8. LA FUNZIONE DELTA DI DIRAC

Consideriamo il Teorema di Gauss e l'equazione di poisson in E.M.

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 4\pi\rho \qquad \int_D dV\, \bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \int_S \bar{E}\cdot\bar{n}\, ds$$

$$\bar{E} = -\bar{\nabla}\varphi \qquad \nabla^2\varphi = -4\pi\rho$$

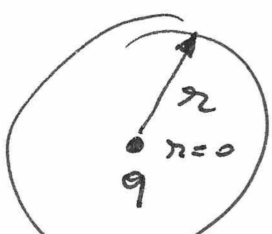
Quanto vale ρ per una distribuz. di carica puntif.?

$\Rightarrow$ DISTRIBUZIONE DI CARICA A SIMMETRIA SFERICA $\quad \rho \Rightarrow \rho(r) \quad r = |\bar{r}|$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial}{\partial r}\varphi\right] = -4\pi\rho$$

$\Rightarrow$ SORGENTE PUNTIFORME: $\quad \rho(r) = ?$



$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & r \neq 0 \\ ? & r = 0 \end{cases} \qquad \rho = \frac{dq}{dV}$$

$r \neq 0 \qquad \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dr}\right) = 0$

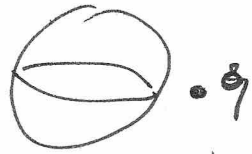
$$r^2 \frac{d\varphi}{dr} = \text{cost} = -q \qquad \frac{dq}{dr} = 0$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{q}{r^2} \qquad \varphi = -\int \frac{q}{r^2} = \frac{q}{r}$$

NB

$\boxed{r=0}$ sostituiamo nel teorema di Gauss $\quad E = -\bar{\nabla}\varphi = +\frac{\bar{n}\, q}{r^2}$

$$\int_D \bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \int_D \bar{\nabla}^2\varphi = \int_S E\cdot\bar{n}\, ds$$



$$\int_S \bar{E}\cdot\bar{n}\, ds = \begin{cases} 0 & \text{se } S \text{ NON CONTIENE SORGENTI} \\ \int_S \frac{\bar{n}\cdot\bar{n}\, q}{r^2} = \frac{q}{r^2}\int ds = \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = q\, 4\pi & \text{se } S \text{ CONTIENE SORGENTI} \end{cases}$$

$$\int_D \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \begin{cases} -4\pi & \text{se } r=0 \in D \\ 0 & \text{se } r=0 \notin D \end{cases}$$

• DALLA (8.1) (8.2) SEGUE LA PROPRIETÀ FONDAMENTALE

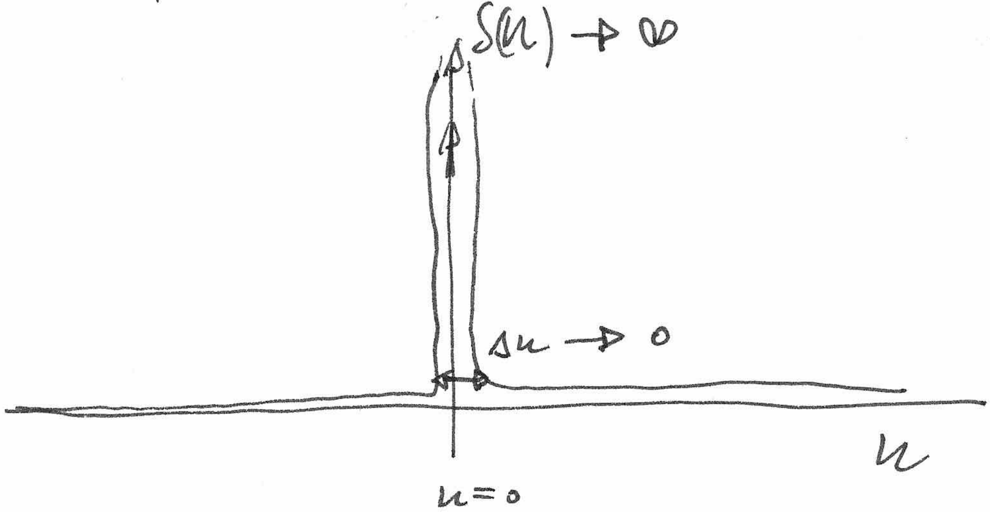
$$\int_a^b \delta(r)\,dr = \begin{cases} 1 & \text{SE } \quad r=0 \in [a,b] \\ 0 & \text{SE } \quad r=0 \notin [a,b) \end{cases}$$

