Introduzione alle equazioni differenziali

prof. Antonio Greco
http://people.unica.it/antoniogreco

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Cagliari

23-3-2020

Indice

INTRODUZIONE ALLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1. PRIMI ESEMPI

A. Le funzioni costanti $y(x) \equiv c$ sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = 0.$$

B. Le funzioni esponenziali $y(x) = c\,e^x$ sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = y.$$

C. Le funzioni periodiche della seguente forma: $y(x) = a\,\cos x + b\,\operatorname{sen} x$ sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' + y = 0.$$

2. CONCETTO GENERALE

Un'equazione differenziale è un problema che consiste nel trovare tutte le funzioni $y(x)$ tali che, sostituendo la stessa $y(x)$ e le sue derivate $y^{(k)}(x)$ al posto delle variabili di una funzione data

$$F(x, y_0, y_1, \ldots, y_n),$$

risulta soddisfatta l'uguaglianza seguente:

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

per ogni x in un dato intervallo.

Si chiama "ordine" dell'equazione il valore numerico di n.

Classicamente, si intende che le soluzioni $y(x)$ devono essere funzioni derivabili almeno n volte, e che anche la derivata $y^{(n)}(x)$ sia continua.

3. RIVEDIAMO I PRIMI ESEMPI ALLA LUCE DEL CONCETTO GENERALE

A. La funzione F è

$$F(x, y_0, y_1) = y_1.$$

Il problema ad essa associato è quello di trovare le funzioni $y(x)$ tali che

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0,$$

cioè tali che

$$y'(x) = 0.$$

B. La funzione F è

$$F(x, y_0, y_1) = y_1 - y_0.$$

Il problema ad essa associato è quello di trovare le funzioni $y(x)$ tali che

$$y'(x) - y(x) = 0.$$

L'ordine di questa equazione è 1, come per quella precedente.

C. La funzione F è

$$F(x, y_0, y_1, y_2) = y_2 + y_0.$$

Il problema associato è quello di trovare le funzioni $y(x)$ tali che

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0,$$

cioè tali che

$$y''(x) + y(x) = 0.$$

Questa è un'equazione del secondo ordine.

4. MOTIVAZIONI PER LO STUDIO DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

I. Molte leggi fisiche sono espresse da equazioni differenziali.

Esempio: la seconda legge della dinamica newtoniana del punto materiale

$$\boldsymbol{F} = m\,\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dx^2}$$

è un'equazione nella quale sono dati la massa m del punto ed il campo $\boldsymbol{F}$ delle forze applicate, e l'incognita è la funzione $\boldsymbol{r}(x)$.

Risolvendo un'equazione differenziale è possibile fare previsioni sull'evoluzione del sistema.

II. Le equazioni differenziali si usano anche al di fuori della fisica.

Ad esempio, la propagazione di una malattia si può rappresentare con un sistema di tre equazioni differenziali, nel quale x denota la variabile temporale, e le funzioni incognite sono:

$S(x)$ il numero dei suscettibili a contrarre l'infezione;

$I(x)$ il numero degli infetti all'istante x;

$R(x)$ il numero dei rimossi (guariti o morti).

Si parla perciò di "modello SIR": la sua origine è attribuita a Ronald Ross, Nobel per la medicina, che scoprì che la malaria è portata da una zanzara.

5. INTEGRALE GENERALE

Si noti, innanzitutto, che una soluzione di un'equazione differenziale è una funzione, e non un singolo valore numerico.

Si chiama "integrale generale" di una data equazione una formula che rappresenta tutte le soluzioni, che, di solito, sono infinite.

Esempio semplice: l'integrale generale dell'equazione $y' = 0$ è

$$y = c.$$

È naturale che nell'integrale generale figurino dei parametri, al variare dei quali si individuano le diverse soluzioni.

6. FORMA NORMALE

Si dice che un'equazione differenziale è in "forma normale" quando il primo membro è soltanto $y^{(n)}$, e al secondo membro stanno solo termini di ordine inferiore ad n.

Dunque un'equazione differenziale è in forma normale quando è scritta come segue:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Si intende che la funzione f varia da equazione a equazione, mentre $y(x)$ denota la funzione incognita.

Esempio: l'equazione $y'' + y = 0$ non è in forma normale, ma la si può porre in tale forma scrivendo

$$y'' = -y.$$

In questo caso la funzione f è $f(y) = -y$.

