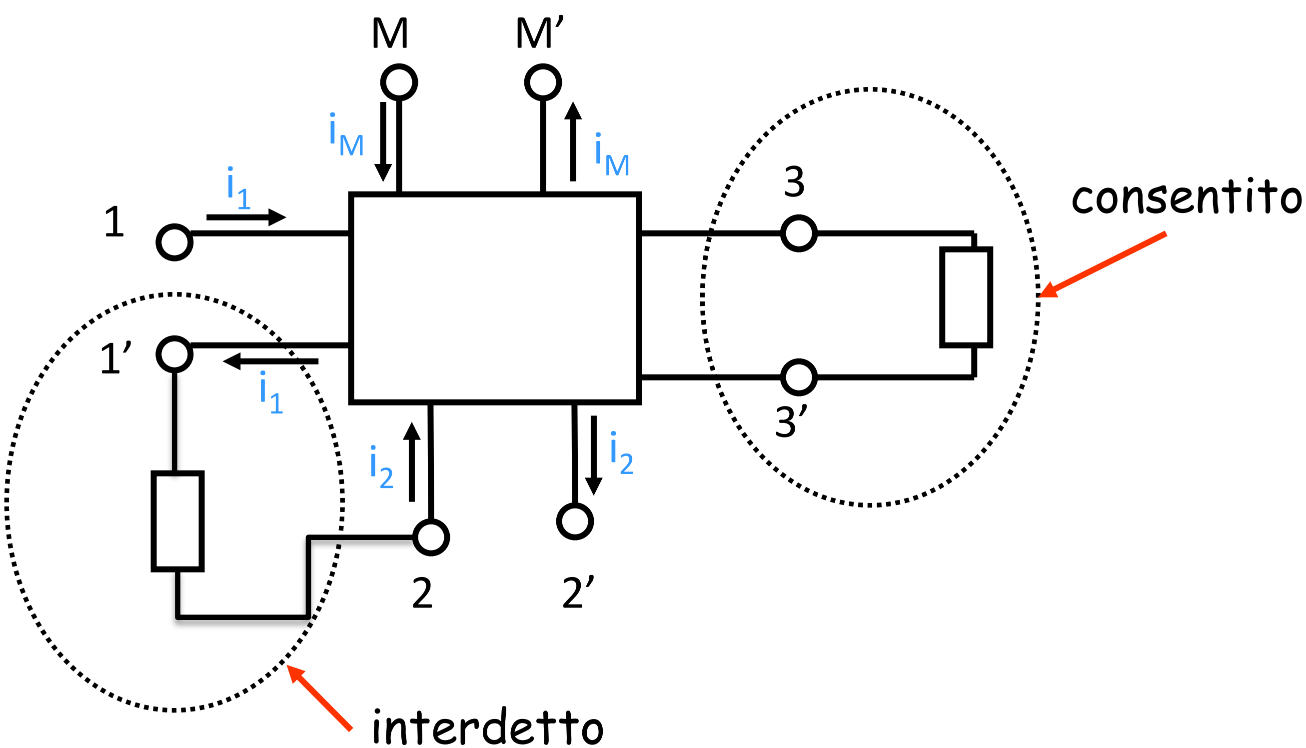
DOPPI BIPOLI

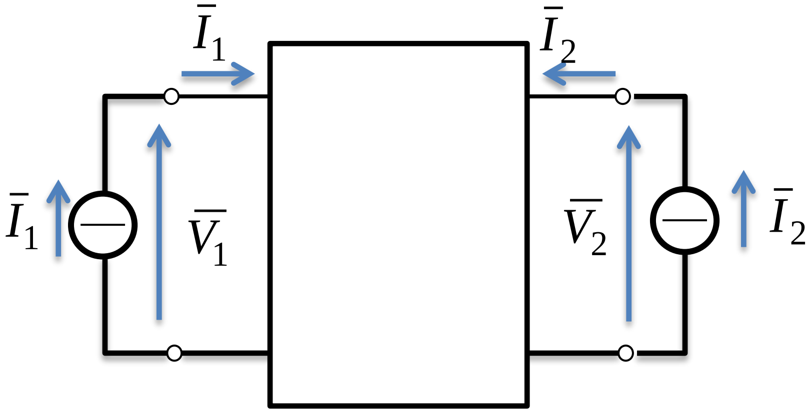
RETI MULTIPORTA

Le coppie di morsetti sono chiamate PORTE e ad esse si possono collegare solo bipoli

In generale dato un M-porte: $M+1 \leq N \leq 2M$



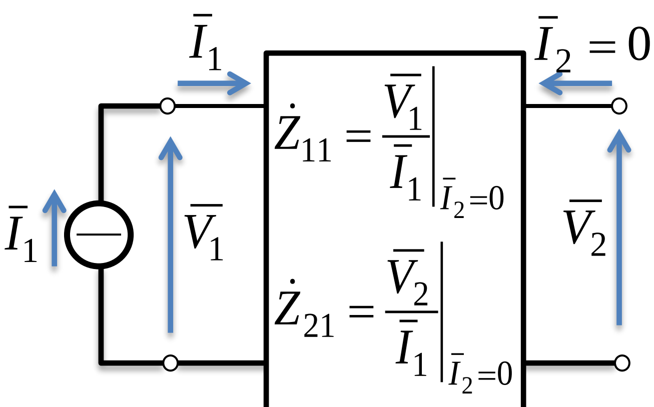
CARATTERIZZAZIONE DEGLI M-PORTA PASSIVI

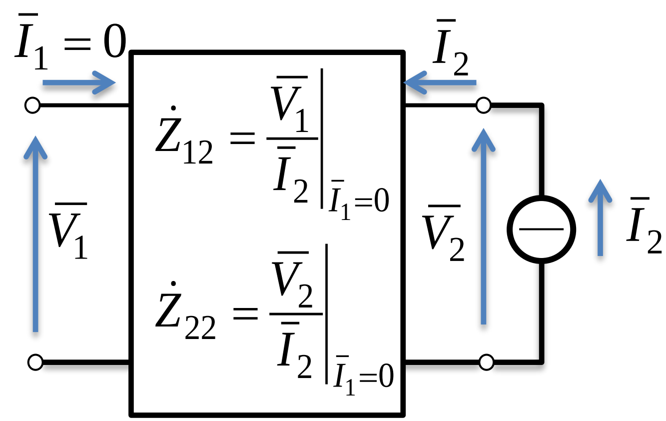


Solo se il componente
è definito su base
corrente

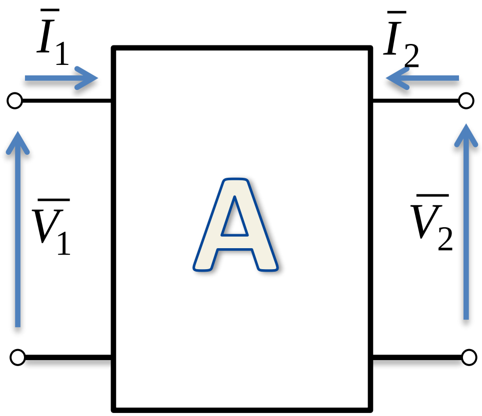
$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \dot{Z}_{11}\bar{I}_1 + \dot{Z}_{12}\bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = \dot{Z}_{21}\bar{I}_1 + \dot{Z}_{22}\bar{I}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} \\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{Z}}\overline{\mathbf{I}}$$

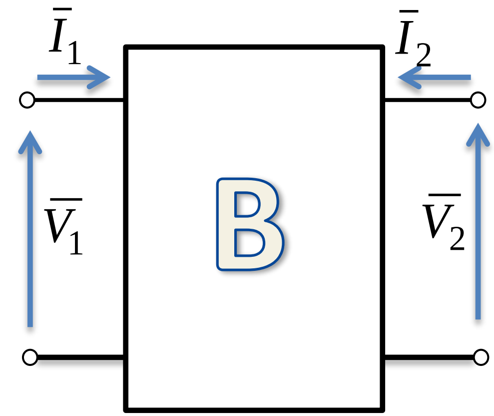
$$\dot{\mathbf{Z}} = \text{matrice impedenza}$$





EQUIVALENZA DI DOPPI BIPOLI



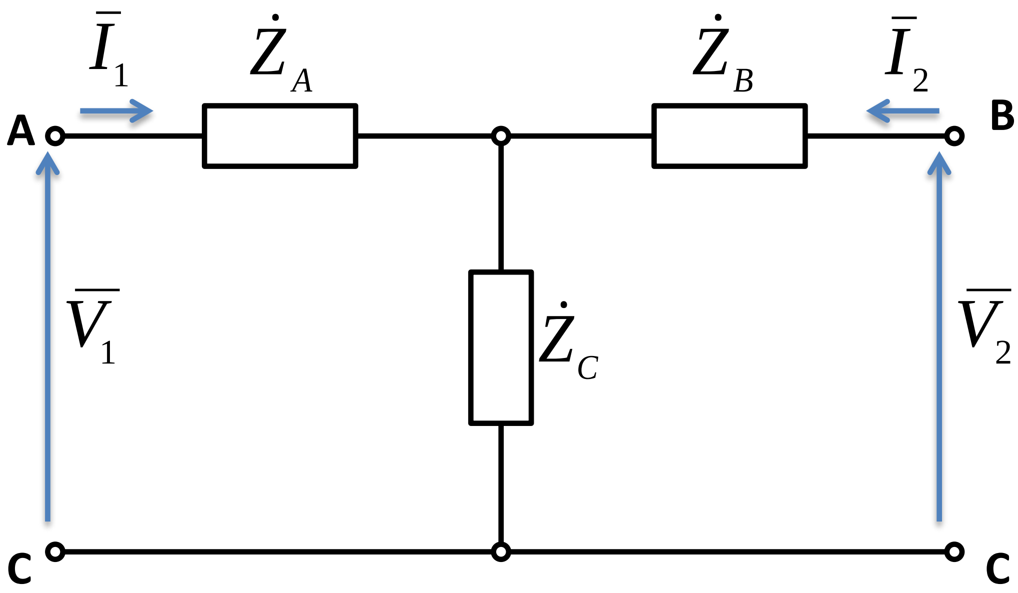


$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_{11_A} & \dot{Z}_{12_A} \\ \dot{Z}_{21_A} & \dot{Z}_{22_A} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_{11_B} & \dot{Z}_{12_B} \\ \dot{Z}_{21_B} & \dot{Z}_{22_B} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{Z}_{11_A} = \dot{Z}_{11_B} \\ \dot{Z}_{12_A} = \dot{Z}_{12_B} \\ \dot{Z}_{21_A} = \dot{Z}_{21_B} \\ \dot{Z}_{22_A} = \dot{Z}_{22_B} \end{cases}$$

Doppio bipolo a T o a Stella



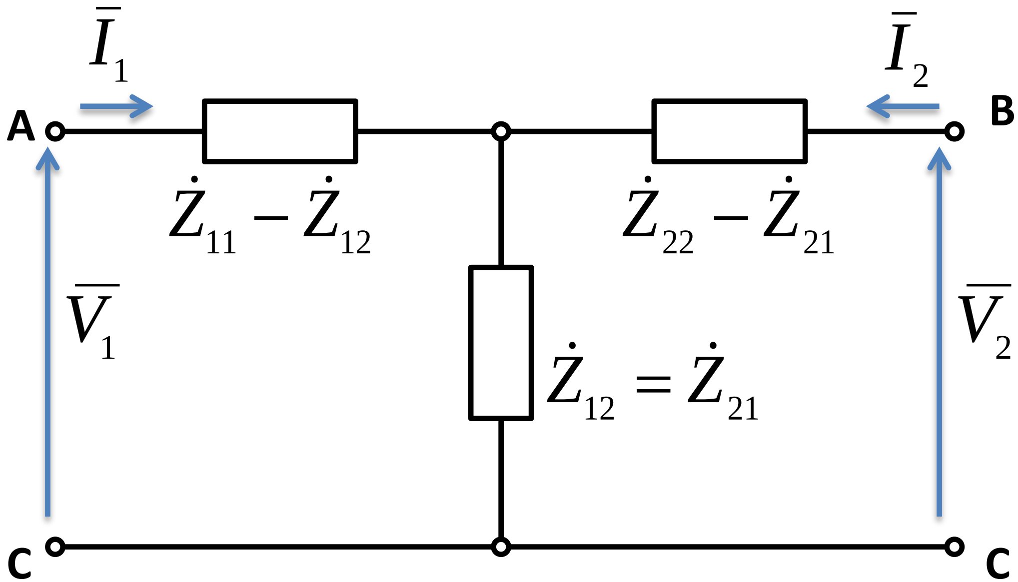
$$[\dot{Z}] = \begin{bmatrix} \dot{Z}_A + \dot{Z}_C & \dot{Z}_C \\ \dot{Z}_C & \dot{Z}_B + \dot{Z}_C \end{bmatrix}$$

Rete di bipoli → Matrice simmetrica

$$\dot{Z}_{11} = \left.\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1}\right|_{\bar{I}_2=0} = \dot{Z}_A + \dot{Z}_C \qquad \dot{Z}_{12} = \left.\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_2}\right|_{\bar{I}_1=0} = \dot{Z}_C = \dot{Z}_{21}$$

$$\dot{Z}_{21} = \left.\frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_1}\right|_{\bar{I}_2=0} = \dot{Z}_C \qquad \dot{Z}_{22} = \left.\frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2}\right|_{\bar{I}_1=0} = \dot{Z}_B + \dot{Z}_C$$

Una rete a T in funzione dei parametri impedenza.



