CONTINUITÀ

Una funzione $f\colon [a,b] \to R$ è continua in x_0 se

- $f(x_0) = l$, esiste ed è finito
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- $l = f(x_0)$

Se una funzione non è continua, si dice discontinua; esistono i seguenti tipi di discontinuità

- Discontinuità di 1ª specie:

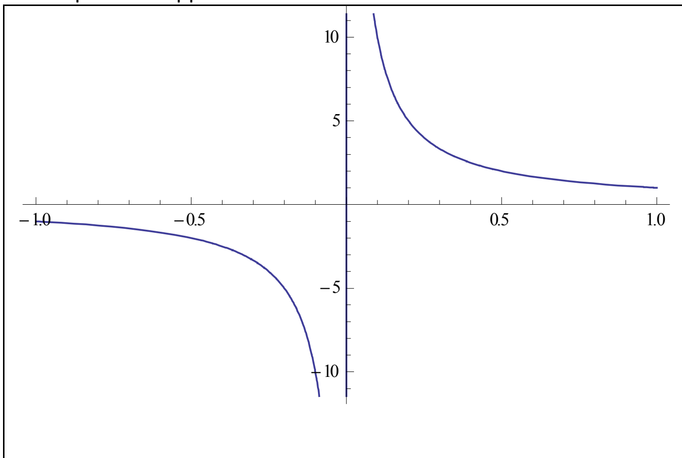
  $$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l_1 \neq l_2 = \lim_{x\to x_0^-} f(x); \quad \text{esistono finiti ma diversi i due limiti;}$$
  $$|l_1 - l_2| \text{ si chiama salto di } f \text{ in } x_0$$

- Discontinuità di 2ª specie: uno dei due limiti, destro o sinistro, non esiste o è infinito.
- Discontinuità di 3ª specie (eliminabile): la funzione non è definita in x_0 ma esiste ed è finito il $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.

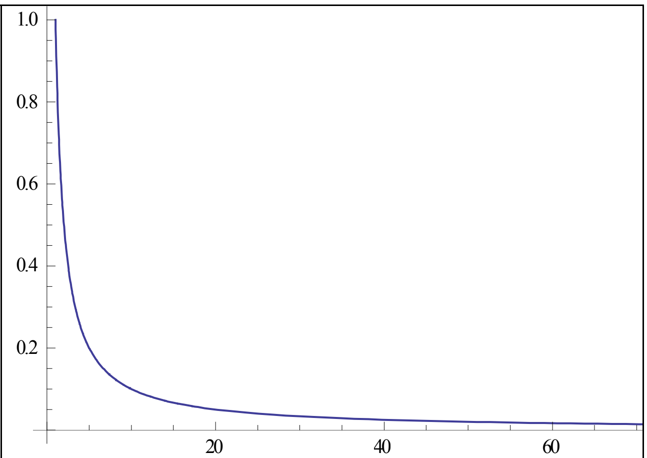
Teoremi fondamentali sulle funzioni continue

1) *Teorema di Weierstrass*: Se $f\colon [a,b] \to R$ è continua, in tutto l'intervallo chiuso e limitato, allora ammette massimo e minimo assoluti in $[a,b]$.

Esempi di non applicabilità del Teorema di Weierstrass

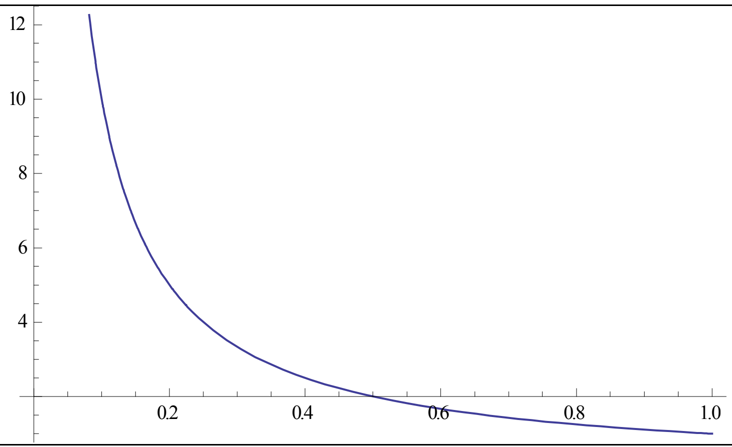


La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ **non è continua** in $[-1,1]$; in questo caso non esistono il massimo ed il minimo assoluti di $f(x)$, bensí gli estremi inferiore e superiore.



