UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

Matematica Generale

A cura di
Beatrice Venturi

Integrali

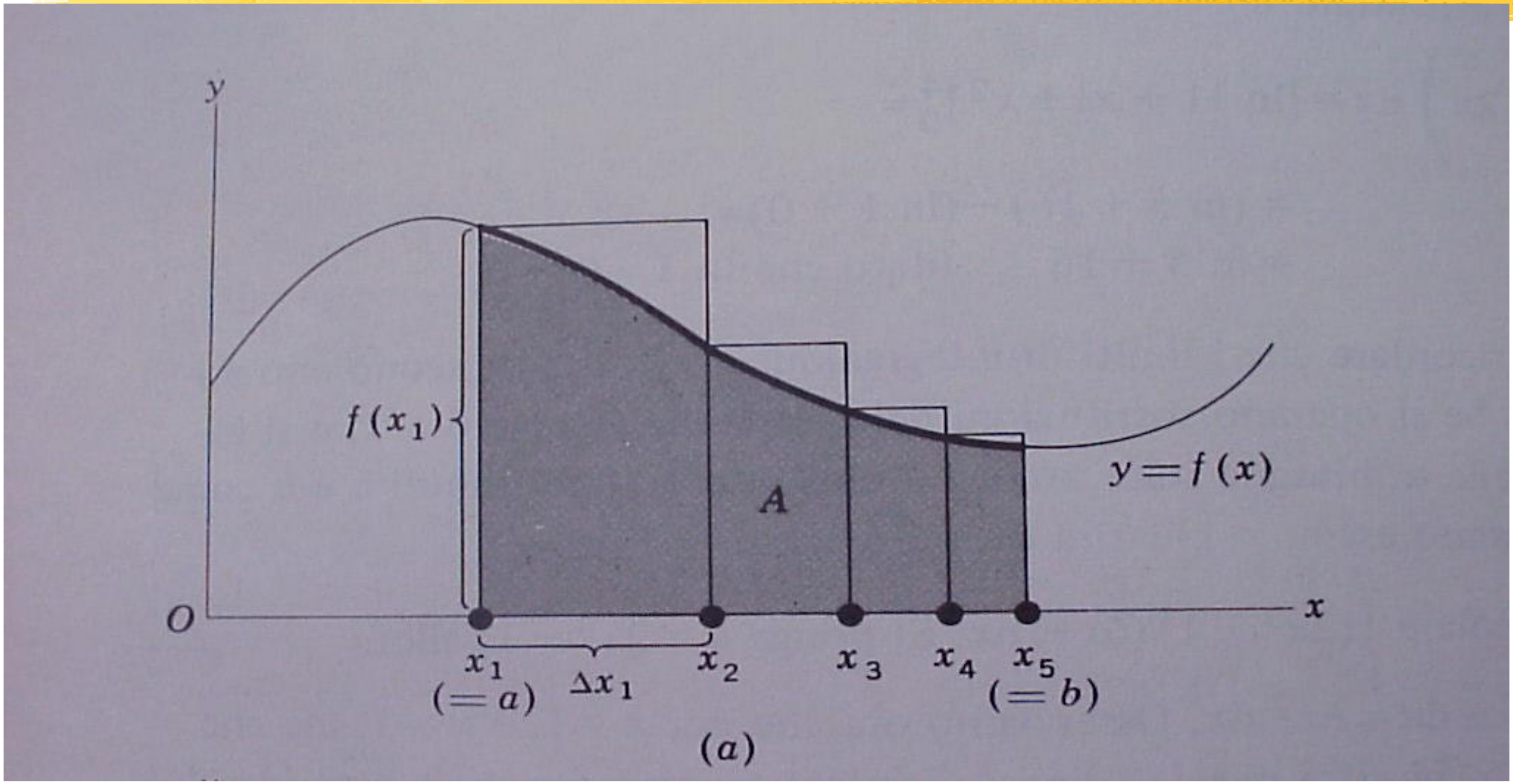
Integrale definito

- Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a,b]$
- **continua e non negativa,**

il valore dell'integrale:

