \frac{1}{15} = 66{,}7mF \\ \frac{1}{LC} = 10 \rightarrow \frac{1}{L} = 10 \cdot 66{,}7 \cdot 10^{-3} \rightarrow L = 1{,}5H \end{cases}$$

ESEMPIO: Sintesi di funzioni di trasferimento

Data la funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{10}{s^2 + 3s + 10}$$



Realizzare la funzione mediante il circuito di figura nei due casi:
a) R = 5Ω b) R = 1Ω

determinando in entrambi i casi i parametri L e C.

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}} = \frac{10}{s^2 + 3s + 10} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{LC} = 10 \\ \frac{1}{RC} = 3 \end{cases}$$

Caso b)

$$\begin{cases} \frac{1}{RC} = \frac{1}{C} = 3 \rightarrow C = \frac{1}{3} = 33{,}3mF \\ \frac{1}{LC} = 10 \rightarrow \frac{1}{L} = 10 \cdot 33{,}3 \cdot 10^{-3} \rightarrow L = 0{,}3H \end{cases}$$

RISPOSTA IMPULSIVA

Poniamo U(s)=1 ➡ Y(s)=H(s)·1

➢Nel dominio di s, la risposta Y(s) coincide con la funzione di rete H(s), quando l'ingresso e' uguale a 1 e poiché:

$$L^{-1}\left[U(s)\right] = L^{-1}\left[1\right] = \delta(t)$$ impulso

$$L^{-1}\left[Y(s)\right] = L^{-1}\left[F(s)\right] = h(t)$$ risposta impulsiva

LA RISPOSTA IMPULSIVA E' L'ANTITRASFORMATA DELLA CORRISPONDENTE FUNZIONE DI RETE

RISPOSTA IMPULSIVA (**Cnt.**)

Nota **h(t)** e' univocamente determinata la risposta ad un generico ingresso **u(t)**:

y(t)=h(t)*u(t)

cioè la risposta **y(t)** e' uguale al prodotto di convoluzione tra risposta impulsiva **h(t)** e funzione di ingresso **u(t)**

DIMOSTRAZIONE:

$$Y(s) = F(s) \cdot U(s)$$

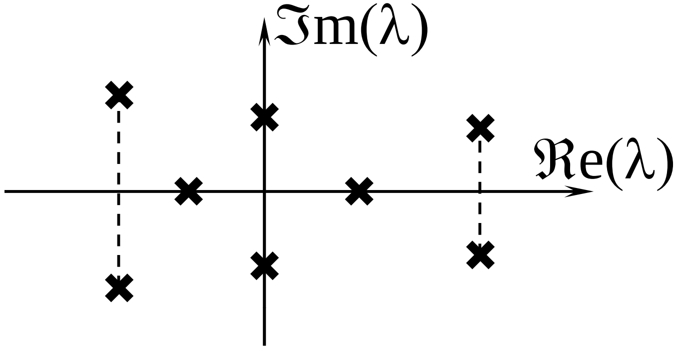
$$y(t) = L^{-1}\left[Y(s)\right] = L^{-1}\left[F(s) \cdot U(s)\right] = \int_0^t h(\tau) \cdot u(t-\tau)\,d\tau = h(t) * u(t)$$

- La funzione di rete può essere utilizzata solo in circuiti lineari tempo-invarianti

- La risposta impulsiva può essere usata per qualunque circuito

STABILITA' DI UN CIRCUITO

- ***Le frequenze libere*** λ sono le radici dell'equazione caratteristica
- Sono indipendenti dall'ingresso (si pone u(t)=0),
- se tutte le λ sono a parte reale negativa, dopo un tempo sufficientemente lungo la risposta libera si attenua e l'uscita del circuito segue l'ingresso



se $\Re e\{\lambda_i\}<0 \quad \forall i$ la risposta libera converge a zero dopo un certo tempo. Per $t\rightarrow\infty$ RIMANE LA SOLA RISPOSTA FORZATA

- se $\Re e\{\lambda_i\}<0 \quad \forall i$ RETE ASSOLUTAMENTE STABILE
- se $\exists i \ni \Re e\{\lambda_i\}=0$ RETE SEMPLICEMENTE STABILE
- se $\exists i \ni \Re e\{\lambda_i\}>0$ RETE INSTABILE

Un circuito è assolutamente stabile se, sottoposto a sollecitazioni di durata limitata, è in grado di ritornare alla situazione di riposo dopo che le sollecitazioni esterne sono cessate.

STABILITA' DI UN CIRCUITO (Cnt.)

Un circuito si dice assolutamente stabile quando tutte le sue possibili risposte impulsive tendono a zero al crescere del tempo

LA RISPOSTA IMPULSIVA E' L'ANTITRASFORMATA DELLA CORRISPONDENTE FUNZIONE DI RETE

Condizione necessaria e sufficiente affinché una risposta impulsiva tenda a zero al crescere del tempo è che la corrispondente funzione di rete abbia tutti i poli con parte reale negativa.

