

DANNEGGIAMENTO PROGRESSIVO

Esempio di analisi di resistenza con danneggiamento progressivo

Materiale: Lamine prepreg fibre lunghe unidirezionali di carbonio/resina epossidica

$$E_x = 138 \text{ GPa}$$

$$E_y = 9 \text{ GPa}$$

$$E_s = 6.9 \text{ GPa}$$

$$\nu_{xy} = 0.30$$

$$X_t = 1700 \text{ MPa}$$

$$X_c = -1400 \text{ MPa}$$

$$Y_t = 53 \text{ MPa}$$

$$Y_c = -200 \text{ MPa}$$

$$S = 102 \text{ MPa}$$

Sequenza del laminato: [+45/-45/0/90]_s - Laminato SIMMETRICO e BILANCIATO

Spessore lamina $t = 0.125 \text{ mm}$

Numero strati $n = 8$

Spessore totale del laminato $h = t \cdot n = 1 \text{ mm}$

Unità di misura utilizzate nei calcoli: N, m (S.I.)

Considerando il danneggiamento delle singole lamine ed applicando il criterio del massimo sforzo, stimare la risposta del laminato ad un carico N_1 di trazione crescente ($N_2 = N_6 = 0$)

MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA LAMINA nel sistema locale x-y

$$[Q]_{xy} = \begin{bmatrix} 138.8e + 009 & 2.716e + 009 & 0 \\ 2.716e + 009 & 9.053e + 009 & 0 \\ 0 & 0 & 6.90e + 009 \end{bmatrix} Pa$$

MATRICI DI RIGIDEZZA E CEDEVOLEZZA DEL LAMINATO

Il laminato è soggetto a soli sforzi sul piano; essendo il laminato simmetrico è sufficiente calcolare le matrici $[A]$ ed $[a]$.

$$[A] = \begin{bmatrix} 59.58e + 006 & 17.07e + 006 & 0 \\ 2.716e + 009 & 59.58e + 006 & 0 \\ 0 & 0 & 21.26e + 006 \end{bmatrix} Pa \cdot m$$

$$[a] = \begin{bmatrix} 1.828e - 008 & -5.238e - 009 & 0 \\ -5.238e - 009 & 1.828e - 008 & 0 \\ 0 & 0 & 4.705e - 008 \end{bmatrix} \frac{1}{Pa \cdot m}$$

Le proprietà elastiche medie del laminato sono le seguenti

$$\bar{E}_1 = 54.69 \text{ GPa}$$

$$\bar{E}_2 = 54.69 \text{ GPa}$$

$$\bar{E}_6 = 21.25 \text{ GPa}$$

$$\bar{\nu}_{12} = 0.287$$

CALCOLO DEGLI SFORZI NEI SINGOLI STRATI

Per semplicità supponiamo che il vettore dei carichi sia:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{N}{m}$$

Gli sforzi prodotti da questa sollecitazione sono i seguenti:

Orientazione	Strati	Rottura fibre		Rottura matrice	
		σ_x (Pa)	σ_y (Pa)	σ_s (Pa)	σ_s (Pa)
+45°	$l = 1, 8$	923.2	76.77	-162.4	
-45°	$l = 2, 7$	923.2	76.77	162.4	
0°	$l = 3, 6$	2524	2.23	0	
90°	$l = 4, 5$	-677.5	151.3	0	

Applicando il criterio del massimo sforzo si ottengono i seguenti coefficienti di sicurezza (per valori di N_1 positivi)

Orientazione	Strati	η_x	η_y	η_s
+45°	$l = 1, 8$	1.841e6	0.6903e6	0.6281e6
-45°	$l = 2, 7$	1.841e6	0.6903e6	0.6281e6
0°	$l = 3, 6$	0.6735e6	23.767e6	∞
90°	$l = 4, 5$	2.066e6	0.3503e6	∞
η_{MIN}		0.3503e6		

La prima rottura (FPF) si verifica pertanto negli strati a 90° (per rottura della matrice per trazione) ad un carico per unità di larghezza P_I pari a

$$P_I = N_1 = \eta_{MIN} \cdot 1 \text{ N/m} = 0.3503e6 \text{ N/m} = 350300 \text{ N/m}$$

che corrisponde ad una sigma media sul laminato pari a

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{P_I}{h} = \frac{350300}{1e-3} = 350.3 \text{ MPa}$$

Poiché il carico applicato è monoassiale (sola N_1) possiamo semplicemente calcolare la deformazione corrispondente al carico P_I prima della rottura come:

$$\varepsilon_1 = \frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{E}_1} = \frac{350.3e6}{54.69e9} = 6.405e-3 = 0.006405 = 0.6405\%$$