7. PROBLEMA DI CAUCHY

Il problema di Cauchy risulta dal considerare, oltre ad un'equazione differenziale in forma normale, anche delle condizioni, dette condizioni iniziali, che richiedono che in un dato punto x_0 la funzione incognita y e le sue derivate $y', \dots, y^{(n-1)}$ abbiano valori prestabiliti $y_0, \dots, y_{n-1}$.

Il problema di Cauchy si rappresenta come segue:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) = y_0, \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Esempio: il moto di un punto materiale è determinato non solo dalla legge di Newton

$$\boldsymbol{F} = m \, \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dx^2}$$

ma anche dalla posizione $\boldsymbol{r}(x_0)$ e dalla velocità $\boldsymbol{r}'(x_0)$ del punto medesimo in un particolare istante x_0.

I valori $\boldsymbol{r}(x_0)$ e $\boldsymbol{r}'(x_0)$ sono i dati iniziali di un problema di Cauchy, e x_0 si dice "istante iniziale".

Il problema ai valori iniziali si chiama "di Cauchy" perché Cauchy ha dimostrato che esso ha una soluzione, anche se non sempre semplice da scrivere, ed essa è unica, sotto l'ipotesi che la funzione $f(x, y_0, \dots, y_{n-1})$ sia di classe C^1.

Si badi che il "problema di Cauchy", il "teorema di Cauchy", ed il "criterio di Cauchy" sono tre cose diverse.

8. EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

Quando la funzione incognita $y(x_1, \dots, x_N)$ dipende da più variabili anziché da una sola, l'equazione differenziale viene detta "equazione alle derivate parziali".

Esempi notevoli sono l'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} = 0$$

l'equazione del calore:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2}$$

e l'equazione delle onde:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2}$$

Lo studio delle equazioni alle derivate parziali esula dai limiti del corso.

COME RISOLVERE LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Nel corso di Analisi Matematica 3 si studiano alcuni metodi risolutivi per particolari tipi di equazioni differenziali.

Fin dalla prima comparsa delle equazioni differenziali, avvenuta nel Seicento, sono stati sviluppati vari metodi risolutivi, miranti a scrivere esplicitamente le soluzioni.

Poi ci si è accorti di non poter sempre riuscire in tale intento, e si è dovuto ripiegare su rappresentazioni delle soluzioni mediante integrali o mediante serie.

Oggi si studiano, in particolare:

1. Metodi per dimostrare che esiste una soluzione, anche se non si riesce a scriverla esplicitamente;

2. Metodi per contare quante soluzioni ci sono, anche senza conoscerle;

3. Metodi per sapere se le soluzioni sono simmetriche, o hanno altre proprietà particolari, senza conoscere l'espressione delle soluzioni stesse.

Gli studenti devono apprendere i metodi trattati nel corso, restando consapevoli che ben altri problemi esulano dai limiti del programma.

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

Le equazioni che modellizzano molti fenomeni interessanti hanno la particolarità di essere a variabili separabili, o possono essere trasformate in equazioni del genere.

Un'equazione a variabili separabili è un'equazione del primo ordine avente la forma

$$y'(x) = f(x)\, g(y(x)). \tag{1}$$

È importante che al secondo membro ci sia il prodotto di due funzioni, una che dipende solo da x e l'altra che dipende solo da y.

Esempi:

A. L'equazione $y' = 0$
è a variabili separabili
$(f(x) \equiv 0;\ g(y) \equiv 0)$;

B. L'equazione $y' = y$
è a variabili separabili
$(f(x) \equiv 1;\ g(y) = y)$

C. L'equazione $y'' + y = 0$
non è del primo ordine, ma lo diventa con l'artificio descritto più avanti (pag. A9).

Notare che, anche se al secondo membro c'è una somma, oppure una frazione, l'equazione può benissimo essere a variabili separabili. Esempi:

D. L'equazione $y' = y + 2$ è a variabili separabili
$(f(x) \equiv 1;\ g(y) = y + 2)$.

E. L'equazione $y' = (1 - y)/x$ è a variabili separabili
$(f(x) \equiv 1/x;\ g(y) = 1 - y)$.

PROCEDIMENTO RISOLUTIVO*

La risoluzione di un'equazione a variabili separabili si può tentare con il seguente procedimento:

0) Se y_0 è un numero reale che risolve l'equazione $g(y) = 0$, allora la funzione costante $y(x) \equiv y_0$ è una soluzione della (1).

