

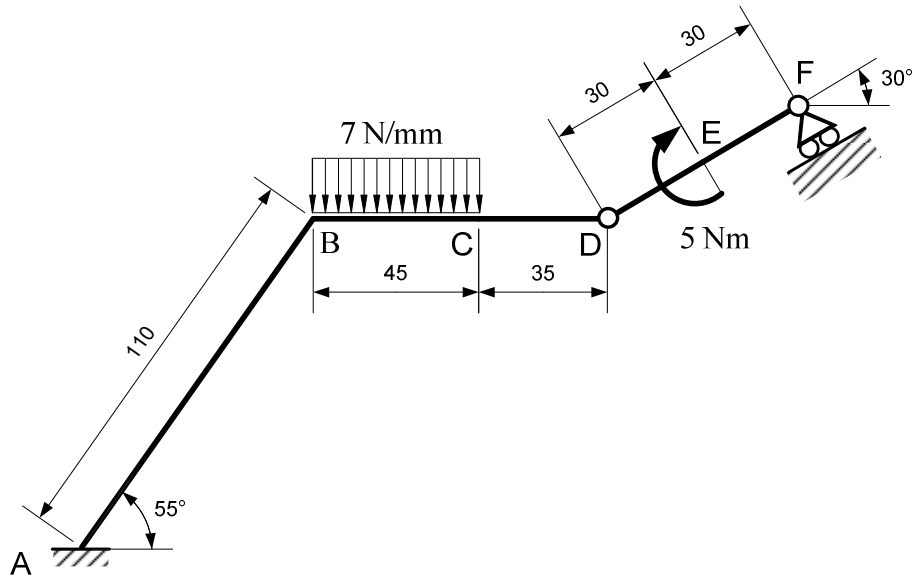
ESERCIZI SVOLTI O CON TRACCIA DI SOLUZIONE SU

STRUTTURE ISOSTATICHE

REAZIONI VINCOLARI ED AZIONI INTERNE

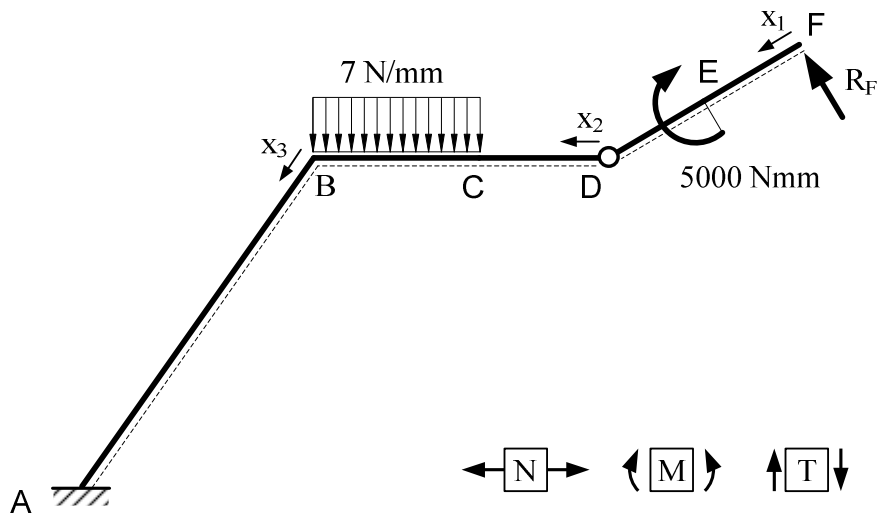
I PROVA DI VALUTAZIONE 15 Novembre 2006 - Esercizio 2

Data la struttura di figura, ricavare le equazioni delle azioni interne (M, N, T) e tracciare i relativi diagrammi.



Struttura isostatica (GdL=6; GdV=6), non labile.

CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI



Le azioni interne nella struttura verranno calcolate secondo le convenzioni indicate nella figura precedente, per cui l'unica reazione vincolare a terra da calcolare è la reazione del carrello R_F . Per

ricavare la reazione R_F è sufficiente scrivere l'equazione di equilibrio alla rotazione dell'asta DF con polo in D.

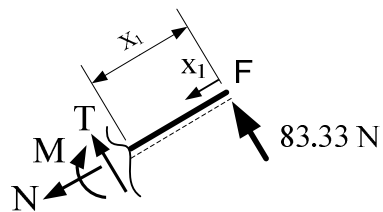
$$\vartheta_D) -R_F \cdot (30 + 30) + 5000 = 0$$

Si ottiene:

$$R_F = 83.33 \text{ N}$$

CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE

$$0 \leq x_1 < 30$$



$$N = 0$$

$$T + 83.33 = 0$$

$$T = -83.33 \text{ N}$$

$$M - 83.33 \cdot x_1 = 0$$

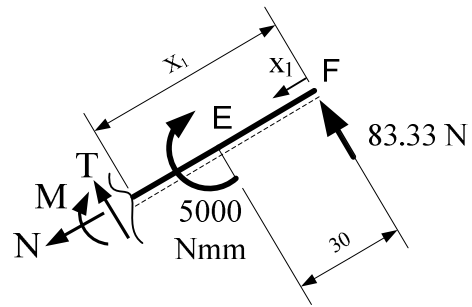
$$M = 83.33 \cdot x_1$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.
Il momento è lineare, per cui è sufficiente calcolarne il valore agli estremi dell'intervallo.

$$M(0) = 0$$

$$M(30) = 2500 \text{ Nmm}$$

$$30 \leq x_1 < 60$$



$$N = 0$$

$$T + 83.33 = 0$$

$$T = -83.33 \text{ N}$$

$$M - 83.33 \cdot x_1 + 5000 = 0$$

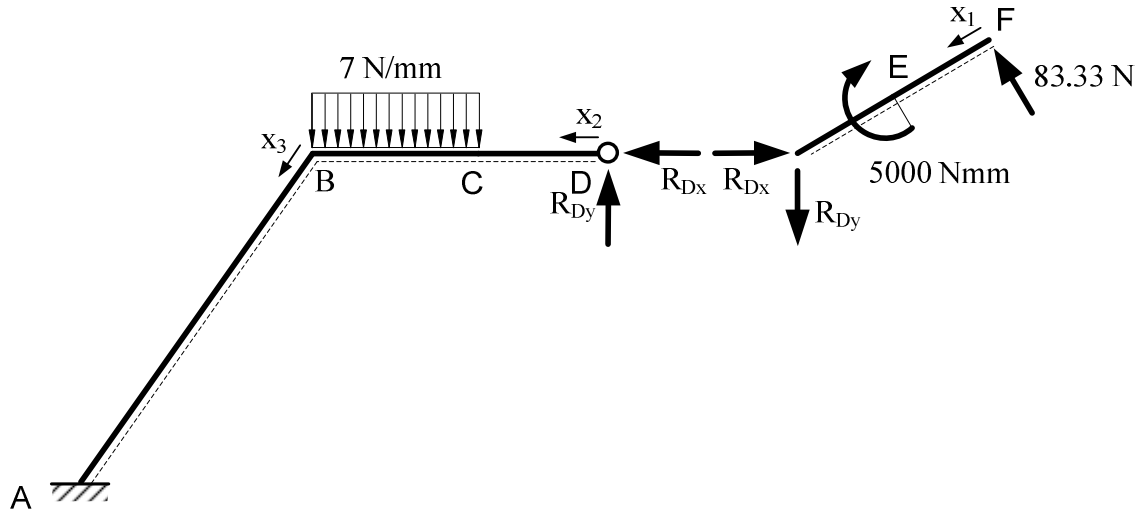
$$M = 83.33 \cdot x_1 - 5000$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.
 Il momento è lineare, per cui è sufficiente calcolarne il valore agli estremi dell'intervallo.

$$M(30) = -2500 \text{ Nmm}$$

$$M(60) = 0$$

Per continuare lo studio della struttura secondo le convenzioni scelte, è necessario ora aprire la cerniera in D e calcolare le reazioni R_{Dx} e R_{Dy} interne a tale cerniera.



Tali reazioni si possono calcolare tramite le equazioni di equilibrio alla traslazione in direzione orizzontale per l'asta FD.

$$\rightarrow) R_{Dx} - 83.33 \cdot \sin 30^\circ = 0$$

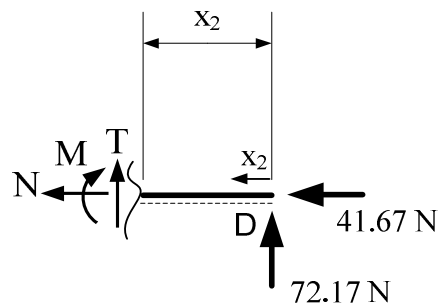
$$\uparrow) -R_{Dy} + 83.33 \cdot \cos 30^\circ = 0$$

Si ottiene:

$$R_{Dx} = 41.67 \text{ N}$$

$$R_{Dy} = 72.17 \text{ N}$$

$$0 \leq x_2 < 35$$



$$N + 41.67 = 0$$

$$N = -41.67 \text{ N}$$

$$T + 72.17 = 0$$

$$T = -72.17 \text{ N}$$

$$M - 72.17 \cdot x_2 = 0$$

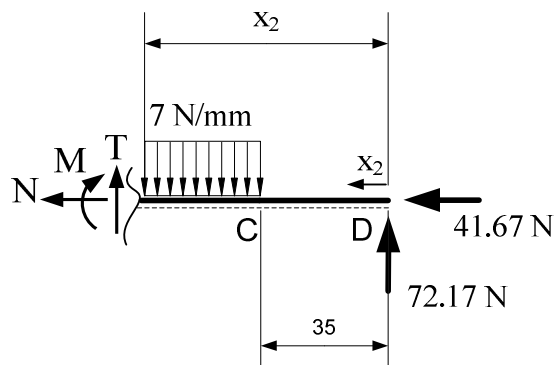
$$M = 72.17 \cdot x_2$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.
Il momento è lineare, per cui è sufficiente calcolarne il valore agli estremi dell'intervallo.

$$M(0) = 0$$

$$M(35) = 2526 \text{ Nmm}$$

$$35 \leq x_2 < 80$$



$$N + 41.67 = 0$$

$$N = -41.67 \text{ N}$$

$$T + 72.17 - 7 \cdot (x_2 - 35) = 0$$

$$T = -72.17 + 7 \cdot (x_2 - 35)$$

$$M - 72.17 \cdot x_2 + 7 \cdot \frac{(x_2 - 35)^2}{2} = 0$$

$$M = 72.17 \cdot x_2 - 3.5 \cdot (x_2 - 35)^2$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$T(35) = -72.17 \text{ N}$$

$$T(80) = 242.83 \text{ N}$$

Il taglio assume valore nullo per $x_3 = 45.31 \text{ mm}$, per cui il momento ha un punto di stazionarietà (massimo/minimo) in tale punto.

Il valore del momento agli estremi del tratto è il seguente:

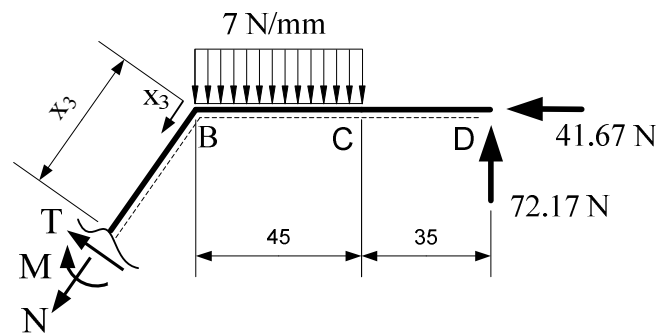
$$M(35) = 2526 \text{ Nmm}$$

$$M(80) = -1314 \text{ Nmm}$$

Il valore massimo del momento è invece il seguente:

$$M(45.31) = 2898 \text{ Nmm}$$

$$0 \leq x_3 < 110$$



$$N + 7 \cdot 45 \cdot \sin 55^\circ + 41.67 \cdot \cos 55^\circ - 72.17 \cdot \sin 55^\circ = 0$$

$$N = -222.82 \text{ N}$$

$$T - 7 \cdot 45 \cdot \cos 55^\circ + 41.67 \cdot \sin 55^\circ + 72.17 \cdot \cos 55^\circ = 0$$

$$T = 105.15 \text{ N}$$

$$M + (7 \cdot 45) \cdot \left(\frac{45}{2} + x_3 \cdot \cos 55^\circ \right) - 41.67 \cdot (x_3 \cdot \sin 55^\circ) - 72.17 \cdot (45 + 35 + x_3 \cdot \cos 55^\circ) = 0$$

$$M = -1314 - 105.15 \cdot x_3$$

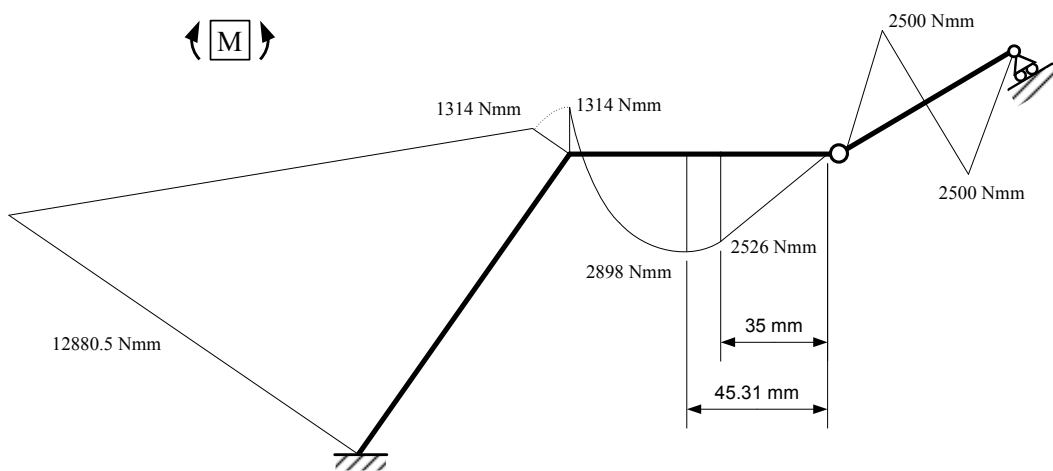
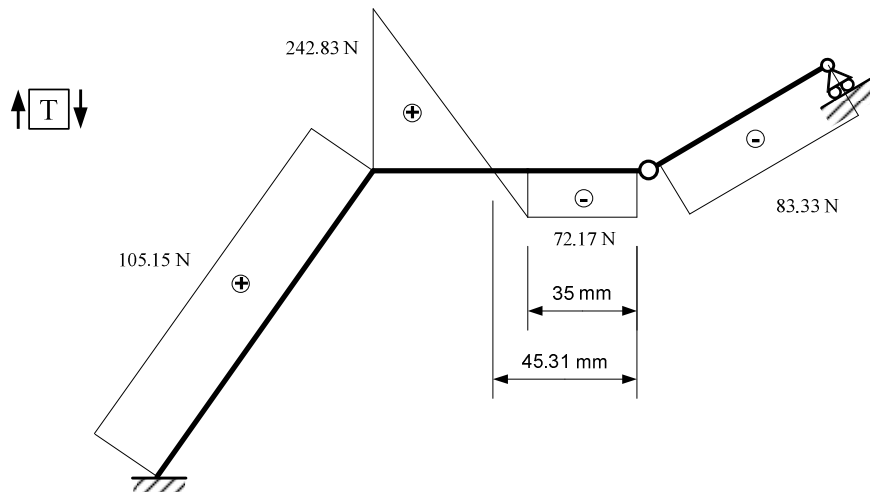
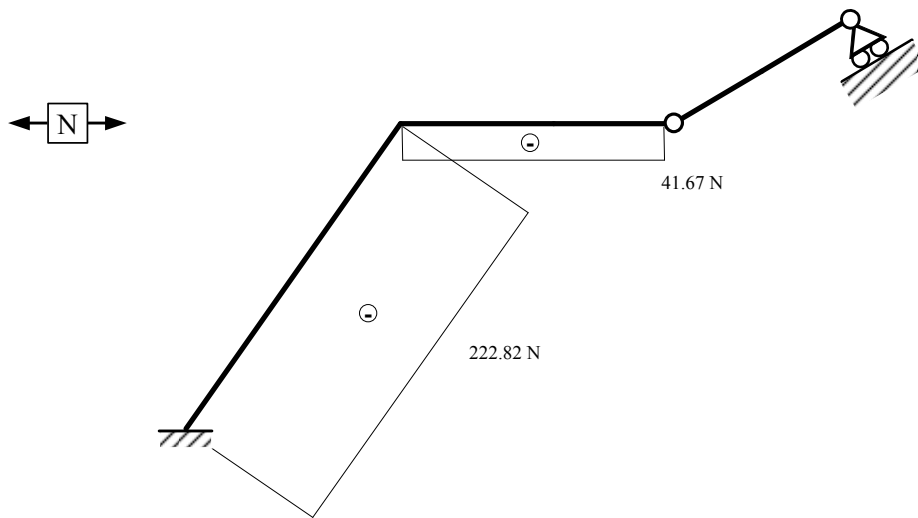
Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