La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua in $[1,+\infty]$ (intervallo chiuso ma **illimitato**); in questo caso esiste il massimo assoluto di $f(x)$ (vale 1) ma non esiste il minimo, bensí l'estremo inferiore.

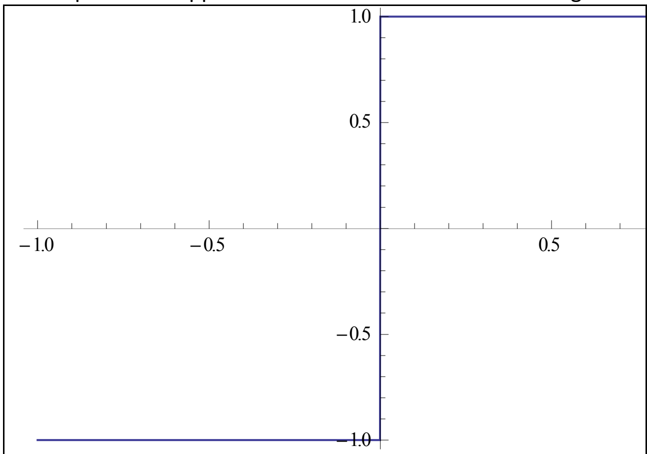
Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it



La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua in $(0,1]$ (intervallo limitato ma **aperto**); in questo caso esiste il minimo assoluto di $f(x)$ (vale 1) ma non esiste il massimo, bensí l'estremo superiore.

2) *Teorema sulll'esistenza degli zeri:* Se $f: [a, b] \to R$ è continua, in tutto l'intervallo chiuso e limitato, ed inoltre $f(a)f(b) < 0$ allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

Esempio di non applicabilità del Teorema di esistenza degli zeri



La funzione $f(x) = \frac{x}{|x|}$ si chiama "segno di x". Dalla definizione di valore assoluto si deduce

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

La funzione $f(x) = \frac{x}{|x|}$ **non è continua** in $[-1,1]$; in questo caso, pur essendo $f(-1)f(1) = -1 < 0$ non esistono soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.

DERIVABILITÀ

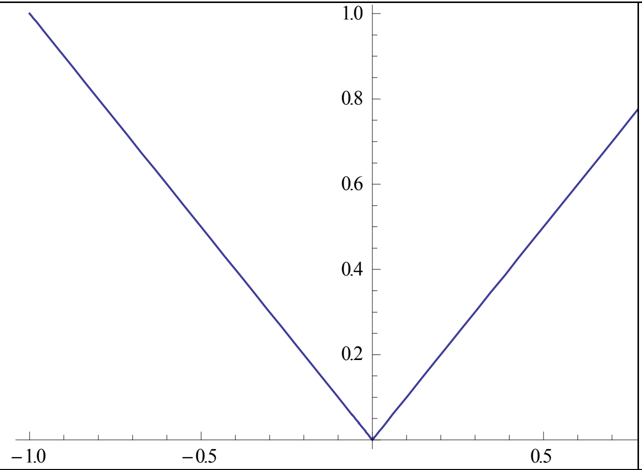
Definizione di derivata di una funzione in un punto x_0:

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$; limite finito.

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it

Il significato geometrico di $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$; l'equazione della retta tangente è $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

È importante osservare che se $f(x)$ **è derivabile in** x_0 è anche continua in ; **il viceversa non vale**.



La funzione $f(x) = |x|$ è continua in 0 ma non derivabile in 0; infatti

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ -1 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

di modo che

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x \to 0^-} f'(x);$$

Il punto 0 è un punto angoloso per la funzione.