$$\dot{Z}_A=\dot{Z}_{11}-\dot{Z}_C=\dot{Z}_{11}-\dot{Z}_{12}$$

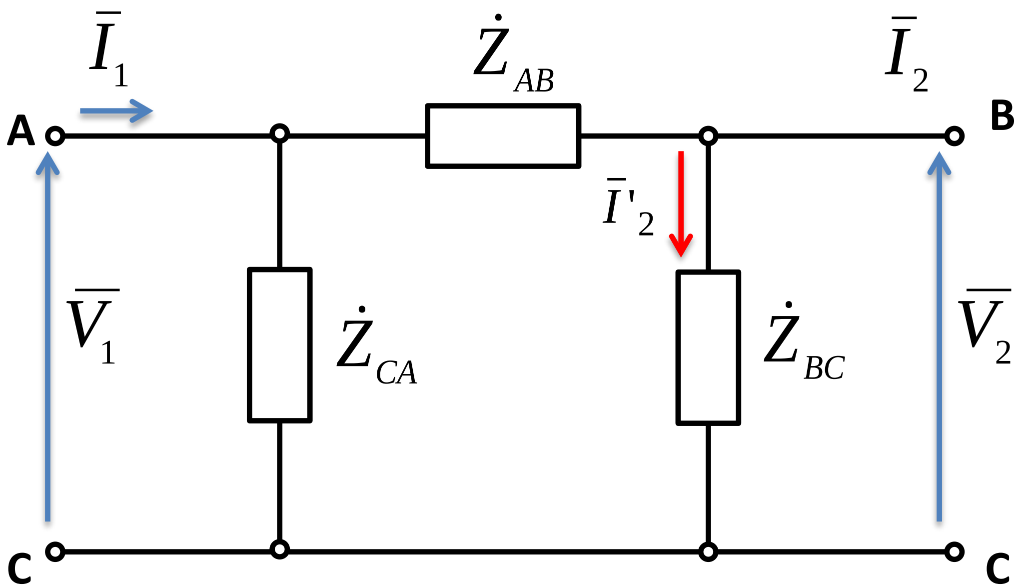
$$\dot{Z}_C=\dot{Z}_{12}=\dot{Z}_{21}$$

$$\dot{Z}_B=\dot{Z}_{22}-\dot{Z}_C=\dot{Z}_{22}-\dot{Z}_{21}$$

$$\dot{Z}_{11}=\left.\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1}\right|_{\bar{I}_2=0}=\dot{Z}_A+\dot{Z}_C \qquad \dot{Z}_{12}=\left.\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_2}\right|_{\bar{I}_1=0}=\dot{Z}_C=\dot{Z}_{21}$$

$$\dot{Z}_{21}=\left.\frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_1}\right|_{\bar{I}_2=0}=\dot{Z}_C \qquad \dot{Z}_{22}=\left.\frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2}\right|_{\bar{I}_1=0}=\dot{Z}_B+\dot{Z}_C$$

Doppio bipolo a Π o a Triangolo



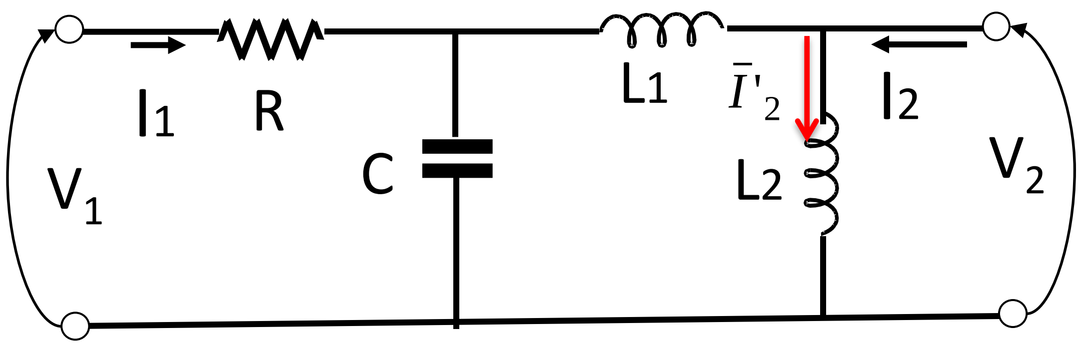
$$[\dot{Z}] = \begin{bmatrix} \frac{\dot{Z}_{AB}\dot{Z}_{CA}}{\dot{Z}_\Delta} + \frac{\dot{Z}_{BC}\dot{Z}_{CA}}{\dot{Z}_\Delta} & \frac{\dot{Z}_{BC}\dot{Z}_{CA}}{\dot{Z}_\Delta} \\ \frac{\dot{Z}_{BC}\dot{Z}_{CA}}{\dot{Z}_\Delta} & \frac{\dot{Z}_{AB}\dot{Z}_{BC}}{\dot{Z}_\Delta} + \frac{\dot{Z}_{BC}\dot{Z}_{CA}}{\dot{Z}_\Delta} \end{bmatrix}$$

$$\dot{Z}_{11} = \left.\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1}\right|_{\bar{I}_2=0} = \frac{\left(\dot{Z}_{AB} + \dot{Z}_{BC}\right)\dot{Z}_{CA}}{\dot{Z}_{AB} + \dot{Z}_{BC} + \dot{Z}_{CA}} = \frac{\dot{Z}_{AB}\dot{Z}_{CA}}{\dot{Z}_\Delta} + \frac{\dot{Z}_{BC}\dot{Z}_{CA}}{\dot{Z}_\Delta}$$

$$\dot{Z}_{21} = \left.\frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_1}\right|_{\bar{I}_2=0} = \dot{Z}_{BC}\bar{I}'_2 = \dot{Z}_{BC}\frac{\dot{Z}_{CA}}{\dot{Z}_{AB} + \dot{Z}_{BC} + \dot{Z}_{CA}} = \frac{\dot{Z}_{BC}\dot{Z}_{CA}}{\dot{Z}_\Delta}$$

$$\dot{Z}_{22} = \left.\frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2}\right|_{\bar{I}_1=0} = \frac{\left(\dot{Z}_{AB} + \dot{Z}_{CA}\right)\dot{Z}_{BC}}{\dot{Z}_{AB} + \dot{Z}_{BC} + \dot{Z}_{CA}} = \frac{\dot{Z}_{AB}\dot{Z}_{BC}}{\dot{Z}_\Delta} + \frac{\dot{Z}_{BC}\dot{Z}_{CA}}{\dot{Z}_\Delta}$$

Esempio



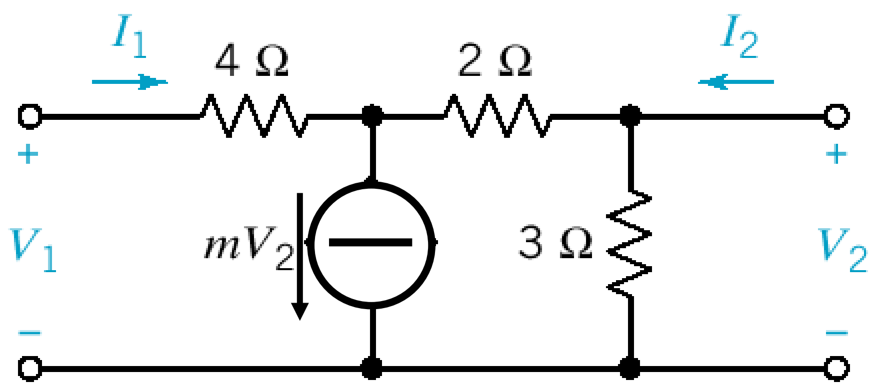
$$\begin{cases} \overline{V_1} = \dot{Z}_{11}\overline{I}_1 + \dot{Z}_{12}\overline{I}_2 \\ \overline{V_2} = \dot{Z}_{21}\overline{I}_1 + \dot{Z}_{22}\overline{I}_2 \end{cases}$$

$$\dot{Z}_{11} = R + \frac{1}{j\omega C} // \left(j\omega L_1 + j\omega L_2 \right) = R + \frac{j\omega\left(L_1 + L_2\right)}{1 - \omega^2 C\left(L_1 + L_2\right)}$$

$$\overline{V_2} = j\omega L_2 \overline{I_2}' = j\omega L_2 \overline{I_1} \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega\left(L_1 + L_2\right)} \Rightarrow \qquad \dot{Z}_{21} = \frac{j\omega L_2}{1 - \omega^2 C\left(L_1 + L_2\right)} = \dot{Z}_{12}$$

$$\dot{Z}_{22} = \left(j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C} \right) // \, j\omega L_2 = \frac{\left(1 - \omega^2 L_1 C\right) j\omega L_2}{1 - \omega^2 C\left(L_1 + L_2\right)}$$

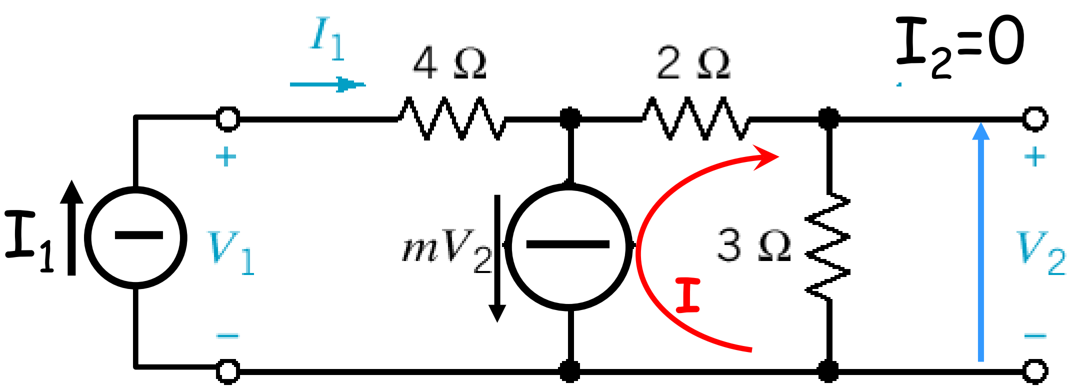
Esempio



Determinare i parametri Z

m=2/3

Lasciamo aperta la porta 2 e alimentiamo la porta 1 con un generatore di corrente



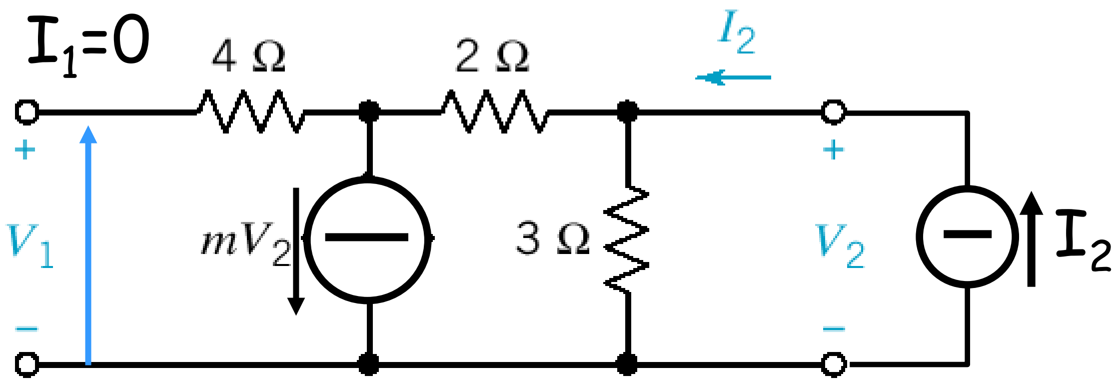
$$\begin{cases} I_1 - m\cdot V_2 = I \\ V_1 = 4I_1 + 5I \\ V_2 = 3I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 = m\cdot V_2 + \dfrac{V_2}{3} = \left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\right)\cdot V_2 \\ V_1 = 4I_1 + \dfrac{5V_2}{3} = 4I_1 + \dfrac{5}{3}I_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = 1\Omega$$

$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{17}{3}\Omega$$

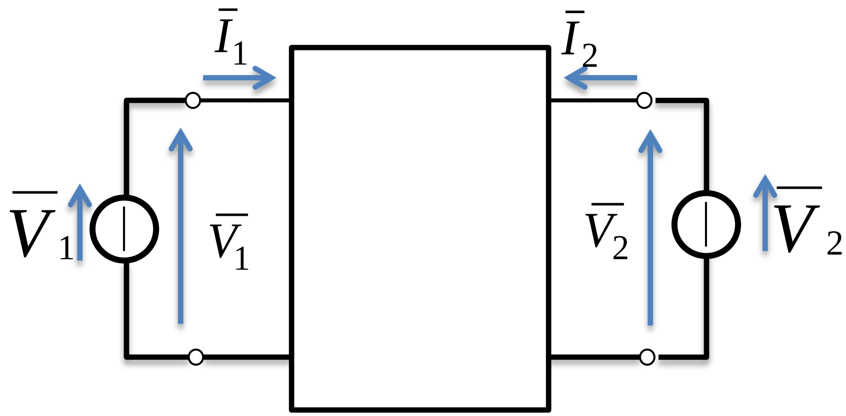
Lasciamo aperta la porta 1 e alimentiamo la porta 2 con un generatore di corrente



$$\begin{cases} V_2 = 3\cdot\left(I_2 - mV_2\right) \Rightarrow V_2 + 3mV_2 = 3I_2 \Rightarrow 3\cdot V_2 = 3I_2 \\ V_1 = V_2 - 2m\overline{V}_2 = V_2 - \frac{4}{3}V_2 = -\frac{1}{3}V_2 = -\frac{1}{3}I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = 1\Omega \\ Z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = -\frac{1}{3}\Omega \end{array}$$