1) Per trovare le eventuali altre soluzioni, si dividono ambo i membri della (1) per $g(y)$. Si ottiene

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x).$$

2) Si integrano ambo i membri:

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\, dx = \int f(x)\, dx.$$

3) Si effettua il cambiamento di variabile $y = y(x)$, dove $y(x)$ è la funzione incognita. Si ottiene

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx.$$

Qui y denota la nuova variabile di integrazione, e non la funzione incognita $y(x)$.

* Note:

I. La possibilità di svolgere gli integrali a mano dipende dall'espressione di $f(x)$ e $g(y)$.

II. In pratica, si è soliti scrivere dy/dx anziché y', e portare dx al secondo membro, come se il differenziale fosse una quantità algebrica.

Come semplice applicazione, risolviamo l'equazione $y' = cy$, con la condizione iniziale $y(0) = y_0$. Si intende che c e y_0 sono costanti assegnate.

0) Se il dato y_0 è uguale a zero, si verifica per sostituzione che la funzione $y(x) \equiv 0$ è una soluzione del problema considerato.

1) Se, invece, $y_0 \neq 0$, allora ogni eventuale soluzione $y(x)$ (classica, dunque continua) soddisfa la condizione $y(x) \neq 0$ in un intorno di $x = 0$, quindi è legittimo porre l'equazione nella forma

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = c.$$

2) Integriamo ambo i membri sull'intervallo $(0, x)$:

$$\int_0^x \frac{y'(x)}{y(x)}\, dx = \int_0^x c\, dx.$$

3) Effettuiamo il cambiamento di variabile $y = y(x)$ prima ancora di aver determinato la funzione incognita $y(x)$:

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{y} = cx.$$

In questo caso, l'integrale al primo membro si svolge facilmente, e si trova

$$\log|y(x)| = \log|y_0| + cx$$

da cui, passando agli esponenziali, si ottiene:

$$|y(x)| = |y_0|\, e^{cx}.$$

Dunque, se $y_0 \neq 0$, $y(x)$ non si annulla per nessun x.

Per il teorema degli zeri, $y(x)$ non cambia segno, e quindi mantiene il segno di y_0.

Grazie a questa breve discussione, possiamo eliminare il valore assoluto e scrivere

$$y(x) = y_0\, e^{cx}.$$

Sostituendo tale espressione nell'equazione data si verifica che la funzione ottenuta così, supponendo l'esistenza di una soluzione, risolve veramente il problema considerato.

Per concludere verifichiamo che, se $y_0 = 0$, l'unica soluzione è la costante nulla.

Se esistesse una soluzione $z(x)$ non identicamente nulla, allora risulterebbe $z \neq 0$ in qualche punto che indichiamo con x_0.

Ma seguendo lo stesso procedimento di prima, con x_0 al posto di zero, troviamo $z(x) = z(x_0)\, e^{c(x-x_0)}$, dunque $z(x)$ non si annulla affatto per $x = 0$.

Perciò l'unica soluzione soddisfacente la condizione $y(0) = 0$ è la funzione identicamente nulla, come volevasi dimostrare.

Per completezza, integriamo l'equazione $y'' = -y$, che è del secondo ordine. Usiamo un metodo utile anche in altre situazioni.

Moltiplicando ambo i membri per $y'(x)$, l'equazione diventa

$$y'(x)\, y''(x) = -y(x)\, y'(x). \tag{2}$$

Nel fare questo passaggio, si introducono illegittimamente come soluzioni tutte le funzioni costanti (perché hanno la derivata nulla).

Per sostituzione nell'equazione data si vede però che, tra tutte le costanti, solo la costante nulla è soluzione.

Integrando ambo i membri della (2) si ottiene

$$\int y'(x)\, y''(x)\, dx = -\int y(x)\, y'(x)\, dx.$$

Nel primo integrale facciamo la sostituzione $z = y'(x)$, e nel secondo $y = y(x)$. Otteniamo:

$$\int z\, dz = -\int y\, dy.$$

Dunque

$$\frac{1}{2} z^2 = -\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} C \tag{3}$$

con $C \geq 0$ perché somma di quadrati. Anzi, poiché al valore $C = 0$ corrisponde la soluzione $y(x) \equiv 0$, da ora in avanti supporremo $C > 0$.

