

# CENTRO DI TAGLIO E TORSIONE SPURIA IN TRAVI A PARETE SOTTILE

## ESERCIZIO 1

La sezione di figura, simmetrica rispetto ad un asse orizzontale passante per O, è soggetta all'azione di taglio T agente in direzione verticale e passante per il punto O.

Determinare:

1. la posizione del centro di taglio;
2. la distribuzione ed i valori degli sforzi dovuti alle azione di taglio;
3. la distribuzione ed i valori degli sforzi dovuti all'eventuale azione torcente spuria (eccentricità del taglio rispetto al centro di taglio);
4. il coefficiente di sicurezza a snervamento;

Dati:  $T = 500 \text{ N}$ ; Materiale: Acciaio,  $\sigma_{sn} = 280 \text{ MPa}$

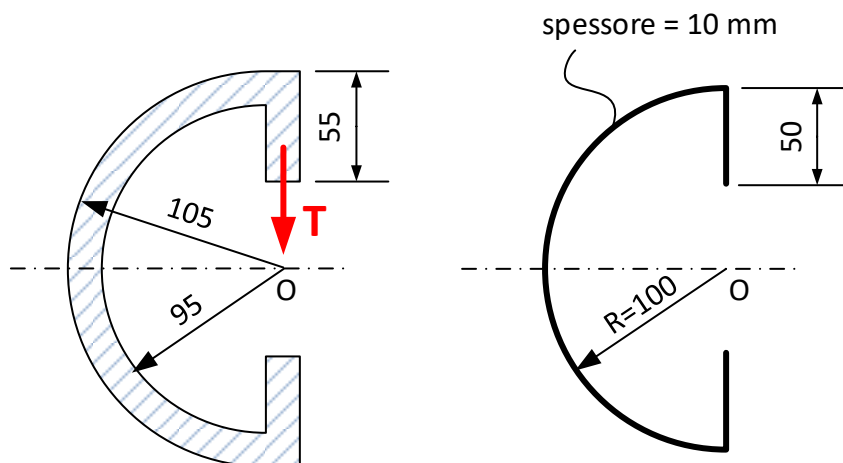


Fig. 1

Possiamo considerare la sezione a parete sottile (spessore molto minore del raggio e della lunghezza della linea d'asse) e riferirci alla linea media per i successivi calcoli.

Poiché la linea d'azione del taglio T non coincide con un asse di simmetria della struttura, è importante determinare la posizione del centro di taglio C. Esso appartiene sicuramente all'asse di simmetria orizzontale della figura, rappresentato dalla retta tratto-punto, ma la sua posizione è incognita (fig. 2).

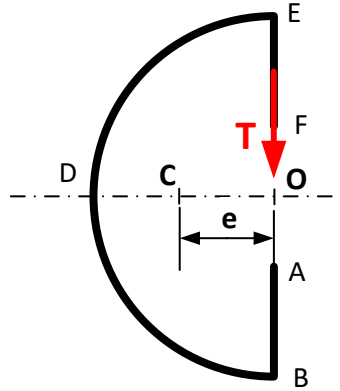


Fig. 2

Per determinare la posizione del centro di taglio C, è conveniente scegliere il punto O per il calcolo dei momenti prodotti dalle tensioni tangenziali  $\tau$  generate dal taglio T nella sezione. La scelta è conveniente sia perché rende più agevole il calcolo del momento generato dagli sforzi tangenziali nel tratto ad asse circolare (il braccio da considerare nei calcoli sarà infatti costante e pari al raggio R), sia perché i contributi dei tratti rettilinei AB ed EF saranno nulli, in quanto le risultanti relative a questi due tratti passano per il punto O.

Per calcolare gli sforzi tangenziali  $t$  utilizziamo la formula di Jourawski:

$$\tau = \frac{T S}{b J}$$

dove

- $S$  è il momento statico di una delle due parti di sezione individuata dalla corda su cui si vuole calcolare lo sforzo  $\tau$  (si veda per esempio l'area tratteggiata in fig. 3);
- $b$  è la lunghezza della corda;
- $J$  è il momento d'inerzia rispetto all'asse neutro flessionale di TUTTA la sezione (asse n-n nel nostro caso).