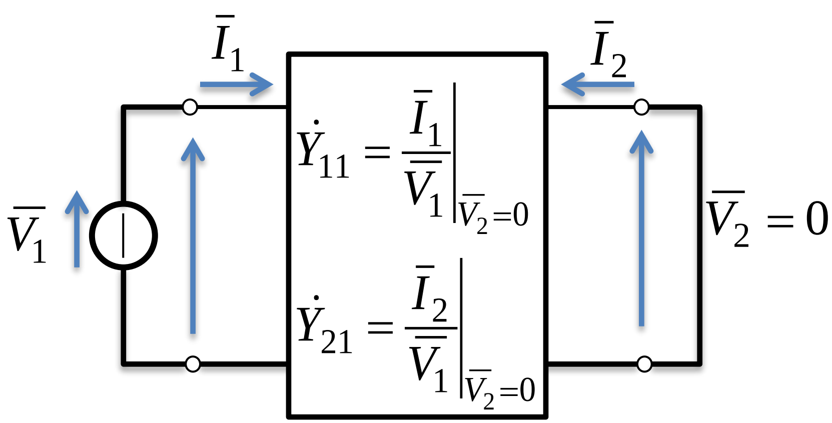
$$Z_{12} \neq Z_{21}$$

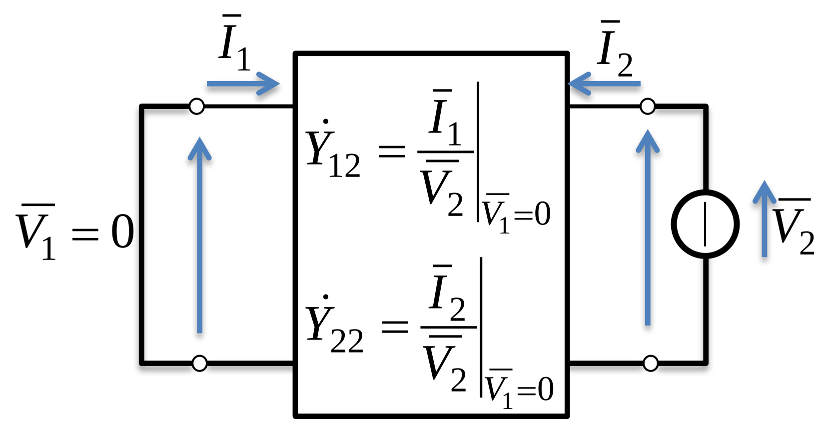
Matrice Ammettenza $\dot{\mathbf{Y}}$



Solo se il componente è definito su base tensione

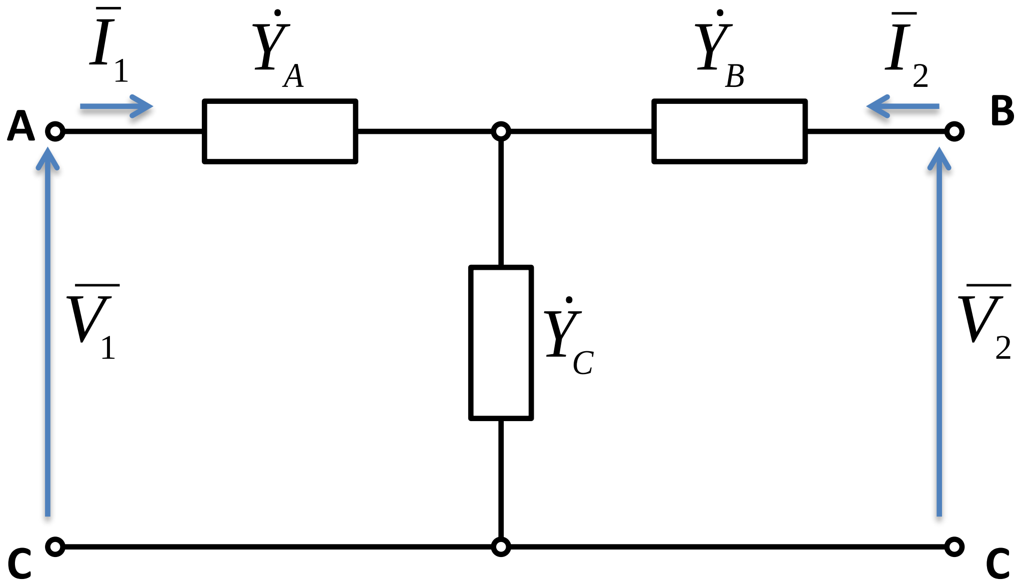
$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \dot{Y}_{11}\bar{V}_1 + \dot{Y}_{12}\bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 = \dot{Y}_{21}\bar{V}_1 + \dot{Y}_{22}\bar{V}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{I}} = \dot{\mathbf{Y}}\bar{\mathbf{V}}$$





Se il componente è definito su base tensione e su base corrente: $[Z] = [Y]^{-1}$

Doppio bipolo a T o a Stella

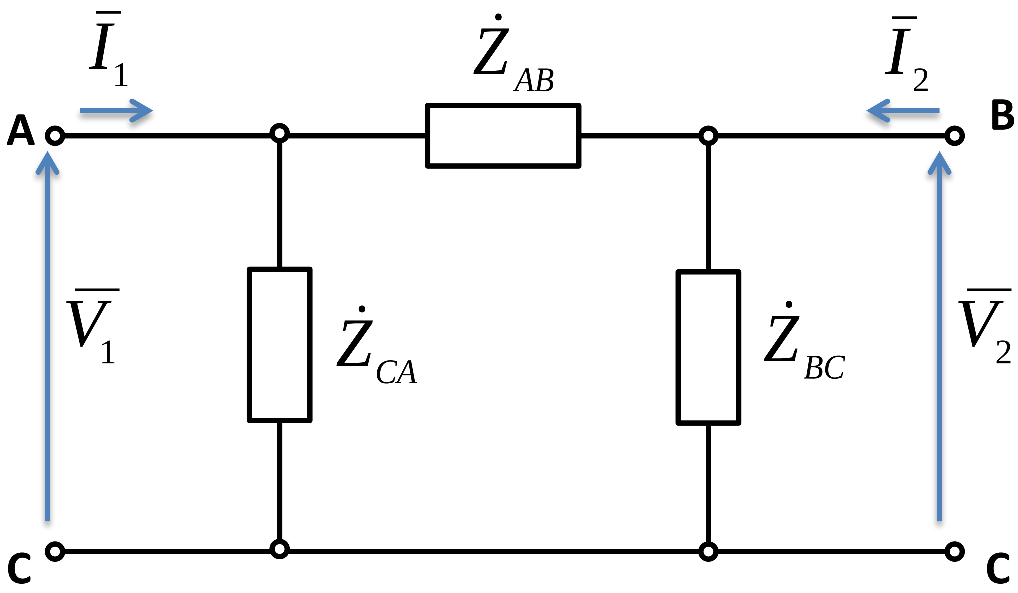


$$\dot{Y}_{11} = \left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_1}\right|_{\bar{V}_2=0} = \frac{\left(\dot{Y}_B + \dot{Y}_C\right)\dot{Y}_A}{\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C} = \frac{\dot{Y}_A\dot{Y}_B + \dot{Y}_C\dot{Y}_A}{\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C}$$

$$\dot{Y}_{21} = \left.\frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_1}\right|_{\bar{V}_2=0} = -\dot{Y}_B\frac{\dot{Y}_A}{\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C}$$

$$\dot{Y}_{22} = \left.\frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{V}_1=0} = \frac{\left(\dot{Y}_A + \dot{Y}_C\right)\dot{Y}_B}{\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C} = \frac{\dot{Y}_A\dot{Y}_B + \dot{Y}_B\dot{Y}_C}{\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C}$$

Doppio bipolo a Π o a Triangolo



$$[\dot{Y}] = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{AB} + \dot{Y}_{CA} & -\dot{Y}_{AB} \\ -\dot{Y}_{AB} & \dot{Y}_{BC} + \dot{Y}_{AB} \end{bmatrix}$$

Rete di bipoli → Matrice simmetrica

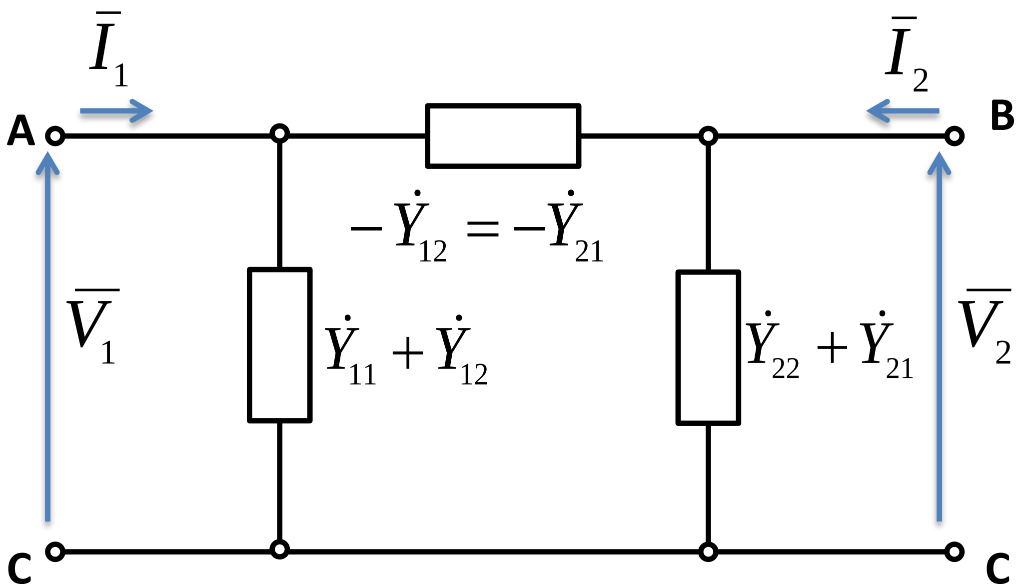
$$\dot{Y}_{11} = \left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_1}\right|_{\bar{V}_2=0} = \dot{Y}_{AB} + \dot{Y}_{CA}$$

$$\dot{Y}_{12} = \left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{V}_1=0} = -\dot{Y}_{AB} = \dot{Y}_{21}$$

$$\dot{Y}_{21} = \left.\frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_1}\right|_{\bar{V}_2=0} = -\dot{Y}_{AB}$$

$$\dot{Y}_{22} = \left.\frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{V}_1=0} = \dot{Y}_{BC} + \dot{Y}_{AB}$$

Una rete a Π in funzione dei parametri ammettenza.



$$\dot{Y}_{AB} = -\dot{Y}_{12} = -\dot{Y}_{21}$$

$$\dot{Y}_{BC} = \dot{Y}_{22} - \dot{Y}_{AB} = \dot{Y}_{22} + \dot{Y}_{21}$$

$$\dot{Y}_{CA} = \dot{Y}_{11} - \dot{Y}_{AB} = \dot{Y}_{11} + \dot{Y}_{12}$$

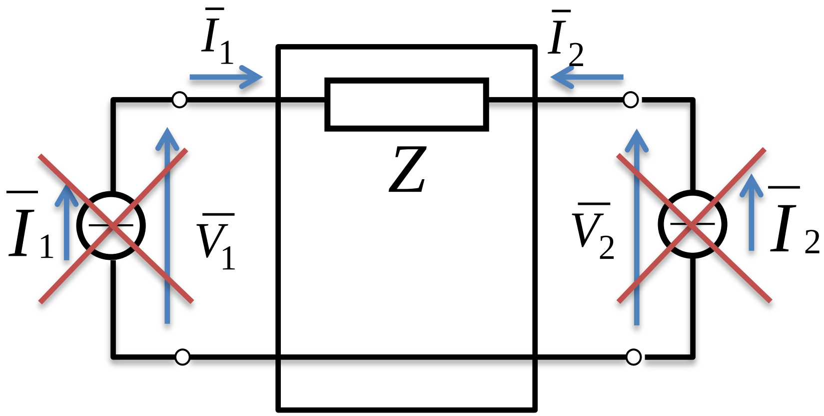
$$\dot{Y}_{11} = \left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_1}\right|_{\bar{V}_2=0} = \dot{Y}_{AB} + \dot{Y}_{CA}$$

$$\dot{Y}_{12} = \left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{V}_1=0} = -\dot{Y}_{AB} = \dot{Y}_{21}$$

$$\dot{Y}_{21} = \left.\frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_1}\right|_{\bar{V}_2=0} = -\dot{Y}_{AB}$$

$$\dot{Y}_{22} = \left.\frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{V}_1=0} = \dot{Y}_{BC} + \dot{Y}_{AB}$$

Casi particolari: Esempio 1

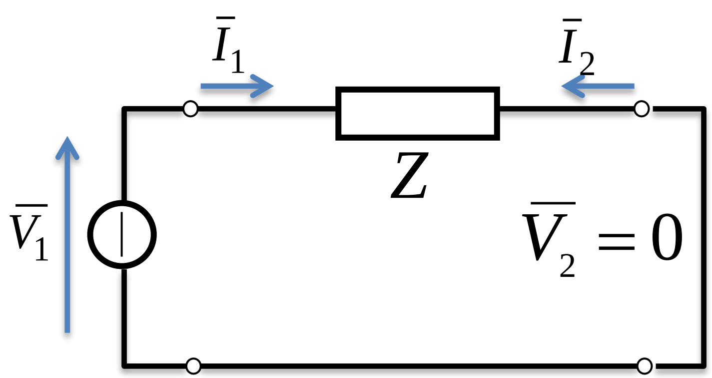


Il doppio bipolo
non è definito su base corrente

[Z] non esiste

Determiniamo la matrice di ammettenza

Alimentiamo la porta 1 e
cortocircuitiamo la porta 2

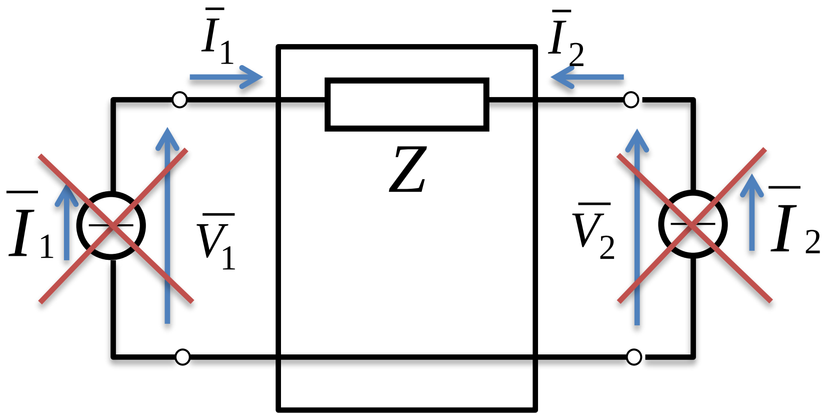


$$\bar{V}_1 = \dot{Z}\bar{I}_1$$

$$\bar{I}_2 = -\bar{I}_1$$

$$\dot{Y}_{11} = \left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_1}\right|_{\bar{V}_2=0} = \frac{1}{Z} \qquad \dot{Y}_{21} = \left.\frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_1}\right|_{\bar{V}_2=0} = -\frac{1}{Z}$$

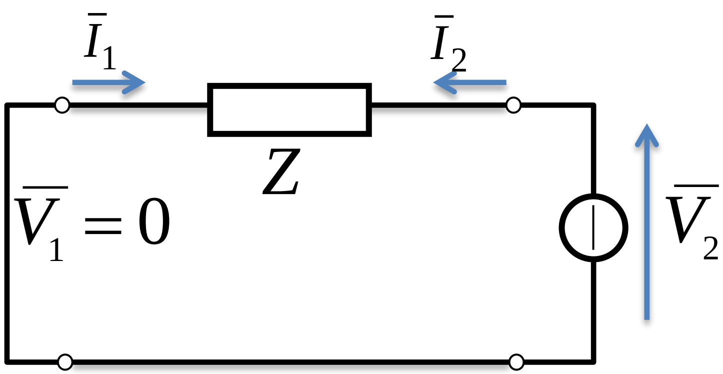
Casi particolari: Esempio 1



$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z} & -\frac{1}{Z} \\ -\frac{1}{Z} & \frac{1}{Z} \end{bmatrix}$$