Esplicitando z dalla (3) troviamo $z = \pm\sqrt{C - y^2}$. Ricordando che $z = y'(x)$, otteniamo l'equazione a variabili separabili $y' = \pm\sqrt{C - y^2}$, che si può risolvere come segue.

Risolviamo l'equazione a variabili separabili $y' = \pm\sqrt{C - y^2}$, con $C > 0$.

1) Scriviamo l'equazione nella forma

$$\frac{y'}{\sqrt{C - y^2}} = \pm 1.$$

2) Integrando ambo i membri, troviamo:

$$\int \frac{y'(x)\, dx}{\sqrt{C - y^2(x)}} = \pm \int dx.$$

3) Effettuando la sostituzione $y = y(x)$, possiamo scrivere:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C - y^2}} = \pm \int dx.$$

Per svolgere l'integrale al primo membro, utilizziamo la consueta sostituzione $y = \sqrt{C}\, \operatorname{sen} \alpha$. Troviamo:

$$\int d\alpha = \pm \int dx,$$

dunque $\alpha = \pm(x - x_0)$, dove $-x_0$ denota la costante di integrazione (che ora non può essere indicata con $+C$ perché la lettera C è stata già usata).

Ricordando che $y = \sqrt{C}\, \operatorname{sen} \alpha$, possiamo scrivere $y = \sqrt{C}\, \operatorname{sen}(\pm(x - x_0))$.

Poiché $\operatorname{sen} \alpha$ è una funzione dispari, conviene usare una costante reale A (anche negativa) al posto di $\sqrt{C} > 0$ e sbarazzarsi del segno $\pm$: l'integrale generale di $y'' = -y$ è dunque

$$y(x) = A\, \operatorname{sen}(x - x_0).$$

EQUAZIONI LINEARI

Le equazioni che modellizzano molti fenomeni interessanti hanno la particolarità di essere lineari, o possono essere trasformate in equazioni del genere.

Si chiama lineare un'equazione differenziale avente la forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = g(x).$$

Talvolta si possono approssimare equazioni non lineari con equazioni lineari.

EQUAZIONI LINEARI OMOGENEE

Un'equazione lineare si dice omogenea se $g(x) \equiv 0$, cioè se ha la forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = 0.$$

EQUAZIONI LINEARI OMOGENEE, DEL PRIMO ORDINE, E IN FORMA NORMALE

Sono le equazioni aventi la seguente forma:

$$y'(x) + a_0(x)\, y(x) = 0$$

dunque sono anche equazioni a variabili separabili.

Hanno la soluzione $y(x) \equiv 0$.

Per trovare le altre soluzioni, dividiamo per $y(x)$ e integriamo ambo i membri dell'equazione:

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\, dx + \int a_0(x)\, dx = 0.$$

Con la sostituzione $y = y(x)$, l'integrale al primo membro diventa:

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\, dx = \int \frac{dy}{y}$$

Scriviamo inoltre

$$\int a_0(x)\, dx = A_0(x) + C$$

dove $A_0(x)$ è una qualunque primitiva di $a_0(x)$.

Ciò è legittimo se $a_0(x)$ è una funzione continua avente per dominio un intervallo.

L'equazione, pertanto, diventa:

$$\log |y(x)| = -A_0(x) - C$$

da cui si ricava

$$|y(x)| = e^{-A_0(x) - C}$$

dunque l'integrale generale è dato da

$$y(x) = k\, e^{-A_0(x)}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

FATTORE INTEGRANTE

Un altro metodo per risolvere l'equazione $y'(x) + a_0(x)\, y(x) = 0$ è quello di vedere il primo membro come la derivata di un prodotto opportuno.

Cerchiamo una opportuna funzione $\varphi(x) \neq 0$ tale che l'equazione $\varphi(x)\, y'(x) + \varphi(x)\, a_0(x)\, y(x) = 0$, equivalente a quella data, abbia al primo membro la derivata di un prodotto.

Bisognerà prendere $\varphi(x)$ tale che $\varphi'(x) = a_0(x)\, \varphi(x)$.