Il momento è lineare, per cui è sufficiente calcolarne il valore agli estremi dell'intervallo.

$$M(0) = -1314 \text{ Nmm}$$

$$M(110) = 12880.5 \text{ Nmm}$$

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE (N, T, M) NELLA STRUTTURA



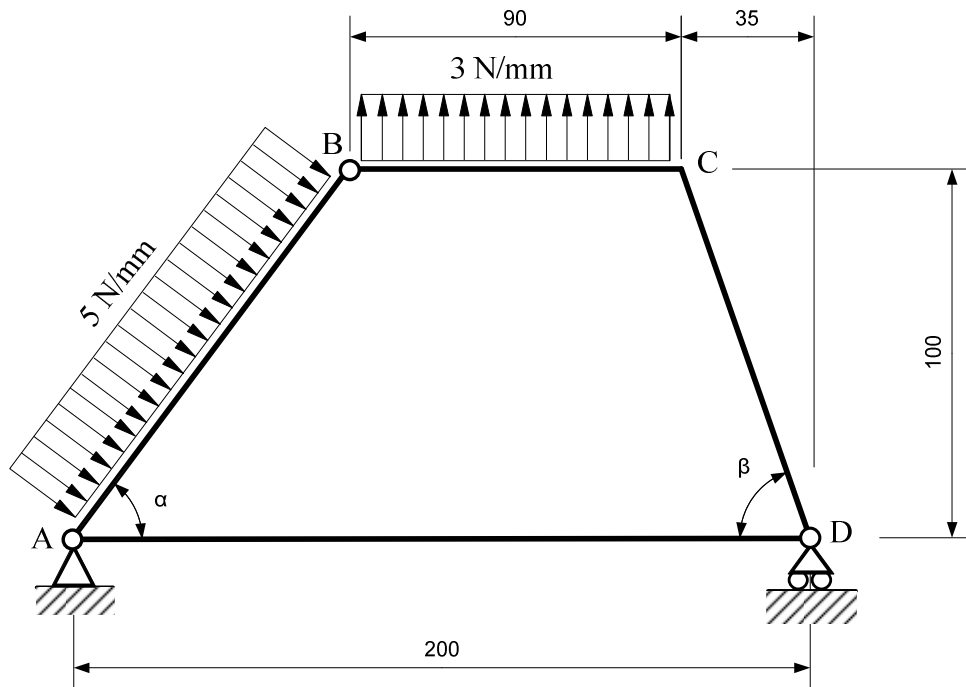
Su tali diagrammi si possono fare alcune osservazioni:

- il momento nella cerniera interna D e nel carrello a terra F è nullo;
- il diagramma dei momenti è sempre continuo, e nel punto E, dove è applicata una coppia, è presente un salto pari al valore della coppia stessa;
- nel tratto CB il momento è parabolico, il taglio varia linearmente ed il momento ha un massimo/minimo nel punto in cui il taglio è nullo;
- nei tratti FE, ED, DC e BA il momento varia linearmente ed il taglio è costante;

Tutte queste osservazioni indicano come i diagrammi delle azioni interne siano coerenti con lo schema statico della struttura originaria.

I PROVA DI VALUTAZIONE 14 Novembre 2009 - Esercizio 2

Data la struttura di figura, ricavare le equazioni delle azioni interne (M, N, T) e tracciare i relativi diagrammi.



Struttura isostatica (GdL=9; GdV=9), non labile.

CALCOLI PRELIMINARI

Lunghezza tratti AB e CD.

$$AB = \sqrt{100^2 + (200 - 90 - 35)^2} = 125 \text{ mm}$$

$$CD = \sqrt{100^2 + 35^2} = 105.95 \text{ mm}$$

Angoli α e β .

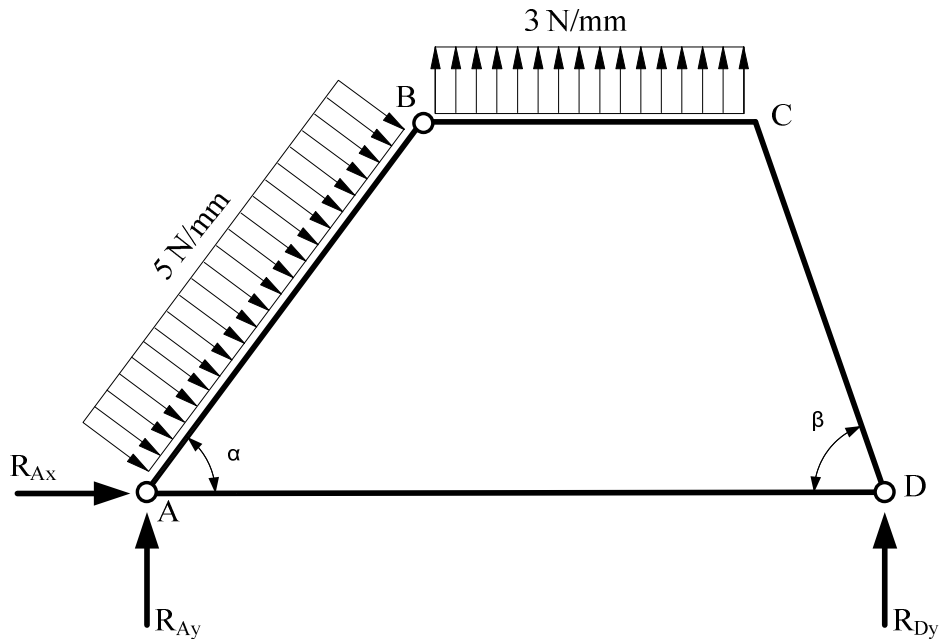
$$\alpha = \arctg\left(\frac{100}{75}\right) = 53.13^\circ$$

$$\beta = \arctg\left(\frac{100}{35}\right) = 70.71^\circ$$

$$\sin(\alpha) = 0.8 \quad \cos(\alpha) = 0.6$$

$$\sin(\beta) = 0.94386 \quad \cos(\beta) = 0.33035$$

CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI



Equilibrio alla rotazione di tutta la struttura rispetto al punto A.

$$\vartheta_A) -R_{Dy} \cdot 200 + 5 \cdot \frac{125^2}{2} - 3 \cdot 90 \cdot \left(75 + \frac{90}{2}\right) = 0$$

Si ottiene:

$$R_{Dy} = 33.3 \text{ N}$$

Equilibrio alla traslazione orizzontale di tutta la struttura.

$$\rightarrow) R_{Ax} + 5 \cdot 125 \cdot \sin 53.13^\circ = 0$$

Si ottiene:

$$R_{Ax} = -500 \text{ N}$$

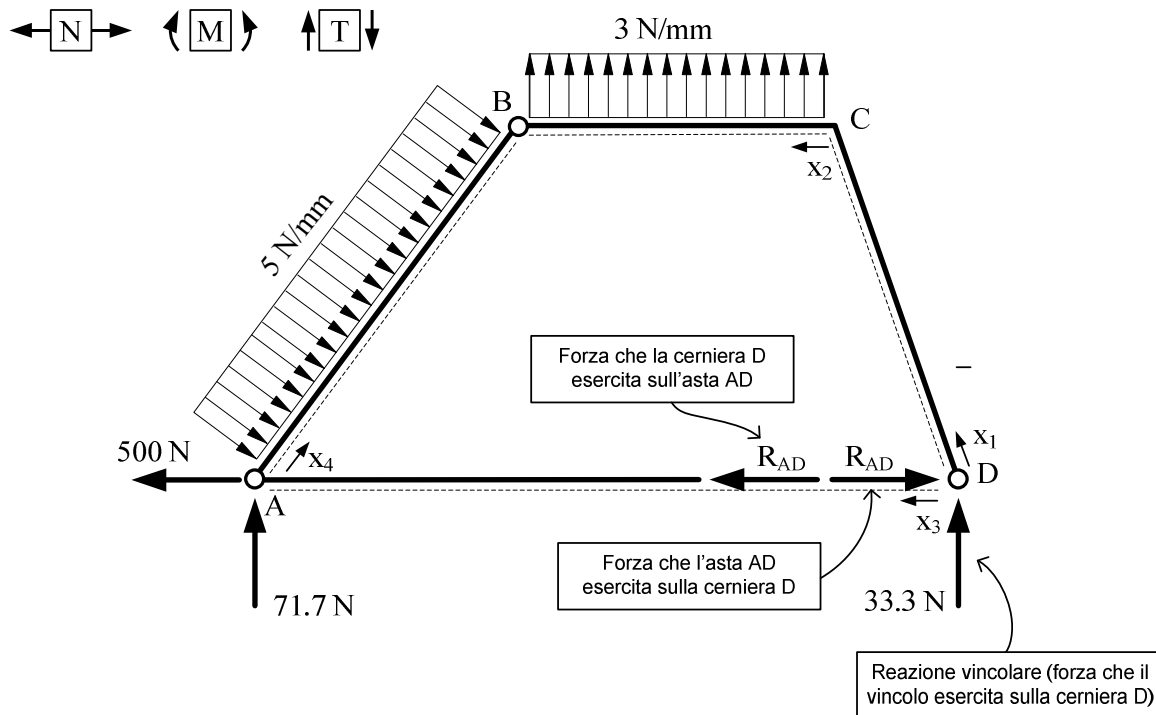
Equilibrio alla traslazione verticale di tutta la struttura.

$$\uparrow) R_{Ay} + R_{Dy} + 3 \cdot 90 - 125 \cdot 5 \cdot \cos 53.13^\circ = 0$$

Si ottiene:

$$R_{Ay} = 71.7 \text{ N}$$

Essendo la struttura di tipo ad anello chiuso, è necessario aprire la struttura per procedere al calcolo delle azioni interne. Essendo l'asta AD una biella scarica, è conveniente aprire la struttura sezionando l'asta AD immediatamente prima della cerniera D e procedere per il calcolo delle azioni interne secondo le convenzioni indicate nella figura seguente, dopo aver calcolato le reazioni interne necessarie (forza R_{AD}).



Equilibrio alla rotazione dell'asta DB con polo in B per il calcolo della reazione interna R_{AD} .

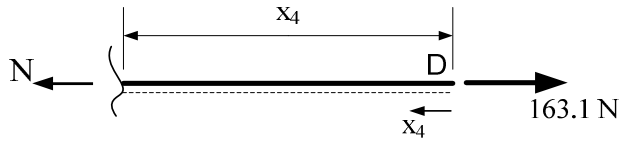
$$\curvearrowright_B) -R_{AD} \cdot 100 - 33.3 (90 + 35) - 3 \cdot \frac{90^2}{2} = 0$$

Si ottiene:

$$R_{AD} = -163.1 \text{ N}$$

CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE

$$0 \leq x_4 \leq 200$$



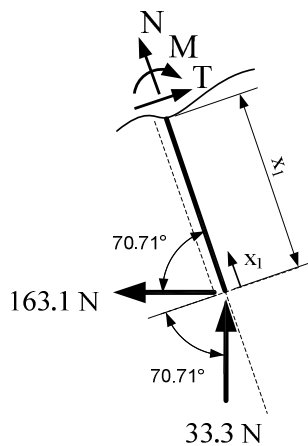
Quest'asta è una biella scarica, per cui è presente solo azione normale.

$$N - 163.1 = 0$$

$$N = 163.1 \text{ N}$$

$$M = T = 0$$

$$0 \leq x_1 \leq 105.95$$



$$N + 33.3 \cdot \sin 70.71^\circ + 163.1 \cdot \cos 70.71^\circ = 0$$

$$N = -85.31 \text{ N}$$

$$T + 33.3 \cdot \cos 70.71^\circ - 163.1 \cdot \sin 70.71^\circ = 0$$

$$T = 143 \text{ N}$$

$$M - 33.3 \cdot \cos 70.71^\circ \cdot x_1 + 163.1 \cdot \sin 70.71^\circ \cdot x_1 = 0$$

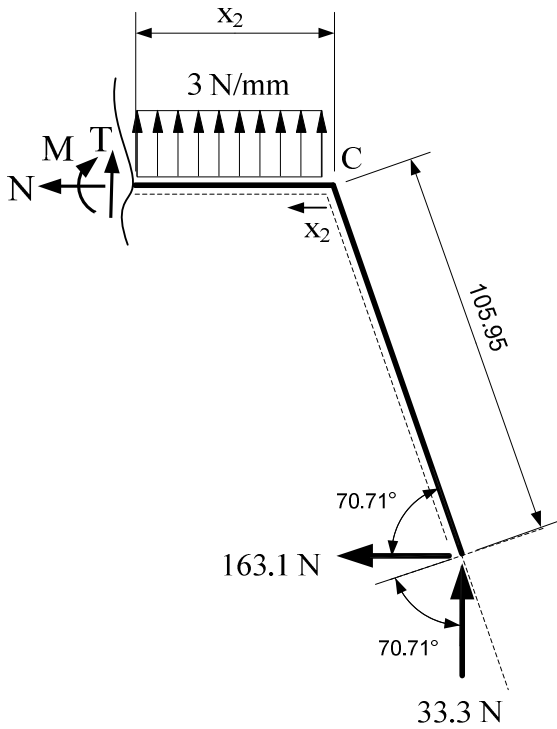
$$M = -143 \cdot x_1$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne. Di seguito, i valori del momento agli estremi dell'intervallo.

$$M(0) = 0$$

$$M(115.95) = -15150.85 \text{ Nmm}$$

$$0 \leq x_2 \leq 90$$



$$N + 163.1 = 0$$

$$N = -163.1 \text{ N}$$

$$T + 33.3 + 3 \cdot x_2 = 0$$

$$T = -3 \cdot x_2 - 33.3$$

$$M - 33.3 \cdot (x_2 + 35) + 163.1 \cdot 100 - 3 \cdot \frac{x_2^2}{2} = 0$$

$$M = 1.5 \cdot x_2^2 + 33.3 \cdot x_2 - 15147.15$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$T(0) = -33.3 \text{ N}$$

$$T(90) = -303.3 \text{ N}$$

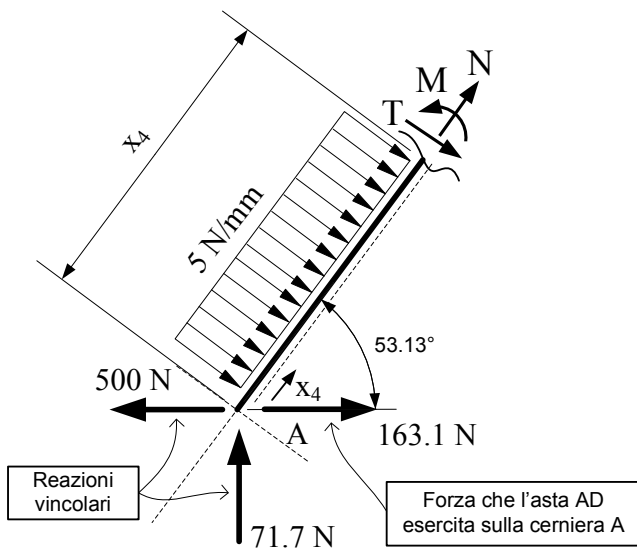
Il taglio non assume valore nullo nell'ambito del tratto in questione, per cui il momento non ha un punto di stazionarietà (massimo/minimo).