$$\int_a^b c(r)\,dr = \int q\,\delta(r)\,dr = q$$

• INTUITIVAMENTE: POSSIAMO DIRE CHE $\delta(u)$ È UNA "FUNZIONE" PARTICOLARE CHE È (1) NULLA DAPPERTUTTO TRANNE CHE IN $u=0$

$$\boxed{\delta(u) = 0 \qquad u \neq 0}$$

(2) HA UN SUPPORTO INFINITO MA SU UN INTORNO DI LARGHEZZA INFINITESIMA DI $u=0$



QUINDI

$$\iiint_0 \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi \qquad (8.1)$$

POSSIAMO INTRODURRE LA FUNZIONE

$\boxed{\text{DELTA DI DIRAC}}$ $\delta(r)$ E SCRIVERE

$$\boxed{\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta(r)} \qquad (8.2)$$

- $\delta(r)$ NON È UNA $\boxed{\text{FUNZIONE}}$

MA UNA $\boxed{\text{DISTRIBUZIONE}}$

$\Downarrow$

SEQUENZA DI FUNZIONI

FISICAMENTE: $\delta(r)$ INDICA DI UNA SORGENTE FISICA (CARICA, MASSA) $\boxed{\text{PUNTIFORME}}$ DI UN CAMPO NEL PUNTO

$r = 0$

CONFRONTANDO CON

$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho$

$\rho(r) = q\,\delta(r)$

QUINDI

$$\int_D \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \begin{cases} -4\pi \\ 0 \end{cases} \qquad (8.1)$$

POSSIAMO INTRODURRE LA FUNZIONE $\boxed{\text{DELTA DI DIRAC}}$ $\delta(r)$ E SCRIVERE

$$\boxed{\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta(r)} \qquad (8.2)$$

- $\delta(r)$ NON È UNA $\boxed{\text{FUNZIONE}}$ MA UNA $\boxed{\text{DISTRIBUZIONE}}$

$\Downarrow$

SEQUENZA DI FUNZIONI

FISICAMENTE: $\delta(r)$ INDICA DI UNA SORGENTE FISICA (CARICA, MASSA) $\boxed{\text{PUNTIFORME}}$ DI UN CAMPO NEL PUNTO

$r = 0$

CONFRONTANDO CON

$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho$

$\rho(r) = q\,\delta(r)$

$$\begin{cases} \delta(x) \to \infty & \text{PER } x \to 0 \\ \Delta x \to 0 \end{cases}$$

QUINDI

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1}$$

- PIÙ IN GENERALE

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, f(x)\, dx = f(0)}$$

- CAMBIANDO VARIABILE $x \to x - x_0$

POSSIAMO SCRIVERE PIÙ IN GENERALE

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\, f(x) = f(x_0)}$$

$$\sum_m \delta_{m m_0} f_m = f_{m_0} \qquad \delta_{m m_0} \begin{cases} 0 & m \neq m_0 \\ 1 & m = m_0 \end{cases}$$

GENERALIZZAZIONE AL CASO CONTINUO DELLA DELTA DI KRONECKER

$ax = y \qquad a > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(ax)\,dx = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)\, f\!\left(\frac{y}{a}\right) dy = \frac{1}{a} f(0)$$

$$\Rightarrow \quad \delta(ax) = \frac{1}{a}\,\delta(x)$$

$a < 0 \qquad -ax = y$

$$y(x) = (x - x_1)\, f'(x_1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta[y(x)]\, f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta[f'(x_1)(x - x_1)]\, f(x)$$

$$= \frac{1}{|f'|_{x_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_1)\, f(x)\,dx$$