Tabella delle derivate fondamentali

$$y = f(x) \Rightarrow y' = f'(x)$$

FUNZIONE COSTANTE: $y = c \Rightarrow y' = 0$

FUNZIONE POTENZA: $y = x^n$ con $n \in \mathbb{R} \Rightarrow y' = nx^{n-1}$

$y = x \Rightarrow y' = 1$

$y = \dfrac{1}{x} \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{x^2}$

$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$y = \sqrt[n]{x^m} \Rightarrow y' = \dfrac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$

FUNZIONE LOGARITMICA: $y = \log_a x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}\log_a e$

$y = \ln x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}$

FUNZIONE ESPONENZIALE: $y = a^x \Rightarrow y = a^x \ln a$

$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it

FUNZIONI GONIOMETRICHE	FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE
$y = senx \quad \Rightarrow y' = \cos x$	$y = arcsenx \quad \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \cos x \quad \Rightarrow y = -senx$	$y = \arccos x \quad \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = tgx \quad \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$	$y = arctgx \quad \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = ctgx \quad \Rightarrow y' = -\frac{1}{sen^2 x}$	$y = arcctgx \quad \Rightarrow y' = -\frac{1}{1+x^2}$

REGOLE DI DERIVAZIONE:

derivata di una **somma** di funzioni: $D(k \cdot f(x) + h \cdot g(x)) = k \cdot f'(x) + h \cdot g'(x)$

derivata di un **prodotto**: $D(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

derivata di un **rapporto**: $D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

derivata di una **funzione composta** (funzione di funzione):

$$D(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

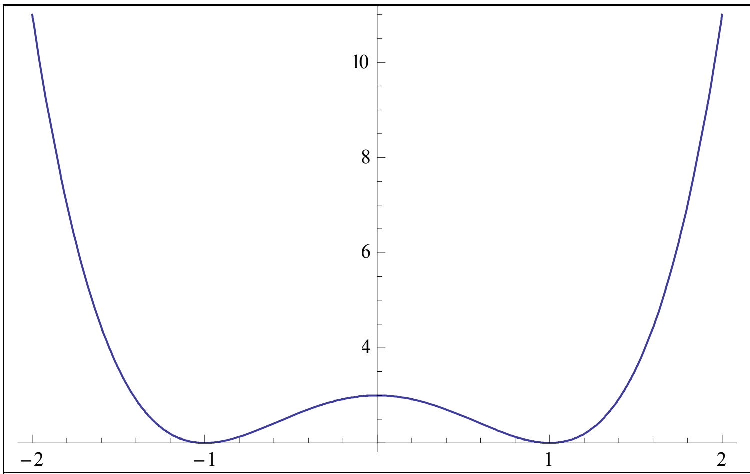
Applicazione della derivata allo studio di funzione. Punti stazionari; massimi e minimi

Un punto stazionario per una funzione $f\colon [a, b] \to R$ derivabile, è un punto x_0 in cui si annulla la derivata prima: $f'(x_0) = 0$.

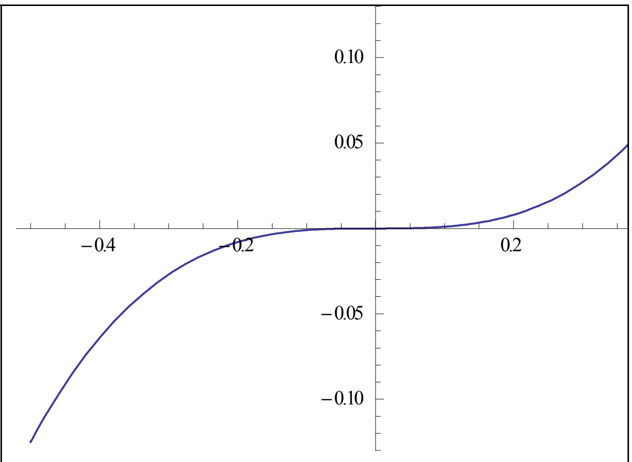
Monotonia per una funzione $f\colon [a, b] \to R$ derivabile: $\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{crescente} \\ f'(x) < 0 & \text{decrescente} \end{cases}$