E' sufficiente quindi calcolare il valore del momento agli estremi del tratto.

$$M(0) = -15147.15$$

$$M(90) = 0$$

$$0 \leq x_3 \leq 125$$



$$N - 500 \cdot \cos 53.13^\circ + 71.7 \cdot \sin 53.13^\circ + 163.1 \cdot \cos 53.13^\circ = 0$$

$$N = 144.78 \text{ N}$$

$$T - 500 \cdot \sin 53.13^\circ - 71.7 \cdot \cos 53.13^\circ + 163.1 \cdot \sin 53.13^\circ + 5 \cdot x_3 = 0$$

$$T = 312.5 - 5 \cdot x_3$$

$$M - 500 \cdot \sin 53.13^\circ \cdot x_3 - 71.7 \cdot \cos 53.13^\circ \cdot x_3 + 163.1 \cdot \sin 53.13^\circ \cdot x_3 + 5 \cdot \frac{x_3^2}{2} = 0$$

$$M = 312.5 \cdot x_3 - 2.5 \cdot x_3^2$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$T(0) = 312.5\text{N}$$

$$T(125) = -312.5\text{ N}$$

Il taglio assume valore nullo per $x_3 = 62.5$, per cui il momento ha un punto di stazionarietà (massimo/minimo) in tale punto.

Il valore del momento agli estremi del tratto è il seguente:

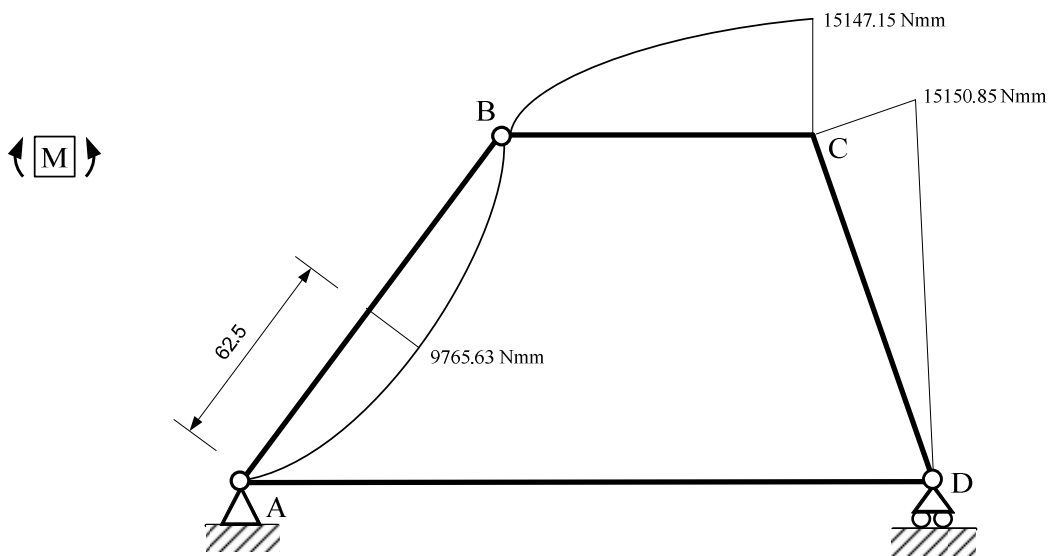
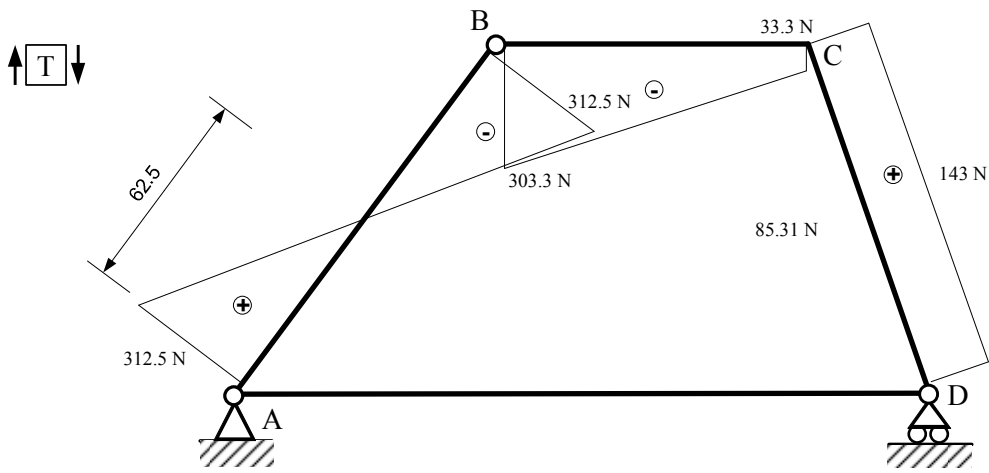
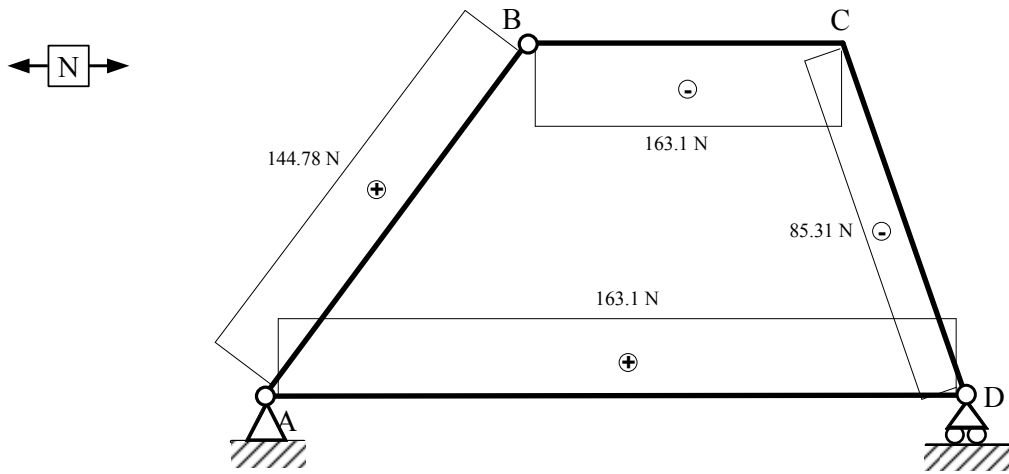
$$M(0) = 0$$

$$M(125) = 0$$

Il valore massimo del momento è invece il seguente:

$$M(62.5) = 9765.63\text{ Nmm}$$

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE (N, T, M) NELLA STRUTTURA



Su tali diagrammi si possono fare alcune osservazioni:

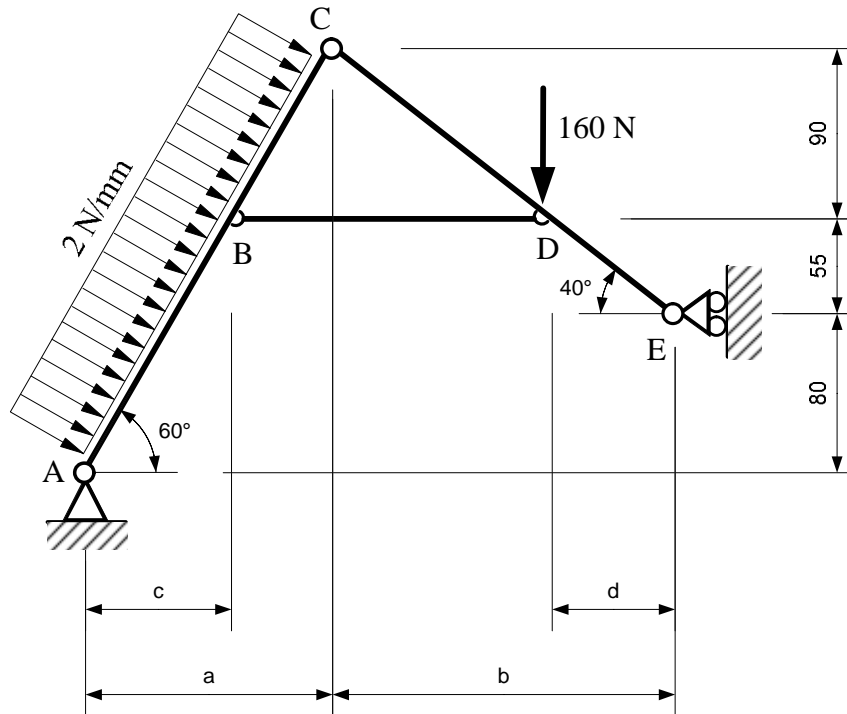
- il momento nelle cerniere A, B e D è nullo;
- il diagramma dei momenti è privo di salti, non essendoci coppie applicate;
- nel tratto DC il momento varia linearmente ed il taglio, che è la derivata del momento, è costante;
- l'asta DA è una biella scarica, per cui non presenta né taglio né momento;
- nel tratto AB il momento è parabolico, il taglio varia linearmente ed il momento ha un massimo/minimo nel punto in cui il taglio è nullo;
- nel tratto CB il momento è parabolico, il taglio varia linearmente ed il momento non ha un punto di massimo/minimo.

Tutte queste osservazioni indicano come i diagrammi delle azioni interne siano coerenti con lo schema statico della struttura originaria.

I PROVA DI VALUTAZIONE 24 Novembre 2010 - Esercizio 2

SVOLGIMENTO

Data la struttura di figura, ricavare le equazioni delle azioni interne (M, N, T) e tracciare i relativi diagrammi.



Struttura isostatica (GdL=9; GdV=9), non labile.

CALCOLI PRELIMINARI

$$AB = \frac{55 + 80}{\sin 60^\circ} = 155.9 \text{ mm} \quad BC = \frac{90}{\sin 60^\circ} = 103.9 \text{ mm} \quad AC = AB + BC = 259.8 \text{ mm}$$

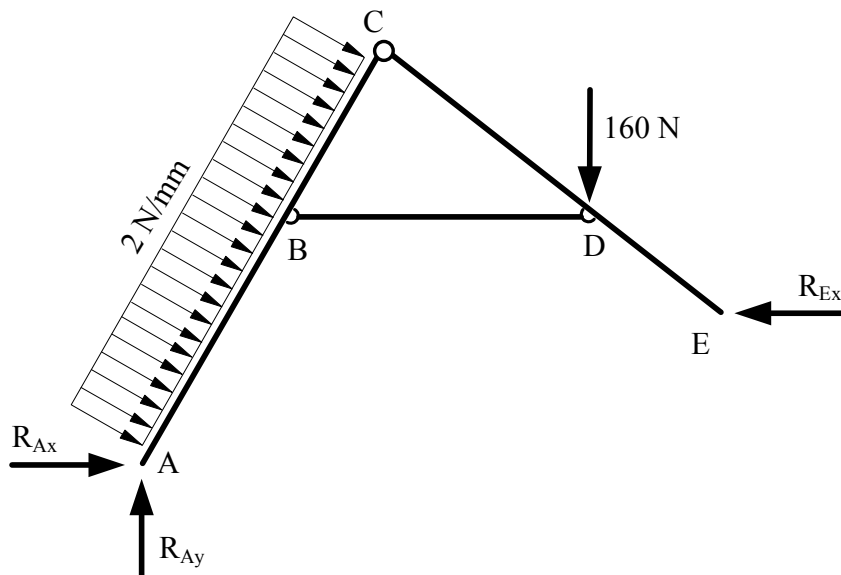
$$CD = \frac{90}{\sin 40^\circ} = 140.0 \text{ mm} \quad DE = \frac{55}{\sin 40^\circ} = 85.6 \text{ mm} \quad CE = CD + DE = 225.6 \text{ mm}$$

$$a = \frac{90 + 55 + 80}{\tan 60^\circ} = 129.9 \text{ mm} \quad b = \frac{90 + 55}{\tan 40^\circ} = 172.8 \text{ mm}$$

$$c = \frac{55 + 80}{\tan 60^\circ} = 77.9 \text{ mm} \quad d = \frac{55}{\tan 40^\circ} = 65.6 \text{ mm} \quad BD = a + b - (c + d) = 159.2 \text{ mm}$$

$$c = \frac{55 + 80}{\operatorname{tg} 60^\circ} = 77.9 \text{ mm} \quad d = \frac{55}{\operatorname{tg} 40^\circ} = 65.6 \text{ mm} \quad BD = a + b - (c + d) = 159.2 \text{ mm}$$

CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI



Equilibrio alla traslazione verticale di tutta la struttura.

$$\uparrow R_{Ay} - 2 \cdot 259.8 \cdot \cos 60^\circ - 160 = 0$$

Si ottiene:

$$R_{Ay} = 419.8 \text{ N}$$

Equilibrio alla rotazione di tutta la struttura rispetto al punto A.

$$\curvearrowleft_A - R_{Ex} \cdot 80 + 2 \cdot \frac{259.8^2}{2} + 160 \cdot (129.9 + 172.8 - 65.6) = 0$$

Si ottiene:

$$R_{Dy} = 1317.9 \text{ N}$$

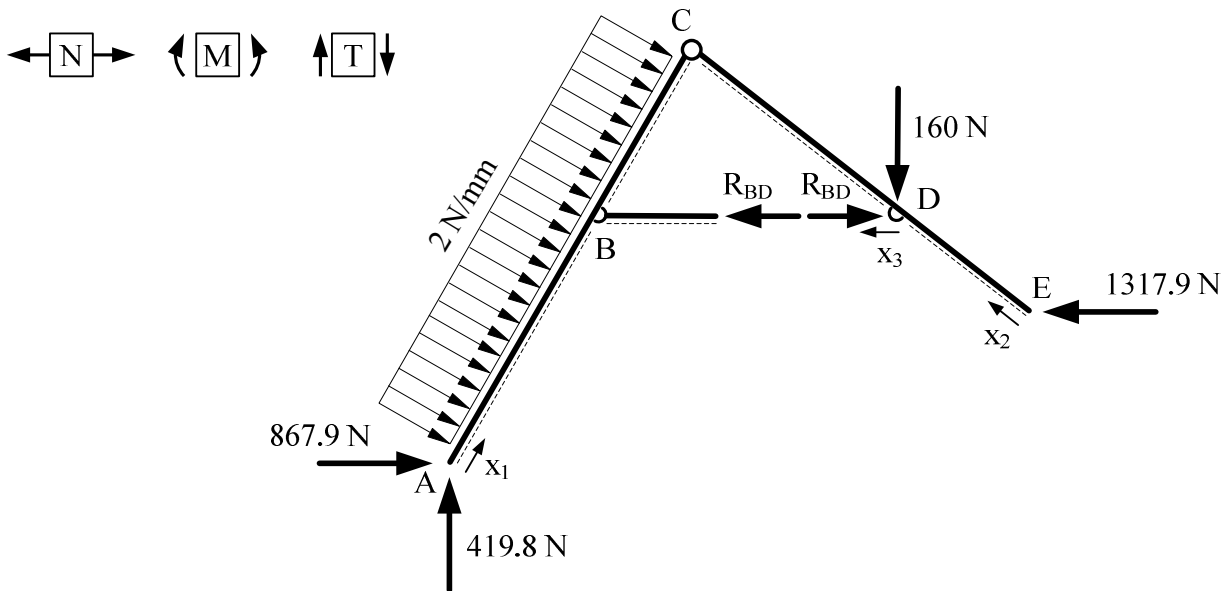
Equilibrio alla traslazione orizzontale di tutta la struttura.

$$\rightarrow) R_{Ax} + 2 \cdot 259.8 \cdot \sin 60^\circ - R_{Ex} = 0$$

Si ottiene:

$$R_{Ax} = 867.9 \text{ N}$$

E' ora necessario aprire la struttura per procedere al calcolo delle reazioni interne necessarie per il calcolo delle azioni interne. Essendo l'asta BD una biella scarica, è conveniente aprire la struttura nel punto D e procedere per il calcolo delle azioni interne secondo le convenzioni indicate nella figura seguente, dopo aver calcolato le reazioni interne necessarie.