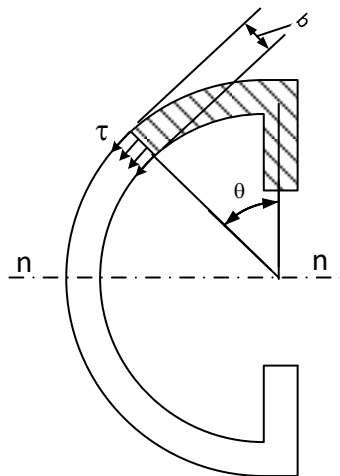


Fig. 3

Calcoliamo innanzitutto il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro.

Il momento d'inerzia rispetto ad un diametro di una sezione circolare cava (diametri esterni ed interni pari rispettivamente a  $D_e$  e  $D_i$ ) è uguale a

$$\pi \left( \frac{D_e^4}{64} - \frac{D_i^4}{64} \right)$$

Nel nostro caso la sezione è composta da metà cerchio e pertanto il momento d'inerzia rispetto all'asse n-n della parte ad asse circolare sarà:

$$J_I = \frac{\pi}{2} \left( \frac{D_e^4}{64} - \frac{D_i^4}{64} \right) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{(2 \cdot 105)^4}{64} - \frac{(2 \cdot 95)^4}{64} \right) = 15.75 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse n-n di un singolo tratto rettilineo (di sezione rettangolare) si può ottenere utilizzando il teorema del trasporto:

$$J_{II} = \frac{10 \cdot 50^3}{12} + (10 \cdot 50)(50 + 25)^2 = 2.92 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Il momento d'inerzia totale varrà quindi:

$$J = J_I + 2J_{II} = 15.75 \cdot 10^6 + 2 \cdot 2.92 \cdot 10^6 = 21.59 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Il momento statico della sezione generica tratteggiata in fig. 3 (individuata dalla corda nella posizione angolare  $\theta$ ) vale (vedi fig. 4)

$$S(\theta) = \int_0^\theta hR \cdot d\alpha \cdot R \cos(\alpha) + h \cdot \frac{R}{2} \left( \frac{R}{2} + \frac{R}{4} \right) = \int_0^\theta hR^2 \cos(\alpha) d\alpha + \frac{3}{8} hR^2 = hR^2 \left( \sin(\theta) + \frac{3}{8} \right)$$

dove il secondo termine si riferisce al momento statico del tratto ad asse rettilineo (EF in fig. 2)

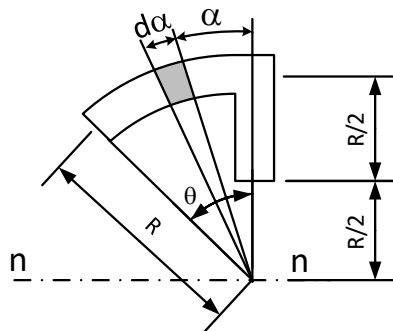


Fig. 4

Sarà quindi

$$\tau(\theta) = \frac{ThR^2 \left(\sin(\vartheta) + \frac{3}{8}\right)}{hJ} = \frac{TR^2 \left(\sin(\vartheta) + \frac{3}{8}\right)}{J}$$

Il momento rispetto al polo scelto (punto O) sarà quindi

$$M_o = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau(\vartheta) h R d\vartheta \cdot R = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau(\vartheta) h R^2 d\vartheta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{TR^2 \left(\sin(\vartheta) + \frac{3}{8}\right) \cdot h R^2}{J} d\vartheta = 2 \frac{TR^4 h \left(1 + \frac{3\pi}{16}\right)}{J}$$

Eguagliando tale momento al prodotto  $T \cdot e$ , si ottiene:

$$e = \frac{2R^4 h \left(1 + \frac{3\pi}{16}\right)}{J} = 147.2 \text{ mm}$$

Il massimo valore della tensione  $\tau(\theta)$  dovuta al taglio  $T$  si ha, per  $\theta = \pi/2$  (punto D della fig. 2) e vale

$$\tau_{\max T} = \frac{TR^2 \left(1 + \frac{3}{8}\right)}{J} = 0.3 \text{ MPa}$$

L'eccentricità dell'azione di taglio  $T$  rispetto al centro di taglio  $C$  produce un effetto torcente spurio di valore  $M_t = T \cdot e$ , a cui corrispondono sforzi e rotazioni propri della torsione di travi a sezione sottile aperta.