Concavità per una funzione $f\colon [a, b] \to R$ derivabile: $\begin{cases} f''(x) > 0 & \text{concavità verso l'alto} \\ f''(x) < 0 & \text{concavità verso il basso} \end{cases}$

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it



La funzione $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ è continua e derivabile per ogni x. La derivata prima è $f'(x) = 4x^3 - 4x$; pertanto la funzione è decrescente in $(-\infty, -1)$ ed in $(0,1)$ e crescente in $(-1,0)$ ed in $(1, +\infty)$. I punti stazionari sono $-1, 0$ ed 1 e sono minimo, massimo e minimo, respettivamente.



La funzione $f(x) = x^3$ è continua e derivabile per ogni x. La derivata prima è $f'(x) = 3x^2$; pertanto 0 è un punto stazionario per la funzione, ma non estremo (massimo o minimo) perchè $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, di modo che la funzione è crescente. Siccome $f''(x) = 6x$, la funzione ha concavità verso l'altro dopo lo zero e verso il basso prima dello zero; inoltre, dovuto a ciò e al fatto che $f''(0) = 0$, zero è un punto di flesso.

Osservazione:

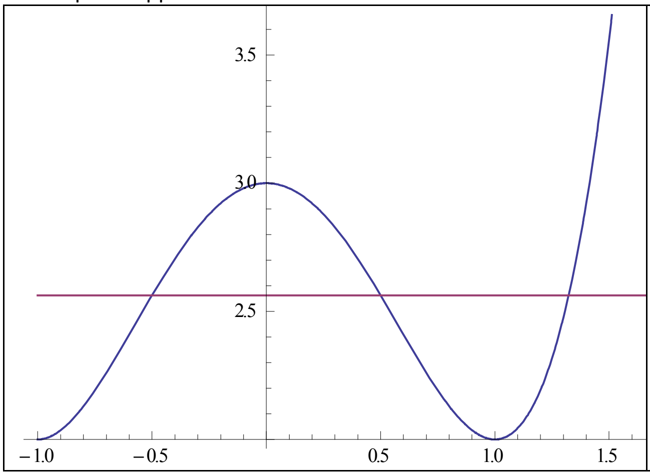
1. Se $f'(x) < 0$ per $x < x_0$, $f'(x) > 0$ per $x > x_0$ e $f'(x_0) = 0$, allora x_0 è punto di minimo
2. Se $f'(x) > 0$ per $x < x_0$, $f'(x) < 0$ per $x > x_0$ e $f'(x_0) = 0$, allora x_0 è punto di massimo
3. Se $f''(x) < 0$ per $x < x_0$, $f''(x) > 0$ per $x > x_0$ e $f''(x_0) = 0$, allora x_0 è punto di flesso
4. Se $f''(x) > 0$ per $x < x_0$, $f''(x) < 0$ per $x > x_0$ e $f''(x_0) = 0$, allora x_0 è punto di flesso

Teoremi sulle funzioni derivabili

1) *Teorema di Rolle:* Se $f: [a, b] \to R$ è continua, in tutto l'intervallo chiuso e limitato, derivabile in (a, b) e tale inoltre che $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$tale che $f'(c) = 0$.
2) *Teorema di Cauchy*: Se $f, g: [a, b] \to R$ sono continue, in tutto l'intervallo chiuso e limitato e derivabile in (a, b), allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$tale che $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.
3) *Teorema di Lagrange:* Se $f: [a, b] \to R$ è continua, in tutto l'intervallo chiuso e limitato e derivabile in (a, b), allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
4) *Teorema di Fermat:* Se $f: [a, b] \to R$ è una funzione tale che in un certo punto $x_0 \in (a, b)$ ammetta un estremo (massimo o minimo relativo), e tale che sia derivabile in tale punto; allora necessariamente $f'(x_0) = 0$.