Equilibrio alla rotazione dell'asta EC con polo in C per il calcolo della reazione interna R_{BD}.

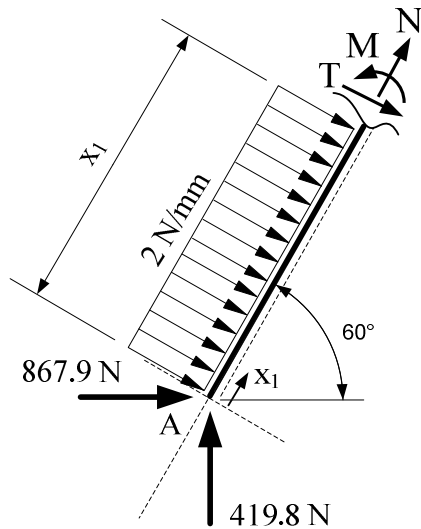
$$\vartheta_C) -R_{BD} \cdot 90 - 1317.9 \cdot (90 + 55) + 160 \cdot (172.8 - 65.6) = 0$$

Si ottiene:

$$R_{BD} = 2313.9 \text{ N}$$

CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE

$$0 \leq x_1 < 155.9$$



$$N + 867.9 \cdot \cos 60^\circ + 419.8 \cdot \sin 60^\circ = 0$$

$$N = -797.5 \text{ N}$$

$$T + 867.9 \cdot \sin 60^\circ - 419.8 \cdot \cos 60^\circ + 2 \cdot x_1 = 0$$

$$T = -541.7 - 2 \cdot x_1$$

$$M + 867.9 \cdot \sin 60^\circ \cdot x_1 - 419.8 \cdot \cos 60^\circ \cdot x_1 + 2 \cdot \frac{x_1^2}{2} = 0$$

$$M = -541.7 \cdot x_1 - x_1^2$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$T(0) = -541.7 \text{ N}$$

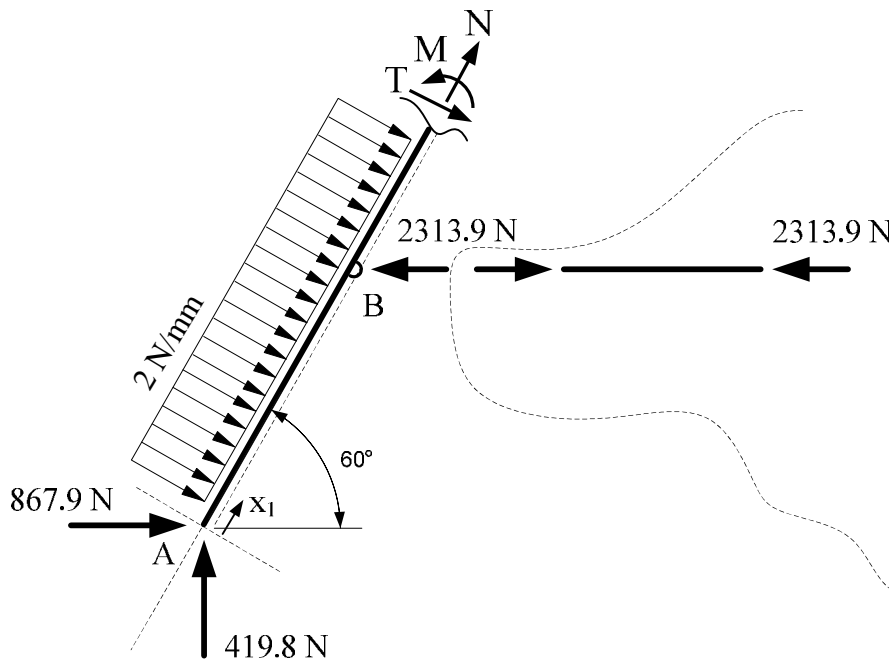
$$T(155.9) = -853.5 \text{ N}$$

Il taglio non assume valore nullo nell'ambito del tratto in questione, per cui il momento non ha un punto di stazionarietà (massimo/minimo). E' sufficiente quindi calcolare il valore del momento agli estremi del tratto, sapendo che avrà andamento parabolico.

$$M(0) = 0$$

$$M(155.9) = -108756 \text{ Nmm}$$

$$155.9 \leq x_1 < 259.8$$



$$N + 867.9 \cdot \cos 60^\circ + 419.8 \cdot \sin 60^\circ - 2313.9 \cdot \cos 60^\circ = 0$$

$$N = 359.4 \text{ N}$$

$$T + 867.9 \cdot \sin 60^\circ - 419.8 \cdot \cos 60^\circ + 2 \cdot x_1 - 2313.9 \cdot \sin 60^\circ = 0$$

$$T = -1412.2 - 2 \cdot x_1$$

$$M + 867.9 \cdot \sin 60^\circ \cdot x_1 - 419.8 \cdot \cos 60^\circ \cdot x_1 + 2 \cdot \frac{x_1^2}{2} - 2313.9 \cdot \sin 60^\circ \cdot (x_1 - 155.9) = 0$$

$$M = -312407 + 1462.1 \cdot x_1 - x_1^2$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$T(155.9) = 1150.4 \text{ N}$$

$$T(259.8) = 942.6 \text{ N}$$

Il taglio non assume valore nullo nell'ambito del tratto in questione, per cui il momento non ha un punto di massimo. E' sufficiente quindi calcolare il valore del momento agli estremi del tratto, sapendo che avrà andamento parabolico.

$$M(155.9) = -108756 \text{ Nmm}$$

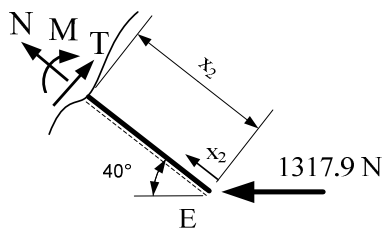
$$M(259.8) = 0$$

Il taglio non assume valore nullo nell'ambito del tratto in questione, per cui il momento non ha un punto di stazionarietà (massimo/minimo). E' sufficiente quindi calcolare il valore del momento agli estremi del tratto, sapendo che avrà andamento parabolico.

$$M(155.9) = -108756 \text{ Nmm}$$

$$M(259.8) = 0$$

$$0 \leq x_2 < 85.6$$



$$N + 1317.9 \cdot \cos 40^\circ = 0$$

$$N = -1009.6 \text{ N}$$

$$T - 1317.9 \cdot \sin 40^\circ = 0$$

$$T = 847.1 \text{ N}$$

$$M + 1317.9 \cdot \sin 40^\circ \cdot x_2 = 0$$

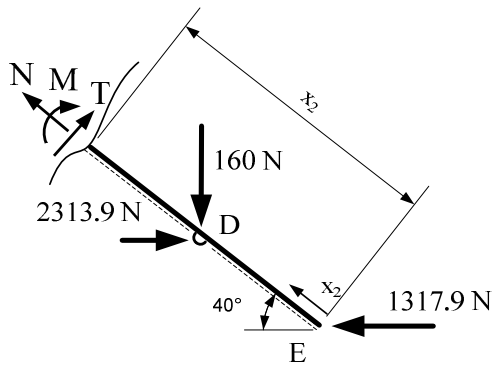
$$M = -847.1 \cdot x_2$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne. Di seguito, i valori del momento agli estremi dell'intervallo.

$$M(0) = 0$$

$$M(85.6) = -72512 \text{ Nmm}$$

$$85.6 \leq x_2 < 225.6$$



$$N + 1317.9 \cdot \cos 40^\circ - 160 \cdot \sin 40^\circ - 2313.9 \cdot \cos 40^\circ = 0$$

$$N = +865.8 \text{ N}$$

$$T - 1317.9 \cdot \sin 40^\circ - 160 \cdot \cos 40^\circ + 2313.9 \cdot \sin 40^\circ = 0$$

$$T = -517.7 \text{ N}$$

$$M + 1317.9 \cdot \sin 40^\circ \cdot x_2 + 160 \cdot \cos 40^\circ \cdot (x_2 - 85.6) - 2313.9 \cdot \sin 40^\circ \cdot (x_2 - 85.6) = 0$$

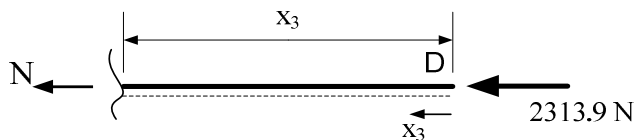
$$M = 517.7 \cdot x_2 - 116825$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne. Di seguito, i valori del momento agli estremi dell'intervallo.

$$M(85.6) = -72510$$

$$M(225.6) = 0$$

$$0 \leq x_3 \leq 159.2$$



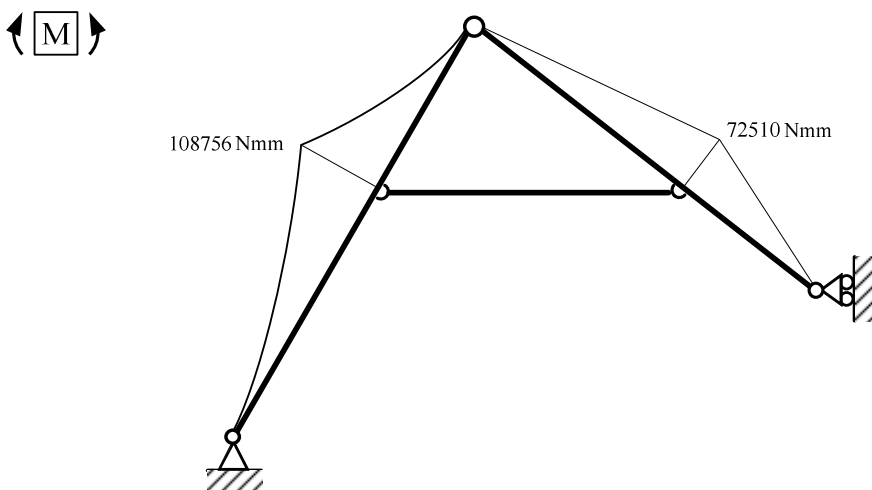
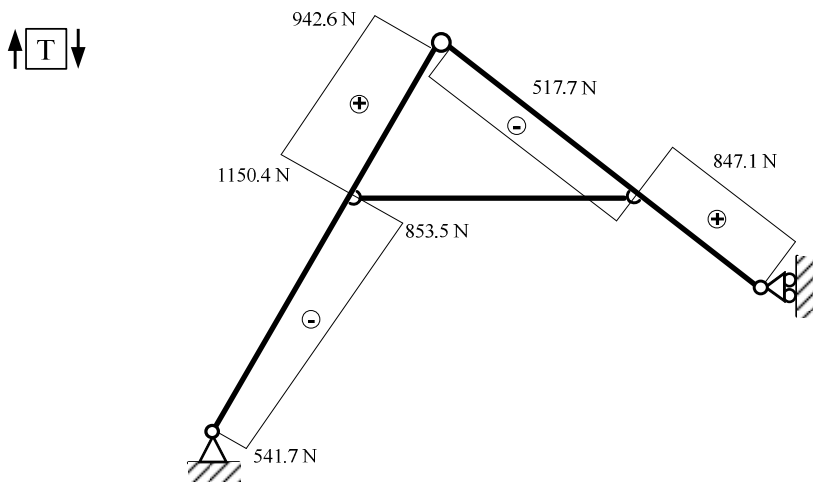
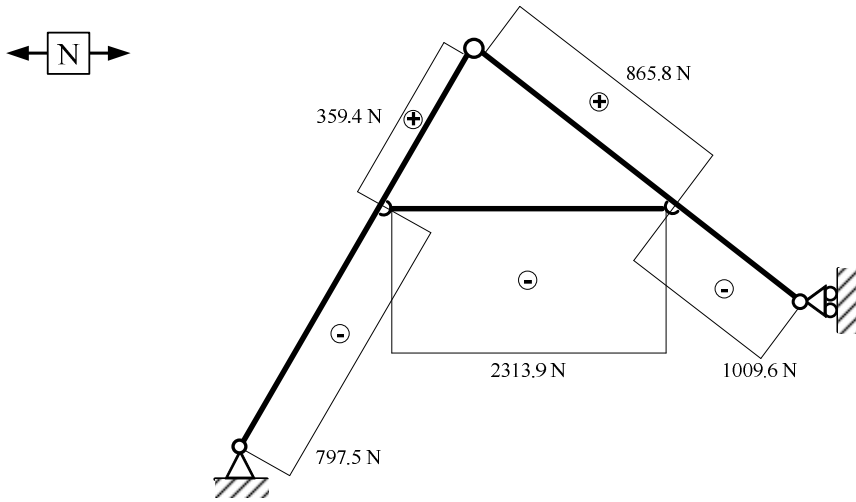
Quest'asta è una biella scarica, per cui è presente solo azione normale.

$$N + 2313.9 = 0$$

$$N = -2313.9 \text{ N}$$

$$M = T = 0$$

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE (N, T, M) NELLA STRUTTURA



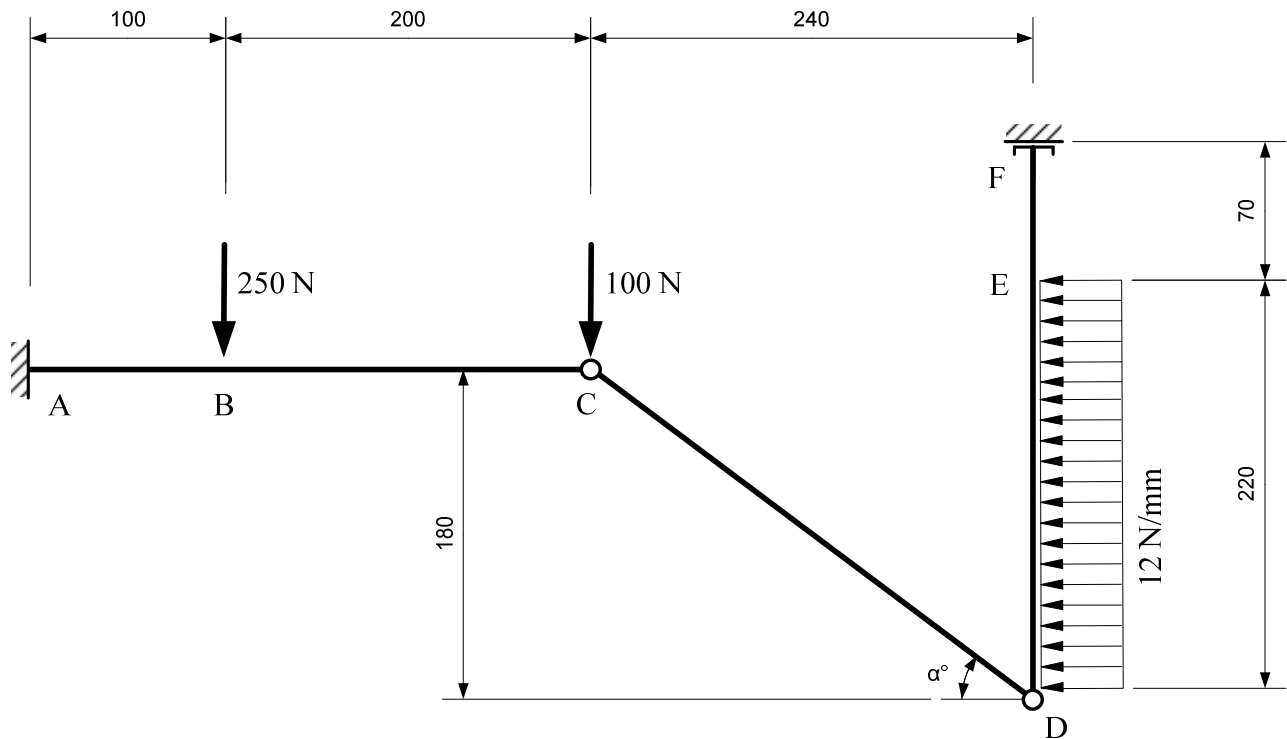
Su tali diagrammi si possono fare alcune osservazioni:

- il momento nelle cerniere A, C ed E è nullo;
 - il diagramma dei momenti è sempre continuo, non essendoci coppie applicate;
 - nei tratti ED e DC il momento varia linearmente ed il taglio è costante;
 - l'asta DB è una biella scarica, per cui non presenta né taglio né momento;
 - nei tratti AB e BC il momento è parabolico ed il taglio varia linearmente.
- nei punti B e D si ha un salto nel diagramma del taglio pari al valore delle rispettive componenti perpendicolari all'asta della reazione proveniente dalla biella scarica. Analogamente si ha un salto nel diagramma dell'azione normale pari al valore delle rispettive componenti parallele all'asta della reazione proveniente dalla biella scarica.