Determiniamo la matrice di ammettenza

Alimentiamo la porta 2 e cortocircuitiamo la porta 1

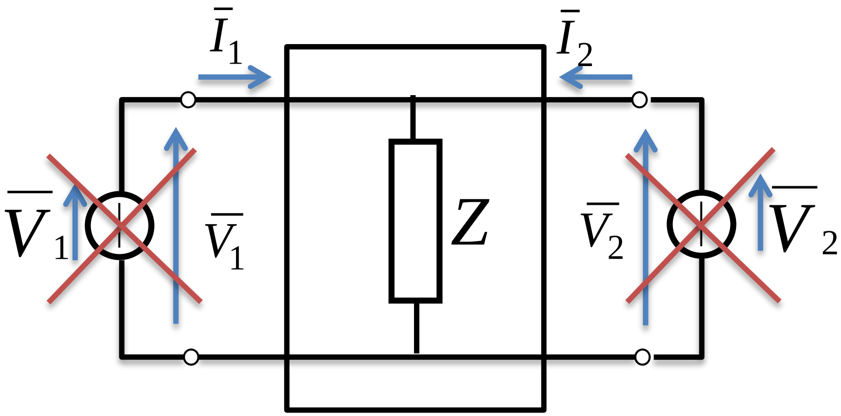


$$\bar{V}_2 = \dot{Z}\bar{I}_2$$

$$\bar{I}_1 = -\bar{I}_2$$

$$\dot{Y}_{22} = \left.\frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{V}_1=0} = \frac{1}{Z} \qquad \dot{Y}_{12} = \left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{V}_1=0} = -\frac{1}{Z}$$

Casi particolari: Esempio 2

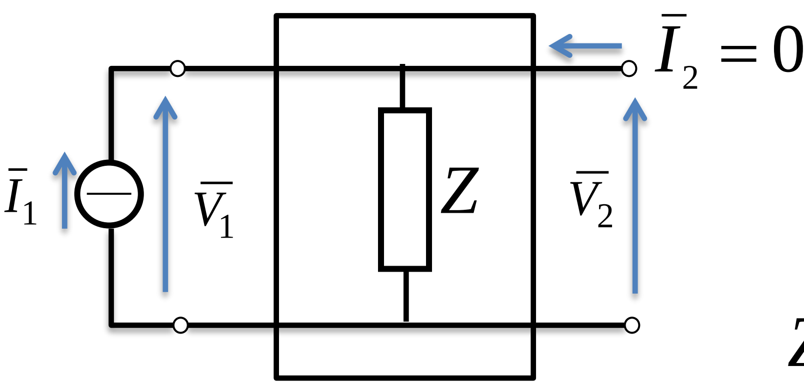


Il doppio bipolo
non è definito su base tensione

[Y] non esiste

Determiniamo la matrice di impedenza

Alimentiamo la porta 1 e
lasciamo aperta la porta 2

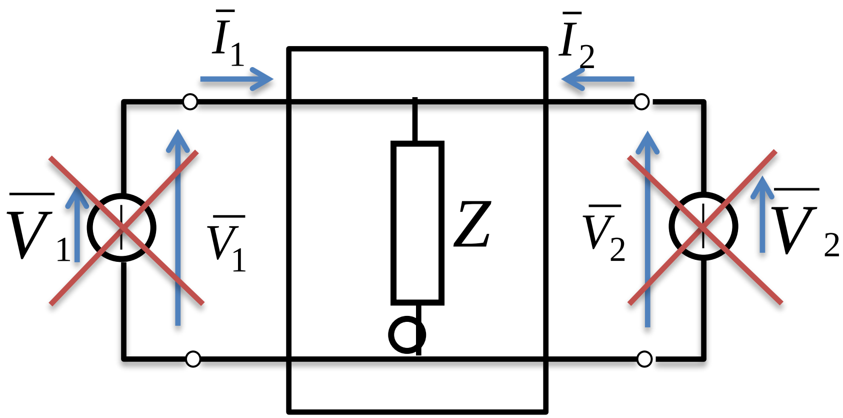


$$\overline{V}_1 = \dot{Z}\,\overline{I}_1$$

$$\overline{V}_2 = \overline{V}_1$$

$$\dot{Z}_{11} = \left.\frac{\overline{V}_1}{\overline{I}_1}\right|_{\overline{I}_2=0} = Z \qquad \dot{Z}_{21} = \left.\frac{\overline{V}_2}{\overline{I}_1}\right|_{\overline{I}_2=0} = Z$$

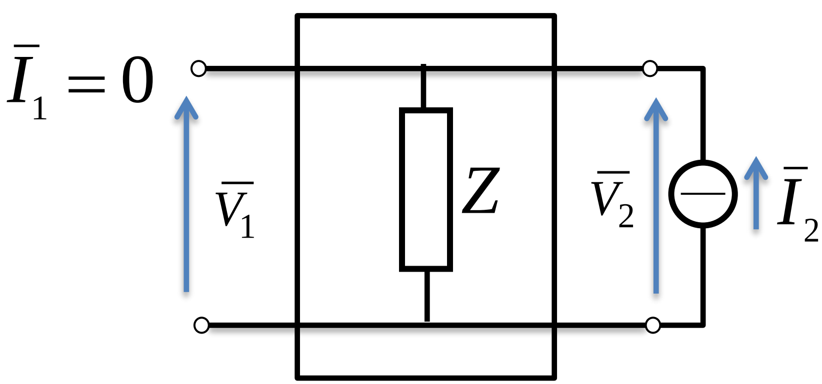
Casi particolari: Esempio 2



$$\boxed{[Z] = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & Z \end{bmatrix}}$$

Determiniamo la matrice di impedenza

Alimentiamo la porta 2 e lasciamo aperta la porta 1

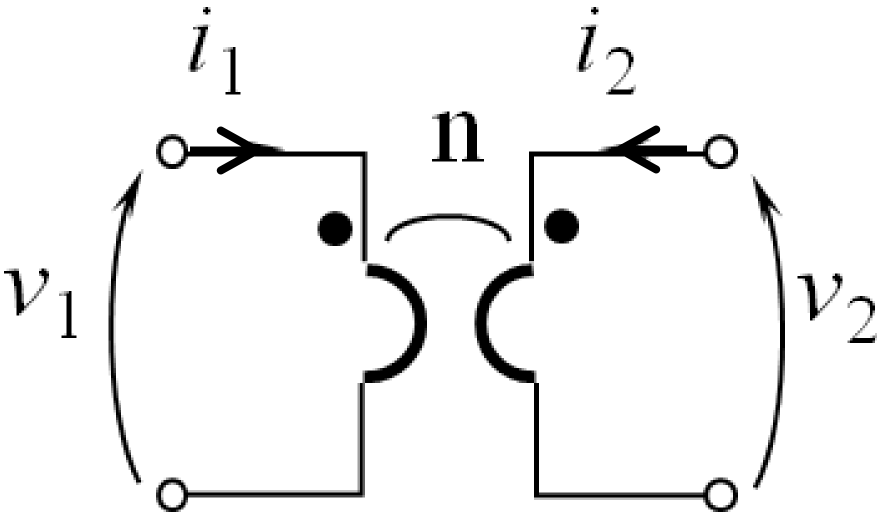


$$\overline{V}_2 = \dot{Z}\,\overline{I}_2$$

$$\overline{V}_1 = \overline{V}_2$$

$$\dot{Z}_{22} = \left.\frac{\overline{V}_2}{\overline{I}_2}\right|_{\bar{I}_1=0} = Z \qquad \dot{Z}_{12} = \left.\frac{\overline{V}_1}{\overline{I}_2}\right|_{\bar{I}_1=0} = Z$$

Trasformatore ideale



$$\begin{cases} \overline{V}_1 = n \cdot \overline{V}_2 \\ \overline{I}_1 = -\dfrac{1}{n} \cdot \overline{I}_2 \end{cases}$$

n: rapporto di trasformazione

Matrici Ibride

1. Base di definizione $\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix}$

Tipica dei transistori

$$h_{11} = \left.\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1}\right|_{\bar{V}_2=0} \rightarrow$$ Impedenza di ingresso in c.to c.to [Ω]

$$h_{12} = \left.\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{I}_1=0} \rightarrow$$ Guadagno di tensione inverso in c.a. [adim.]

$$h_{21} = \left.\frac{\bar{I}_2}{\bar{I}_1}\right|_{\bar{V}_2=0} \rightarrow$$ Guadagno di corrente diretto in c.to c.to [adim.]

$$h_{22} = \left.\frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{I}_1=0} \rightarrow$$ Ammettenza di uscita in c.a. [S]

I parametri [h] non hanno omogeneità dimensionale

Matrici Ibride

2. Base di definizione $\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix}$

Tipica dei tubi a vuoto

$$g_{11} = \left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_1}\right|_{\bar{I}_2=0} \Rightarrow$$ Ammettenza di ingresso in c.a. [S]

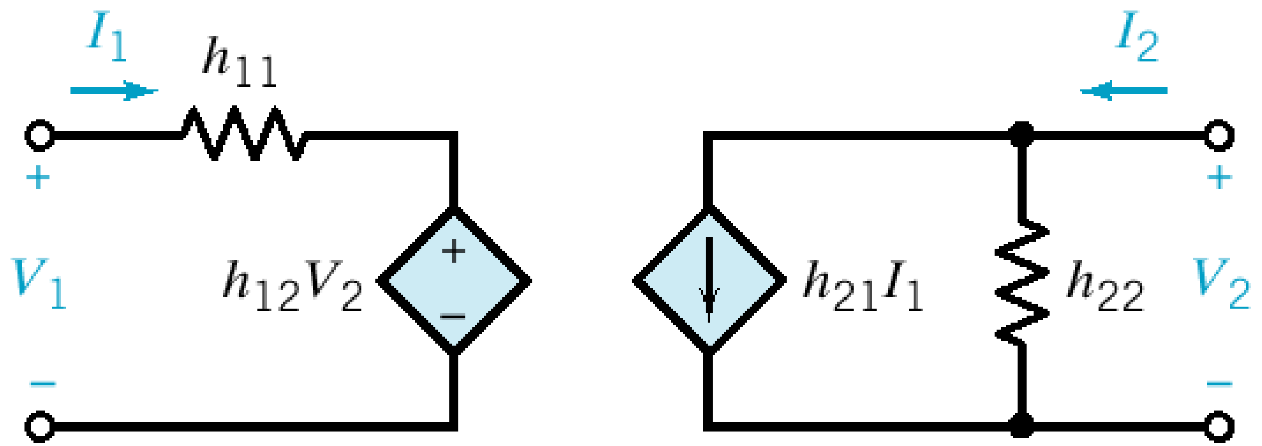
$$g_{12} = \left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2}\right|_{\bar{V}_1=0} \Rightarrow$$ Guadagno di corrente inverso in c.to c.to [adim.]

$$g_{21} = \left.\frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1}\right|_{\bar{I}_2=0} \Rightarrow$$ Guadagno di tensione diretto in c.a. [adim.]

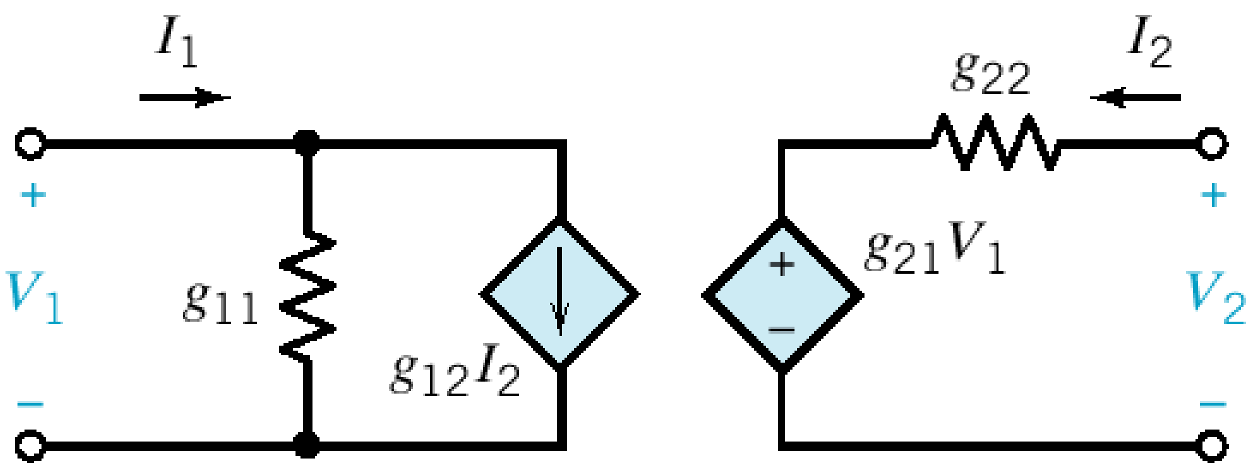
$$g_{22} = \left.\frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2}\right|_{\bar{V}_1=0} \Rightarrow$$ Impedenza di uscita in c.to c.to [Ω]

I parametri [g] non hanno omogeneità dimensionale

Doppio bipolo equivalente nella formulazione ibrida h.

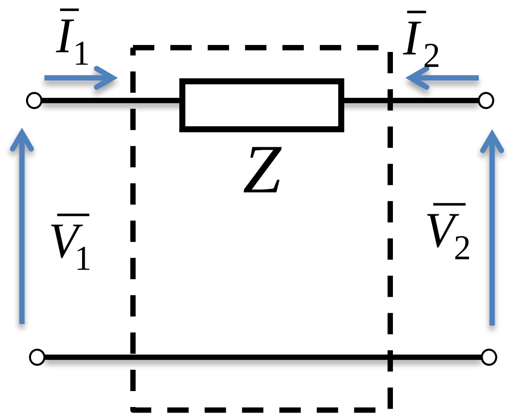


Doppio bipolo equivalente nella formulazione ibrida g.



Esempio

Determinare le matrici [H] e [G], se esistono, del doppio bipolo in figura.



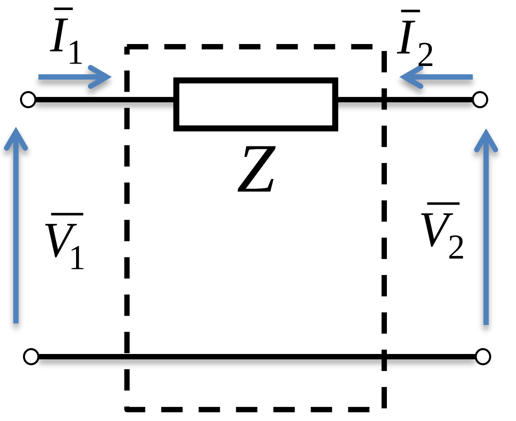
Abbiamo visto precedentemente che questo doppio bipolo è definito su base tensione [V1, V2] mentre non è definito su base corrente

[Z] non esiste

$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z} & -\frac{1}{Z} \\ -\frac{1}{Z} & \frac{1}{Z} \end{bmatrix}$$

Esempio

Determinare le matrici [H] e [G], se esistono, del doppio bipolo in figura.