- DA NOTARE TUTTE LE EGUAGLIANZE CHE COINVOLGONO LA $\delta(x-x_0)$ HANNO IL SENSO USUALE DELL'ANALISI SOLO $\boxed{\text{SOTTO}}$ IL $\boxed{\text{SEGNO DI INTEGRALE}}$. ALTRIMENTI VANNO PENSATE COME RELAZIONI TRA DISTRIBUZIONI

- ~~POSSIAMO FACILMENTE GENERALIZZARE IL CONCETTO A DIMENSIONI SUPERIORI~~

$$\cancel{\int_V \delta(\bar{r}-\bar{r}_0)\, f(\bar{r})\, d\bar{r} = f(\bar{r}_0)}$$

- ALCUNE PROPRIETÀ FORMALI DELLA $\delta(x-x_0)$

① $\delta(-x) = \delta(x)$

② $\delta(ax) = \dfrac{1}{|a|}\,\delta(x)$

③ $x\,\delta(x) = 0$

④ $\delta[y(x)] = \displaystyle\sum_{1}^{M}{}_{i} \frac{\delta(x-x_i)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i}}$

⑤ $\delta(x-x')\,\delta(x-x'')$
$= \delta(x-x')\,\delta(x'-x'')$

$\boxed{x_i \Rightarrow \text{ZERI DI } y(x) \quad y(x_i)=0}$

DIMOSTRAZIONE

• NOTARE CHE DALLA 3 SEGUE

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{g(x)}{x} \qquad x \neq 0$$

con $f(0) \neq 0$, $g(0) \neq 0$

$x = 0$

$$f(x) = g(x) + kx\,\delta(x)$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{g(x)}{x} + k\,\delta(x)$$

$$\frac{f(x) - g(x)}{x} = k\,\delta(x)$$

DA NOTARE
Nel campo reale $\ln x$ esiste solo per $x > 0$. Vogliamo estendere il dominio della funzione a $x < 0$. Nel CAMPO COMPLESSO CIÒ È POSSIBILE

ES. $$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \qquad x \neq 0 \qquad X \in \mathbb{C}$$

$$x \frac{d}{dx} \ln x = 1 + kx\,\delta(x)$$

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x} + k\,\delta(x)$$

ESSENDO $\frac{1}{x}$ DISPARI

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dx}{x} = 0.$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d \ln x}{dx} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{x} + k \int \delta(x)$$

per determinare k

$$\frac{d \ln z}{dz} = \frac{1}{z} + c\,\delta(z)$$

Integrand

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d}{dx} \ln x = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \ln \varepsilon - \ln(-\varepsilon) =$$

$$= \ln \varepsilon - \ln(e^{i\pi} \varepsilon) = -i\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z} - i\pi\,\delta(z)}$$

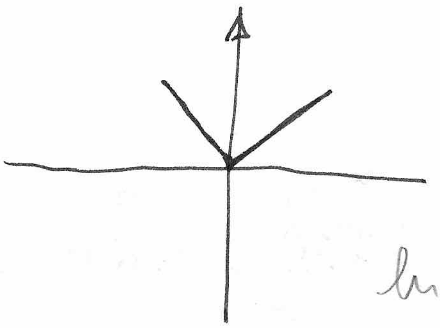
$\Rightarrow$ La funzione logaritmo è discontinua in $z = 0$. PARTE IMMAGINARIA

ES: $\delta(x^2-a^2) = \delta(x-a) + \delta(x+a)$

• RELAZIONE CON LA FUNZIONE θ di HEAVISIDE

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

Esempio: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x>0 \\ -x & x<0 \end{cases}$