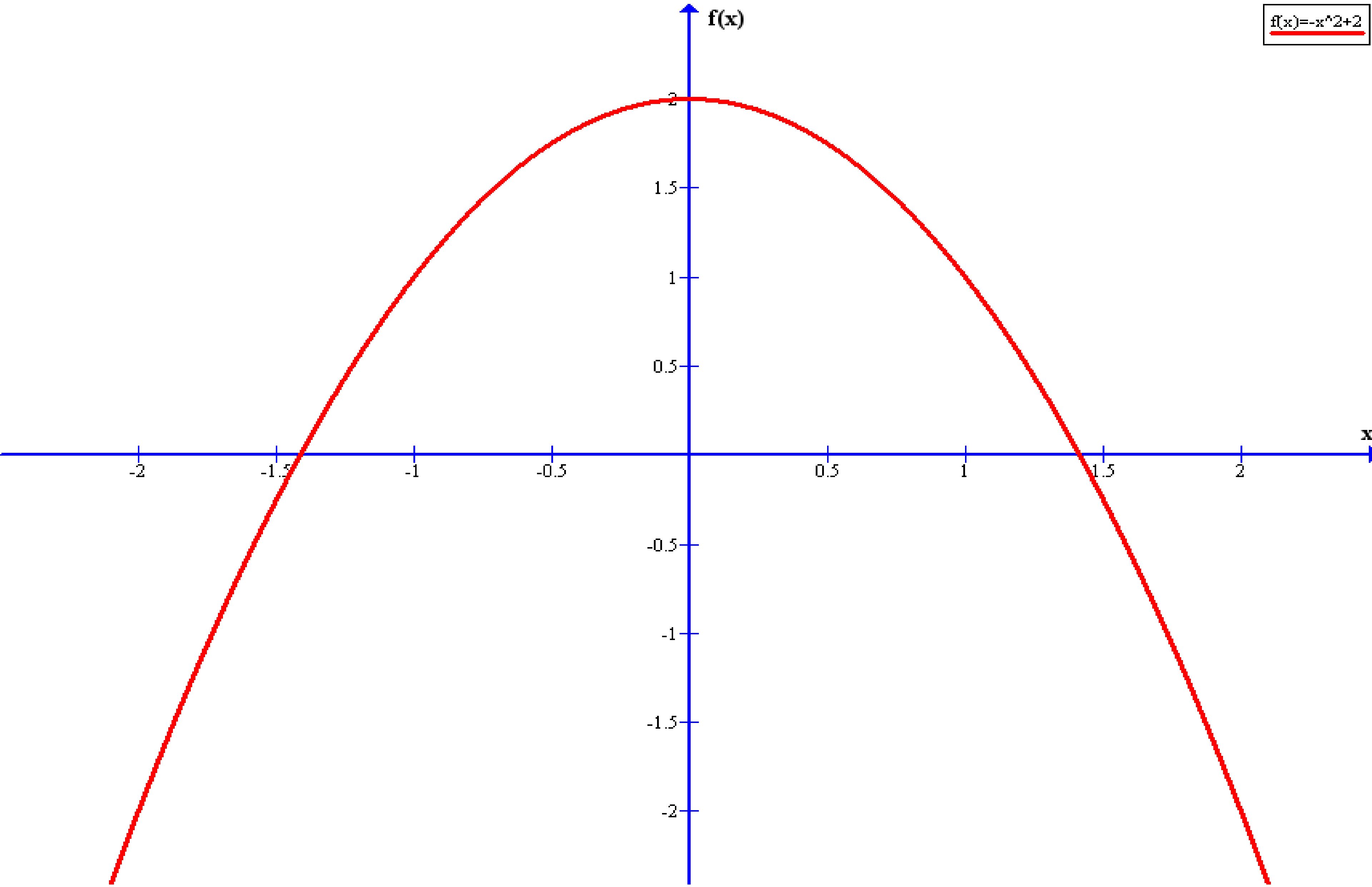
$$\int_a^b f(x)dx$$

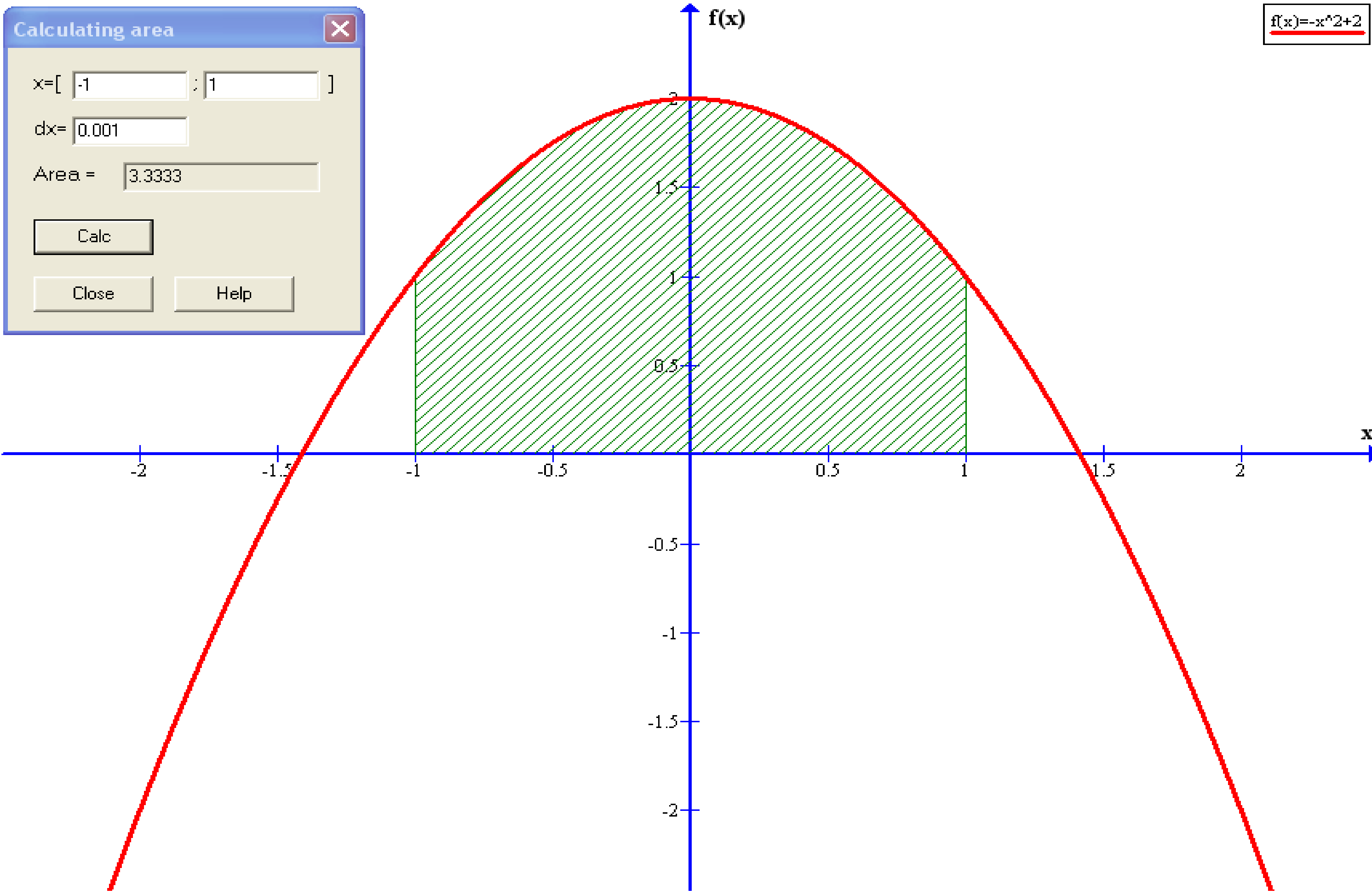
Integrale definito



Integrale definito

- Rappresenta **l'area del trapezoide**, delimitato dalla curva di equazione
  - $y=f(x)$,
- dall'**asse** delle **ascisse** e dalle **parallele** all'**asse** delle **ordinate** passanti rispettivamente per a e per b.