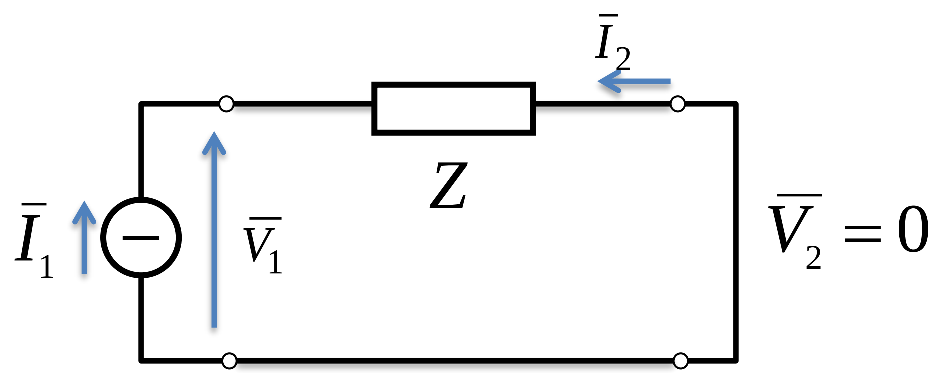


Determiniamo la matrice ibrida [H]:

$$\begin{cases} \overline{V}_1 = h_{11}\overline{I}_1 + h_{12}\overline{V}_2 \\ \overline{I}_2 = h_{21}\overline{I}_1 + h_{22}\overline{V}_2 \end{cases}$$

La base di definizione è $[\overline{I}_1, \overline{V}_2]$

Alimentiamo la porta 1 e cortocircuitiamo la porta 2

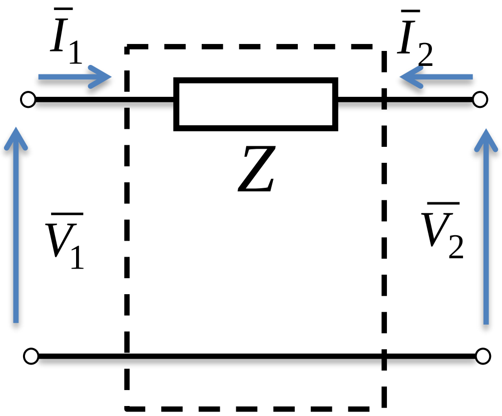


$$\overline{V}_1 = \dot{Z}\overline{I}_1$$
$$\overline{I}_2 = -\overline{I}_1$$

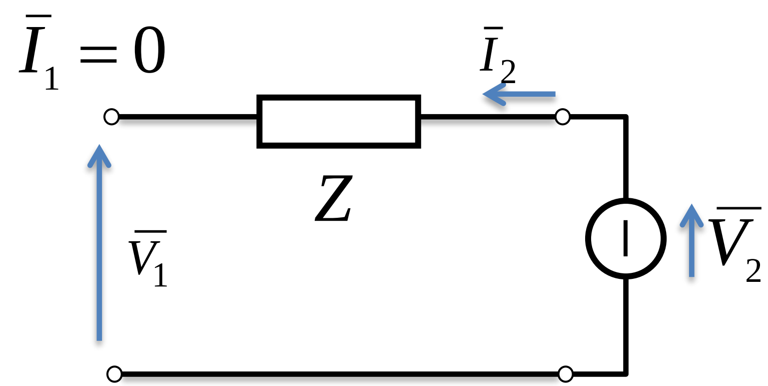
$$\Rightarrow \quad h_{11} = \left.\frac{\overline{V}_1}{\overline{I}_1}\right|_{\overline{V}_2=0} = \dot{Z} \qquad h_{21} = \left.\frac{\overline{I}_2}{\overline{I}_1}\right|_{\overline{V}_2=0} = -1$$

Esempio

Determinare le matrici [H] e [G], se esistono, del doppio bipolo in figura.



$$[H]=\begin{bmatrix} \dot{Z} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$



Alimentiamo la porta 2 e apriamo la porta 1

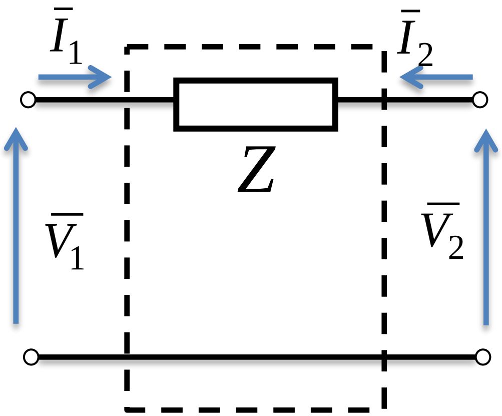
$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2$$

$$\bar{I}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad h_{12} = \left.\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{I}_1=0} = 1 \qquad h_{22} = \left.\frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{I}_1=0} = 0$$

Esempio

Determinare le matrici [H] e [G], se esistono, del doppio bipolo in figura.



$$[H]=\begin{bmatrix} \dot{Z} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice [H] poteva essere determinata anche dalla conoscenza della matrice [Y] utilizzando le seguenti relazioni

$$h_{11}=\frac{1}{y_{11}};\quad h_{12}=-\frac{y_{12}}{y_{11}};\quad h_{21}=\frac{y_{12}}{y_{11}};\quad h_{22}=\frac{\Delta y}{y_{11}}$$

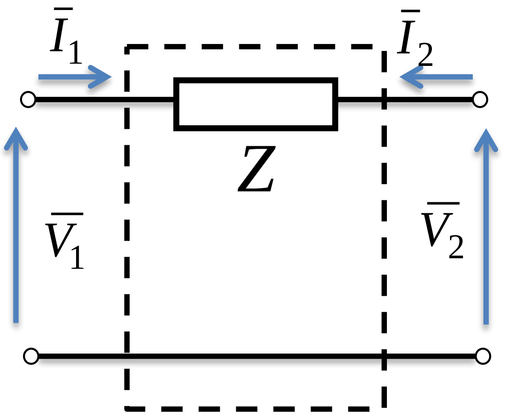
da cui, essendo Δy=0

$$h_{11}=\frac{1}{y_{11}}=\dot{Z};\quad h_{12}=-\frac{-\frac{1}{\dot{Z}}}{\frac{1}{\dot{Z}}}=1;\quad h_{21}=\frac{-\frac{1}{\dot{Z}}}{\frac{1}{\dot{Z}}}=-1;\quad h_{22}=0$$

c.v.d.

Esempio

Determinare le matrici [H] e [G], se esistono, del doppio bipolo in figura.

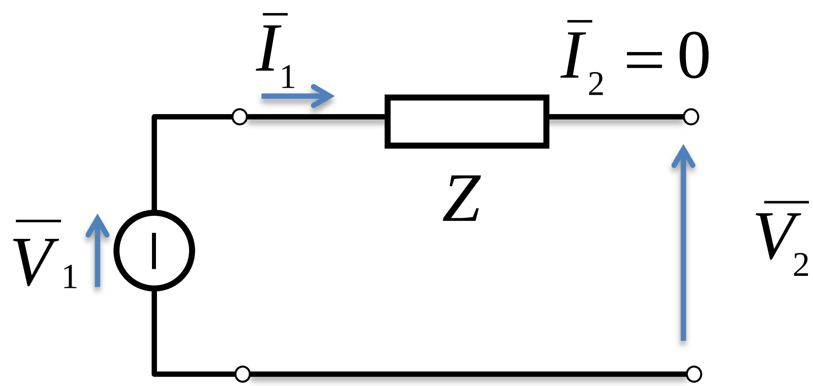


Determiniamo la matrice ibrida [G]:

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = g_{11}\bar{V}_1 + g_{12}\bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = g_{21}\bar{V}_1 + g_{22}\bar{I}_2 \end{cases}$$

La base di definizione è $[\bar{V}_1, \bar{I}_2]$

Alimentiamo la porta 1 e lasciamo aperta la porta 2

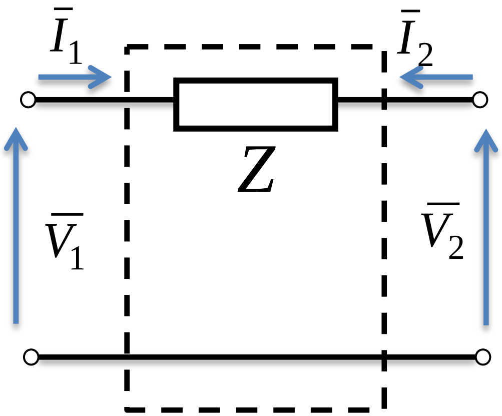


$$\bar{I}_1 = 0$$
$$\bar{V}_2 = \bar{V}_1$$

$$\Rightarrow \quad g_{11} = \left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_1}\right|_{\bar{I}_2=0} = 0 \qquad g_{21} = \left.\frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1}\right|_{\bar{I}_2=0} = 1$$

Esempio

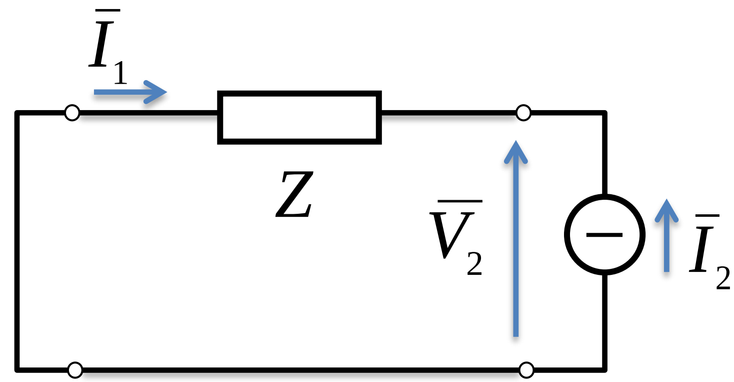
Determinare le matrici [H] e [G], se esistono, del doppio bipolo in figura.



$$[G]=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \dot{Z} \end{bmatrix}$$

Alimentiamo la porta 2 e cortocircuitiamo la porta 1

$$\bar{V}_1 = 0$$

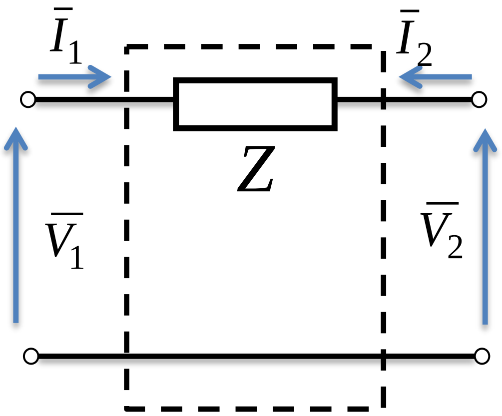


$$\bar{V}_2 = \dot{Z}\bar{I}_2$$
$$\bar{I}_1 = -\bar{I}_2$$

$$\Rightarrow \quad g_{12} = \left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2}\right|_{\bar{V}_1=0} = -1 \qquad g_{22} = \left.\frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2}\right|_{\bar{V}_1=0} = \dot{Z}$$

Esempio

Determinare le matrici [H] e [G], se esistono, del doppio bipolo in figura.



$$[H]=\begin{bmatrix}\dot{Z} & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

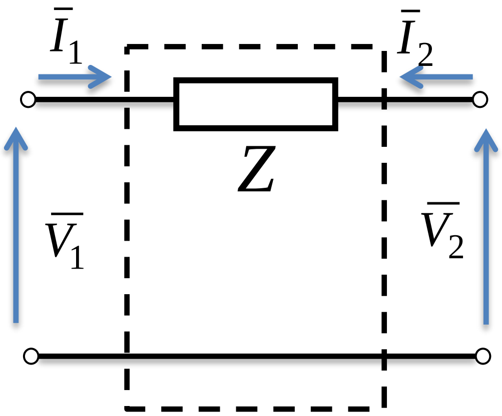
La matrice [G] poteva essere determinata note le matrici [Y] e [H] utilizzando le seguenti relazioni

$$g_{11}=\frac{\Delta y}{y_{22}};\quad g_{12}=\frac{y_{12}}{y_{22}};\quad g_{21}=-\frac{y_{21}}{y_{22}};\quad g_{22}=\frac{1}{y_{22}}$$

$$g_{11}=0;\quad g_{12}=\frac{-\frac{1}{\dot{Z}}}{\frac{1}{\dot{Z}}}=-1;\quad g_{21}=-\frac{-\frac{1}{\dot{Z}}}{\frac{1}{\dot{Z}}}=1;\quad g_{22}=\frac{1}{\frac{1}{\dot{Z}}}=\dot{Z}$$

Esempio

Determinare le matrici [H] e [G], se esistono, del doppio bipolo in figura.



$$[H] = \begin{bmatrix} \dot{Z} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

oppure

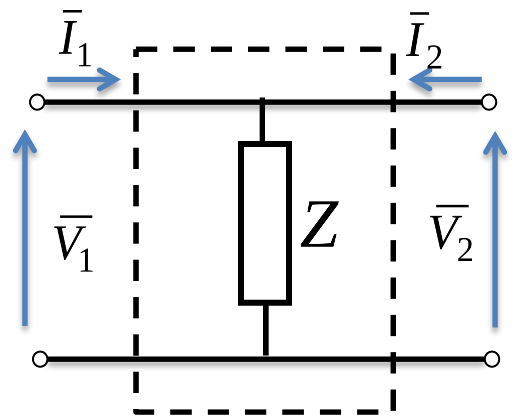
$$g_{11} = \frac{h_{22}}{\Delta h}; \quad g_{12} = -\frac{h_{12}}{\Delta h}; \quad g_{21} = -\frac{h_{21}}{\Delta h}; \quad g_{22} = \frac{h_{11}}{\Delta h}$$

con $\Delta h = 1$

$$g_{11} = 0; \quad g_{12} = -\frac{1}{1} = -1; \quad g_{21} = -\frac{-1}{1} = 1; \quad g_{22} = \frac{\dot{Z}}{1} = \dot{Z}$$

Esempio

Determinare le matrici [H] e [G], se esistono, del doppio bipolo in figura.