ESEMPIO

$$|x| = x\,\theta(x) - x\,\theta(-x)$$

$$\ln x = \begin{cases} \ln|x| & x>0 \\ \ln -|x| & x<0 \end{cases}$$

$$\ln x = \ln|x| + i\pi\,\theta(-x)$$

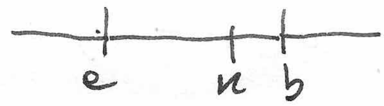
$x<0$ $\ln -|x| = \ln|x| + i\pi\,\theta(-x) \Rightarrow \ln|x| + \ln(e^{i\pi}) = \ln|x| + i\pi\theta(x)$

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x} + i\pi \frac{d\,\theta(-x)}{dx}$$

$$\frac{d\,\theta(-x)}{dx} = -\delta(x)$$

$$\boxed{\frac{d\,\theta(x)}{dx} = \delta(x)}$$

ALTRA DIMOSTRAZIONE:



$$\frac{d}{dx}\int_a^b \theta(x-x')\, f(x')\, dx' \begin{cases} \frac{d}{dx}\int_a^x f(x')\,dx' = f(x) & a<x<b \\ 0 & x \notin]a,b[\end{cases}$$

Ma $\int_a^b \delta(x-x')\, f(x')\, dx' \begin{cases} f(x) & x \in]a,b[\\ 0 & \text{se } x \notin]a,b[\end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\theta(x-x') = \delta(x-x')$$

DERIVATE ~~DELLA~~ DELTA

$$\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\, f(x) = \delta(x) f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, f'(x)\, dx = -f'(0)}$$

~~SCEGLIENDO~~

- DA UN PUNTO DI VISTA MATEMATICO FORMALE $\delta(u)$ È UNA DISTRIBUZIONE

: SUCCESSIONI DI FUNZIONI $g_n(u)$

TALI CHE

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b g_n(u) \, f(u) \Rightarrow \text{FINITO} \Leftarrow$$

CON $f(u)$ ORDINARIA FUNZIONE APPARTENENTE AD UNA CERTA CLASSE DETTE $\boxed{\text{FUNZIONI DI PROVA}}$

- LA FUNZIONE $\delta(u)$ POSSIAMO DEFINIRLA USANDO LE SUCCESSIONI

(1) $$\delta_n(u) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2u^2}$$

(2) $$\delta_n(u) = \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2u^2}$$

(3) $$\delta_n(u) = \frac{\sin(nu)}{\pi u}$$

• Altro esempio

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$f_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan nx$$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 & x < 0 \end{cases}$$

<u>RISONANZE</u>

OSCILLATORE FORZATO

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = f(t)$$

• Se $f(t)$ periodica $\Rightarrow$ serie di FOURIER

• Se $f(t)$ NON-PERIODICA ?

SEBBENE IL LIMITE

$\lim_{n \to \infty} \delta_n(x)$ NON ESISTA.

ABBIAMO

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)\, f(x) = f(0)}$$

- DERIVATE DELLA DELTA $\delta'(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\, f(x)\, dx = \delta(x) f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f'(x)$$

scegliendo distribuzioni tali che

$$\delta_n(\pm \infty) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\, f(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f'(x) = -f'(0)$$

ITERANDO

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x)\, f(x)\, dx = (-1)^n \int_{-\infty} \delta(x) \frac{d^n f}{dx^n} =$$

$$= (-1)^n \frac{d^n f}{dx^n}\Big|_{x=0}$$

Ponendo $f(x) = x \, g(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) \, x \, g(x) \, dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \left[g(x) + x \, g'(x) \right] \delta(x) \, dx$$