A partire da questo livello di carico, a causa della rottura della matrice le proprietà elastiche degli strati a 90° si modificano come indicato nella tabella seguente:

<i>LAMINATO I</i>		
Orientazione	Strati	Proprietà elastiche
+45°	$l = 1, 8$	$E_x = 138 \text{ GPa}$
-45°	$l = 2, 7$	$E_y = 9 \text{ GPa}$
0°	$l = 3, 6$	$E_s = 6.9 \text{ GPa}$
		$\nu_{xy} = 0.30$
		$E_x = 138 \text{ GPa}$
90°	$l = 4, 5$	$E_y \approx 0 \text{ GPa}$
		$E_s \approx 0 \text{ GPa}$
		$\nu_{xy} \approx 0$

E' necessario quindi ricalcolare la matrice elastica $[A]$ tenendo conto delle nuove proprietà degli strati a 90° (*Laminato I*)

$$[A]_I = \begin{bmatrix} 57.32e + 006 & 16.39e + 006 & 0 \\ 16.39e + 006 & 59.38e + 006 & 0 \\ 0 & 0 & 19.53e + 006 \end{bmatrix} Pa \cdot m$$

$$[a]_I = \begin{bmatrix} 1.894e - 008 & -5.229e - 009 & 0 \\ -5.238e - 009 & 1.828e - 008 & 0 \\ 0 & 0 & 5.120e - 008 \end{bmatrix} \frac{1}{Pa \cdot m}$$

Le nuove proprietà elastiche medie del laminato danneggiato (*laminato I*) sono le seguenti

$$\bar{E}_1 = 52.79 \text{ GPa}$$

$$\bar{E}_2 = 54.69 \text{ GPa}$$

$$\bar{E}_6 = 19.53 \text{ GPa}$$

$$\bar{\nu}_{12} = 0.276$$

La deformazione corrispondente al carico P_I calcolata immediatamente dopo la rottura degli strati a 90° vale quindi:

$$\varepsilon_1 = \frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{E}_1} = \frac{350.3e6}{52.79e9} = 6.636e - 3 = 0.006636 = 0.6636\%$$

CALCOLO DEGLI SFORZI NEI SINGOLI STRATI

Sempre supponendo che il vettore dei carichi sia:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{N}{m}$$

Gli sforzi prodotti da questa sollecitazione sul laminato danneggiato (*laminato I*) sono i seguenti:

Orientazione	Strati	σ_x (Pa)	σ_y (Pa)	σ_s (Pa)
+45°	$l = 1, 8$	970.4	80.70	-166.9
-45°	$l = 2, 7$	970.4	80.70	+166.9
0°	$l = 3, 6$	2615	4.11	0
90°	$l = 4, 5$	-721.7	≈ 0	≈ 0

Applicando il criterio del massimo sforzo si ottengono i seguenti coefficienti di sicurezza (per valori di N_1 positivi)

Orientazione	Strati	η_x	η_y	η_s
+45°	$l = 1, 8$	1.752e6	0.6568e6	0.6111e6
-45°	$l = 2, 7$	1.752e6	0.6568e6	0.6111e6
0°	$l = 3, 6$	0.650e6	12.90e6	∞
90°	$l = 4, 5$	1.940e6	∞	∞
η_{MIN}				0.6111e6

La seconda rottura si verifica pertanto contemporaneamente negli strati a +45° e -45° (per rottura della matrice per taglio) ad un carico pari a

$$P_{II} = N_1 = \eta_{MIN} \cdot 1 \text{ N/m} = 0.6111e6 \text{ N/m} = 611100 \text{ N/m}$$

che corrisponde ad una sigma media sul laminato pari a

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{P_I}{h} = \frac{611100}{1e-3} = 611.1 \text{ MPa}$$

La deformazione corrispondente al carico P_{II} immediatamente prima della seconda rottura vale:

$$\varepsilon_1 = \frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{E}_1} = \frac{611.1e6}{52.79e9} = 0.01158 = 1.158\%$$

A partire da questo livello di carico, a causa della rottura della matrice, le proprietà elastiche degli strati a +45° e -45° si modificano come indicato nella tabella seguente:

<i>LAMINATO II</i>		
Orientazione	Strati	Proprietà elastiche
0°	$l = 3, 6$	$E_x = 138 \text{ GPa}$ $E_y = 9 \text{ GPa}$ $E_s = 6.9 \text{ GPa}$ $\nu_{xy} = 0.30$
+45°	$l = 1, 8$	$E_x = 138 \text{ GPa}$
-45°	$l = 2, 7$	$E_y \approx 0 \text{ GPa}$
90°	$l = 4, 5$	$E_s \approx 0 \text{ GPa}$
		$\nu_{xy} \approx 0$