In particolare, nel caso elastico, assimilando la sezione data ad una sezione rettangolare stretta, si avrà ai bordi (cioè sulla superficie della trave), dove è massima la tensione di torsione

$$\tau_{M_t} = \frac{3M_t}{lh^2} = \frac{3Te}{lh^2}$$

dove  $l$  è la lunghezza della linea d'asse della sezione:

$$l = \pi R + 2 \frac{R}{2} = R(1 + \pi) = 414.2 \text{ mm} .$$

Nel punto D si ha quindi

$$\tau_{M_t} = \frac{3Te}{lh^2} = \frac{3 \cdot 500 \cdot 147.2}{414.2 \cdot 10^2} = 5.3 \text{ MPa}$$

Come si vede, essendo la sezione della trave aperta, il contributo della torsione spuria (5.3 MPa) è predominante su quello dell'azione di taglio (0.3 MPa).

Nel punto D si ha in definitiva lo sforzo tangenziale

$$\tau_{tot} = \tau_{\max T} + \tau_{Mt} = 0.3 \text{ MPa} + 5.3 \text{ MPa} = 5.6 \text{ MPa}$$

Utilizzando il criterio di Von Mises, il coefficiente di sicurezza a snervamento è pertanto

$$\eta_{sn} = \frac{\frac{\sigma_{sn}}{\sqrt{3}}}{5.6} = \frac{\frac{280}{\sqrt{3}}}{5.6} = 28.9$$

L'andamento qualitativo degli sforzi  $t$  dovuti al taglio ed alla torsione spuria dovuta all'eccentricità del taglio rispetto al centro di torsione sono rappresentati nella fig. 5.