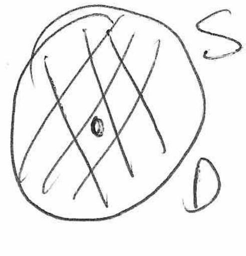
$$= - g(0) \quad \Longrightarrow$$

$$\boxed{x \, \delta'(x) = - \delta(x)}$$

Generalizzando

$$\boxed{x^n \, \delta^{(n)}(x) = (-1)^n \, n! \, \delta(x)}$$

$\boxed{2D}$



$$\int_D dV\, \bar\nabla\cdot\bar E = \int_S \bar E\cdot\bar n\, ds$$

$$\int dV\, \nabla^2\phi = \int_S \bar E\cdot\bar n\, ds$$

$$\bar E = \frac{1}{r}$$

$$\phi = \ln r$$

$$ds = 2\pi r$$

$$\int_D \nabla^2 \ln r\, dV = \int_S \frac{ds}{r} \neq 0$$

$$= 2\pi$$

$$\int_D \nabla^2 \ln r = \begin{cases} 2\pi & \text{se } 0 \in D \\ 0 & \text{se } 0 \notin D \end{cases}$$

$$\nabla^2 \ln r = \delta(r)$$

RISONANZA

OSCILLATORE FORZATO

$$m\ddot{x} + kx = f(t)$$

(1) FORZANTE PERIODICA

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f(t) = F_0 \sin m\omega t$$

C_M

$$x = A \sin(\Omega t + \phi) + \frac{F_0}{m} \frac{1}{\Omega^2 - (m\omega)^2} \sin(m\omega t)$$

$\Downarrow$ SOLUZIONE OMOGENEA

$\Downarrow$ Integrale particolare

sostituendo

$$\frac{F_0/m}{\Omega^2 - (m\omega)^2}\left[-m(m\omega^2) + \frac{k}{m}\right] = F_0$$

Per $m\omega = \Omega \Rightarrow$ RISONANZA

$\Rightarrow$ SOLUZIONE NON È PIÙ PERIODICA $\Leftarrow$

$$\boxed{C_M = \infty}$$

$\Rightarrow$ SITUAZIONE NON CAMBIA SE METTIAMO ATTRITO

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = f(t)$$

SOLUZIONE NON PERIODICA

$$X = A \sin(\Omega t + \delta)$$
$$- \frac{F_0}{2\Omega}\, t \cos(\Omega t) = X_1 + \alpha X_2$$

$$A\,\Omega t \xrightarrow{t \to \infty} \infty$$

$$\dot{X}_2 = \cos\Omega t + t\Omega \sin\Omega t$$
$$\ddot{X}_2 = -2\Omega \sin\Omega t - t\Omega^2 \cos\Omega t$$

$$m\ddot{X}_2 + kX = 2\sqrt{km}\,\sin\Omega t - t\,\cancel{k\cos\Omega t}$$
$$+ k t\,\cancel{\cos}\,\Omega t$$

⇒ Se $f(t)$ PERIODICA 2T POSSIAMO SVILUPPARE IN SERIE DI FOURIER

$$f(t) = \sum_k C_m \sin \frac{m\pi}{T} t + C^+ \cos \frac{m\pi}{T} t$$

LONTANO DALLA RISONANZA POSSIAMO SVILUPPARE SOLUZIONE IN SERIE DI FOURIER

⇒ Se $f(t)$ NON È PERIODICA

LA SOLUZIONE NON PUÒ ESSERE SVILUPPATA IN SERIE DI FOURIER

TRASFORMATE INTEGRALI

Problema 1

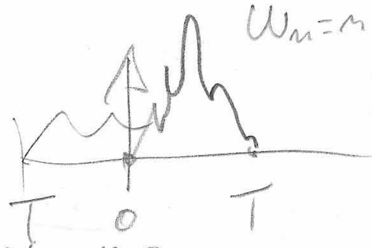
Elettrica
onde
...

(1) Un segnale (funzione) qualsiasi $f(t)$ tra $0 \leq t \leq T$ può essere sviluppato in serie di Fourier

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\omega_n = n\frac{2\pi}{T}$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i n \frac{2\pi}{T} t}$$



ESEMPIO IMPORTANTE IN FISICA: PACCHETTO D'ONDE

Cosa succede se voglio sviluppare un segnale tra $-\infty < t < \infty$?