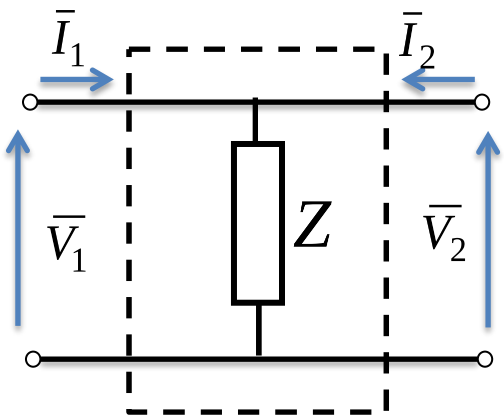
Abbiamo visto precedentemente che questo doppio bipolo è definito su base corrente $[I_1, I_2]$ mentre non è definito su base tensione

[Y] non esiste

$$\left[\dot{Z}\right]=\begin{bmatrix}\dot{Z} & \dot{Z}\\ \dot{Z} & \dot{Z}\end{bmatrix}$$

Esempio

Determinare le matrici [H] e [G], se esistono, del doppio bipolo in figura.



$$[\dot{Z}]=\begin{bmatrix} \dot{Z} & \dot{Z} \\ \dot{Z} & \dot{Z} \end{bmatrix}$$

Nota [Z], le matrici [H] e [G] possono essere determinate utilizzando le seguenti relazioni

$$h_{11}=\frac{\Delta z}{z_{22}}; \quad h_{12}=\frac{z_{12}}{z_{22}}; \quad h_{21}=-\frac{z_{21}}{z_{22}}; \quad h_{22}=\frac{1}{z_{22}}$$

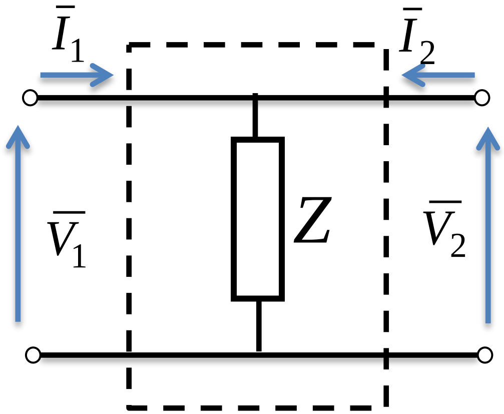
con $\Delta z = 1$

$$h_{11}=0; \quad h_{12}=1; \quad h_{21}=-1; \quad h_{22}=\frac{1}{\dot{Z}}$$

$$[H]=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \dfrac{1}{\dot{Z}} \end{bmatrix}$$

Esempio

Determinare le matrici [H] e [G], se esistono, del doppio bipolo in figura.



$$[\dot{Z}] = \begin{bmatrix} \dot{Z} & \dot{Z} \\ \dot{Z} & \dot{Z} \end{bmatrix}$$

Nota [Z], le matrici [H] e [G] possono essere determinate utilizzando le seguenti relazioni

$$g_{11} = \frac{1}{z_{11}}; \quad g_{12} = -\frac{z_{12}}{z_{11}}; \quad g_{21} = \frac{z_{21}}{z_{11}}; \quad g_{22} = \frac{\Delta z}{z_{11}}$$

con $\Delta z = 1$

$$g_{11} = \frac{1}{\dot{Z}}; \quad g_{12} = -1; \quad g_{21} = 1; \quad g_{22} = 0$$

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\dot{Z}} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrici di Trasmissione

Se il doppio bipolo è definito dalla conoscenza delle variabili a una sola porta si può caratterizzare con le matrici di trasmissione diretta **T** e inversa **T'**

1. Diretta $\longrightarrow$ $$\begin{bmatrix} \overline{V}_1 \\ \overline{I}_1 \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} \overline{V}_2 \\ -\overline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{V}_2 \\ -\overline{I}_2 \end{bmatrix}$$

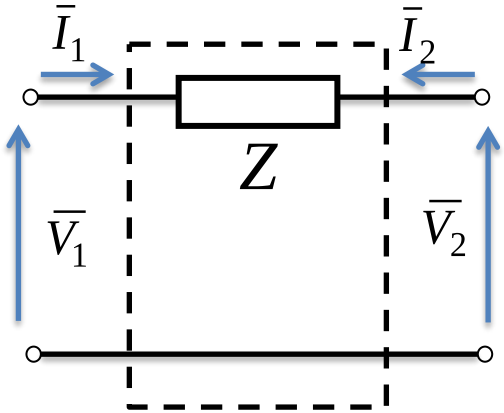
2. Inversa $\longrightarrow$ $$\begin{bmatrix} \overline{V}_2 \\ \overline{I}_2 \end{bmatrix} = [T'] \cdot \begin{bmatrix} \overline{V}_1 \\ -\overline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{V}_1 \\ -\overline{I}_1 \end{bmatrix}$$

Quando esistono le relative basi di definizione si possono ricavare gli elementi di una matrice a partire dalla conoscenza di quelli di un'altra

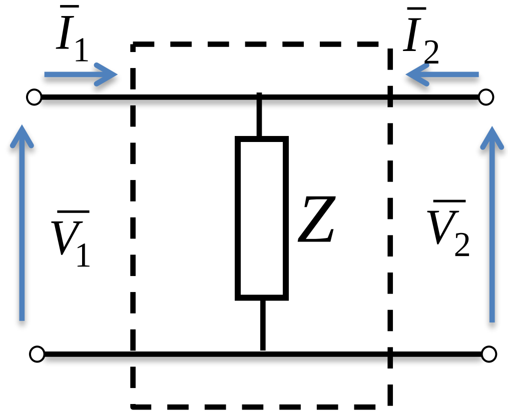
Esempio

Per i due doppi bipoli di figura determinare le matrici di trasmissione.

(a)



(b)



Per determinare le matrici di trasmissione:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = A\bar{V}_2 - B\bar{I}_2 \\ \bar{I}_1 = C\bar{V}_2 - D\bar{I}_2 \end{cases} \Rightarrow$$

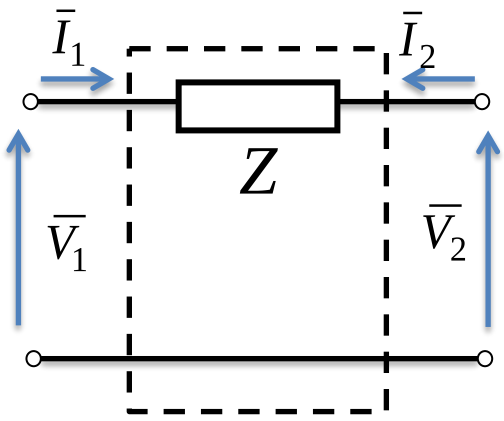
$$A = \left.\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{I}_2=0} \qquad B = -\left.\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_2}\right|_{\bar{V}_2=0}$$

$$C = \left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{I}_2=0} \qquad D = -\left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2}\right|_{\bar{V}_2=0}$$

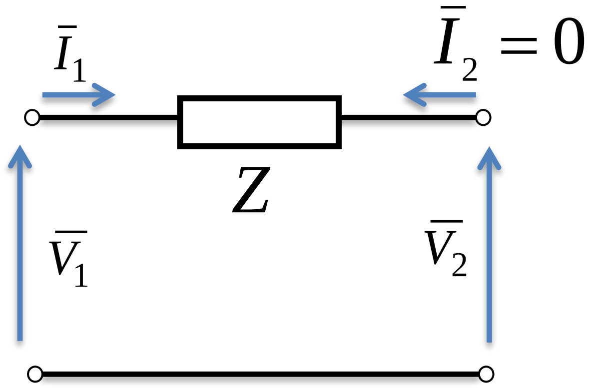
Esempio

Per i due doppi bipoli di figura determinare le matrici di trasmissione.

(a)



Per il doppio bipolo (a) considerando $\bar{I}_2=0$



$$\bar{I}_1 = -\bar{I}_2 = 0$$

$$\bar{V}_2 = \bar{V}_1$$

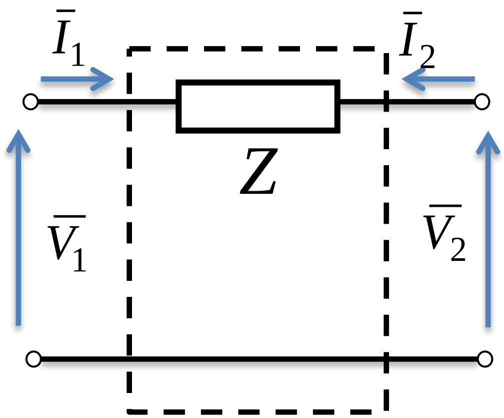
$$A = \left.\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{I}_2=0} = 1$$

$$C = \left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{I}_2=0} = 0$$

Esempio

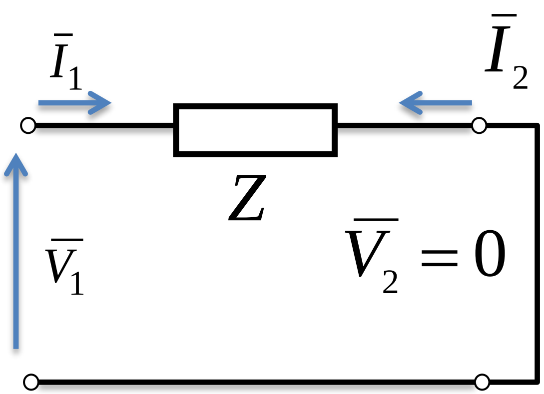
Per i due doppi bipoli di figura determinare le matrici di trasmissione.

(a)



$$[T_a] = \begin{bmatrix} 1 & \dot{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per il doppio bipolo (a) considerando $\overline{V}_2$=0



$$\bar{I}_1 = -\bar{I}_2$$

$$\bar{V}_1 = \dot{Z}\bar{I}_1$$

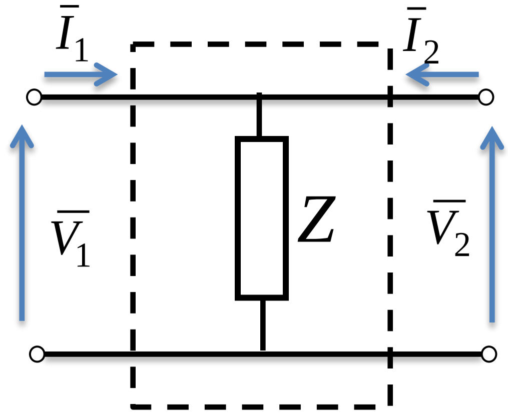
$$B = -\left.\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_2}\right|_{\bar{V}_2=0} = \dot{Z}$$

$$D = -\left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2}\right|_{\bar{V}_2=0} = 1$$

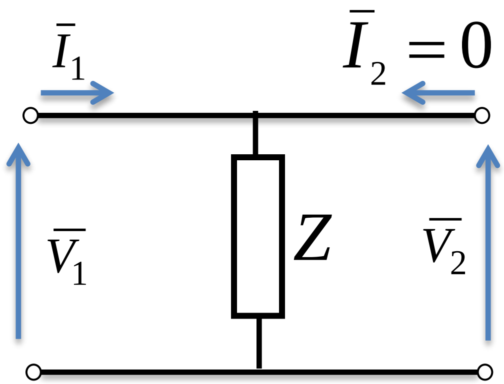
Esempio

Per i due doppi bipoli di figura determinare le matrici di trasmissione.

(b)



Per il doppio bipolo (b) considerando $\bar{I}_2$=0



$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1}{\dot{Z}}$$

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2$$

$$A = \left.\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{I}_2=0} = 1$$

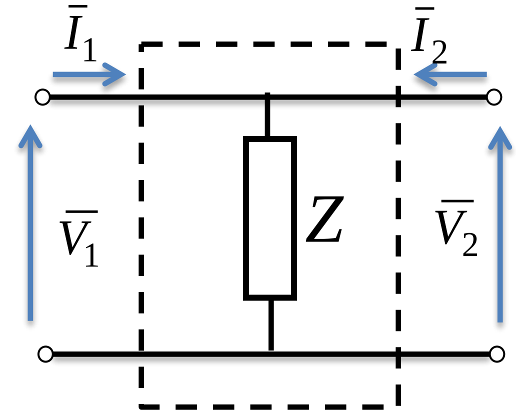
$$C = \left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{I}_2=0} = \frac{1}{\dot{Z}}$$

Esempio

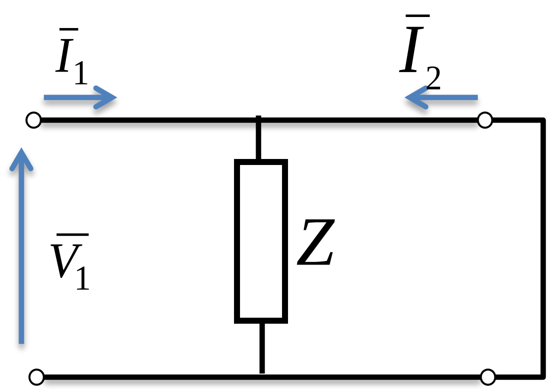
Per i due doppi bipoli di figura determinare le matrici di trasmissione.

$$[T_b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{\dot{Z}} & 1 \end{bmatrix}$$

(b)



Per il doppio bipolo (b) considerando $\bar{V}_2=0$



$$\bar{I}_1 = -\bar{I}_2$$

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2 = 0$$

$$B = -\left.\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_2}\right|_{\bar{V}_2=0} = 0$$

$$D = -\left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2}\right|_{\bar{V}_2=0} = 1$$

Esempio

La matrice [T_a] poteva essere determinata anche nota la matrice [Y], dalle relazioni:

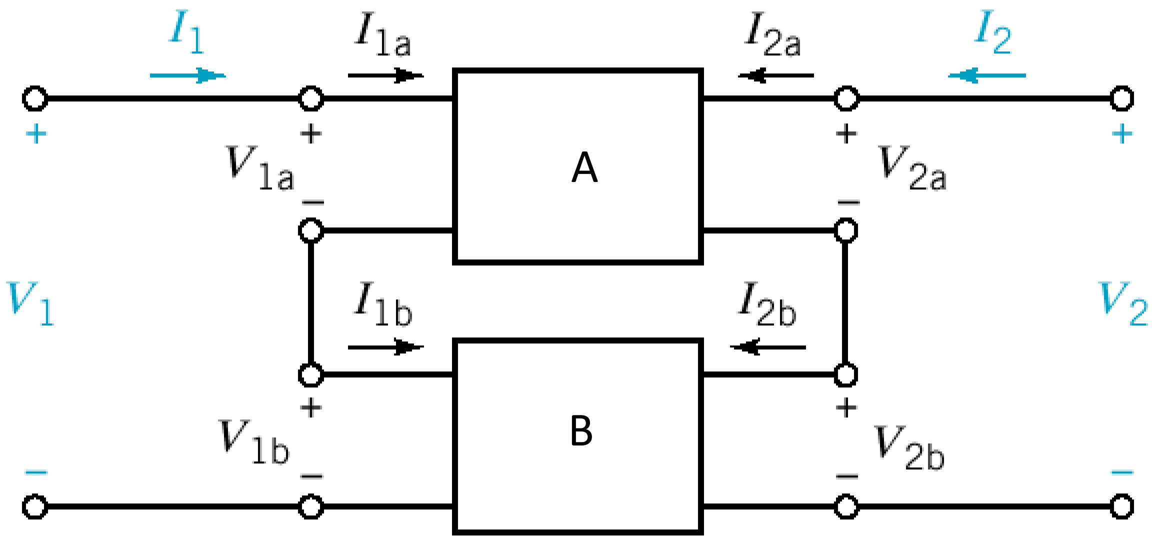
$$A = -\frac{y_{22}}{y_{21}} = 1; \quad B = -\frac{1}{y_{21}} = \dot{Z}; \quad C = -\frac{\Delta y}{y_{21}} = 0; \quad D = -\frac{y_{11}}{y_{21}} = 1$$