f(x)
f(x)=-x^2+2
x
2
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2


Calculating area
x=[-1 ; 1]
dx= 0.001
Area = 3.3333
Calc
Close
Help
f(x)
f(x)=-x^2+2
x
-2
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2
-0.5
-1
-1.5
-2

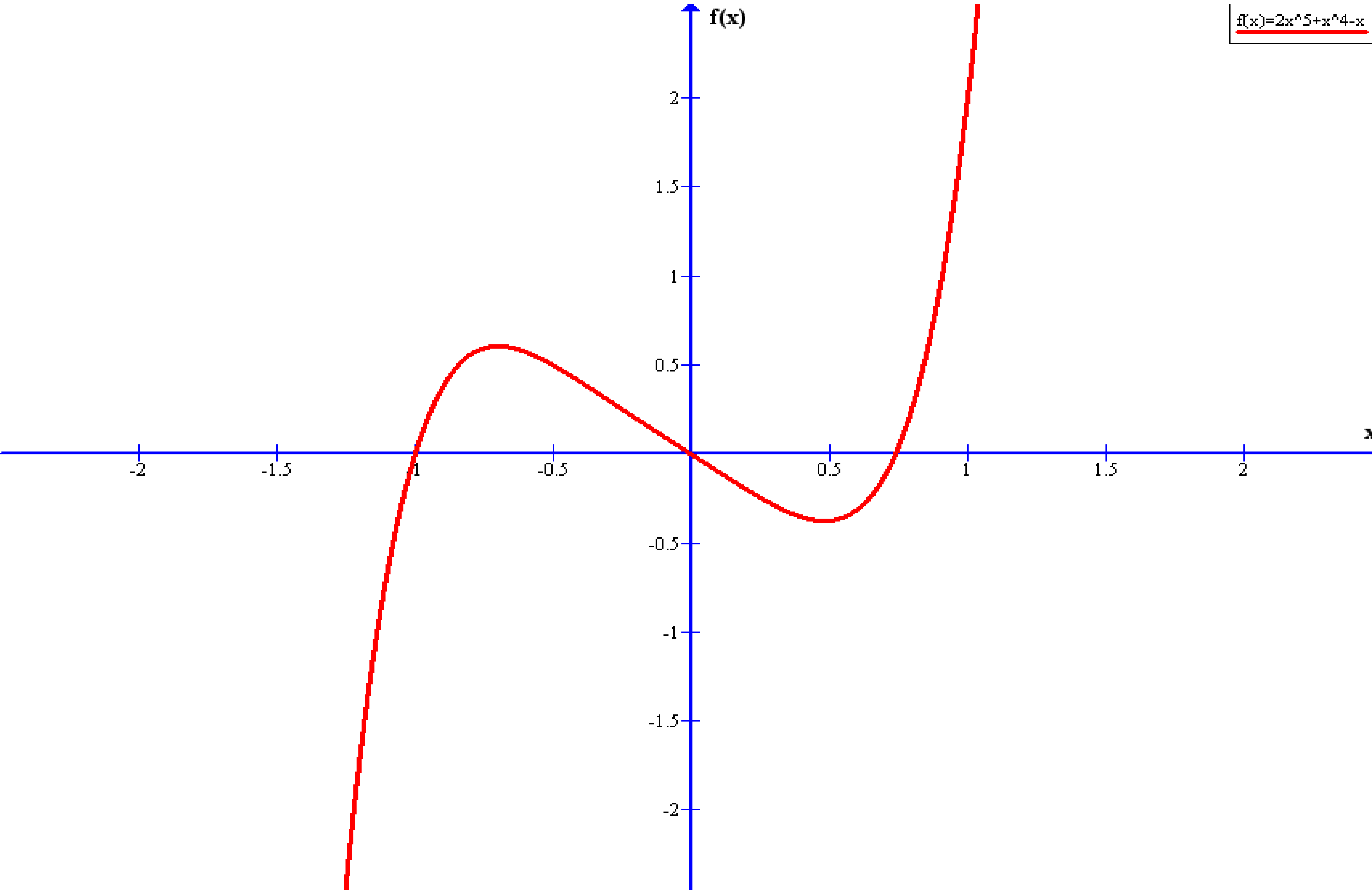
7-12.-18

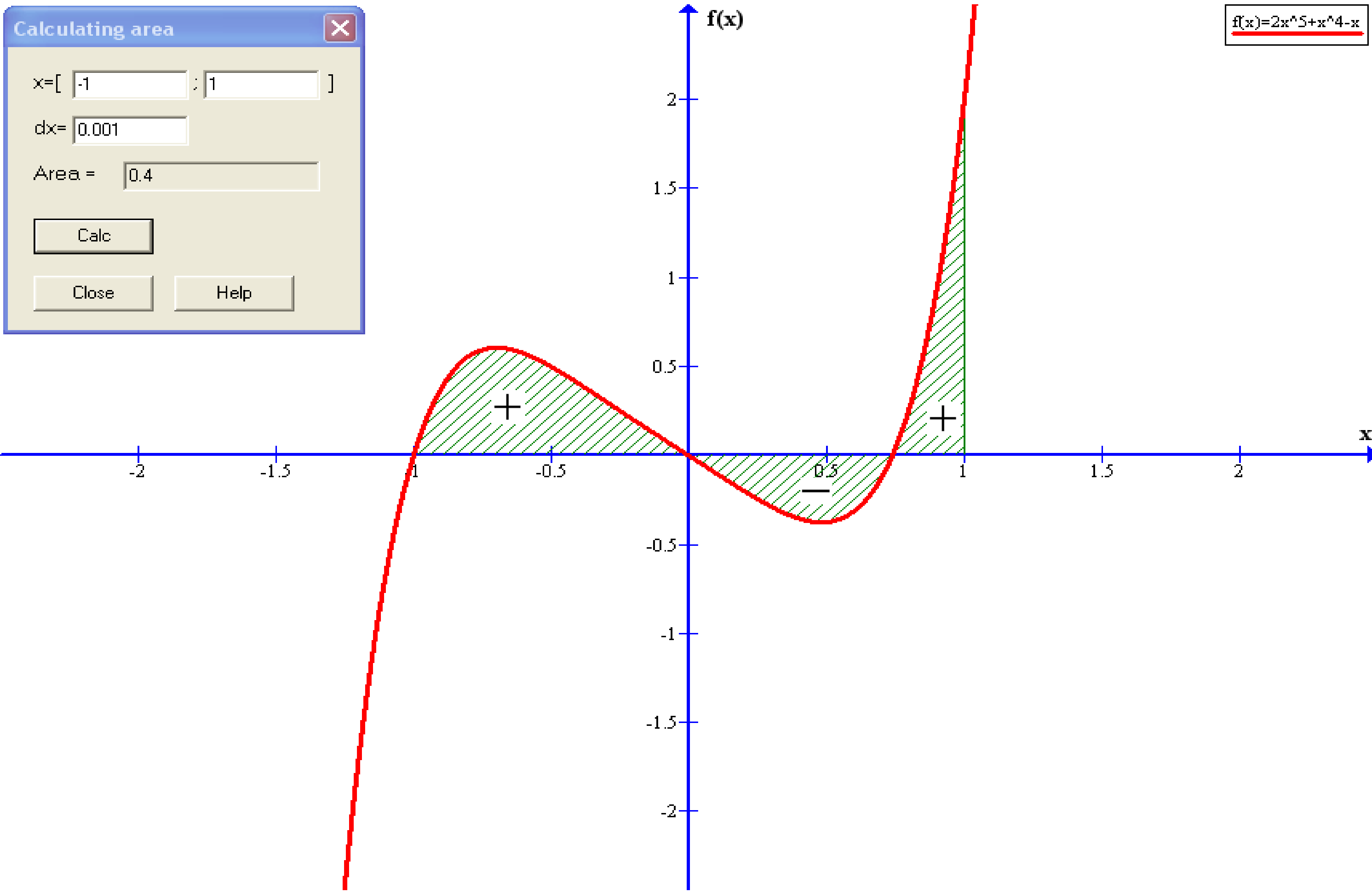
Integrale definito