(2) Una corda vibrante $F(x)$ fissa tra $0 \leq x \leq L$ ha una INFINITÀ numerabile di modi normali

$u_n = A \sin k_n x$ $\quad k_n = \frac{n\pi}{L}$

tale che

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$$

EQ. AUTOVALORI

$H|x\rangle = \lambda |x\rangle$

$\lambda \in \mathbb{R}$

MECC. QUANT.
PROBL.
PROBLEMI DI DIFFUSIONE

Cosa succede se la corda non è fissata agli estremi?

(3) RISONANZE ⇒ la configurazione del sistema non è sensibile come dalla posizione dei ...

Entrambi i problemi possono essere risolti prendendo il limite

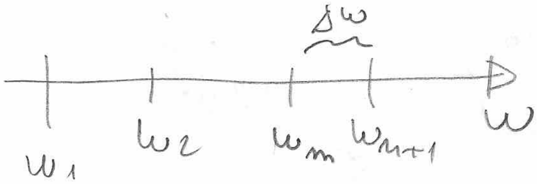
$T \to \infty$

$L \to \infty$

SPETTRO DISCRETO

⇒ SPETTRO CONTINUO ⟹

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$



$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi(n+1)}{T} - \frac{2\pi n}{T} = \frac{2\pi}{T}$$

$T \to \infty \quad \Delta\omega \to 0 \quad \boxed{\text{SPETTRO CONTINUO}}$

$$k_n = \frac{2\pi n}{L} \qquad \Delta k = k_{n+1} - k_n = \frac{2\pi}{L}$$

$L \to \infty \quad \Delta k \to 0 \quad \boxed{\text{S. C}}$

In generale $F(x) \in L^2(I)$ SPETTRO DISCRETO

$$|F\rangle = \sum_n c_n |u_n\rangle \qquad F(x) = \sum_n c_n u_n(x)$$

$$\langle u_n | u_m \rangle = \int_I u_n^* u_m \, dx = \delta_{nm}$$

$$c_n = \langle u_n | F \rangle = \int_I u_n^* F \, dx$$

SPETTRO CONTINUO

$n \to \omega \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad \omega \in \mathbb{R}$

$u_n(x) \to u(\omega, x)$

$\sum_n \to \int_{-\infty}^{\infty} d\omega$

$\delta_{nm} \to \delta(\omega - \omega')$

Kroneker → DIRAC

$c_n \to c(\omega)$

ESEMPIO: GAUSSIANA

Strangolato RISONANZA

~~$c(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$~~

$\sigma \to 0$

~~$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \delta(\omega - \omega_0) \, u(\omega, x)$~~

$|c_n|^2$ Intensità del modo n

$c(\omega)$ Intensità del modo ω

CURVA CONTINUA

$$|F\rangle = \sum_n c_n |u_n\rangle \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; c(\omega)\, u(\omega, x)$$

$$c_n = \langle u_n | F\rangle \Rightarrow c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; u^*(\omega, x) F(x)$$

$$\langle u_n | u_m\rangle = \delta_{nm} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \; u^*(\omega, x)\, u(\omega', x) = \delta(\omega-\omega')$$

$\boxed{\text{NB}}$ $\langle u(\omega, x) | u(\omega', x)\rangle = \delta(\omega - \omega')$

$$u(\omega, x) \notin L^2(I) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |u(\omega, x)|^2 = \infty$$

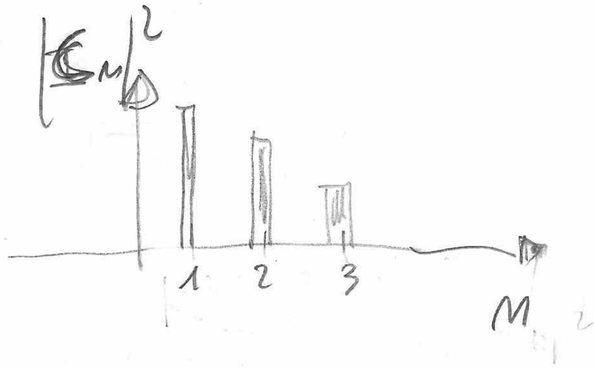
SPETTRO DISCRETO	S. CONTINUO
$f \in L^2(I)$	$f \notin L^2(I)$
CONDIZIONI AL CONTORNO AL FINITO	NESSUNA COND. AL CONTORNO AL FINITO
MQ: STATI LEGATI	MQ: STATI ASINTOTICI PROCESSI DI DIFFUSIONE