La matrice [T_b] poteva essere determinata anche nota la matrice [Z], dalle relazioni:

$$A = \frac{z_{11}}{z_{21}} = 1; \quad B = \frac{\Delta z}{z_{21}} = 0; \quad C = \frac{1}{z_{21}} = \frac{1}{\dot{Z}}; \quad D = \frac{z_{22}}{z_{21}} = 1$$

COLLEGAMENTO DI DOPPI BIPOLI

1. SERIE



Stessa corrente alle porte

$$\overline{V}_A = [Z_A] \cdot \overline{I}_A$$

$$\overline{V}_B = [Z_B] \cdot \overline{I}_B$$

$$\overline{V} = \overline{V}_A + \overline{V}_A$$

$$\overline{I}_A = \overline{I}_B = \overline{I}$$

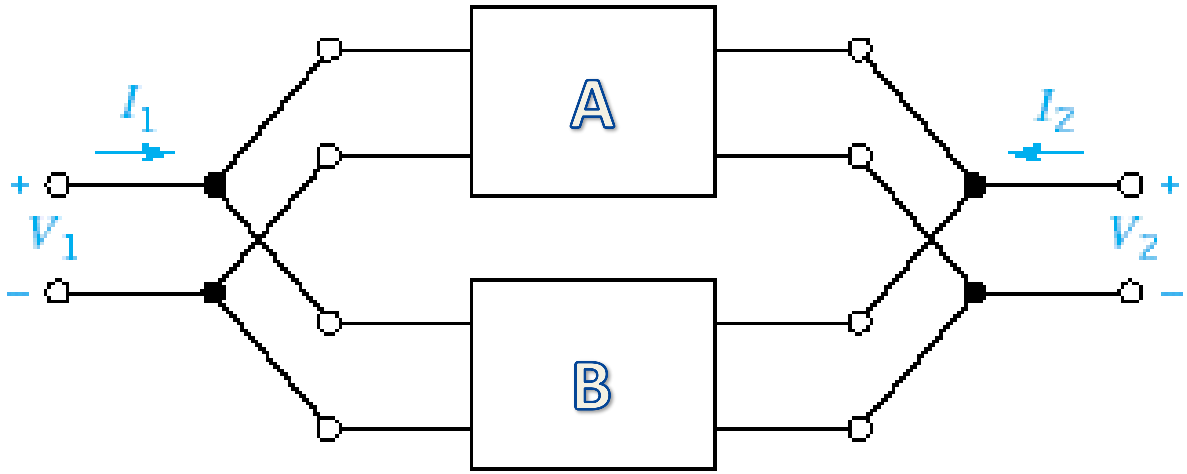
$$\overline{V} = [Z_A] \cdot \overline{I}_A + [Z_B] \cdot \overline{I}_B = ([Z_A] + [Z_B])\overline{I}$$

$$[Z] = [Z_A] + [Z_B]$$

SI SOMMANO I PARAMETRI Z DI CIASCUN DOPPIO BIPOLO

COLLEGAMENTO DI DOPPI BIPOLI

2. PARALLELO



Stessa tensione alle porte

$$\overline{I}_A = [Y_A] \cdot \overline{V}_A$$
$$\overline{I}_B = [Y_B] \cdot \overline{V}_B$$

$$\overline{I} = \overline{I}_A + \overline{I}_B$$
$$\overline{V}_A = \overline{V}_B = \overline{V}$$

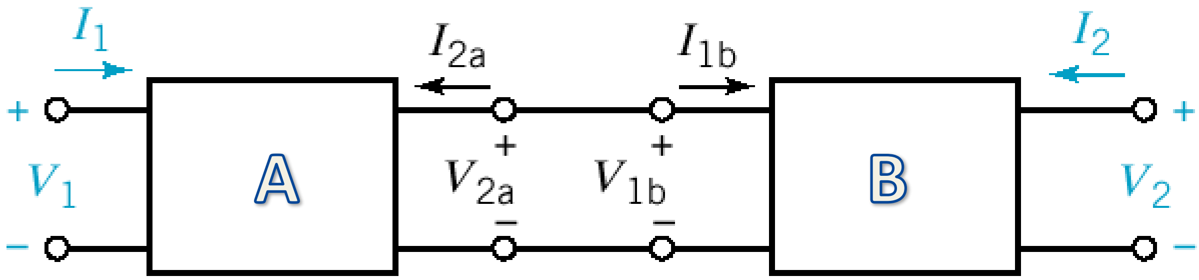
$$\overline{I} = [Y_A] \cdot \overline{V}_A + [Y_B] \cdot \overline{V}_B = ([Y_A] + [Y_B])\overline{V}$$

$$[Y] = [Y_A] + [Y_B]$$

SI SOMMANO I PARAMETRI Y DI CIASCUN DOPPIO BIPOLO

COLLEGAMENTO DI DOPPI BIPOLI

3. COLLEGAMENTO IN CASCATA



La porta di uscita di un doppio bipolo e' collegata con la porta di ingresso del successivo

$$\begin{bmatrix} \overline{V}_{1A} \\ \overline{I}_{1A} \end{bmatrix} = [T_A] \cdot \begin{bmatrix} \overline{V}_{2A} \\ -\overline{I}_{2A} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \overline{V}_{1B} \\ \overline{I}_{1B} \end{bmatrix} = [T_B] \cdot \begin{bmatrix} \overline{V}_{2B} \\ -\overline{I}_{2B} \end{bmatrix}$$

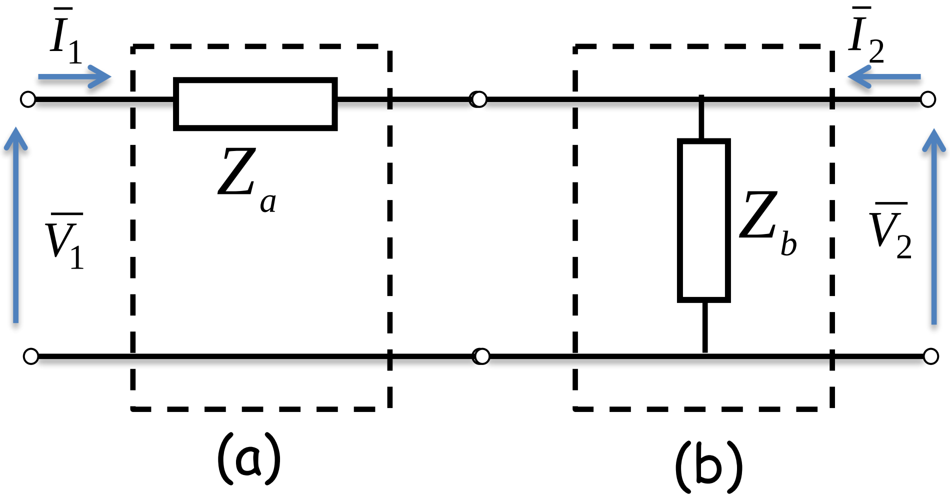
$$\begin{bmatrix} \overline{V}_{1} \\ \overline{I}_{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{V}_{1A} \\ \overline{I}_{1A} \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} \overline{V}_{2B} \\ -\overline{I}_{2B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{V}_{2} \\ -\overline{I}_{2} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[T] = [T_A] \cdot [T_B]}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{V}_{2A} \\ \overline{I}_{2A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{V}_{1B} \\ -\overline{I}_{1B} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \overline{V}_{1} \\ \overline{I}_{1} \end{bmatrix} = [T_A] \cdot [T_B] \cdot \begin{bmatrix} \overline{V}_{2} \\ -\overline{I}_{2} \end{bmatrix}$$

SI MOLTIPLICANO LE MATRICI DI TRASMISSIONE MANTENENDO L'ORDINE DELLA CASCATA

Esempio



Utilizzando le regole per il collegamento di doppi-bipoli, ricavare la matrice [**T**] del doppio-bipolo ad **L** in figura.

I doppi-bipoli (a) e (b) sono collegati a cascata.

La matrice di trasmissione si ottiene quindi moltiplicando le due matrici di trasmissione.

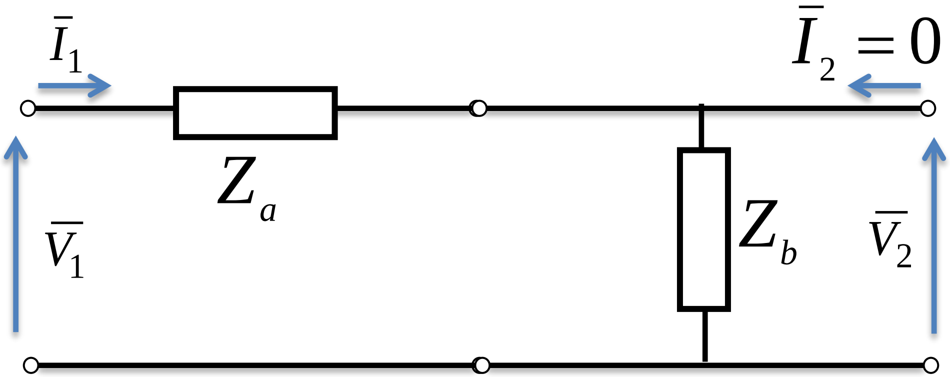
$$[T_a]=\begin{bmatrix} 1 & \dot{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [T_b]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{\dot{Z}} & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T]=[T_a]\cdot[T_b]=\begin{bmatrix} 1 & \dot{Z}_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{\dot{Z}_b} & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+\dfrac{\dot{Z}_a}{\dot{Z}_b} & \dot{Z}_a \\ \dfrac{1}{\dot{Z}_b} & 1 \end{bmatrix}$$

Verifichiamolo…

Quando $\overline{I}_2$=0

$$\begin{cases} \overline{V}_1 = A\overline{V}_2 - B\overline{I}_2 \\ \overline{I}_1 = C\overline{V}_2 - D\overline{I}_2 \end{cases}$$



$$\overline{V}_2 = \overline{V}_1 \frac{\dot{Z}_b}{\dot{Z}_a + \dot{Z}_b} \Rightarrow \overline{V}_1 = \overline{V}_2 \frac{\dot{Z}_a + \dot{Z}_b}{\dot{Z}_b}$$

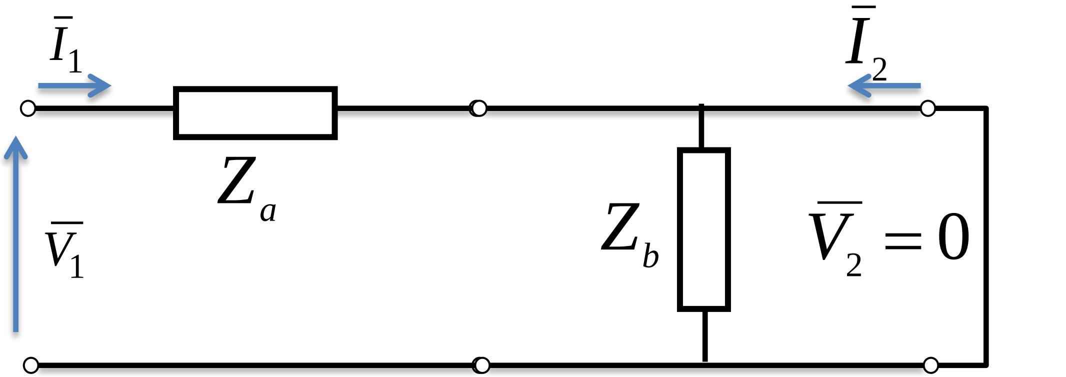
$$\overline{V}_1 = \left(\dot{Z}_a + \dot{Z}_b\right) \cdot \overline{I}_1 \Rightarrow \overline{I}_1 = \overline{V}_1 \frac{1}{\dot{Z}_a + \dot{Z}_b} = \overline{V}_2 \frac{\dot{Z}_a + \dot{Z}_b}{\dot{Z}_b} \frac{1}{\dot{Z}_a + \dot{Z}_b} = \overline{V}_2 \frac{1}{\dot{Z}_b}$$

$$A = \left.\frac{\overline{V}_1}{\overline{V}_2}\right|_{\overline{I}_2 = 0} = \frac{\dot{Z}_a + \dot{Z}_b}{\dot{Z}_b} = 1 + \frac{\dot{Z}_a}{\dot{Z}_b} \qquad C = \left.\frac{\overline{I}_1}{\overline{V}_2}\right|_{\overline{I}_2 = 0} = \frac{1}{\dot{Z}_b}$$

Verifichiamolo…

Quando $\overline{V}_2=0$

$$\begin{cases}\overline{V}_1 = A\overline{V}_2 - B\overline{I}_2 \\ \overline{I}_1 = C\overline{V}_2 - D\overline{I}_2\end{cases}$$