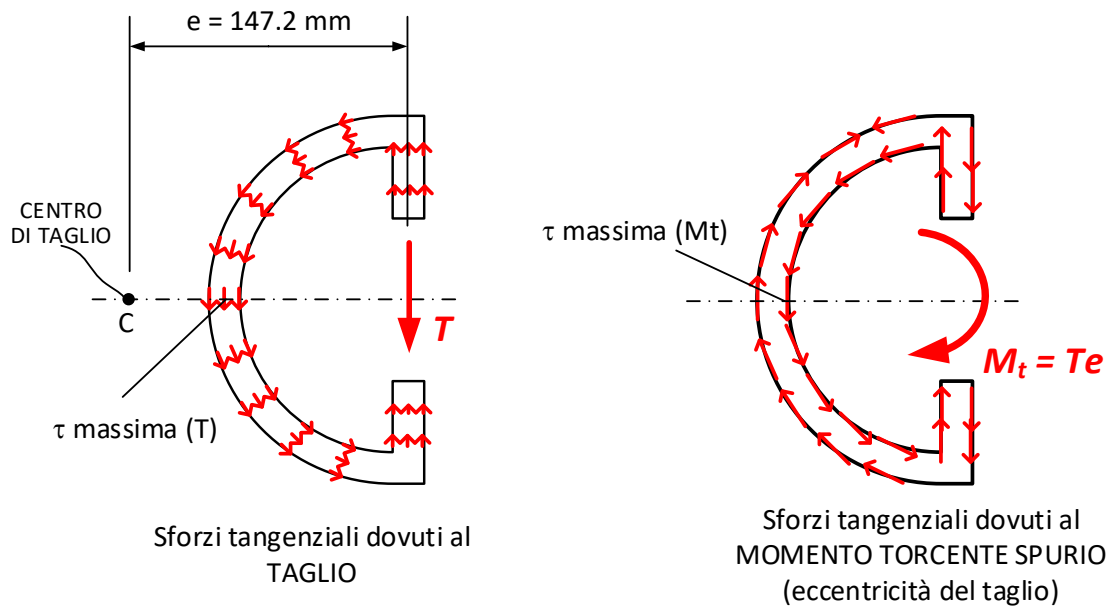


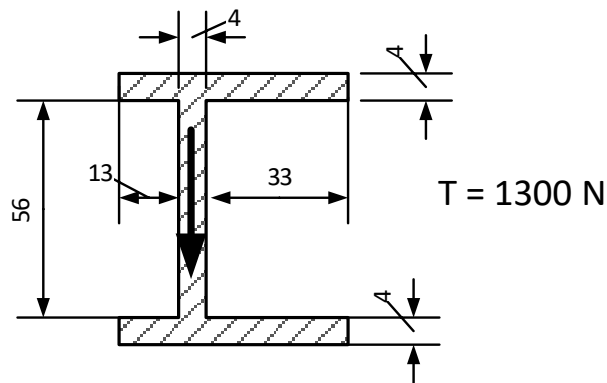
Fig. 5

## ESERCIZIO 2

(Prova scritta 25 gennaio 2016)

La sezione di trave illustrata in figura è soggetta ad un'azione di taglio  $T$  avente direzione coincidente con la linea d'asse dell'anima. Calcolare il coefficiente a snervamento nel punto più sollecitato della sezione, tenendo conto delle sollecitazioni generate dal taglio e dall'eventuale momento spurio.

Materiale: Alluminio;  $\sigma_{sn} = 180 \text{ MPa}$



Possiamo considerare la sezione a parete sottile (spessore molto minore delle dimensioni trasversali della sezione) e riferirci alla linea media per i successivi calcoli (fig. 1).

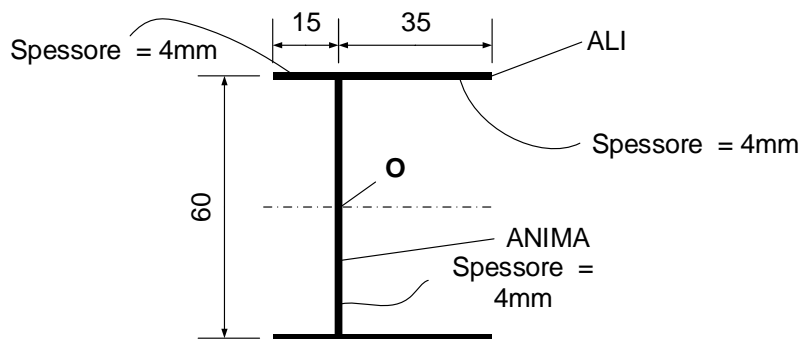


Fig. 1

Poiché la linea d'azione del taglio  $T$  non coincide con un asse di simmetria della struttura, è necessario determinare la posizione del centro di taglio  $C$ . Esso appartiene sicuramente all'asse di simmetria orizzontale della figura, rappresentato dalla retta tratto-punto di fig. 1 (asse neutro di flessione), ma la sua posizione su questa retta è incognita.

Per determinare la posizione del centro di taglio  $C$ , è conveniente scegliere il punto  $O$  (fig. 1) per il calcolo del momento prodotti dalle tensioni tangenziali  $\tau$  generate dal taglio  $T$ . La scelta è conveniente perché il contributo delle  $\tau$  nell'anima sarà nullo, in quanto la risultante relativa a questo tratto passa per il punto  $O$ .

Per calcolare gli sforzi tangenziali  $\tau$  dovuti al taglio utilizziamo la formula di Jourawski:

$$\tau = \frac{T S}{b J}$$

dove

- $S$  è il momento statico di una delle due parti di sezione individuata dalla corda su cui si vuole calcolare lo sforzo  $\tau$  (si vedano per esempio le aree tratteggiate in fig. 2; relative ai due tratti di cui si compongono le ali);
- $b$  è la lunghezza della corda;
- $J$  è il momento d'inerzia di TUTTA la sezione rispetto all'asse neutro flessionale (asse tratto-punto di fig. 1 nel nostro caso).