$\boxed{\text{RISONANZE}}$

$c(\omega)$ si chiama TRASFORMATA INTEGRALE DI $F(x)$

FISICAMENTE

SPETTRO DISCRETO

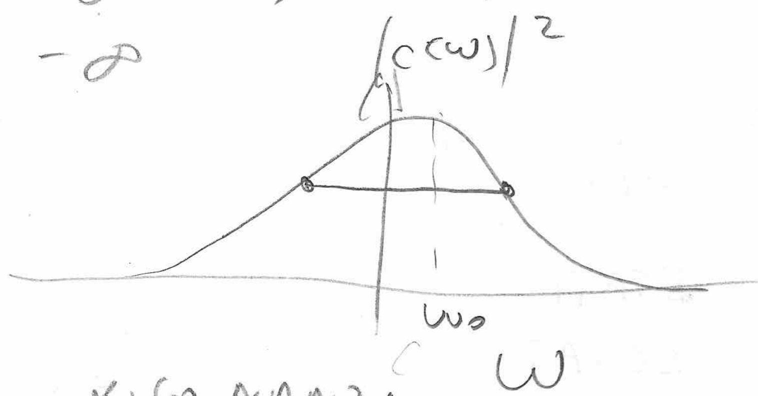


$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |u_n\rangle$$

- PESO DELLE ARMONICHE (TIMBRO) FISICA ACUSTICA
- CONTRIBUTO MODI NORMALI CORDA VIBR.
- STATI LEGATI ATOMO DI IDROGENO (SPETTRO DEGLI ATOMICI, RIGHE SPETTRALI)
  // // NUCLEO

SPETTRO CONTINUO

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)\, u(\omega, x)\, d\omega$$



- CURVA RISONANZA
- PACCHETTO D'ONDE MONOCROMATICO
- STATI ASINTOTICI (PROCESSI DIFFUSIONE)

ESEMPIO PACCHETTO GAUSSIANO

$$c(\omega) = e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\sigma^2}} \qquad \sigma \to 0$$

$$c(\omega) = \delta(\omega-\omega_0)$$

$$f(x) = u(x, \omega_0) = e^{i\omega_0 x}$$

$\to$ ONDA MONOCROMATICA

1) Da un punto di vista più matematico possiamo dire quello che succede in questi casi è che il sistema non è più descritto da

$f(x) \in L^2(a,b)$

ESEMPIO 1 CORDA VIBRANTE NON FISSA

- una volta che separate le variabili arriviamo all'equazione $u(x,t) = X(x)\,T(t)$

$X'' = -\lambda^2 X$ soluzione generale

$X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$

$\boxed{\lambda \text{ arbitrario numero reale}}$

CONTINUO

- le condizioni al contorno

$u(0,t) = u(L,t) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$

DISCRETO

- POSSIAMO ANCHE SCRIVERE

DA $X = C e^{i\lambda x} + D e^{-i\lambda x}$

LA FUNZIONE $\notin L^2(-\infty,\infty)$

INFATTI $D=0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} e^{i\lambda x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx = \infty$$

FISICAMENTE:

- Per risolvere tutti questi problemi dovete passare dallo spettro

DISCRETO   ALLO SPETTRO

CONTINUO.

Dovete cioè pensare il SEGNALE, LA CONFIGURAZIONE DELLA CORDA, LA RISONANZA come sovrapposizione infinita di modi che variano CON CONTINUITÀ tra

$-\infty, +\infty \quad x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; c(\omega)\, u(\omega, x)$$

$$c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; u^{*}(\omega, x)\, f(x)$$

TRASFORMATA INTEGRALE

D(ANTI)