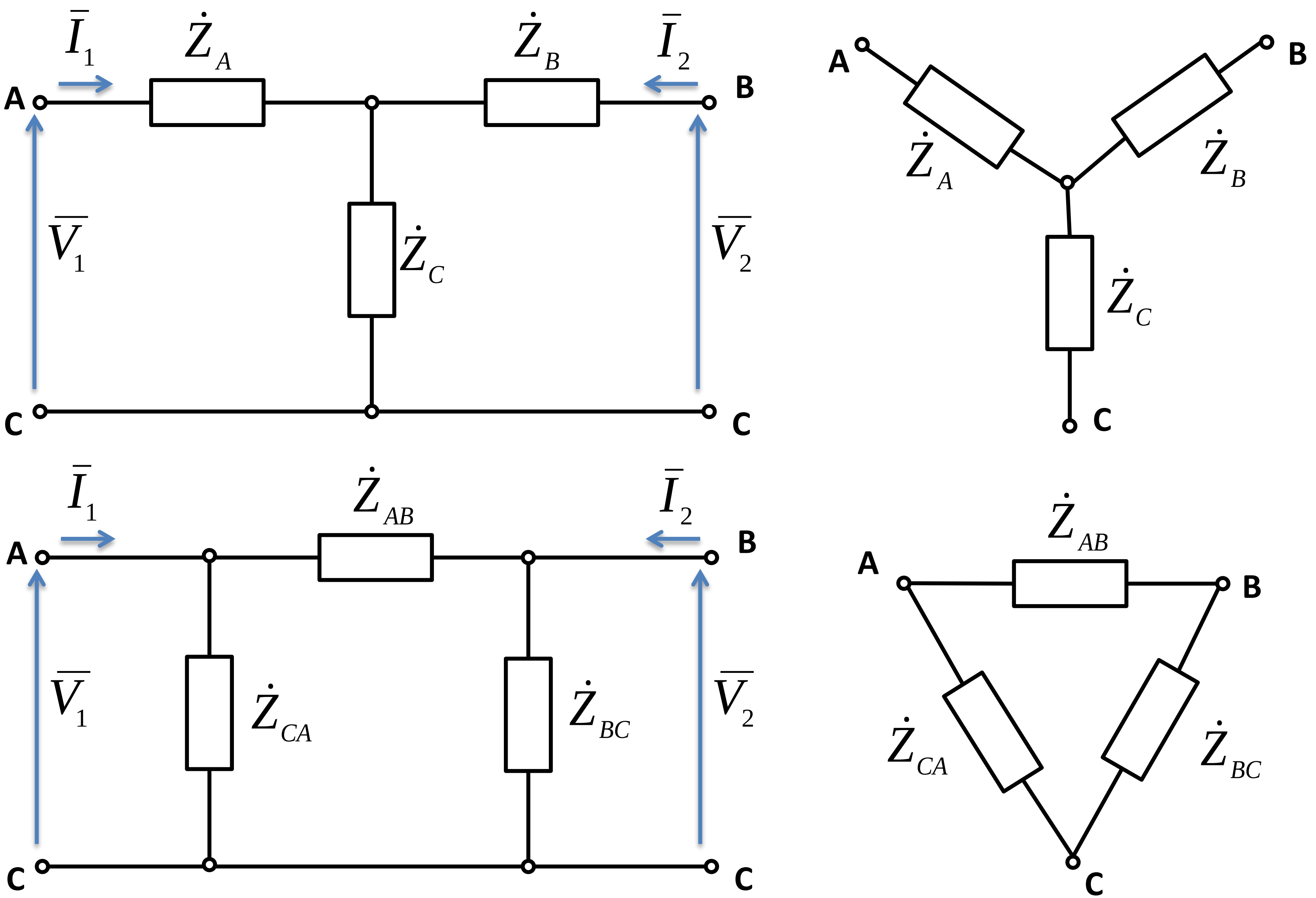


$$\overline{I}_1 = -\overline{I}_2$$

$$\overline{V}_1 = \dot{Z}_a \cdot \overline{I}_1 \Rightarrow \overline{V}_1 = -\dot{Z}_a \cdot \overline{I}_2$$

$$B = -\left.\frac{\overline{V}_1}{\overline{I}_2}\right|_{\overline{V}_2=0} = \dot{Z}_a \qquad D = -\left.\frac{\overline{I}_1}{\overline{I}_2}\right|_{\overline{V}_2=0} = 1$$

Trasformazione T-Π (o Stella - Triangolo)



Equivalenza di doppi bipoli

Due doppi bipoli sono equivalenti quando hanno gli stessi valori degli elementi delle rispettive matrici che li definiscono

$$\dot{Z}_{\Delta} = \dot{Z}_{AB} + \dot{Z}_{BC} + \dot{Z}_{CA}$$

$$\left[\dot{Z}\right]_{\Delta} = \left[\dot{Y}\right]_{\Delta}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\dot{Z}_{AB}\dot{Z}_{CA}}{\dot{Z}_{\Delta}} + \dfrac{\dot{Z}_{BC}\dot{Z}_{CA}}{\dot{Z}_{\Delta}} & \dfrac{\dot{Z}_{BC}\dot{Z}_{CA}}{\dot{Z}_{\Delta}} \\ \dfrac{\dot{Z}_{BC}\dot{Z}_{CA}}{\dot{Z}_{\Delta}} & \dfrac{\dot{Z}_{AB}\dot{Z}_{BC}}{\dot{Z}_{\Delta}} + \dfrac{\dot{Z}_{BC}\dot{Z}_{CA}}{\dot{Z}_{\Delta}} \end{bmatrix}$$

$$\left[\dot{Z}\right]_{T} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{A} + \dot{Z}_{C} & \dot{Z}_{C} \\ \dot{Z}_{C} & \dot{Z}_{B} + \dot{Z}_{C} \end{bmatrix}$$

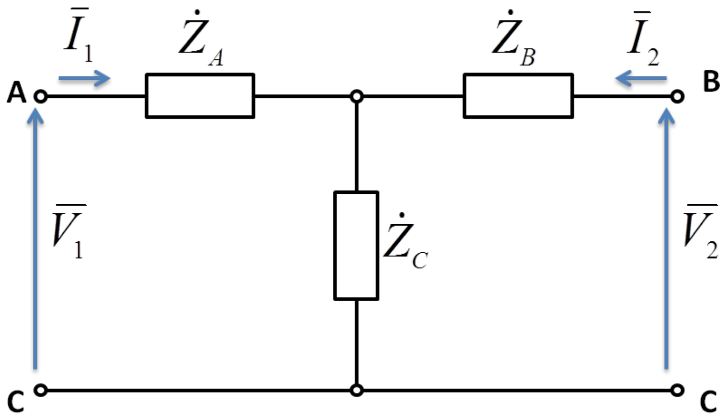
Equivalenza di doppi bipoli

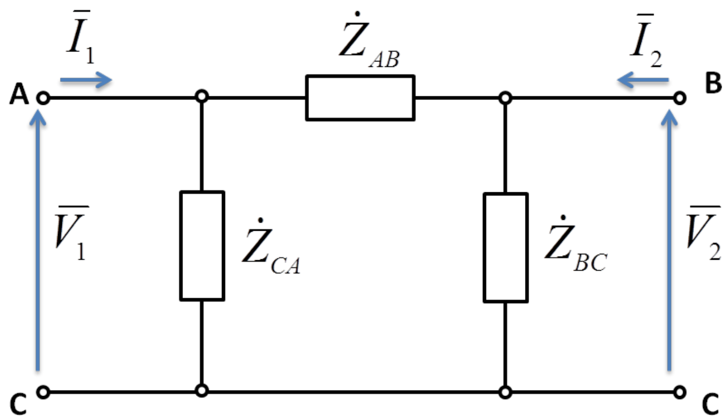
Due doppi bipoli sono equivalenti quando hanno gli stessi valori degli elementi delle rispettive matrici che li definiscono

$$\dot{Y}_T = \dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C$$

$$\left[\dot{Y}\right]_T == \begin{bmatrix} \dfrac{\dot{Y}_A \dot{Y}_B}{\dot{Y}_T} + \dfrac{\dot{Y}_C \dot{Y}_A}{\dot{Y}_T} & -\dfrac{\dot{Y}_A \dot{Y}_B}{\dot{Y}_T} \\ -\dfrac{\dot{Y}_A \dot{Y}_B}{\dot{Y}_T} & \dfrac{\dot{Y}_A \dot{Y}_B}{\dot{Y}_T} + \dfrac{\dot{Y}_B \dot{Y}_C}{\dot{Y}_T} \end{bmatrix}$$

$$\left[\dot{Y}\right]_\Delta = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{AB} + \dot{Y}_{CA} & -\dot{Y}_{AB} \\ -\dot{Y}_{AB} & \dot{Y}_{BC} + \dot{Y}_{AB} \end{bmatrix}$$





Triangolo → Stella

$$\dot{Z}_A = \frac{\dot{Z}_{AB}\,\dot{Z}_{CA}}{\dot{Z}_\Delta}$$

$$\dot{Z}_B = \frac{\dot{Z}_{BC}\,\dot{Z}_{AB}}{\dot{Z}_\Delta}$$

$$\dot{Z}_C = \frac{\dot{Z}_{CA}\,\dot{Z}_{BC}}{\dot{Z}_\Delta}$$

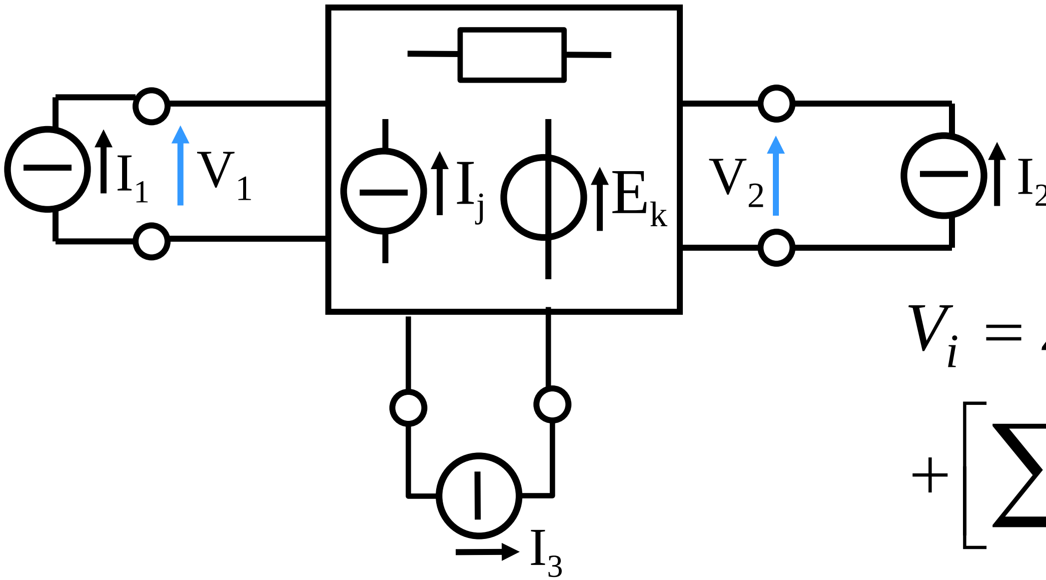
Stella → Triangolo

$$\dot{Y}_{AB} = \frac{\dot{Y}_A\,\dot{Y}_B}{\dot{Y}_T} \qquad \dot{Y}_{BC} = \frac{\dot{Y}_B\,\dot{Y}_C}{\dot{Y}_T} \qquad \dot{Y}_{CA} = \frac{\dot{Y}_C\,\dot{Y}_A}{\dot{Y}_T}$$

TEOREMI DI THEVENIN E DI NORTON

Si ritrovano i teoremi di Thevenin e di Norton in forma matriciale

Hp: componente definito su base corrente



Per il principio di sovrapposizione degli effetti:

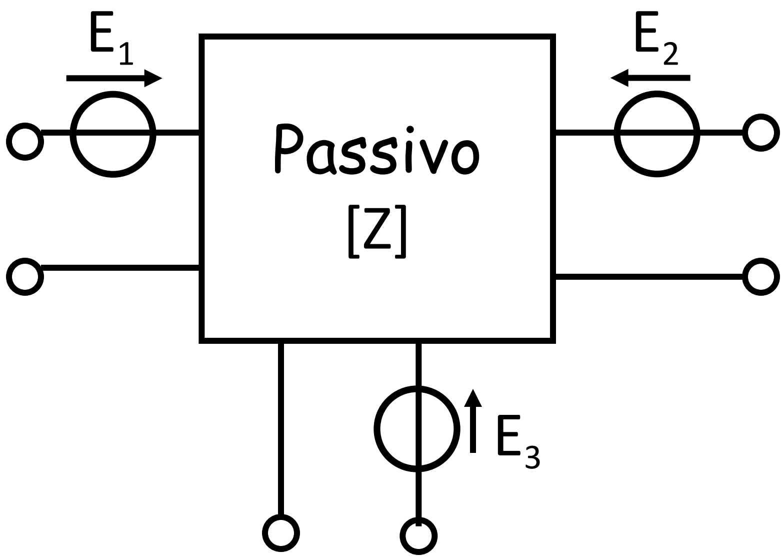
$$V_i = Z_{i1} I_1 + Z_{i2} I_2 + \cdots + Z_{iM} I_M + \left[\sum_k \alpha_{ik} E_k + \sum_j Z_{ij} A_j \right]$$

Chiamando E_i la quantità tra parentesi e generalizzando:

$$\underline{\bar{V}} = \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \cdot \\ \bar{V}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & \cdot\cdot & Z_{1M} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ Z_{M1} & \cdot\cdot & Z_{MM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \cdot \\ \bar{I}_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \cdot \\ \bar{E}_M \end{bmatrix} \qquad \underline{\bar{V}} = [\dot{Z}]\underline{\bar{I}} + \underline{\bar{E}}$$

Teorema di Thevenin generalizzato:

$$\underline{\overline{V}} = [Z] \cdot \underline{\overline{I}} + \underline{\overline{E}}$$

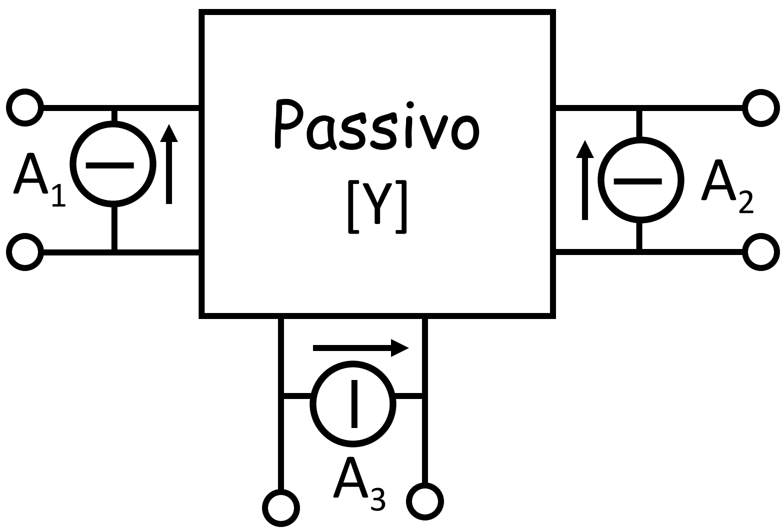


E_i: tensione alla porta i-sima quando le porte sono lasciate aperte

[Z]: matrice di impedenza che caratterizza lo M-porte passivato

Teorema di Norton generalizzato:

$$\underline{\overline{I}} = [Y] \cdot \underline{\overline{V}} + \underline{\overline{A}}$$



Ai: corrente di corto circuito sulla porta i-sima

[Y]: matrice di ammettenza che caratterizza lo M-porte passivato

$$[Z]_{Thevenin} = [Y]^{-1}_{Norton}$$