Ma questa è un'equazione lineare, omogenea, del primo ordine, e in forma normale, la cui incognita è $\varphi(x)$. Dunque possiamo prendere

$$\varphi(x) = e^{A_0(x)}.$$

Moltiplicando ambo i membri dell'equazione $y'(x) + a_0(x)\,y(x) = 0$ per il fattore $e^{A_0(x)}$ (fattore integrante) troviamo l'equazione

$$e^{A_0(x)}\,y'(x) + e^{A_0(x)}\,a_0(x)\,y(x) = 0$$

che è equivalente a quella data (ha le stesse soluzioni).

Senonché questa la possiamo riscrivere come

$$(e^{A_0(x)}\,y(x))' = 0.$$

Ma allora

$$e^{A_0(x)}\,y(x) = k.$$

Dunque l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = k\,e^{-A_0(x)}$$

cosa che già sapevamo, e che, del resto, abbiamo utilizzato per determinare $\varphi(x)$.

L'utilità di questo metodo emerge nella risoluzione delle equazioni non omogenee (vedi a lato).

Equazioni lineari del primo ordine, in forma normale

Sono le equazioni aventi la seguente forma:

$$y'(x) + a_0(x)\,y(x) = g(x)$$

dunque comprendono, in particolare, le equazioni lineari omogenee, del primo ordine e in forma normale: basta porre $g(x) \equiv 0$.

Moltiplicando ambo i membri per il fattore integrante $\varphi(x) = e^{A_0(x)}$, che è stato trovato qui a fianco, l'equazione diventa

$$(e^{A_0(x)}\,y(x))' = e^{A_0(x)}\,g(x).$$

Ma allora basta integrare ambo i membri, e si ottiene

$$e^{A_0(x)}\,y(x) = \int e^{A_0(x)}\,g(x)\,dx.$$

La possibilità di svolgere a mano quest'ultimo integrale dipende, ovviamente, dall'espressione di $A_0(x)$ e di $g(x)$.

L'integrale generale della equazione data si può scrivere come segue:

$$y(x) = e^{-A_0(x)} \int e^{A_0(x)}\,g(x)\,dx.$$

Si può osservare che, se si sostituisce $g(x) \equiv 0$, l'ultimo integrale rappresenta l'insieme delle costanti $k \in \mathbb{R}$, dunque l'integrale generale si riduce a quello già trovato: $y(x) = k\,e^{-A_0(x)}$.

EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE, LINEARI, OMOGENEE, A COEFFICIENTI COSTANTI

Sono le equazioni della forma $a\,y''+b\,y'+c\,y=0$, con a,b,c costanti, e $a\neq 0$ (altrimenti non sarebbero del secondo ordine...).

Studiamo tre casi semplici e significativi, ai quali si può ricondurre il caso generale.

Denotiamo con $z(x)$ la funzione incognita, in vista della sostituzione $y(x) = e^{-bx/2}\,z(x)$ da fare più avanti.

1) $z''=0$. Si risolve immediatamente perché equivale a $z'=$ costante, dunque l'integrale generale è $z(x)=mx+q$.

2) $z''=z$. Moltiplicando ambo i membri per z' diventa $z'\,z''=z\,z'$, che, integrata, si trasforma nell'equazione a variabili separabili

$$z' = \pm\sqrt{z^2+c_1}\,.$$

Per svolgere l'integrale in

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+c_1}} = \pm x + c_2$$

si discute il segno di c_1: se $c_1=0$ è facile; se $c_1>0$ si pone $z=\sqrt{c_1}\,\operatorname{senh} t$; se, infine, $c_1<0$ si pone $\sqrt{z^2+c_1}=w$ e ci si riconduce al caso $c_1>0$.

Si conclude che l'integrale generale di $z''=z$ è

$$z(x) = k_1\,e^{x} + k_2\,e^{-x}, \qquad k_1,k_2\in\mathbb{R}.$$

che si può anche scrivere $z(x) = C_1\,\operatorname{senh} x + C_2\,\cosh x,\ C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

3) $z''=-z$. L'integrale generale, già ricavato a pagina A9, è $z(x) = A\,\operatorname{sen}(x-x_0)$, che si può anche scrivere

$$z(x) = C_1\,\operatorname{sen} x + C_2\,\cos x,\ \ C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

Consideriamo il caso generale $y''+b\,y'+c\,y=0$, al quale ci si può ricondurre, se necessario, dividendo ambo i membri per il coefficiente a di y''.

