DETERMINAZIONE DELLA CURVA σ–ε TRAMITE PROVA DI FLESSIONE

La curva σ–ε di un materiale può essere determinata, oltre che mediante una prova classica di trazione, anche mediante una prova di flessione. La prova consiste nel sottoporre un provino prismatico ed a sezione rettangolare ad una prova di flessione a 4 punti, secondo lo schema statico riportato in fig. 1

Le ipotesi alla base della prova sono le seguenti:

1. Il materiale ha comportamento simmetrico a trazione e compressione (la curva σ–ε a trazione si può cioè considerare uguale a quella a compressione
2. le sezioni trasversali rimangono piane dopo la deformazione (anche superato lo snervamento)

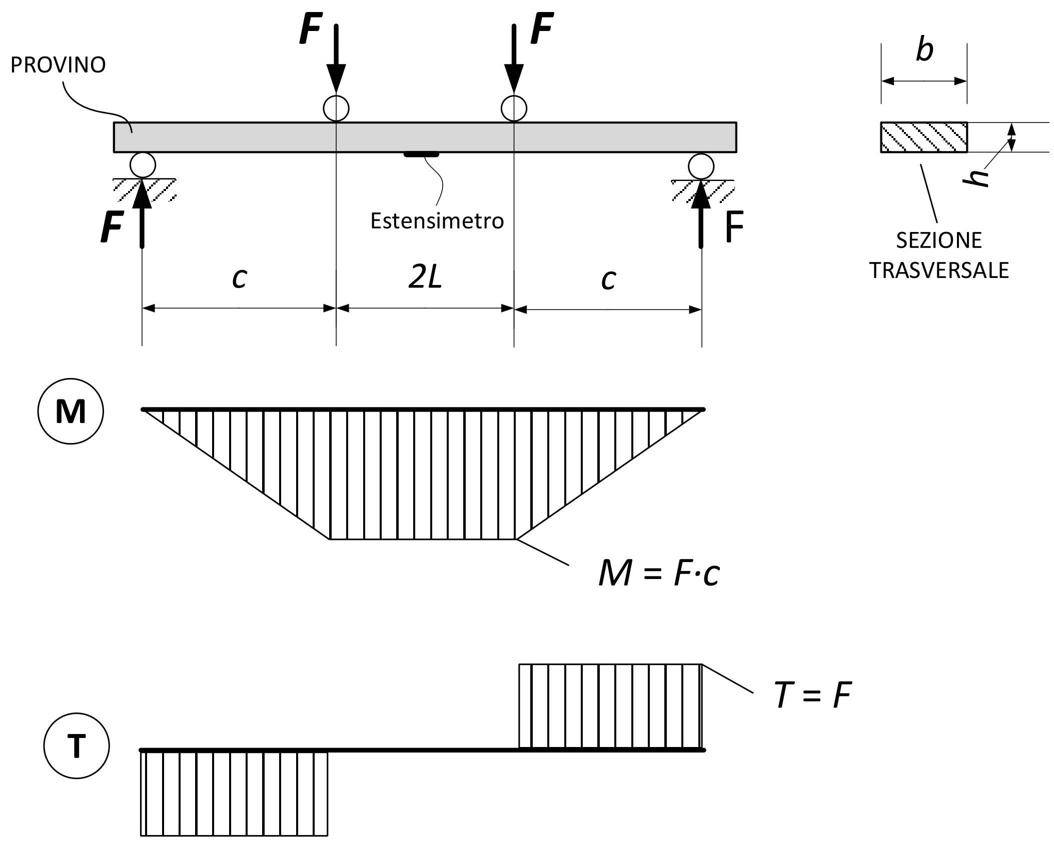

Fig. 1: Schema statico di una prova di flessione a 4 punti

Durante la prova vengono misurati la forza F (mediante la cella di carico della macchina di prova che misura la forza complessiva 2F) e la deformazione (generalmente mediante un estensimetro incollato nel tratto centrale). Nel tratto centrale il momento M è costante e pari a $M = F \cdot c$ (e quindi anche la deformazione è costante) ed il taglio T è nullo.

Note la forza $2F$ e la deformazione $\bar{\varepsilon}$ misurate durante la prova dalla cella di carico e dall'estensimetro, è immediato tracciare il diagramma M- $\bar{\varepsilon}$ (fig. 2).