E' quindi nuovamente necessario ricalcolare la matrice elastica $[A]$ tenendo conto delle nuove proprietà degli strati a +45° e -45°, oltre che di quelle degli strati a 90° (*Laminato II*).

$$[A]_{II} = \begin{bmatrix} 51.95e + 006 & 17.93e + 006 & 0 \\ 17.93e + 006 & 54.01e + 006 & 0 \\ 0 & 0 & 18.98e + 006 \end{bmatrix} Pa \cdot m$$

$$[a]_{II} = \begin{bmatrix} 2.174e - 008 & -7.216e - 009 & 0 \\ -7.216e - 009 & 2.091e - 008 & 0 \\ 0 & 0 & 5.270e - 008 \end{bmatrix} \frac{1}{Pa \cdot m}$$

Le nuove proprietà elastiche medie del laminato danneggiato dopo la rottura degli strati a $\pm 45^\circ$ (*laminato II*) sono le seguenti

$$\bar{E}_1 = 46.0 \text{ GPa}$$

$$\bar{E}_2 = 47.83 \text{ GPa}$$

$$\bar{E}_6 = 18.98 \text{ GPa}$$

$$\bar{\nu}_{12} = 0.332$$

La deformazione corrispondente al carico P_{II} immediatamente dopo la seconda rottura vale quindi:

$$\varepsilon_1 = \frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{E}_1} = \frac{611.1e6}{46.0e9} = 0.01329 = 1.329\%$$

CALCOLO SFORZI NEI SINGOLI STRATI

Sempre supponendo che il vettore dei carichi sia:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{N}{m}$$

Gli sforzi prodotti da questa sollecitazione sul laminato danneggiato (*laminato II*) sono i seguenti:

Orientazione	Strati	σ_x (Pa)	σ_y (Pa)	σ_s (Pa)
+45°	$l = 1, 8$	1002	≈ 0	≈ 0
-45°	$l = 2, 7$	1002	≈ 0	≈ 0
0°	$l = 3, 6$	2998	-6	0
90°	$l = 4, 5$	-996	≈ 0	≈ 0

Applicando il criterio del massimo sforzo si ottengono i seguenti coefficienti di sicurezza (per valori di N_1 positivi)

Orientazione	Strati	η_x	η_y	η_s
+45°	$l = 1, 8$	1.697e6	∞	∞
-45°	$l = 2, 7$	1.697e6	∞	∞
0°	$l = 3, 6$	0.567e6	33.3e6	∞
90°	$l = 4, 5$	1.41e6	∞	∞
η_{MIN}		0.567e6		

La terza rottura si verifica pertanto negli strati a 0° (per rottura delle fibre) ad un carico pari a

$$P_{\text{III}} = N_1 = \eta_{\text{MIN}} \cdot 1 \text{ N/m} = 0.567e6 \text{ N/m} = 567000 \text{ N/m}$$

Si noti che il carico che provoca la rottura delle fibre negli strati a 0° è inferiore a quello ottenuto nel passo precedente che provoca la seconda rottura ($P_{\text{II}} = 611100 \text{ N/m}$).

A causa della rottura delle fibre, le proprietà elastiche degli strati a 0° si modificano come indicato nella tabella seguente:

<i>LAMINATO III</i>		
Orientazione	Strati	Proprietà elastiche
0°	$l = 3, 6$	$E_x \approx 0 \text{ GPa}$ $E_y = 9 \text{ GPa}$ $E_s = 6.9 \text{ GPa}$ $\nu_{xy} = 0.30$
+45°	$l = 1, 8$	$E_x = 138 \text{ GPa}$
-45°	$l = 2, 7$	$E_y \approx 0 \text{ GPa}$
90°	$l = 4, 5$	$E_s \approx 0 \text{ GPa}$ $\nu_{xy} \approx 0$

E' quindi nuovamente necessario ricalcolare la matrice elastica $[A]$ tenendo conto delle nuove proprietà degli strati a 0° (*Laminato III*)

$$[A]_{III} = \begin{bmatrix} 17.25e + 006 & 17.25e + 006 & 0 \\ 17.25e + 006 & 51.75e + 006 & 0 \\ 0 & 0 & 18.98e + 006 \end{bmatrix} Pa \cdot m$$

$$[a]_{III} = \begin{bmatrix} 8.696e - 008 & -2.899e - 008 & 0 \\ -2.899e - 008 & 2.899e - 008 & 0 \\ 0 & 0 & 5.270e - 008 \end{bmatrix} \frac{1}{Pa \cdot m}$$