L'intenzione sarebbe quella di esprimere il primo membro come la derivata seconda di un prodotto.

Moltiplicando ambo i membri dell'equazione differenziale per $e^{bx/2}$, che è una funzione positiva, si ottiene l'equazione equivalente

$$e^{bx/2}\,y''(x) + b\,e^{bx/2}\,y'(t) = -c\,e^{bx/2}\,y(t).$$

D'altro canto, derivando due volte il prodotto $e^{bx/2}\,y(x)$ con la regola di Leibniz si verifica che:

$$e^{bx/2}\,y''(x) + b\,e^{bx/2}\,y'(x) = (e^{bx/2}\,y(x))'' - \tfrac{b^2}{4}\,e^{bx/2}\,y(x).$$

Qindi l'equazione data si può porre nella forma

$$(e^{bx/2}\,y(x))'' = \tfrac{1}{4}\,(b^2-4c)\,e^{bx/2}\,y(x).$$

Da quest'ultima, con la sostituzione $z(x) = e^{bx/2}\,y(x)$ ci si riconduce all'equazione

$$z'' = \tfrac{1}{4}\,(b^2-4c)\,z,$$

che è del tipo 1, 2 o 3 a seconda del segno del discriminante $\Delta = b^2 - 4c$.

EQUAZIONE CARATTERISTICA

Si chiama equazione caratteristica associata all'equazione differenziale $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$ l'equazione algebrica $a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$ nell'incognita $\lambda \in \mathbb{C}$.

Il procedimento delineato alla pagina precedente porta alle seguenti conclusioni.

Se l'equazione caratteristica ha una sola radice reale $\lambda_0 = -b/(2a)$, allora l'integrale generale dell'equazione differenziale associata è

$$y(x) = m\,x\,e^{\lambda_0\,x} + q\,e^{\lambda_0\,x},\;\; m, q \in \mathbb{R}.$$

Se l'equazione caratteristica ha due soluzioni reali e distinte λ_1, λ_2, allora l'integrale generale dell'equazione differenziale associata è

$$y(x) = k_1\,e^{\lambda_1\,x} + k_2\,e^{\lambda_2\,x}$$

Se, infine, l'equazione caratteristica ha due soluzioni immaginarie $\lambda_{1,2} = \lambda_0 \pm i\omega$, allora l'integrale generale dell'equazione differenziale associata è

$$y(x) = A\,e^{\lambda_0 x}\,\operatorname{sen}(\omega\,x + \varphi),\;\; A, \varphi \in \mathbb{R}$$

che si può anche scrivere

$$y(x) = e^{\lambda_0\,x}\,(C_1\,\operatorname{sen}(\omega\,x) + C_2\,\cos(\omega\,x)),$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Si tenga presente che $\lambda_0 = -b/(2a)$ e $\omega = \frac{1}{2a}\sqrt{|b^2 - 4ac|}$.

INDICAZIONI OPERATIVE

Per trovare l'integrale generale di un'equazione della forma $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$, non è necessario svolgere ogni volta gli integrali indicati alla pagina precedente, ma si può procedere direttamente come segue.

1) Scrivere l'equazione caratteristica.

2) A seconda del segno del discriminante, scrivere l'integrale generale in base alla casistica riportata a lato.

3) Aiutare la memoria facendo riferimento ai tre casi semplici esaminati alla pagina precedente, tenendo conto dell'effetto del termine $b\,y'$ (smorzante, se $ab > 0$).

Per risolvere il problema di Cauchy (*initial-value problem*)

$$\begin{cases} y'' + b\,y' + c\,y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

si determina l'integrale generale, e poi si trovano le costanti imponendo le condizioni iniziali.

Analogamente si procede per risolvere il problema al contorno (*boundary-value problem*)

$$\begin{cases} y'' + b\,y' + c\,y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

Si badi che esso può non avere soluzioni, avere un'unica soluzione o anche averne infinite.

EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE, LINEARI, OMOGENEE, IN FORMA NORMALE

STRUTTURA DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI

La teoria svolta nella lezione precedente mostra che l'integrale generale delle equazioni aventi la forma $y'' + b\,y' + c\,y = 0$ ha le seguenti proprietà:

1) la costante nulla è una soluzione;

2) l'integrale generale dipende da due costanti;

3) esso è combinazione lineare di due soluzioni particolari.

NOZIONE DI INDIPENDENZA LINEARE

Osserviamo che le due suddette soluzioni, che indicheremo con $e_1(x)$ ed $e_2(x)$, sono linearmente indipendenti nel senso che il rapporto $e_1(x)/e_2(x)$ varia al variare di x.

Viceversa, due funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$ si dicono linearmente dipendenti se almeno una delle due si può ottenere moltiplicando l'altra per una costante opportuna.

Per ragioni a mio parere estetiche si suole dire, equivalentemente, che $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono linearmente dipendenti se esistono due scalari $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, non entrambi nulli, tali che $\lambda_1\, f_1(x) + \lambda_2\, f_2(x) = 0$ per ogni x.

SPAZI VETTORIALI

Abbiamo già osservato che la costante nulla è una soluzione dell'equazione $y'' + b\,y' + c\,y = 0$. Osserviamo, inoltre, che:

due qualunque soluzioni, sommate fra loro, danno ancora una soluzione;

una qualunque soluzione, moltiplicata per uno scalare qualunque, è ancora soluzione.

La somma di soluzioni, e la moltiplicazione per uno scalare, godono delle stesse proprietà (associativa, commutativa, distributiva) che valgono per i vettori del piano.

Si dice perciò che le soluzioni dell'equazione $y'' + b\,y' + c\,y = 0$ costituiscono, proprio come i vettori del piano, uno SPAZIO VETTORIALE.

Ciò è vero anche per le equazioni lineari, omogenee, a coefficienti variabili

$$y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = 0. \tag{4}$$

Una coppia (e_1, e_2) di soluzioni particolari della (4), linearmente indipendenti, si chiama BASE dello spazio vettoriale.

La nozione di spazio vettoriale è nata proprio dallo studio delle equazioni differenziali.

EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE, LINEARI, IN FORMA NORMALE

STRUTTURA DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI

Se il secondo membro dell'equazione $y''+b\,y'+c\,y=g(x)$ non è identicamente nullo, l'insieme delle soluzioni non costituisce uno spazio vettoriale.

Ad esempio, l'integrale generale dell'equazione $y''=-g$, con g costante positiva, è

$$y(x)=-\frac{1}{2}\,g\,x^2+y_1\,x+y_0.$$

Si vede che:

1) La costante nulla non è una soluzione;

2) La funzione $y_{00}(x)=-\frac{1}{2}\,g\,x^2$ è una soluzione, ma $2y_{00}(x)$ non lo è;

3) La funzione $y_{01}(x)=-\frac{1}{2}\,g\,x^2+1$ è una soluzione, ma la somma $y_{00}(x)+y_{01}(x)$ non lo è.

Dunque l'integrale generale di $y''=-g$ non è uno spazio vettoriale, tuttavia:

l'integrale generale di $y''=-g$ è dato dalla somma di due termini:

1) la funzione $z(x)=-\frac{1}{2}\,g\,x^2$, che è una particolare soluzione dell'equazione $y''=-g$, e

2) l'integrale generale dell'equazione omogenea $y''=0$, che è $y(x)=y_1\,x+y_0$.

La circostanza testé riscontrata, con riferimento ad un'equazione particolare, riveste un carattere del tutto generale:

l'integrale generale dell'equazione $y''+b(x)\,y'+c(x)\,y=f(x)$ è dato dalla somma di due termini:

1) una funzione $z(x)$, che sia una particolare soluzione dell'equazione data, e

2) l'integrale generale dell'equazione omogenea:

$$y''+b(x)\,y'+c(x)\,y=0.$$

INDICAZIONI OPERATIVE

Per trovare l'integrale generale dell'equazione $y''+b\,y'+c\,y=g(x)$, con $g(x)$ non identicamente nulla, si procede come segue:

1) Si cerca, innanzitutto, l'integrale generale dell'equazione omogenea ad essa associata, $y''+b\,y'+c\,y=0$.

Si utilizzano, a tal fine, le nozioni illustrate nella lezione precedente.