Fig. 2: Curva *M*- $\bar{\varepsilon}$ ricavata dalla prova di flessione

Possiamo ora considerare un elemento di trave di lunghezza infinitesima *dz*, il quale, in seguito all'applicazione del momento *M*, si deforma come schematizzato in fig. 3

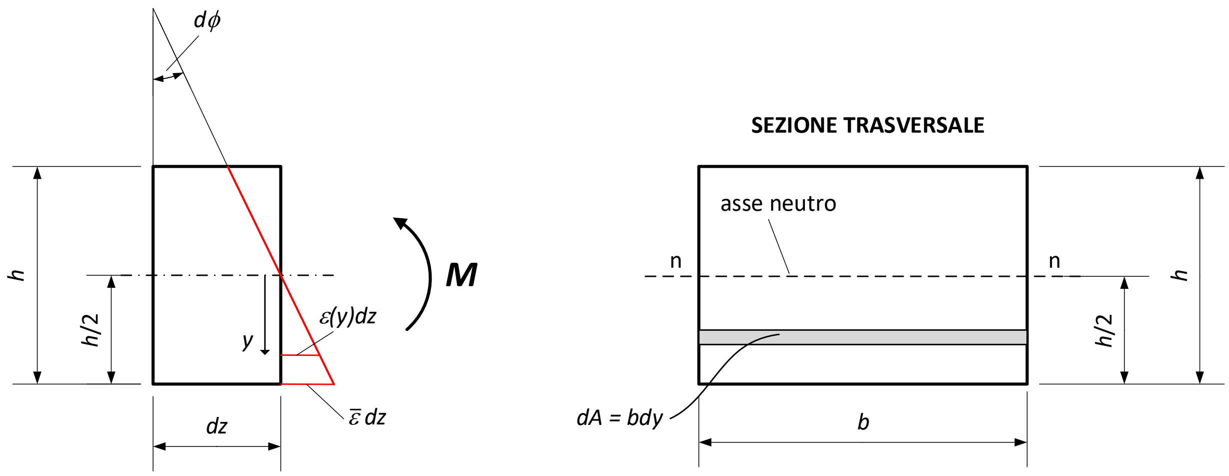

Fig. 3: Deformazione di un elemento di trave di lunghezza infinitesima *dz*

L'asse neutro sarà situato ad altezza *h*/2 anche quando il materiale lavora oltre il campo elastico, in conseguenza del comportamento simmetrico del materiale a trazione e compressione.

Imponendo l'equilibrio alla rotazione rispetto all'asse neutro, possiamo scrivere

$$M = \int_A \sigma(y) \cdot y \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma(y) \cdot y \cdot bdy \tag{1}$$

Per la simmetria della sezione e del comportamento del materiale, è possibile calcolare l'integrale su una sola metà della sezione:

$$M = 2b \int_0^{h/2} \sigma(y) \cdot y \cdot dy \tag{2}$$

Per l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, dallo schema di fig. 3 si possono immediatamente scrivere le seguenti relazioni:

$$\frac{\varepsilon(y)dz}{y} = \frac{\bar{\varepsilon}dz}{h/2} \tag{3}$$

da cui

$$y = \frac{h\varepsilon}{2\bar{\varepsilon}} \tag{4}$$

Differenziando l'equazione (4), otteniamo:

$$dy = \frac{h}{2}\frac{d\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} \tag{5}$$

Effettuiamo ora un cambiamento della variabile d'integrazione nell'integrale (2) da y a $\bar{\varepsilon}$, utilizzando le relazioni (4) e (5) appena ricavate:

$$M = 2b\int_0^{h/2} \sigma(y)\cdot y\cdot dy = 2b\int_0^{\bar{\varepsilon}} \sigma(\varepsilon)\cdot\frac{h\varepsilon}{2\bar{\varepsilon}}\cdot\frac{h}{2}\frac{d\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} = \frac{bh^2}{2\bar{\varepsilon}^2}\int_0^{\bar{\varepsilon}} \sigma(\varepsilon)\cdot\varepsilon\cdot d\varepsilon \tag{6}$$