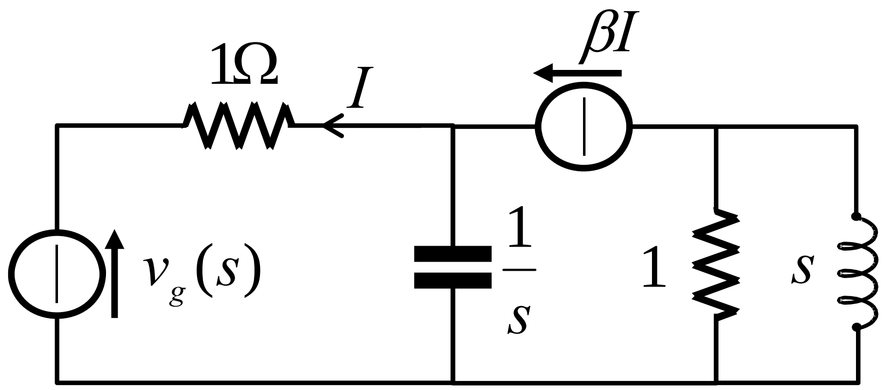
PROPRIETA' DELLE FUNZIONI DI RETE

PER CIRCUITI LINEARI TEMPO-INVARIANTI A COSTANTI CONCENTRATE:

- OGNI FUNZIONE DI RETE E' UNA FUNZIONE RAZIONALE A COEFFICIENTI REALI IN **S**
- UN CIRCUITO E' STABILE SE TUTTE LE SUE POSSIBILI RISPOSTE IMPULSIVE TENDONO A ZERO AL CRESCERE DEL TEMPO
- CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHE' UNA RISPOSTA IMPULSIVA TENDA A ZERO AL CRESCERE DEL TEMPO E' CHE LA CORRISPONDENTE FUNZIONE DI RETE ABBIA TUTTI I POLI CON PARTE REALE NEGATIVA

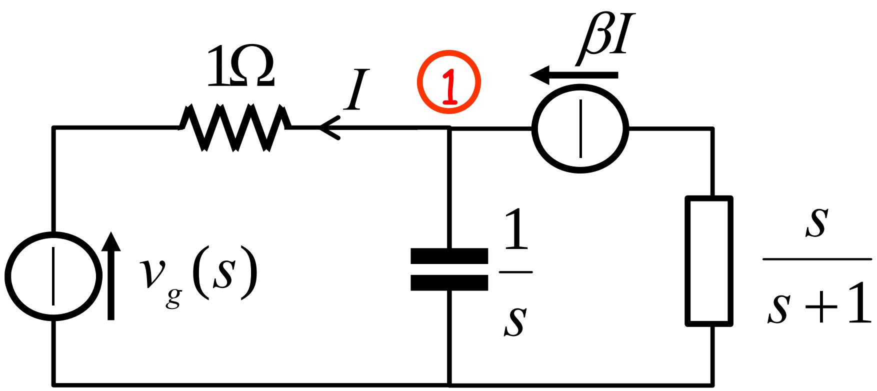
ESEMPIO: Stabilità

Determinare per quali valori di β il circuito è stabile.



Semplifichiamo il circuito sostituendo al parallelo del resistore e della induttanza un'impedenza equivalente

$$z_p = \frac{s}{s+1}$$



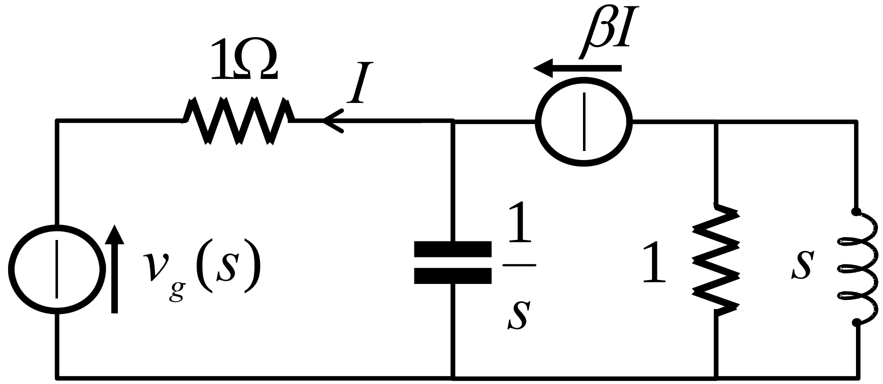
Applichiamo l'equilibrio delle correnti al nodo 1:

$$\frac{V_1 - V_g}{1} + sV_1 - \beta\left(\frac{V_1 - V_g}{1}\right) = 0$$

$$V_1 - V_g + sV_1 - \beta V_1 + \beta V_g = 0 \Rightarrow V_1(1 + s - \beta) = V_g(1 - \beta) \Rightarrow \frac{V_1}{V_g} = \frac{1-\beta}{s - (\beta - 1)}$$

ESEMPIO: Stabilità

Determinare per quali valori di β il circuito è stabile.



La funzione di trasferimento $\frac{V_1}{V_g}$ ha un polo $p = \beta - 1$

Affinché il circuito sia stabile deve essere $p_1 < 0$ da cui

$$\beta - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \beta < 1$$

Il circuito è stabili per valori di β minori di 1