

ESERCIZI DI RIEPILOGO 2

ESERCIZIO 1

Da un comune mazzo di 52 carte francesi (13 carte per ognuno dei quattro semi: picche, cuori, fiori e quadri) viene estratta casualmente una carta.

Definiti gli eventi:

$A = \{\text{la carta estratta è numerica pari}\}$

$B = \{\text{la carta estratta è di picche}\}$

$C = \{\text{la carta estratta è una figura}\}$

Calcolare la probabilità degli eventi:

a) $A \cup (B \cup C)$

b) $A \cup (B \cap C)$.

ESERCIZIO 2

Supponiamo che in un lotto costituito da 10 unità di prodotto vi siano 7 unità “non difettose” e 3 “difettose”. Da tale lotto vengono estratti in blocco 3 elementi. Calcolare la probabilità di osservare esattamente 2 elementi difettosi.

ESERCIZIO 3 (*)

Si consideri un'urna contenente una pallina bianca e tre rosse. Si lancia un dado con sei facce numerate progressivamente da 1 a 6 e si ottiene il risultato n . A questo punto si estraggono, casualmente e con reimmisione, n palline dall'urna. Calcolare la probabilità che esse presentino colore alterno.

ESERCIZIO 4

Nella famiglia Esponenziale le liti terminano solo quando un coniuge dà ragione all'altro. Il marito ha torto il 60% delle volte. La moglie dà ragione al marito il 25% delle volte in cui lui ha torto, ed il 50% delle volte in cui lui ha ragione. I coniugi Esponenziale hanno appena litigato, si determinino le probabilità che:

- a. La moglie dia ragione al marito;
- b. Lui abbia torto, se lei gli dà ragione;
- c. Lui abbia ragione, se lei gli dà torto.

ESERCIZIO 5

Data una coorte di 20 studenti, di cui 12 in corso e 8 fuori corso, calcolare la probabilità che, estraendo un gruppo di 6 studenti distinti, il gruppo risulti composto da:

- a. tutti studenti fuori corso;
- b. tutti studenti in corso;
- c. metà degli studenti in corso.

ESERCIZIO 6 (rivisita 5.13)

Il numero di computer venduti giornalmente in un negozio specializzato è definito dalla seguente distribuzione di probabilità:

X	0	1	2	3	4	5	6
P(x)	0,05	0,10	0,20	0,20	0,20	0,15	0,10

- a) Trovate $P(3 \leq X < 6)$
- b) Trovate $P(X > 3)$
- c) Trovate $P(X \leq 4)$
- d) Ricavare la funzione di ripartizione di X e rappresentarla graficamente

e) Calcolate la media e la varianza di X

ESERCIZIO 7

Un centralino di un'azienda è operativo dalle 9 del mattino alle 9 di sera per i clienti che vogliono fare un reclamo in relazione a un prodotto acquistato. Esperienze passate mostrano che in media si riceve 1 chiamata al minuto. Assumendo che il numero di chiamate in un certo intervallo temporale segua distribuzione di Poisson calcolare la probabilità che:

- a) in un minuto si ricevano zero chiamate;
- b) in un minuto si ricevano quattro o più chiamate;
- c) in un minuto si ricevano meno di tre telefonate;
- d) in sei minuti si ricevano esattamente quattro chiamate;
- e) in dodici minuti si ricevano non più di tre chiamate.

ESERCIZIO 8 (esercizio 4.97)

A seguito di un sondaggio tra gli studenti di un'università, si è valutato che il 35% degli studenti mangia almeno una volta alla settimana nei bar del campus e che il 40% di tutti gli studenti ha una votazione media maggiore o uguale a B. Inoltre, tra coloro che mangiano almeno una volta alla settimana nei bar del campus, il 30% ha una votazione media maggiore o uguale a B.

- a. Qual è la probabilità che uno studente scelto a caso mangi almeno una volta alla settimana nei bar del campus e abbia una votazione media maggiore o uguale a B?
- b. Qual è la probabilità che uno studente, scelto a caso tra coloro che hanno una votazione maggiore o uguale a B mangi almeno una volta alla settimana nei bar del campus?