Possiamo quindi scrivere la precedente relazione nella forma seguente

$$M(\bar{\varepsilon})\cdot\bar{\varepsilon}^2 = \frac{bh^2}{2}\int_0^{\bar{\varepsilon}} \sigma(\varepsilon)\cdot\varepsilon\cdot d\varepsilon \tag{7}$$

ed effettuare la derivata rispetto ad $\bar{\varepsilon}$ del membro di sinistra

$$\frac{d(M(\bar{\varepsilon})\cdot\bar{\varepsilon}^2)}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{dM(\bar{\varepsilon})}{d\bar{\varepsilon}} + M(\bar{\varepsilon})\cdot 2\bar{\varepsilon}$$

e di quello di destra

$$\frac{d}{d\bar{\varepsilon}}\left(\frac{bh^2}{2}\int_0^{\bar{\varepsilon}} \sigma(\varepsilon)\cdot\varepsilon\cdot d\varepsilon\right) = \frac{bh^2}{2}\cdot\frac{d}{d\bar{\varepsilon}}\left(\int_0^{\bar{\varepsilon}} \sigma(\varepsilon)\cdot\varepsilon\cdot d\varepsilon\right) = \frac{bh^2}{2}\cdot\sigma(\bar{\varepsilon})\cdot\bar{\varepsilon}$$

Uguagliando le derivate dei due membri si ottiene

$$\frac{dM(\bar{\varepsilon})}{d\bar{\varepsilon}} + M(\bar{\varepsilon})\cdot 2\bar{\varepsilon} = \frac{bh^2}{2}\cdot\sigma(\bar{\varepsilon})\cdot\bar{\varepsilon}$$

da cui, mettendo in evidenza $\sigma(\bar{\varepsilon})$,

$$\sigma(\bar{\varepsilon}) = \frac{2}{bh^2}\left(\frac{dM(\bar{\varepsilon})}{d\bar{\varepsilon}}\cdot\bar{\varepsilon} + 2M(\bar{\varepsilon})\right) \tag{8}$$

La curva $\sigma - \bar{\varepsilon}$ può dunque essere determinata a partire dalla conoscenza della curva $M - \bar{\varepsilon}$ ottenuta sperimentalmente. Si noti che $\bar{\varepsilon}$ è la deformazione sulla superficie esterna del provino, direttamente misurabile mediante un estensimetro incollato sulla superficie.

Come rappresentato in fig. 4, il termine $\frac{dM(\bar{\varepsilon})}{d\bar{\varepsilon}}$ rappresenta la pendenza della curva $M-\bar{\varepsilon}$ in corrispondenza del valore di deformazione $\bar{\varepsilon}_i$ considerato.

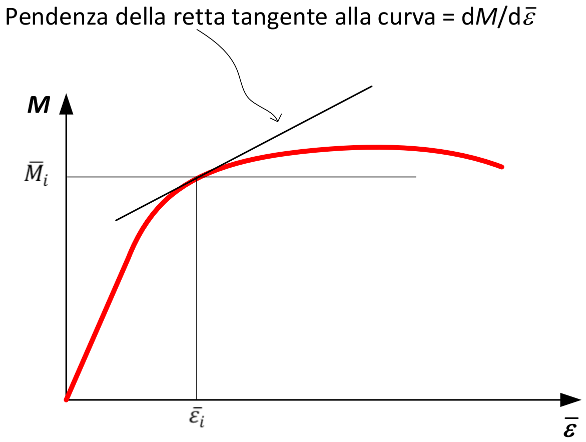

Fig. 4: Curva $M-\bar{\varepsilon}$ e rappresentazione grafica del termine $\frac{dM(\bar{\varepsilon})}{d\bar{\varepsilon}}$

Una possibilità alternativa alla misura diretta della deformazione nel tratto centrale mediante un estensimetro è quella di misurare il raggio di curvatura ρ del provino nel tratto centrale. Poiché in questo tratto il valore del momento M è costante, è costante anche il valore del raggio di curvatura ρ.

Il raggio di curvatura si può ricavare con semplici considerazioni geometriche se sono note le deflessioni δ_1 e δ_2 del provino indicate in figura 5.