Le nuove proprietà elastiche medie del laminato danneggiato dopo la rottura degli strati a 0° (*laminato III*) sono le seguenti

$$\bar{E}_1 = 11.5 \text{ GPa}$$

$$\bar{E}_2 = 34.5 \text{ GPa}$$

$$\bar{E}_6 = 18.98 \text{ GPa}$$

$$\bar{\nu}_{12} = 0.333$$

CALCOLO DEGLI SFORZI NEI SINGOLI STRATI

Sempre supponendo che il vettore dei carichi sia:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{N}{m}$$

Gli sforzi prodotti da questa sollecitazione sul laminato danneggiato (*laminato III*) sono i seguenti:

Orientazione	Strati	σ_x (Pa)	σ_y (Pa)	σ_s (Pa)
+45°	$l = 1, 8$	4.0E6	≈ 0	≈ 0
-45°	$l = 2, 7$	4.0E6	≈ 0	≈ 0
0°	$l = 3, 6$	≈ 0	≈ 0	≈ 0
90°	$l = 4, 5$	-4.0E6	≈ 0	≈ 0

Applicando il criterio del massimo sforzo si ottengono i seguenti coefficienti di sicurezza (per valori di N_1 positivi)

Orientazione	Strati	η_x	η_y	η_s
+45°	$l = 1, 8$	425	∞	∞
-45°	$l = 2, 7$	425	∞	∞
0°	$l = 3, 6$	∞	∞	∞
90°	$l = 4, 5$	350	∞	∞
η_{MN}		≈ 0		

Come evidenziato dalla tabella, il laminato III ha quasi totalmente perso la capacità di sostenere carichi sul piano in direzione 1.

Il carico massimo sopportabile dal laminato è quindi $N_I = P_{II} = 611100 \text{ N/m}$ ($\bar{\sigma}_1 = 611.1 \text{ MPa}$).

In figura 1 è riportata la curva sforzi-deformazioni del laminato fino a rottura.

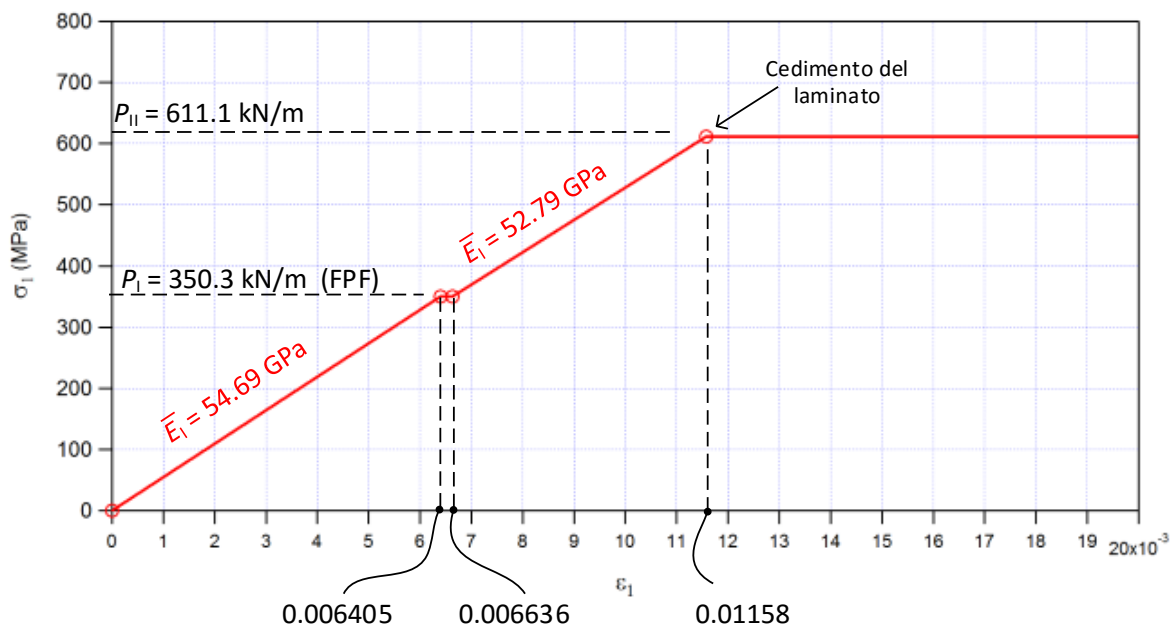


Fig. 1: Relazione sforzi deformazioni del laminato caricato sul piano in direzione 1 (sola N_I)