- **Se la curva $y=f(x)$ attraversa l'asse delle ascisse in uno o più finiti punti, il trapezoide si scompone in diverse porzioni situate ad di sopra dell'asse delle ascisse e altre al di sotto.**

Integrale definito

- **L'integrale è dato dalla somma delle aree poste sopra l'asse delle x, prese positivamente, più quelle delle aree poste al di sotto dell'asse x, prese negativamente.**


f(x)
f(x)=2x^5+x^4-x
x
2
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2



Calculating area
x=[-1 ; 1]
dx= 0.001
Area = 0.4
Calc
Close
Help
f(x)
x
f(x)=2x^5+x^4-x

Integrale indefinito

- **Data una funzione $f(x)$, la totalità delle sue primitive si chiama integrale indefinito della funzione $f(x)$ e si indica con il simbolo:**

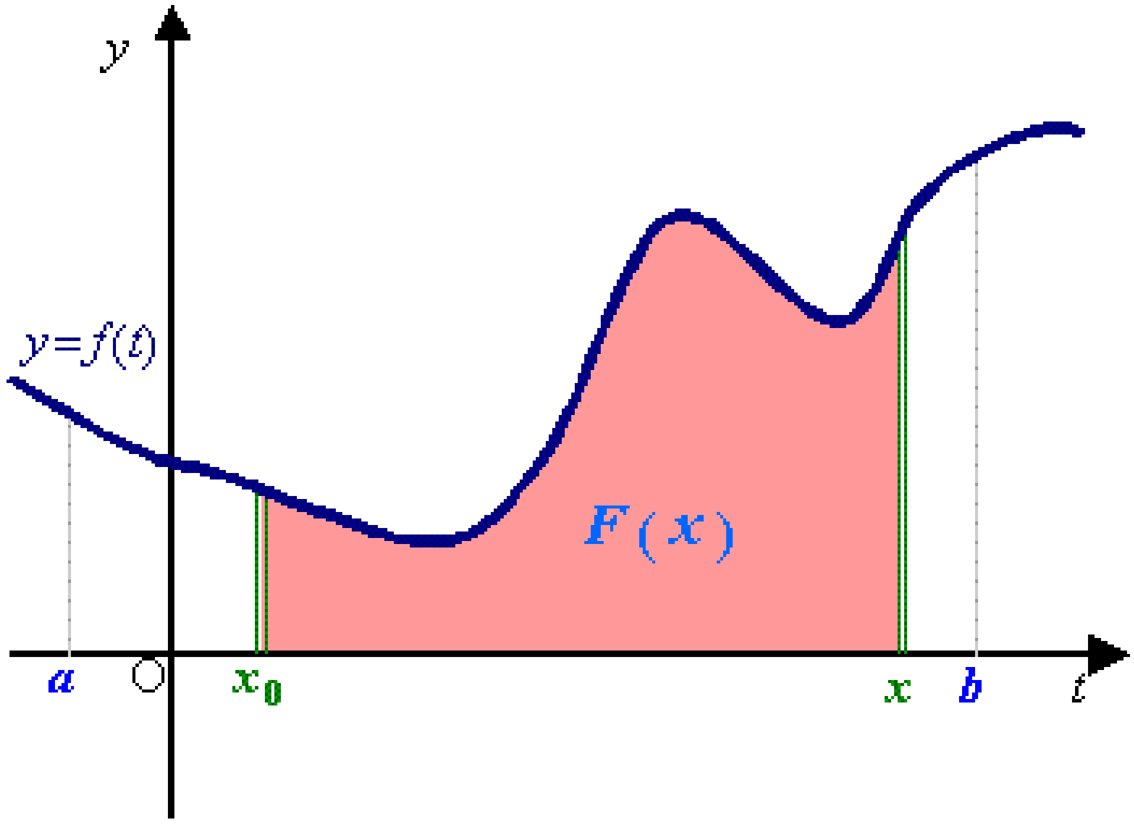
$$\int f(x)dx$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