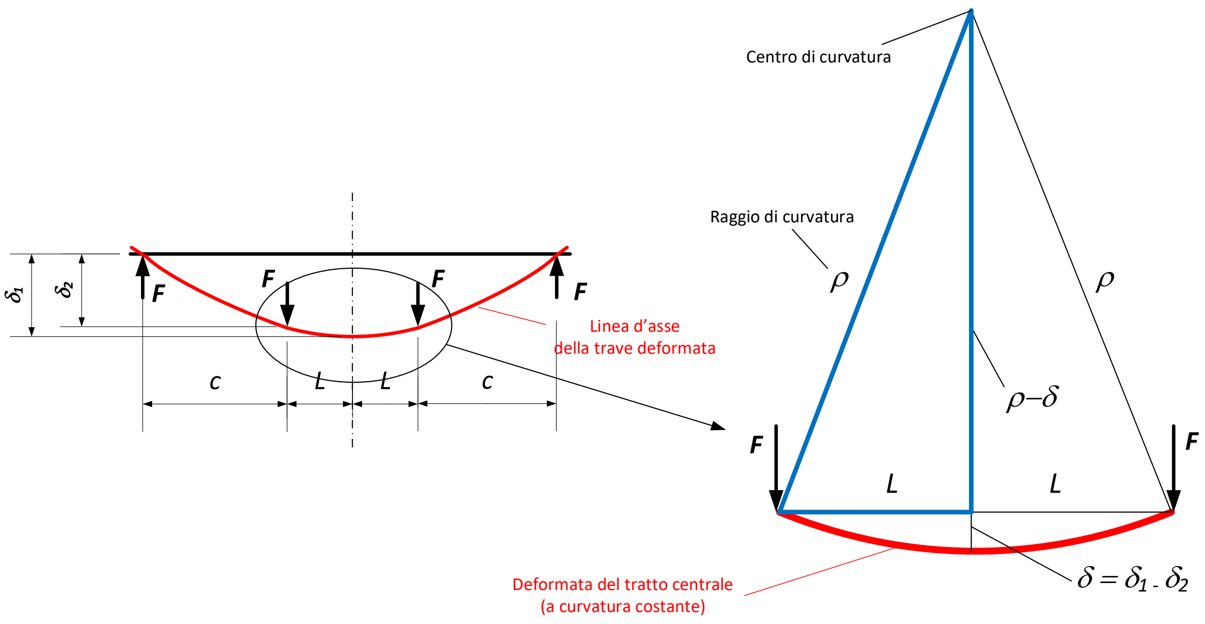

Fig. 5: Deformata della linea d'asse del provino sottoposto a flessione su 4 punti

Considerando il triangolo rettangolo con lati ρ, L e $\rho-\delta$, si può infatti scrivere

$$L^2 + (\rho-\delta)^2 = \rho^2$$

da cui

$$L^2 + \rho^2 + \delta^2 - 2\rho\delta = \rho^2$$

e quindi

$$\rho = \frac{L^2 + \delta^2}{2\delta} \tag{9}$$

Nota la lunghezza L ed il valore di $\delta = \delta_1 - \delta_2$, possiamo dunque ricavare il raggio di curvatura ρ nel tratto centrale della trave.

Per la similitudine dei triangoli evidenziati in fig. 6, vale inoltre la relazione

$$\frac{\bar{\varepsilon} \cdot dz}{\frac{h}{2}} = \frac{dz}{\rho}$$

da cui

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{\rho}$$

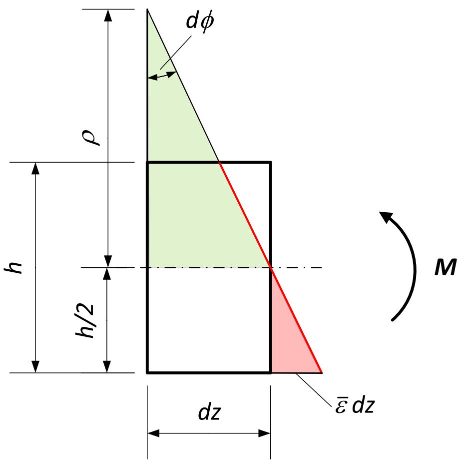

Fig 6: Deformazione flessionale in un elemento infinitesimo di trave di lunghezza dz

La deformazione nelle fibre inferiori del provino è quindi esprimibile come

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{h}{2} \cdot \frac{2\delta}{L^2 + \delta^2}$$