Tutte queste osservazioni indicano come i diagrammi delle azioni interne siano coerenti con lo schema statico della struttura originaria.

I PROVA DI VALUTAZIONE 23 Novembre 2011 - Esercizio 2

Data la struttura di figura, ricavare le equazioni delle azioni interne (M, N, T) e tracciare i relativi diagrammi.



Struttura isostatica (GdL=9; GdV=9), non labile.

CALCOLI PRELIMINARI

Lunghezza tratto CD.

$$CD = \sqrt{180^2 + 240^2} = 300 \text{ mm}$$

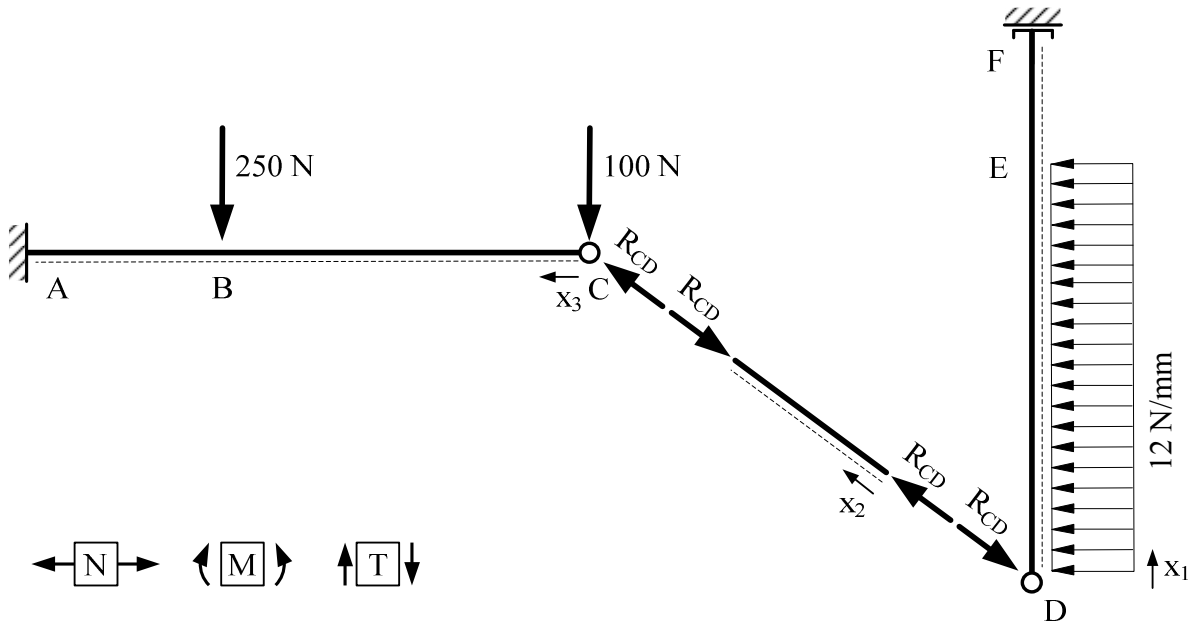
Angolo α .

$$\alpha = \arctg\left(\frac{180}{240}\right) = 36.87^\circ$$

$$\cos(\alpha) = 0.8$$

$$\sin(\alpha) = 0.6$$

CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI



Osservando che l'asta CD è una biella scarica, è conveniente aprire la struttura nel modo indicato, ricavare direttamente la reazione interna R_{CD} e procedere al calcolo delle azioni interne secondo le convenzioni indicate. In questo modo non è necessario calcolare le reazioni dei vincoli a terra. Per ricavare la reazione interna R_{CD} è sufficiente scrivere l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale per la sola asta DF.

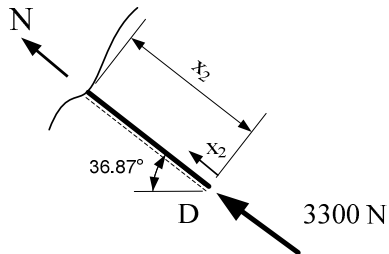
$$\rightarrow) R_{CD} \cdot \cos 36.87^\circ - 12 \cdot 220 = 0$$

Si ottiene:

$$R_{Ax} = 3300 \text{ N}$$

CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE

$$0 \leq x_2 < 300$$

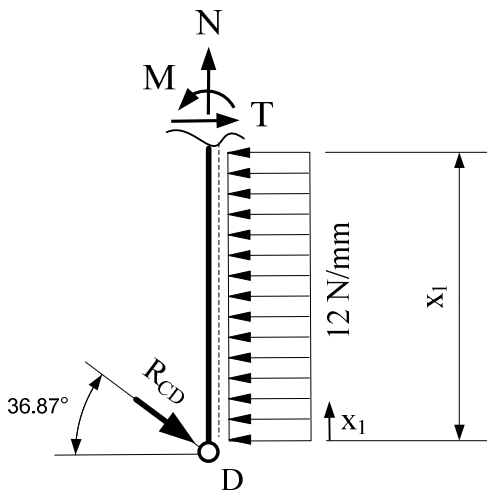


Essendo una biella scarica, su quest'asta sarà presente solo azione normale.

$$N + 3300 = 0 \qquad N = -3300 \text{ N}$$

$$M = T = 0$$

$$0 \leq x_1 < 220$$



$$N - 3300 \cdot \sin 36.87^\circ = 0$$

$$N = 1980 \text{ N}$$

$$T + 3300 \cdot \cos 36.87^\circ - 12 \cdot x_1 = 0$$

$$T = 12 \cdot x_1 - 2640$$

$$M + 3300 \cdot \cos 36.87^\circ \cdot x_1 - 12 \cdot \frac{x_1^2}{2} = 0$$

$$M = 6 \cdot x_1^2 - 2640 \cdot x_1$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$T(0) = -2640 \text{ N}$$

$$T(220) = 0$$

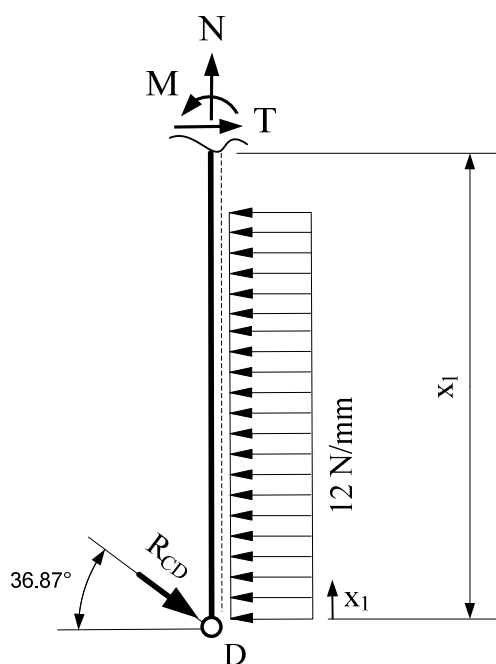
Il taglio assume valore nullo per $x_1 = 220$ mm, ovvero nel secondo estremo del tratto in questione, per cui il momento ha un punto di stazionarietà (massimo/minimo) in tale punto.

E' sufficiente quindi calcolare il valore del momento agli estremi del tratto, sapendo che avrà andamento parabolico.

$$M(0) = 0$$

$$M(220) = -290400 \text{ Nmm}$$

$$220 \leq x_1 < 290$$



$$N - 3300 \cdot \sin 36.87^\circ = 0$$

$$N = 1980 \text{ N}$$

$$T + 3300 \cdot \cos 36.87^\circ - 12 \cdot 220 = 0$$

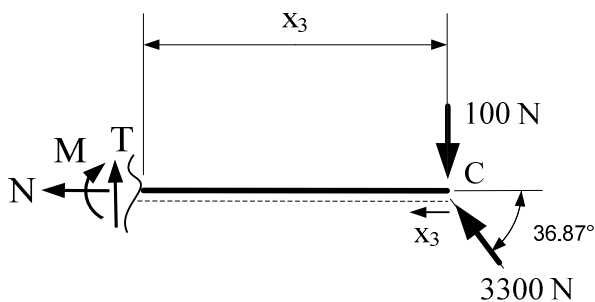
$$T = 0$$

$$M + 3300 \cdot \cos 36.87^\circ \cdot x_1 - 12 \cdot 220 \cdot \left(x_1 - \frac{220}{2}\right) = 0$$

$$M = -290400 \text{ Nmm}$$

In questo tratto tutte le azioni interne hanno valore costante.

$$0 \leq x_3 < 200$$



$$N + 3300 \cdot \cos 36.87^\circ = 0$$

$$N = -2640 \text{ N}$$

$$T + 3300 \cdot \sin 36.87^\circ - 100 = 0$$

$$T = -1880 \text{ N}$$

$$M + 100 \cdot x_3 - 3300 \cdot \sin 36.87^\circ \cdot x_3 = 0$$

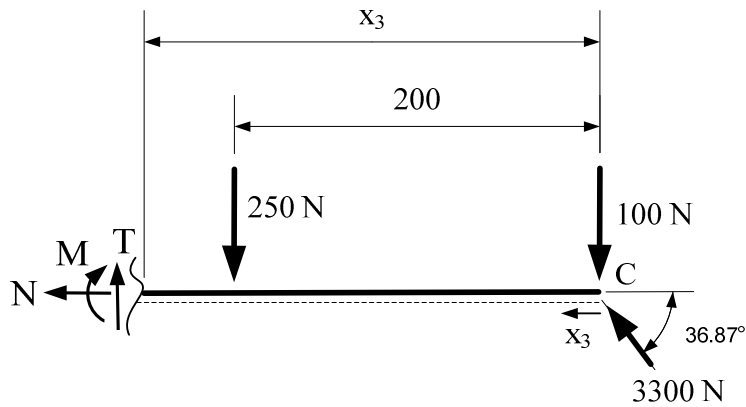
$$M = 1880 \cdot x_3$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$M(0) = 0$$

$$M(200) = 376000 \text{ Nmm}$$

$$200 \leq x_3 < 300$$



$$N + 3300 \cdot \cos 36.87^\circ = 0$$

$$N = -2640 \text{ N}$$

$$T + 3300 \cdot \sin 36.87^\circ - 100 - 250 = 0$$

$$T = -1630 \text{ N}$$

$$M - 3300 \cdot \sin 36.87^\circ \cdot x_3 + 100 \cdot x_3 + 250 \cdot (x_3 - 200) = 0$$

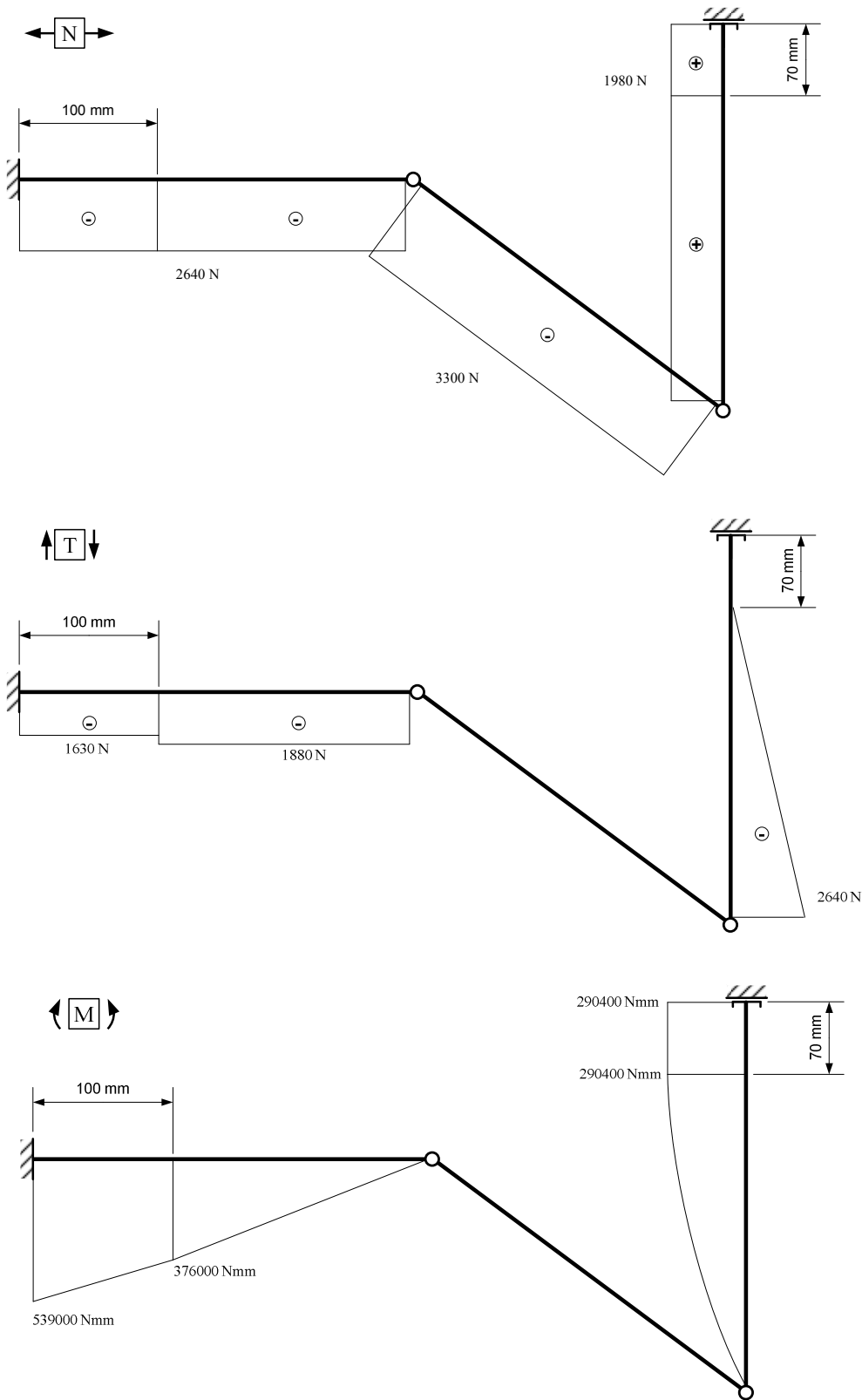
$$M = 1630 \cdot x_3 + 50000$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$M(200) = 376000 \text{ Nmm}$$