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it

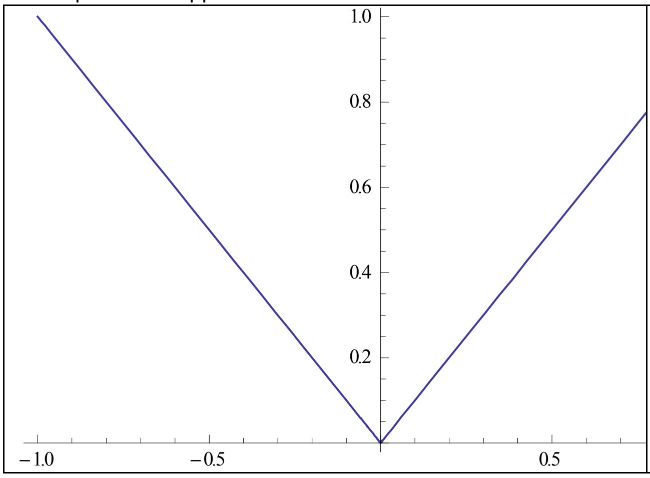
Esempio di applicabilità dei Teorema di Rolle e Fermat



La funzione $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ è continua e derivabile (per ogni x) ed inoltre $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$; è quindi applicabile il **Teorema di Rolle**. La derivata prima $f'(x) = 4x^3 - 4x$ si annulla in 0 ed 1, che appartengono entrambi all'intervallo $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

Inoltre (**Teorema Fermat**), 0 ed 1 sono un massimo ed un minimo (estremi) in cui la funzione è derivabile e la cui derivata è, appunto, 0.

Esempio di non applicabilità dei Teorema di Rolle e Fermat



La funzione $f(x) = |x|$ è continua in 0 ma non derivabile in 0; il punto 0 è un estremo della funzione (minimo assoluto) ed in questo punto la derivata non si annulla (perchè non esiste).

Questa stessa funzione assume gli stessi valori in -1 ed in 1, ed è continua nell'intervallo $[-1,1]$, ma non derivabile. Il Teorema di Rolle non è applicabile, ed infatti la derivata di $f(x) = |x|$ (dove esiste) è sempre diversa da zero.

Osserazione importante: I punti di massimo e di minimo assoluti di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato si cercano negli estremi, nei punti di non derivabilità e in eventuali punti stazionari (ovvero punti in cui si annulla la derivata prima).

SVILUPPI DI TAYLOR E MCLAURIN

Polinomio di Taylor di una funzione $f(x)$ derivabile $n+1$ volte in un punto x_0.

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)(x-x_0)^k}{k!}$$

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it

Sviluppo notevole di McLaurin	Generalizzazione
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, allora $e^{f(x)} = 1 + f(x) + \frac{f(x)^2}{2!} + \frac{f(x)^3}{3!} + \cdots$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$	Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, allora $\ln(1+f(x)) = f(x) - \frac{f(x)^2}{2} + \frac{f(x)^3}{3} - \frac{f(x)^4}{4} + \cdots$
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$	Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, allora $\sin(f(x)) = f(x) - \frac{f(x)^3}{3!} + \frac{f(x)^5}{5!} - \frac{f(x)^7}{7!} + \cdots$
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$	Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, allora $\cos(f(x)) = 1 - \frac{f(x)^2}{2!} + \frac{f(x)^4}{4!} - \frac{f(x)^6}{6!} + \cdots$
$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{12x^5}{15} + \cdots$	Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, allora $\tan(f(x)) = f(x) + \frac{f(x)^3}{3} + \frac{12f(x)^5}{15} + \cdots$
$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$	Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, allora $\arctan(f(x)) = f(x) - \frac{f(x)^3}{3} + \frac{f(x)^5}{5} - \frac{f(x)^7}{7} + \cdots$

Errore $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \begin{cases} o((x-x_0)^n), & \text{Errore secondo Peano} \\ \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^n, & \text{Errore secondo Lagrange} \end{cases}$

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it