2) Si cerca una soluzione particolare $z(x)$ dell'equazione data, ad esempio lasciandosi guidare dal tipo di funzione $g(x)$ al secondo membro.

3) L'integrale generale dell'equazione data è la somma della soluzione particolare $z(x)$ e dell'integrale generale dell'equazione omogenea.

TEOREMA DI JACOBI

Fissato un intero $n > 0$, consideriamo l'equazione lineare omogenea

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = 0, \qquad (5)$$

con coefficienti definiti in un intervallo $[a, b]$.

Consideriamo, inoltre, n soluzioni della (5), che indicheremo con y_0, $\ldots, y_{n-1}$.

Indicato con $W(x)$ il determinante wronskiano

$$W(x) = \det\left(y_j^{(i)}(x)\right)_{i,j=0,\ldots,n-1}$$

verifichiamo che per ogni $x \in [a, b]$ risulta

$$a_n(x)\, W'(x) + a_{n-1}(x)\, W(x) = 0.$$

La dimostrazione si basa sulla derivazione del determinante

$$W(x) = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{|\sigma|}\, y_{\sigma(0)}^{(0)}(x) \cdot \ldots \cdot y_{\sigma(n-1)}^{(n-1)}(x),$$

dove S_n rappresenta il gruppo delle $n!$ permutazioni dell'insieme $\{0, \ldots, n-1\}$. Infatti, per la regola di derivazione del prodotto di n funzioni, risulta

$$\begin{aligned} W'(x) = &\sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{|\sigma|}\, y_{\sigma(0)}^{(1)}(x)\, y_{\sigma(1)}^{(1)}(x) \cdot \ldots \\ &\qquad \ldots \cdot y_{\sigma(n-1)}^{(n-1)}(x) \\ &+ \ldots \\ &+ \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{|\sigma|}\, y_{\sigma(0)}^{(0)}(x) \cdot \ldots \\ &\qquad \ldots \cdot y_{\sigma(n-2)}^{(n-2)}(x)\, y_{\sigma(n-1)}^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Dunque la derivata $W'(x)$ è data dalla somma di n determinanti, dei quali i primi $n-1$ sono nulli perché hanno due righe uguali.

Moltiplicando ambo i membri per $a_n(x)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} a_n(x)\, W'(x) = &\sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{|\sigma|}\, y_{\sigma(0)}^{(0)}(x) \cdot \ldots \\ &\ldots \cdot y_{\sigma(n-2)}^{(n-2)}(x)\, a_n(x)\, y_{\sigma(n-1)}^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Ora, essendo ogni funzione $y_{\sigma(n-1)}$ una soluzione dell'equazione (5), possiamo scrivere

$$a_n(x)\, y_{\sigma(n-1)}^{(n)}(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, y_{\sigma(n-1)}^{(k)}(x).$$

Utilizzando tale uguaglianza, il prodotto $a_n(x)\, W'(x)$ si esprime mediante la somma di n determinanti, dei quali i primi $n-1$ sono nulli perché hanno due righe uguali. Resta solamente l'ultimo:

$$\begin{aligned} a_n(x)\, W'(x) = &- a_{n-1}(x) \cdot \\ &\sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{|\sigma|}\, y_{\sigma(0)}^{(0)}(x) \cdot \ldots \\ &\ldots \cdot y_{\sigma(n-2)}^{(n-2)}(x)\, y_{\sigma(n-1)}^{(n-1)}(x). \end{aligned}$$

Siccome quest'ultima sommatoria rappresenta nuovamente il determinante $W(x)$, si prova la tesi.

RIFERIMENTI AL LIBRO DI TESTO*

Che cos'è un'equazione differenziale: pag. 222, formula (42.41)

Problema di Cauchy: pag. 223, formula (42.47)

Teorema di Cauchy: paragrafo 43, pag. 225

Equazioni a variabili separabili: pag. 249, formula (46.2)

Equazioni lineari: pag. 271

Il wronskiano soddisfa un'equazione differenziale (teorema di Jacobi): pag. 275

Equazioni lineari omogenee (le soluzioni formano uno spazio vettoriale): teorema a pag. 277

Equazioni lineari non omogenee (le soluzioni formano uno spazio affine): pagg. 278-279

Equazioni lineari non omogenee (come trovare una soluzione particolare): pagg. 282 e 293

*N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone. Analisi Matematica due. Liguori.