$$M(300) = 539000 \text{ Nmm}$$

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE (N, T, M) NELLA STRUTTURA



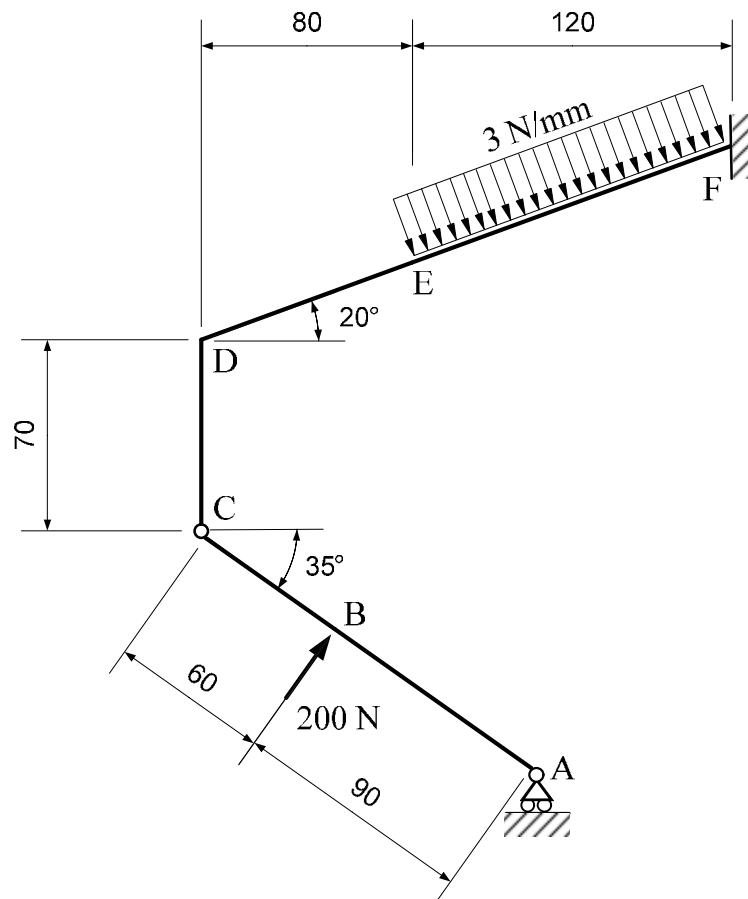
Su tali diagrammi si possono fare alcune osservazioni:

- l'asta CD è una biella scarica, per cui non presenta né taglio né momento;
- il momento nelle cerniere C e D è nullo;
- nei punti A ed F, essendoci rispettivamente un incastro ed un pattino, è possibile che il valore del momento sia diverso da zero.
- il diagramma dei momenti è sempre continuo, non essendoci coppie applicate;
- nei tratti AB e BC il momento varia linearmente ed il taglio è costante;
- nel tratto DE il momento è parabolico ed il taglio varia linearmente.
- nel tratto EF il momento è costante ed il taglio è nullo.
- nel punto B si ha un salto nel diagramma del taglio pari al valore della forza applicata.

Tutte queste osservazioni indicano come i diagrammi delle azioni interne siano coerenti con lo schema statico della struttura originaria.

I PROVA DI VALUTAZIONE 22 Novembre 2012 - Esercizio 2

Data la struttura di figura, ricavare le equazioni delle azioni interne (M, N, T) e tracciare i relativi diagrammi.

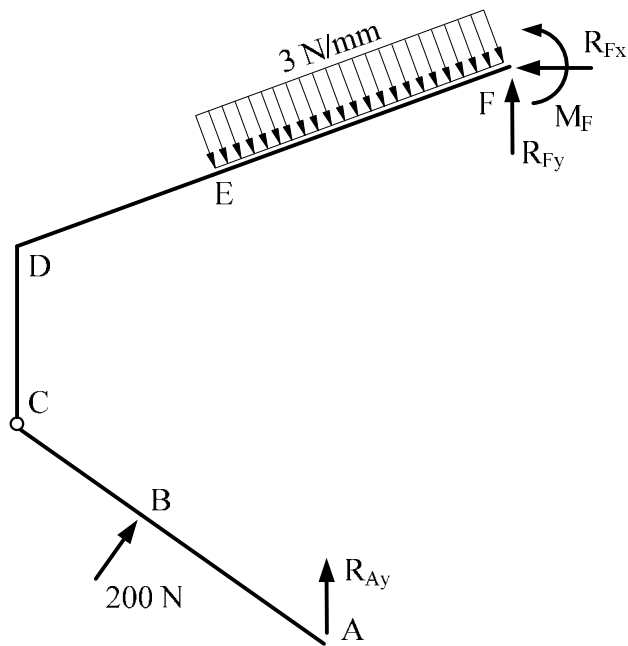


Struttura isostatica (GdL=6; GdV=6), non labile.

CALCOLI PRELIMINARI

$$DE = \frac{80}{\cos 20^\circ} = 85.1 \text{ mm} \quad EF = \frac{120}{\cos 20^\circ} = 127.7 \text{ mm} \quad DF = DE + EF = 212.8 \text{ mm}$$

CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI



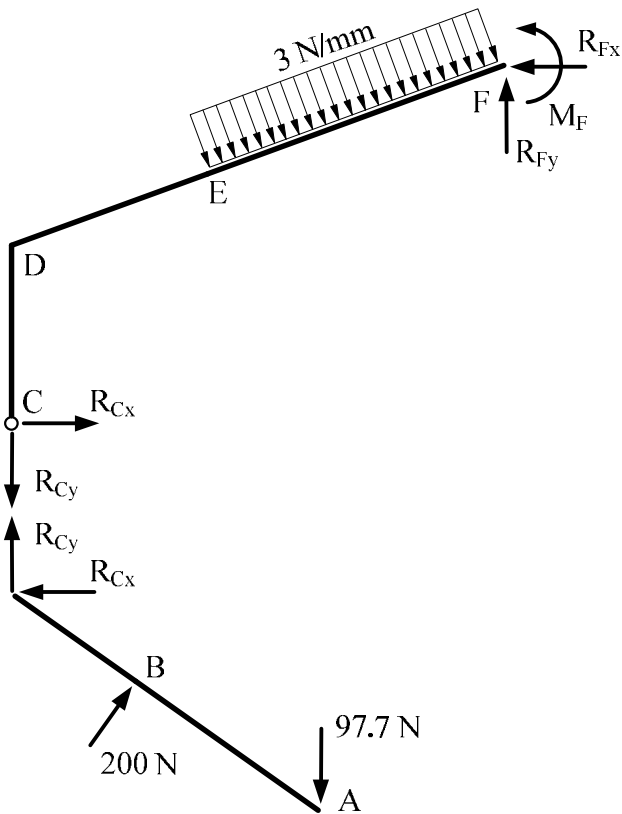
Equilibrio alla rotazione dell'asta AC rispetto alla cerniera C.

$$\sum \mathcal{M}_C) -R_{Ay} \cdot (90 + 60) \cdot \cos 35^\circ - 200 \cdot 60 = 0$$

Si ottiene:

$$R_{Ay} = -97.7 \text{ N}$$

Conviene ora procedere aprendo la struttura nella cerniera C e calcolando le reazioni interne a tale cerniera.



Equilibrio alla traslazione orizzontale dell'asta AC.

$$\rightarrow) - R_{Cx} + 200 \cdot \sin 35^\circ = 0$$

Si ottiene:

$$R_{Cx} = 114.7 \text{ N}$$

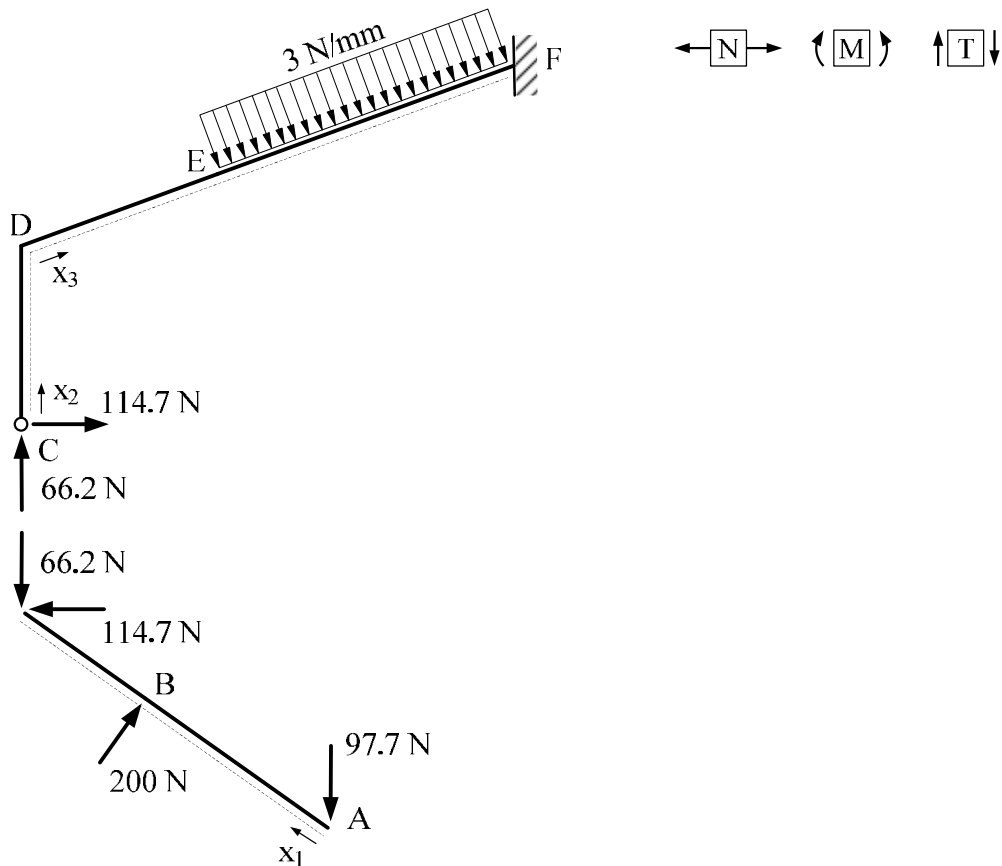
Equilibrio alla traslazione verticale dell'asta AC.

$$\uparrow) R_{Cy} - 97.7 + 200 \cdot \cos 35^\circ = 0$$

Si ottiene:

$$R_{Cy} = -66.2 \text{ N}$$

Le reazioni vincolari trovate sono quelle necessarie per il calcolo delle azioni interne secondo le convenzioni indicate nella figura seguente.



CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE

$$0 \leq x_1 < 90$$

$$N - 97.7 \cdot \sin 35^\circ = 0$$

$$N = 56 \text{ N}$$

$$T - 97.7 \cdot \cos 35^\circ = 0$$

$$T = 80 \text{ N}$$

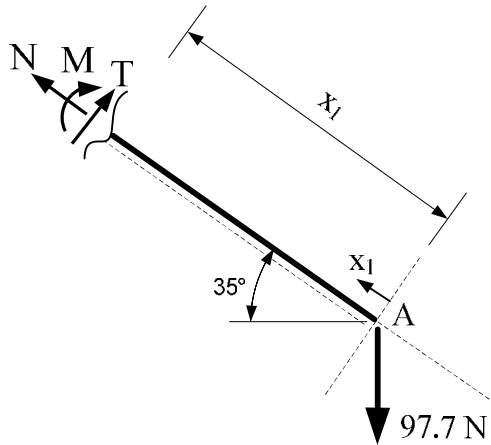
$$M + 97.7 \cdot \cos 35^\circ \cdot x_1 = 0$$

$$M = -80 \cdot x_1$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$M(0) = 0$$

$$M(90) = -7200 \text{ Nmm}$$



$$90 \leq x_1 < 150$$

$$N - 97.7 \cdot \sin 35^\circ = 0$$

$$N = 56 \text{ N}$$

$$T - 97.7 \cdot \cos 35^\circ + 200 = 0$$

$$T = -120 \text{ N}$$

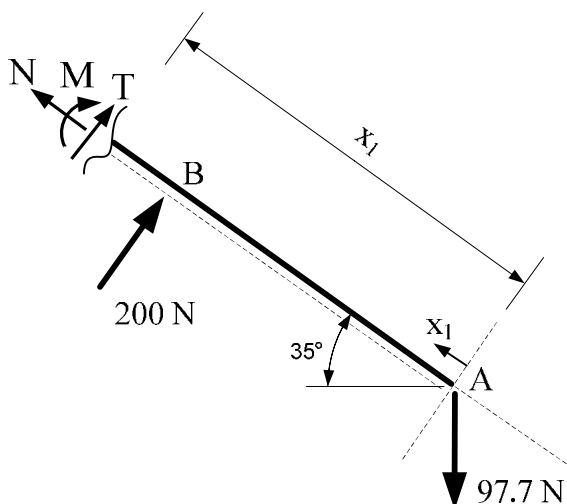
$$M + 97.7 \cdot \cos 35^\circ \cdot x_1 - 200 \cdot (x_1 - 90) = 0$$

$$M = 120 \cdot x_1 - 18000$$

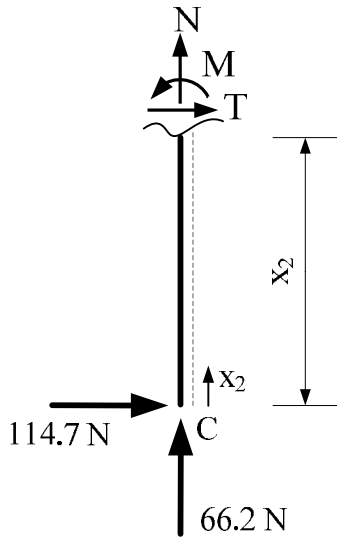
Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$M(90) = -7200 \text{ Nmm}$$

$$M(150) = 0$$



$$0 \leq x_2 < 70$$



$$N + 66.2 = 0$$

$$N = -66.2 \text{ N}$$

$$T + 114.7 = 0$$

$$T = -114.7 \text{ N}$$

$$M + 114.7 \cdot x_2 = 0$$

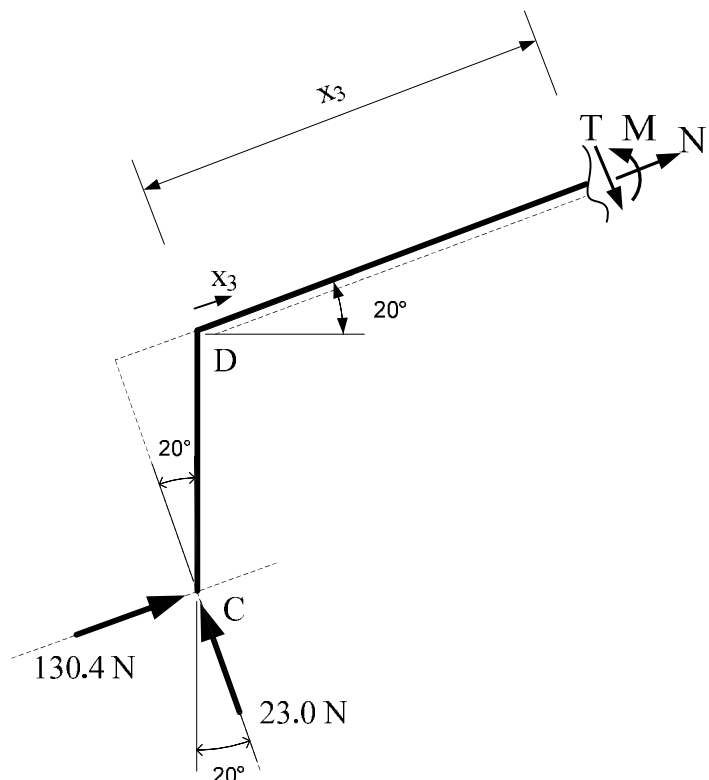
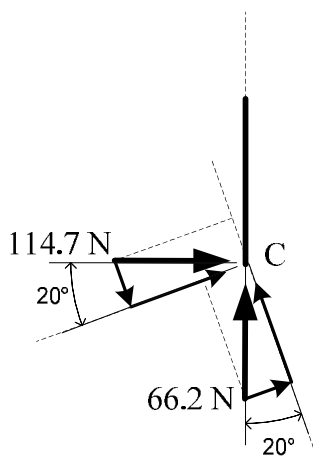
$$M = -114.7 \cdot x_2$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$M(0) = 0$$

$$M(70) = -8029 \text{ Nmm}$$

$$0 \leq x_3 < 85.1$$



Per calcolare le azioni interne in questo tratto, si proiettano tutte le forze presenti in direzione parallela e perpendicolare al tratto DF. Si ha:

$$66.2 \cdot \sin 20^\circ + 114.7 \cdot \cos 20^\circ = 130.4 \text{ N}$$

$$66.2 \cdot \cos 20^\circ - 114.7 \cdot \sin 20^\circ = 23.0 \text{ N}$$

Si possono determinare ora le equazioni delle azioni interne.