- Se la **funzione integranda** f(x) **è** *continua*, esiste la **derivata** della **funzione integrale** **F(x)**:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Funzione Integrale



Teorema fondamentale del calcolo integrale

- Nel punto x, il valore della **derivata della funzione integrale (della primitiva)** è uguale al valore che la **funzione integranda** assume nello stesso punto, cioè:

$$F'(x) = f(x)$$

Integrale definito

- **Il teorema appena visto permette di calcolare l'integrale definito di una funzione per mezzo dell'integrale indefinito della funzione stessa.**

Integrale definito

- **Infatti se G(x) è una qualsiasi primitiva di f(x) si ha:**

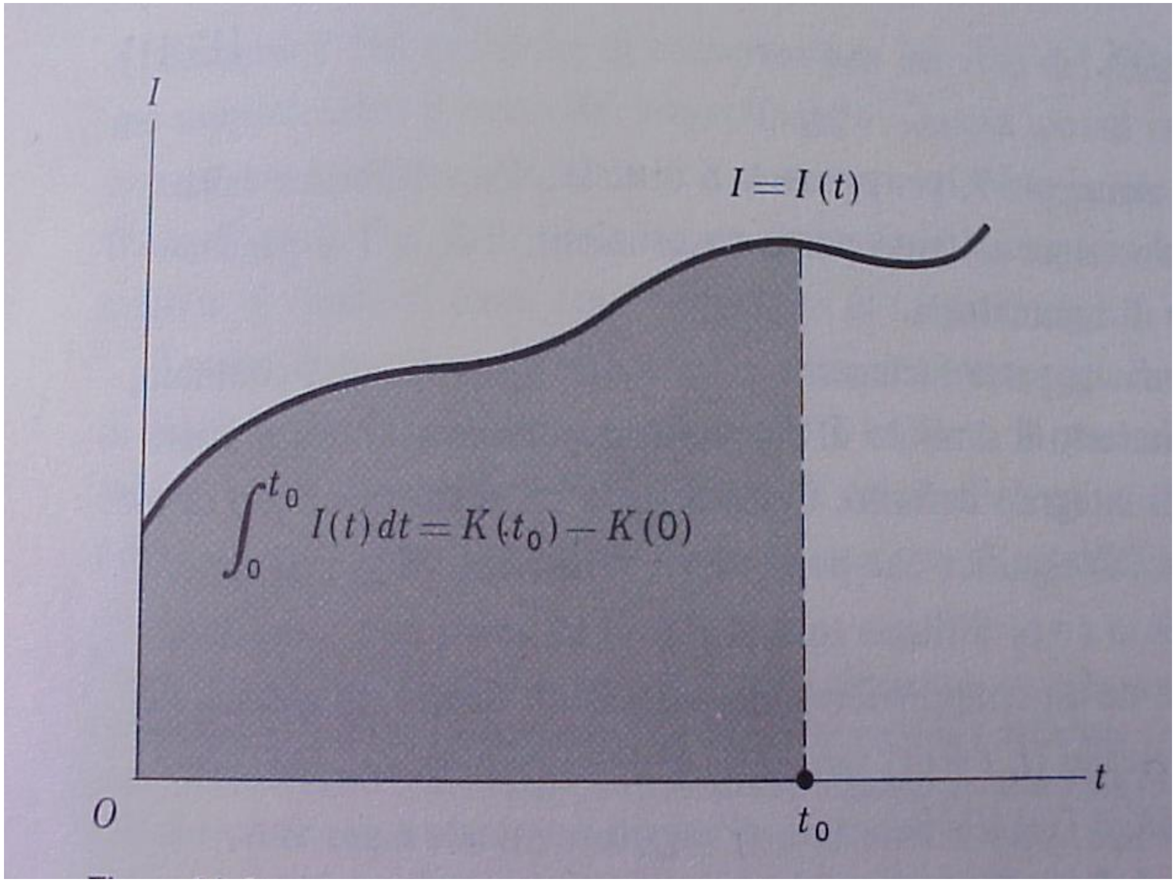
$$\int_a^b f(t)dt = \left[G(x)\right]_a^b = G(b) - G(a)$$