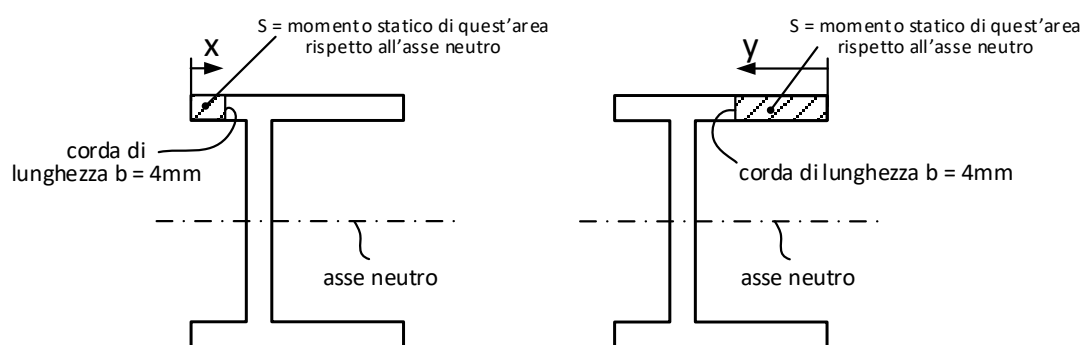


Fig. 2

Calcoliamo innanzitutto il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro.

Il momento d'inerzia rispetto all'asse neutro della sezione è pari alla differenza tra il momento d'inerzia della sezione considerata piena (rettangolo di base 50 mm ed altezza 64 mm) ed il momento d'inerzia della parte vuota (rettangolo di base 46 mm ed altezza 56 mm).

$$J = \frac{50 \cdot 64^3}{12} - \frac{(13 + 33) \cdot 56^3}{12} = 419072 \text{ mm}^4$$

Poiché la la sezione è a pareti sottili non si commette un grosso errore nel calcolo di  $J$  supponendo l'area come concentrata sulla linea media della sezione (fig. X). In tal caso si ottiene:

$$J = \frac{4 \cdot 60^3}{12} + 2 \cdot (50 \cdot 4) \cdot 30^2 = 432000 \text{ mm}^4$$

Utilizzeremo questo valore nei calcoli successivi.

La distribuzione qualitativa degli sforzi  $\tau$  dovuti alla sola azione di taglio (formula di Jourawski) è rappresentata in fig. 3.

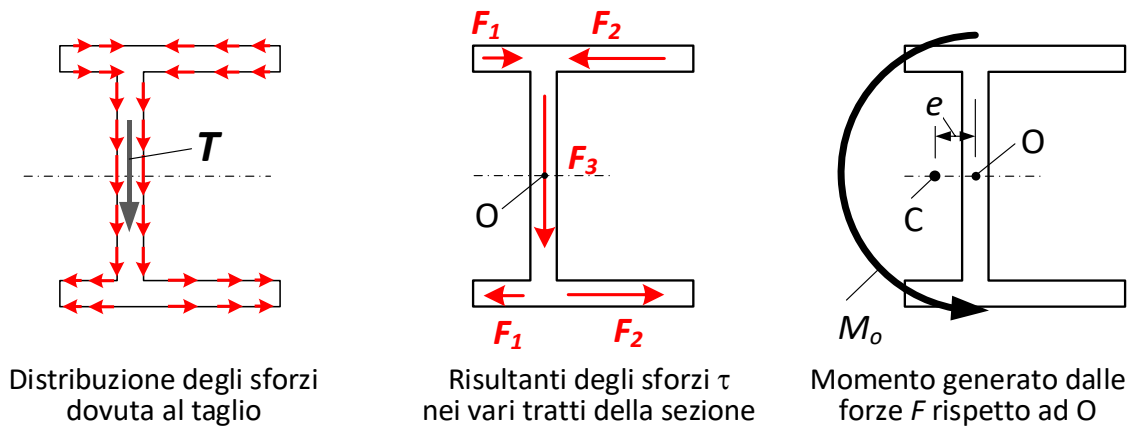


Fig. 3

Avendo scelto il punto  $O$  come punto rispetto al quale calcolare i momenti, per determinare la posizione del centro di taglio  $C$  è sufficiente calcolare gli sforzi  $\tau$ , e successivamente le risultanti, delle sole ali.