$$N + 130.4 = 0$$

$$N = -130.4 \text{ N}$$

$$T - 23 = 0$$

$$T = 23 \text{ N}$$

$$M + 130.4 \cdot 70 \cdot \cos 20^\circ - 23 \cdot (x_3 + 70 \cdot \sin 20^\circ) = 0$$

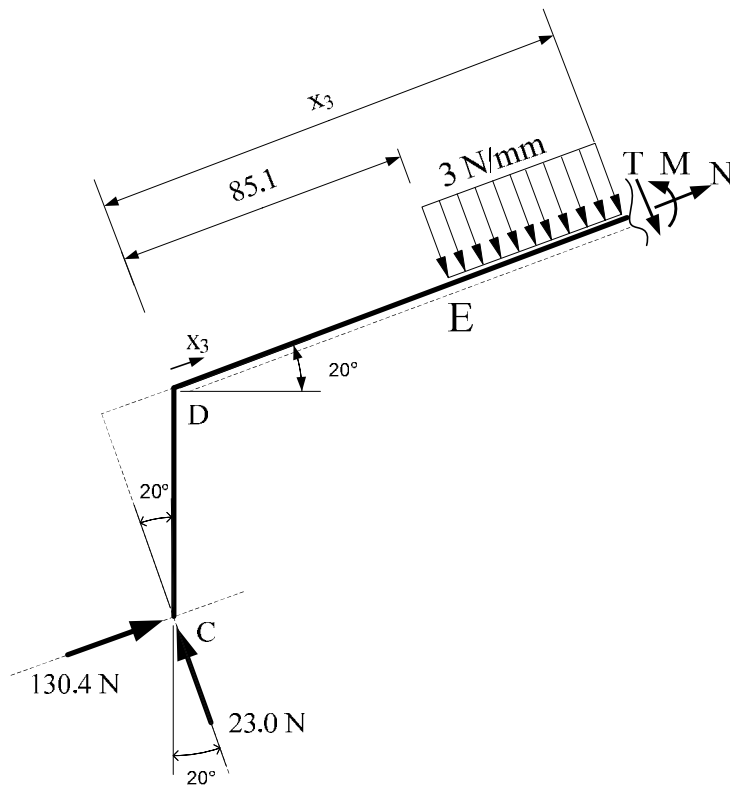
$$M = 23 \cdot x_3 - 8029$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$M(0) = -8029 \text{ Nmm}$$

$$M(85.1) = -6072 \text{ Nmm}$$

$$\mathbf{85.1 \leq x_3 < 212.8}$$



$$N + 130.4 = 0$$

$$N = -130.4 \text{ N}$$

$$T - 23 + 3 \cdot (x_3 - 85.1) = 0$$

$$T = -3 \cdot x_3 + 278.3$$

$$M + 130.4 \cdot 70 \cdot \cos 20^\circ - 23 \cdot (x_3 + 70 \cdot \sin 20^\circ) + \frac{3}{2} \cdot (x_3 - 85.1)^2 = 0$$

$$M = -1.5 \cdot x_3^2 + 278.3 \cdot x_3 - 18892$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$T(85.1) = 23 \text{ N}$$

$$T(212.8) = -360.1 \text{ N}$$

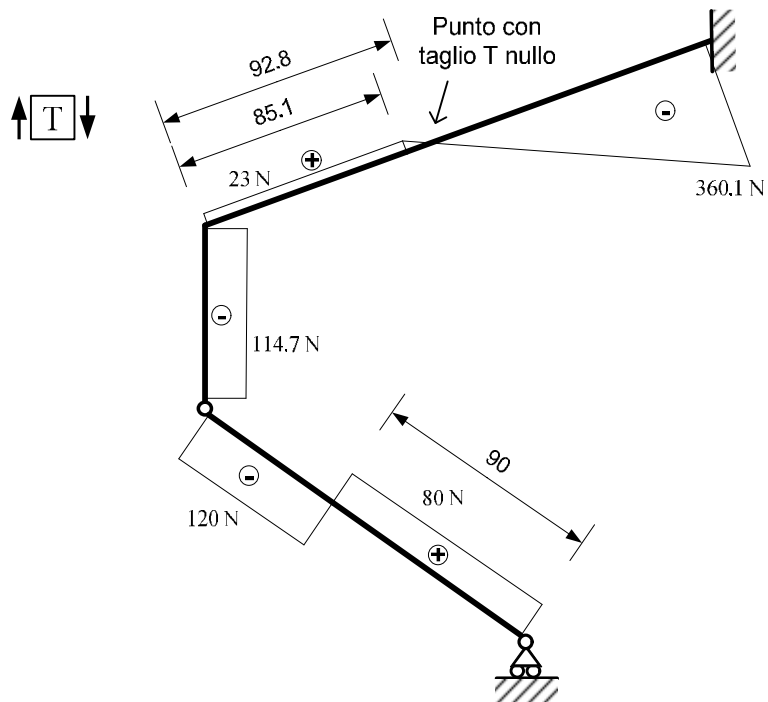
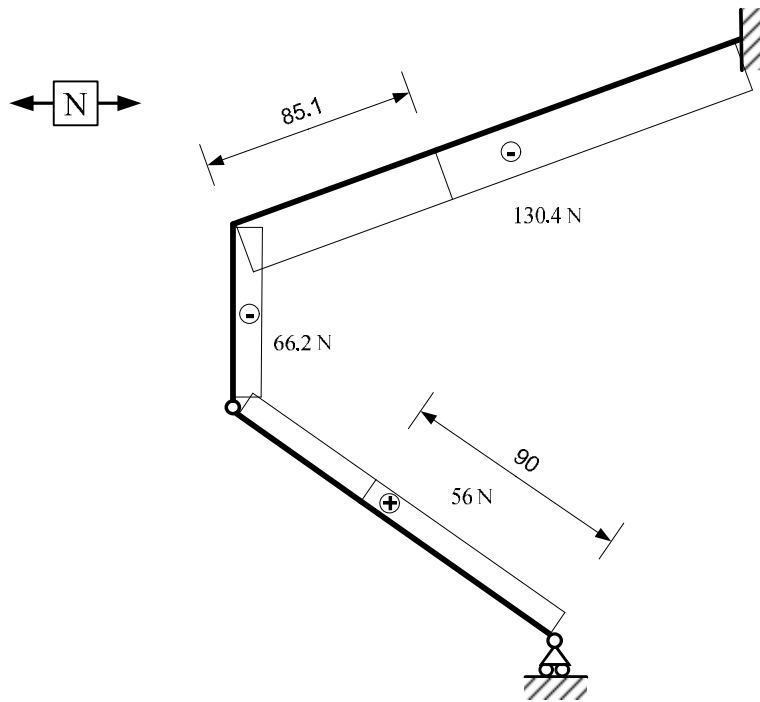
Il taglio assume valore nullo per $x_3 = 92.8$ mm, per cui il momento ha un punto di stazionarietà (massimo/minimo) in tale punto. Calcolando il valore del momento agli estremi del tratto e nel punto di stazionarietà si ottiene:

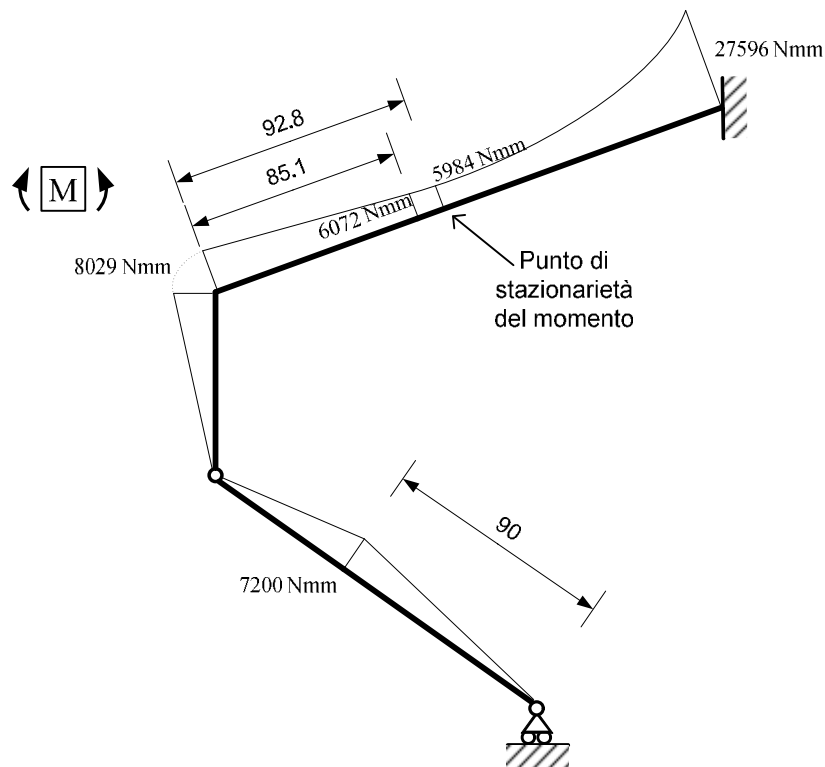
$$M(85.1) = -6072 \text{ Nmm}$$

$$M(92.8) = -5984 \text{ Nmm}$$

$$M(212.8) = -27596$$

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE (N, T, M) NELLA STRUTTURA





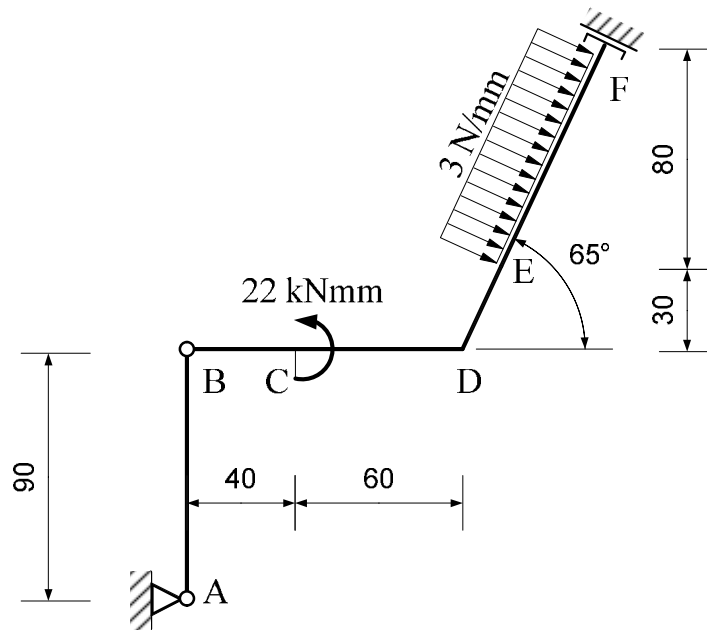
Su tali diagrammi si possono fare alcune osservazioni:

- il momento nel carrello A e nella cerniera C è nullo;
- il diagramma dei momenti è sempre continuo, non essendoci coppie applicate;
- nei tratti AC, CD e DE il momento varia linearmente ed il taglio è costante;
- nel tratto EF il momento è parabolico ed il taglio varia linearmente.
- nel punto B si ha un salto nel diagramma del taglio pari al valore della forza applicata in tale punto (200 N).
- il taglio ha valore nullo per $x_3 = 92.8$ mm, per cui il momento ha un punto di stazionarietà (massimo/minimo) in tale punto.

Tutte queste osservazioni indicano come i diagrammi delle azioni interne siano coerenti con lo schema statico della struttura originaria.

I PROVA DI VALUTAZIONE 20 Novembre 2013 - Esercizio 2

Data la struttura di figura, ricavare le equazioni delle azioni interne (M, N, T) e tracciare i relativi diagrammi.

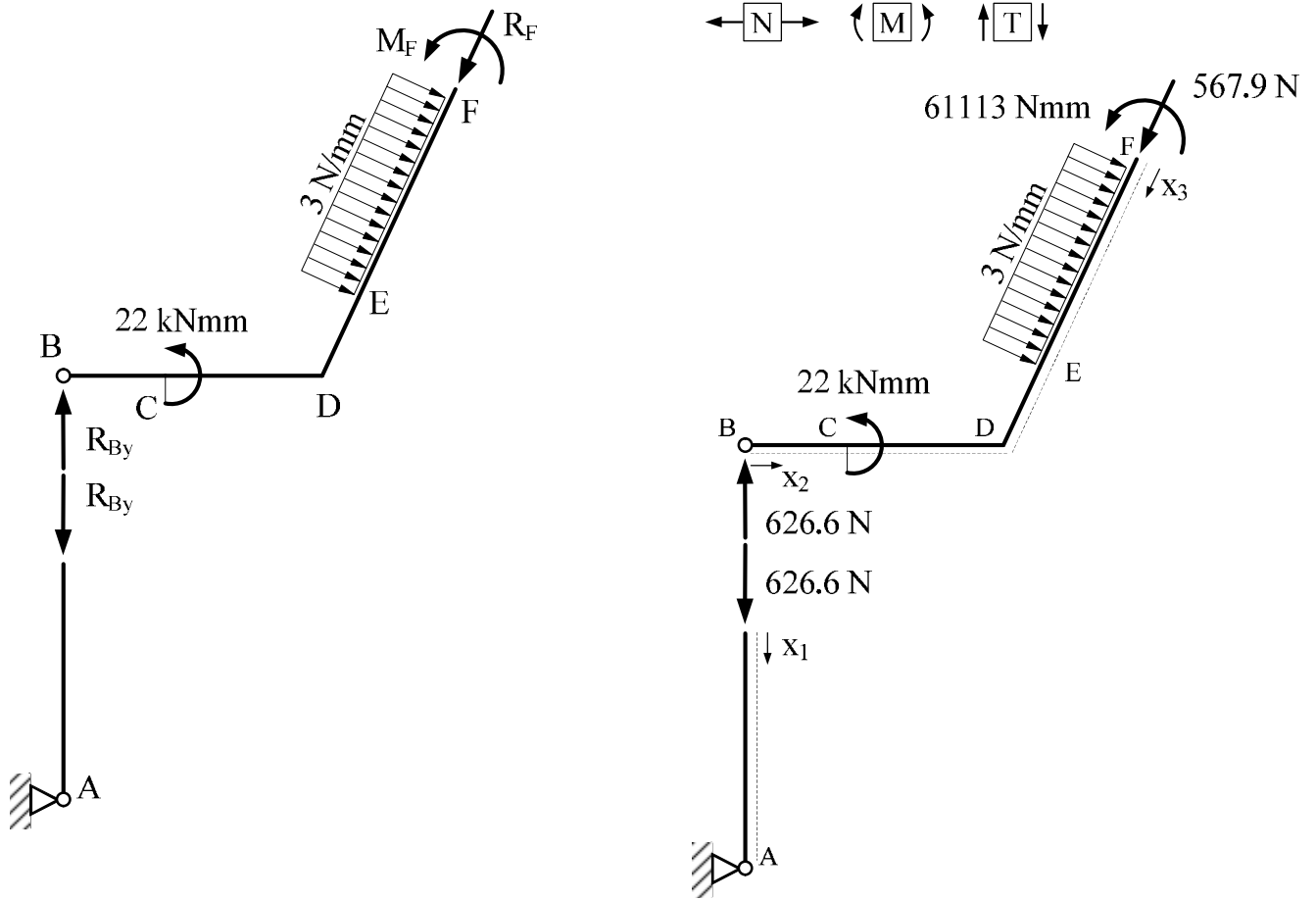


Struttura isostatica (GdL=6; GdV=6), non labile.