Investimento e formazione di capitale

- *Formazione di capitale* = processo per cui nuove quote di capitale si aggiungono ad uno stock precedente.
- *Investimento netto* $= I(\mathrm{t})$
- *Capitale* $= K(\mathrm{t})$
- *Saggio di formazione di capitale* =

$$\frac{dK(t)}{dt}$$

Investimento e formazione di capitale



Integrale definito

- **Esempio:**

$$\int_{1}^{2} \left(3x^2 - 2x + 5\right) dx$$

Integrale indefinito

- Ogni funzione ***continua*** in un intervallo ammette **sempre primitive**, segue dal **Teorema fondamentale del calcolo integrale**

Proprietà:

- **Se k è una costante si ha:**

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

Proprietà:

- **Se $f_1(x), f_2(x), \ldots , f_n(x)$ sono n funzioni continue, si ha:**

$$\int \left[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) \right] dx =$$

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx$$

Integrali indefiniti immediati

- **Se n è un numero reale, diverso da –1, risulta:**

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$$

Integrali indefiniti immediati

- **In generale se n è un numero reale, diverso da –1, risulta:**

$$\int \left[f(x)\right]^n \cdot f'(x)dx =$$

$$\int \left[f(x)\right]^n df(x) = \frac{1}{n+1}\left[f(x)\right]^{n+1} + c$$

Integrali indefiniti immediati

- **Se n è uguale a –1, risulta:**

$$\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$$

Integrali indefiniti immediati

- **In generale, se n è uguale a –1, risulta:**

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$$

Integrali indefiniti immediati

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$$

Integrali indefiniti immediati

$$\int \frac{a}{x-b}dx = a \cdot \ln|x-b| + c$$

$$\int \frac{a}{(x-b)^n}dx = \frac{a}{(1-n)(x-b)^{n-1}} + c$$

Metodi di integrazione

- **Metodo di integrazione per parti**
- **Si applica ogni volta che si conosce la primitiva di uno dei fattori, (nel nostro caso g' di g):**

$$\int f \cdot g' \, dx = f \cdot g - \int g \cdot f' \, dx$$

Metodi di integrazione per parti

- **Esempi:**

$$\int \ln x \, dx$$

$$\int x^2 \cdot e^x \, dx$$

Metodi di integrazione

- **Il metodo di integrazione per sostituzione consiste nel cambiare la variabile di integrazione x con un'altra variabile t legata alla precedente da una opportuna relazione.**

Metodo di integrazione per sostituzione

- **Dato il seguente interale:**

$$\int f(x)dx$$

Metodo di integrazione per sostituzione

- **Si fissa la sostituzione $x=\varphi(t)$,in cui $\varphi(t)$ si suppone invertibile e con derivata continua.**
- **Chiamiamo con $t=\psi(x)$ la funzione inversa.**
- **Si calcola il differenziale della x, $dx= \varphi'(t)dt$ e nell'integrale precedente si sostituiscono le espressioni:**
  - $x=\varphi(t)$,
  - $dx=\varphi'(t)dt$,

Metodo di integrazione per sostituzione

- **Si calcola l'integrale così ottenuto e poi si sostituisce al posto della t il suo valore $t=\psi(x)$.**
- **La funzione che ne risulta è l'integrale indefinito cercato.**
- **Esempio:**

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx$$

Metodi di integrazione

- Il **metodo di integrazione per scomposizione** consiste nello scomporre la funzione che si deve integrare nella somma (algebrica) di funzioni, di ciascuna delle quali è noto l'integrale indefinito o almeno è più facile il calcolo.