Nel tratto di sinistra dell'ala, la  $\tau$  sulla corda generica in posizione  $x$  (fig. 2) vale, per la formula di Jourawski,

$$\tau_1 = \frac{T S}{b J} = \frac{1300(4x \cdot 30)}{4 \cdot 432000} = 0.0902x$$

Nel tratto di destra, analogamente,

$$\tau_2 = \frac{T S}{b J} = \frac{1300(4y \cdot 30)}{4 \cdot 432000} = 0.0902y$$

Le forze risultanti  $F_1$  ed  $F_2$  nei tratti di sinistra (di lunghezza 15 mm) e di destra (di lunghezza 35 mm) delle ali sono dunque

$$F_1 = \int_0^{15} 0.0902x \cdot 4 \, dx = 0.0902 \cdot 4 \cdot \frac{15^2}{2} = 40.6 \text{ N}$$

$$F_2 = \int_0^{35} 0.0902x \cdot 4 \, dx = 0.0902 \cdot 4 \cdot \frac{35^2}{2} = 221.0 \text{ N}$$

Si noti che le risultanti  $F_1$  ed  $F_2$  su una stessa ala hanno versi opposti.

Il momento  $M_o$  rispetto al polo scelto (punto  $O$ ) ha quindi verso antiorario (essendo  $F_2$  maggiore di  $F_1$ ) ed avrà valore

$$M_o = 2(F_2 - F_1) \cdot braccio = 2(221.0 - 40.6) \cdot 30 = 10824 \text{ Nmm}$$

Eguagliando tale momento al prodotto  $T \cdot e$ , si ottiene l'eccentricità  $e$  (distanza tra il polo  $O$  ed il centro di taglio  $C$ , fig. 3):



$$e = \frac{M_0}{T} = \frac{10824}{1300} = 8.33 \text{ mm}$$

Gli sforzi  $\tau$  nella sezione sono quindi dati dalla somma delle  $\tau$  dovute al taglio  $T$  e delle  $\tau$  dovute al momento torcente spurio  $M_t = T \cdot e = 10824 \text{ Nmm}$  (che avrà verso orario, come indicato in figura 4).

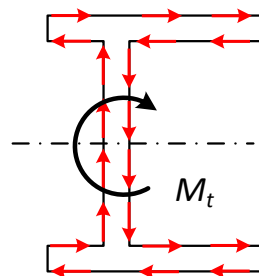
Gli sforzi massimi dovuti al taglio  $T$  si hanno all'asse neutro e valgono:

$$\tau_{\max T} = \frac{T S}{b J} = \frac{1300 (4 \cdot 50 \cdot 30 + 4 \cdot 30 \cdot 15)}{4 \cdot 432000} = 5.9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Gli sforzi dovuti al momento torcente spurio  $M_t$  sono massimi sui bordi della sezione (e sono costanti in modulo essendo lo spessore della parete costante):

$$\tau_{\max M_t} = \frac{3 M_t}{(\text{lunghezza linea media}) \cdot \text{spessore}^2} = \frac{3 \cdot 10824}{(60 + 2 \cdot 50) \cdot 4^2} = 12.7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

La distribuzione qualitativa delle  $\tau$  dovute al solo momento torcente spurio è illustrata in fig. 4.



Distribuzione degli sforzi dovuta al momento torcente

Fig. 4

Lo sforzo tangenziale massimo si ha dunque all'asse neutro e vale

$$\tau_{\max M_o} = \tau_{\max T} + \tau_{\max M_t} = 5.9 + 12.7 = 18.6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Il coefficiente di sicurezza vale quindi:

$$\eta = \frac{\tau_{sn}}{\tau_{\max}} = \frac{\frac{\sigma_{sn}}{\sqrt{3}}}{\tau_{\max}} = \frac{180/\sqrt{3}}{18.6} = 5.6$$