- c. Qual è la probabilità che uno studente scelto a caso abbia almeno una delle seguenti caratteristiche: “Mangia almeno una volta alla settimana nei bar del campus” e “Ha una votazione media maggiore o uguale a B”?
- d. Qual è la probabilità che uno studente, scelto a caso che ha la votazione media inferiore a B, non mangi almeno una volta alla settimana nei bar del campus?
- e. Gli eventi “Mangia almeno una volta alla settimana nei bar del campus” e “Ha una votazione media maggiore o uguale a B” sono indipendenti?
- f. Gli eventi “Mangia almeno una volta alla settimana nei bar del campus” e “Ha una votazione media maggiore o uguale a B” sono mutuamente esclusivi?
- g. Gli eventi “Mangia almeno una volta alla settimana nei bar del campus” e “Ha una votazione media maggiore o uguale a B” sono collettivamente esaustive

ESERCIZIO 9 (rivisita 5.79)

Si consideri la seguente distribuzione congiunta:

	X	1	2
Y			
	0	0.30	0.20
	1	0.25	0.25

- a. Calcolate le distribuzioni marginali di X e Y
- b. Y è una nota variabile casuale. Quale?
- c. Calcolate la media e la varianza della funzione lineare $Z = 3Y + 2$
- d. Calcolate la covarianza e il coefficiente di correlazione lineare tra X e Y
- e. Calcolate la media e la varianza della funzione lineare $W = X - 3Y$

Risultati

1. a) conviene porre $(B \cup C) = Z$ e usare la regola additiva sull'evento $(A \cup Z)$
b) simile al punto precedente: $p(A \cup (B \cap C)) = p(A) + p(B \cap C) - p(A \cap B \cap C) = 10/52 + 3/52 - 0 = 13/52$.
2. 0.175
3. ...
4. a) 0.35
b) circa 0.429
c) circa 0.461
5. a) $C_{6,8} / C_{6,20} = \dots$
b) ...
c) $C_{3,12} * C_{3,8} / C_{6,20}$
6. a) 0.55 b) 0.45 c) 0.75
d) Calcoliamo anzitutto il valore di $F(x)$ in corrispondenza dei valori assunti da X :

X	0	1	2	3	4	5	6
P(x)	0.05	0.10	0.20	0.20	0.20	0.15	0.10
F(x)	0.05	0.15	0.35	0.55	0.75	0.90	1

Nei punti "interni" la $F(x)$ non cambia valore non essendovi alcuna probabilità da cumulare quindi:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.05 & 0 \leq x < 1 \\ 0.15 & 1 \leq x < 2 \\ 0.35 & 2 \leq x < 3 \\ 0.55 & 3 \leq x < 4 \\ 0.75 & 4 \leq x < 5 \\ 0.90 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

il cui grafico è una funzione “a gradini”.

7. a) e^{-1} b) $1 - (e^{-1} + 1/2 e^{-2} + 1/3 e^{-3})$ c) ... d) $(e^{-6} 6^4) / 4!$

8. ...

9. a)

X	1	2
P(x)	0.55	0.45

Y	0	1
P(y)	0.5	0.5

b) Y è una variabile bernoulliana (si veda il testo al paragrafo 5.4)

c) Sfruttando le proprietà della media e della varianza abbiamo

$$E(3Y + 2) = 3E(Y) + 2 = 3.5 \quad ; \quad V(Z) = V(3Y + 2) = 9V(Y) = 9/4$$

d) Per calcolare la covarianza e il coefficiente di correlazione conviene “integrare” la tabella nel modo seguente:

		1	2	P(y)	Media di Y	Varianza di Y	SD di Y
	0	0.25	0.25	0.5	0	0.125	
	1	0.25	0.25	0.5	0.5	0.125	
P(x)		0.5	0.5	1	0.5	0.25	0.5
Media di X		0.5	1	1.5			
Varianza di X		0.125	0.125	0.25			
SD di X				0.5			
xyP(x,y)		0.25	0.5	0.75			
Cov(x,y) =							
Somma (xyP(x,y)) - muxmuy		0					

Calcolo la covarianza e la correlazione tra X e Y:

$$Cov(X,Y) = \sum_x \sum_y xyP(x,y) - \mu_x \mu_y = .75 - (1.5)(.5) = 0$$

$$\rho = Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y} = 0.0 / (.5)(.5) = 0$$

Nota: ovviamente la correlazione è zero essendo zero la covarianza.

e) Calcolo media e varianza della funzione lineare $W = X - Y$:

$$\mu_W = a\mu_x + b\mu_y = (1)1.5 + (-1).5 = 1.0$$

$$\sigma^2_W = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y + 2abCov(X,Y) = 1^2(.25) + 1^2(.25) + 2(1)(-1)(0.0) = .5$$