CALCOLI PRELIMINARI

$$DE = \frac{30}{\sin 65^\circ} = 33.1 \text{ mm} \quad EF = \frac{80}{\sin 65^\circ} = 88.3 \text{ mm} \quad DF = DE + EF = 121.4 \text{ mm}$$

CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI



Essendo l'asta AB una biella scarica, sicuramente trasmetterà alla cerniera B solamente una reazione R_{By} diretta come la congiungente le cerniere A e B.

Conviene allora aprire la struttura nella cerniera interna B, come evidenziato in figura, e studiare l'equilibrio della parte BF.

Equilibrio alla traslazione orizzontale asta BF.

$$\rightarrow) - R_F \cdot \cos 65^\circ + 3 \cdot 88.3 \cdot \sin 65^\circ = 0$$

Si ottiene: $R_F = 567.9 \text{ N}$

Equilibrio alla traslazione verticale asta BF.

$$\uparrow) - R_F \cdot \sin 65^\circ - 3 \cdot 88.3 \cdot \cos 65^\circ + R_{By} = 0$$

Si ottiene: $R_{By} = 626.6 \text{ N}$

Si ottiene: $M_F = 61113 \text{ Nmm}$

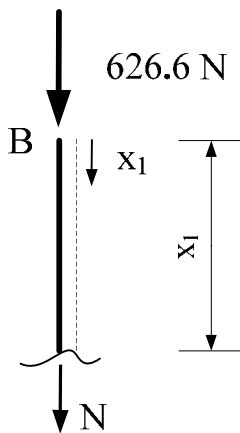
Equilibrio alla rotazione asta BF rispetto al punto D.

$$\sum \mathcal{U}_D) - M_F - 22000 + R_{By} \cdot 100 + 3 \cdot 88.3 \cdot \frac{70}{\sin 65^\circ} = 0$$

Nella figura a sinistra in basso sono riportate le convenzioni che verranno utilizzate per il calcolo delle azioni interne e le reazioni vincolari utili a tale scopo, con i loro valori e versi.

CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE

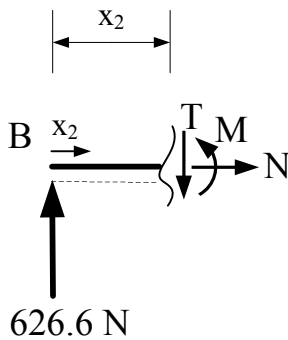
$$0 \leq x_1 < 90$$



$$N + 626.6 = 0$$

$$N = -626.6 \text{ N}$$

$$0 \leq x_2 < 40$$



$$N = 0$$

$$T - 626.6 = 0 \quad T = 626.6 \text{ N}$$

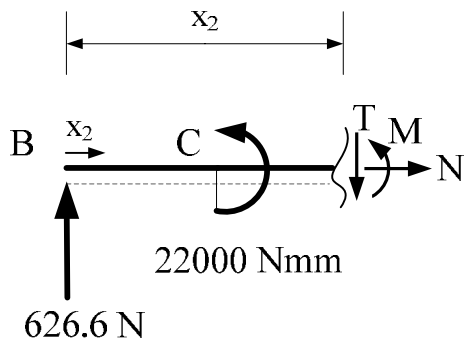
$$M - 626.6 \cdot x_2 = 0 \quad M = 626.6 \cdot x_2$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$M(0) = 0$$

$$M(40) = 25064 \text{ Nmm}$$

$$40 \leq x_2 < 100$$



$$T - 626.6 = 0 \quad T = 626.6 \text{ N}$$

$$M - 626.6 \cdot x_2 + 22000 = 0$$

$$M = 626.6 \cdot x_2 - 22000$$

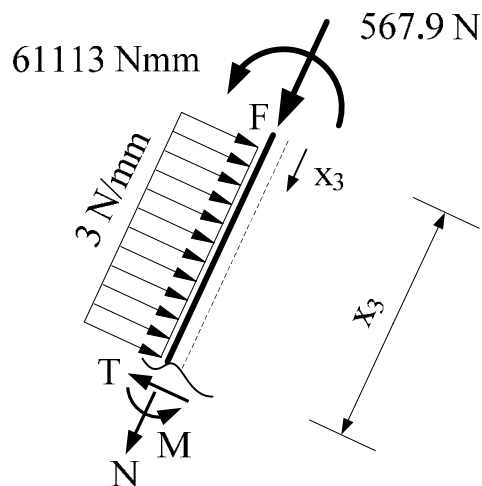
Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$M(40) = 3064 \text{ Nmm}$$

$$M(100) = 40660 \text{ Nmm}$$

$$N = 0$$

$$0 \leq x_3 < 88.3$$



$$N + 567.9 = 0$$

$$N = -567.9 \text{ N}$$

$$T - 3 \cdot x_3 = 0$$

$$T = 3 \cdot x_3 \text{ N}$$

$$M - 61113 + 3 \cdot \frac{x_3^2}{2} = 0$$

$$M = -1.5 \cdot x_3^2 + 61113$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$T(0) = 0 \text{ N}$$

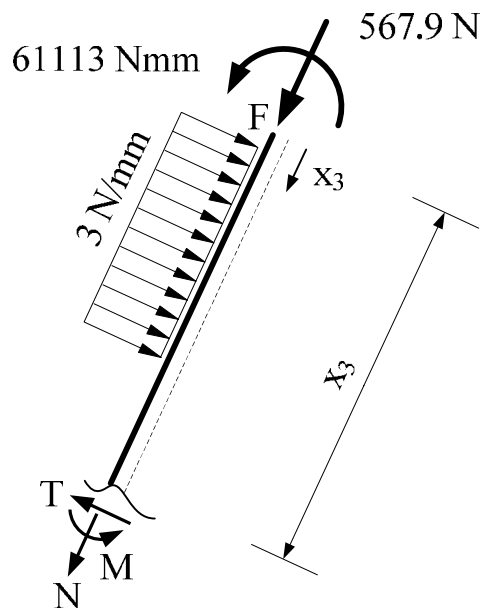
$$T(88.3) = 264.9 \text{ N}$$

Il taglio assume valore nullo per $x_3 = 0 \text{ mm}$, ovvero in corrispondenza del pattino, per cui il momento ha un punto di stazionarietà (massimo/minimo) in tale punto. Calcolando il valore del momento agli estremi del tratto e nel punto di stazionarietà si ottiene:

$$M(0) = 61113 \text{ Nmm}$$

$$M(88.3) = 49418 \text{ Nmm}$$

$$88.3 \leq x_3 < 121.4$$



$$N + 567.9 = 0$$

$$N = -567.9 \text{ N}$$

$$T - 3 \cdot 88.3 = 0$$

$$T = 264.9 \text{ N}$$

$$M - 61113 + 3 \cdot 88.3 \cdot \left(x_3 - \frac{88.3}{2}\right) = 0$$

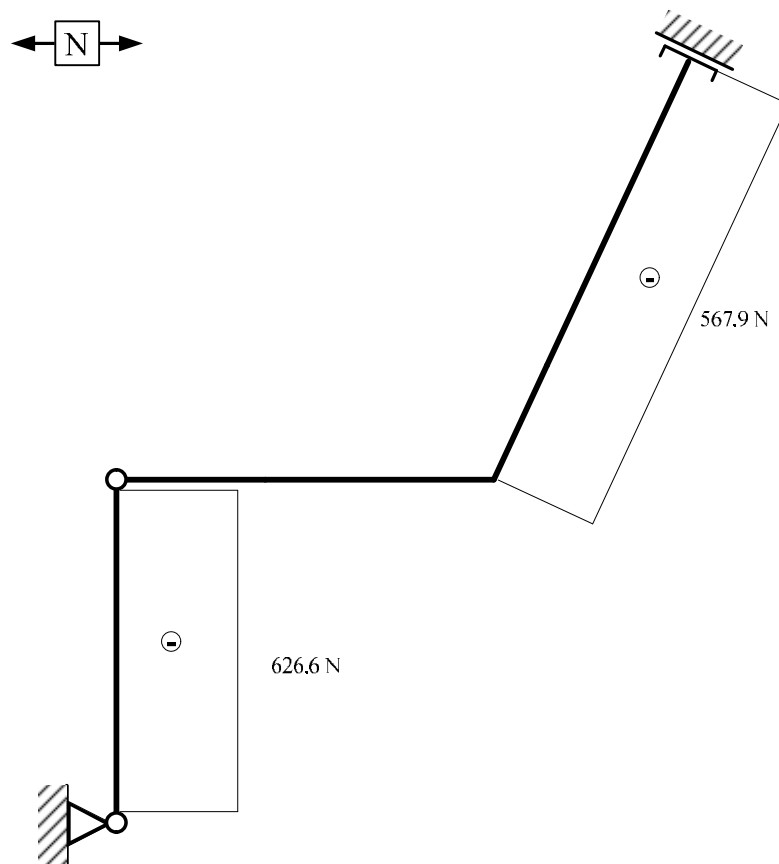
$$M = -264.9 \cdot x_3 + 72809$$

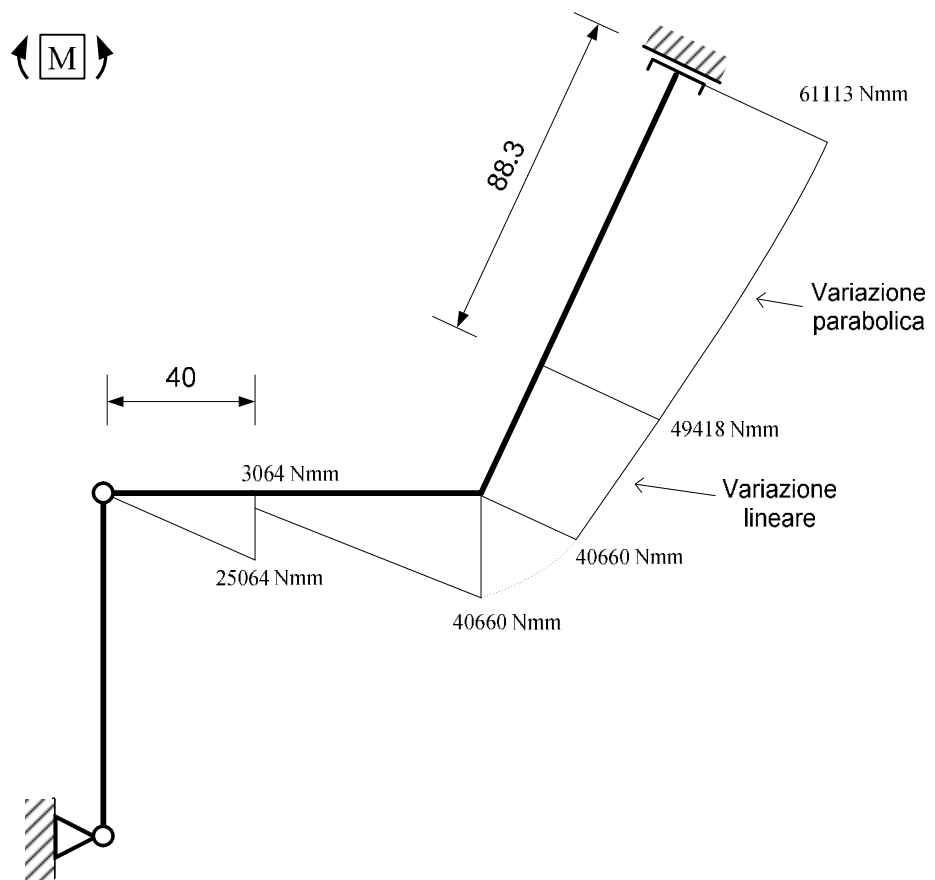
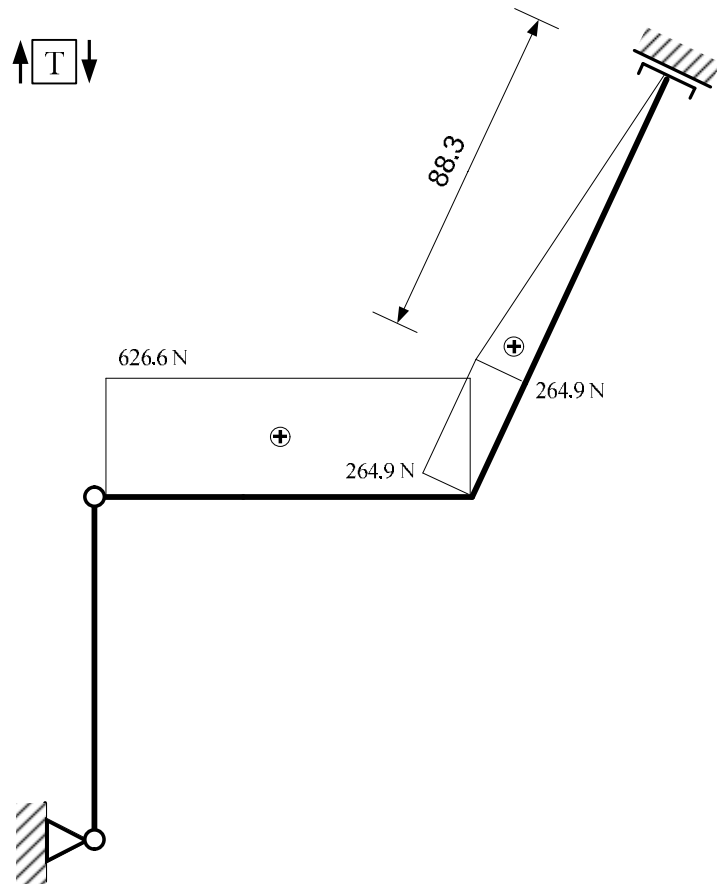
Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$M(88.3) = 49418 \text{ Nmm}$$

$$M(121.4) = 40660 \text{ Nmm}$$

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE (N, T, M) NELLA STRUTTURA





Su tali diagrammi si possono fare alcune osservazioni:

- il momento nelle cerniere A e B è nullo;
- il diagramma dei momenti è sempre continuo tranne che nel punto C, dove è applicata una coppia. In tale punto il diagramma presenta un salto pari al valore della coppia applicata (22000 Nmm);
- nell'asta AB, che è una biella scarica, è presente solo azione normale;
- nei tratti BC, CD e DE il momento varia linearmente ed il taglio è costante;
- nel tratto EF il momento è parabolico ed il taglio varia linearmente;
- in F (pattino), essendo il valore del taglio nullo, il momento presenta un punto di stazionarietà (massimo o minimo).

Tutte queste osservazioni indicano come i diagrammi delle azioni interne siano coerenti con lo schema statico della struttura originaria.