Metodi statistici per l'analisi dei dati

Confronto tra due trattamenti

1

Motivazioni

Confronto tra trattamenti

- Obbiettivo:
  - Confrontare due diverse condizioni (anche definiti trattamenti) per cui sono stati condotti gli esperimenti.

2

Esempio introduttivo

Confronto tra trattamenti

- L'impasto dell'esempio introduttivo è modificato aggiungendo un additivo che dovrebbe ridurne la viscosità.
- A tal proposito si prendono in considerazione
  - 10 misure sperimentali di viscosità del trattamento originale (**controllo**)
  - 10 misure sperimentali di viscosità del prodotto alimentare modificato.

j	Crema modificata (cp)	Controllo (cp)
1	67.40	70.00
2	65.60	70.52
3	68.84	73.00
4	65.40	72.00
5	66.08	71.44
6	68.16	71.00
7	67.84	72.88
8	68.60	71.60
9	66.36	71.84
10	66.28	72.60
$\bar{y}$	**67.06**	**71.69**

3

Introduzione – Esempio

Confronto tra trattamenti

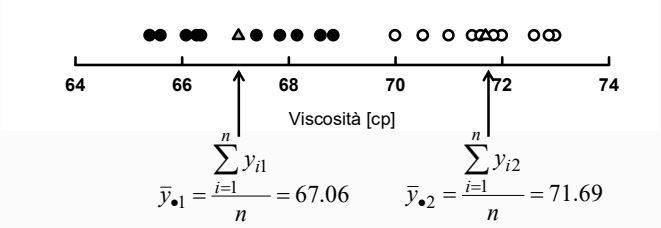
- Il valore medio delle misure del prodotto modificato è minore del valore medio del prodotto originale
- Due possibili spiegazioni:
  - Le due formulazioni sono realmente differenti
  - La differenza osservata nei trattamenti è dovuta alle fluttuazioni inevitabilmente presenti nelle misure sperimentali, e le due formulazioni sono di fatto equivalenti
- **Obiettivo**:
- Stabilire in maniera oggettiva se i due campioni sono **realmente** differenti ricorrendo a strumenti statistici rigorosi

4

Concetti di statistica di base – Descrizioni grafiche della variabilità

Confronto tra trattamenti

- **Diagramma per punti**
- Utile per campioni di piccole dimensioni (sino a 20 osservazioni).



$$\bar{y}_{\bullet 1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{i1}}{n} = 67.06 \qquad \bar{y}_{\bullet 2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{i2}}{n} = 71.69$$

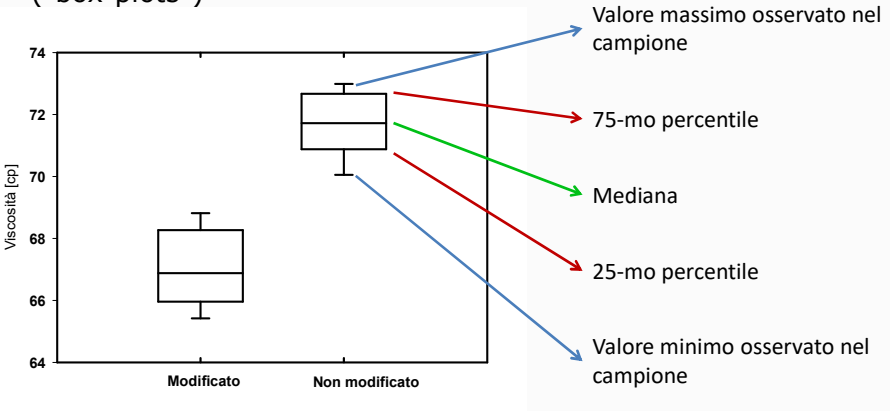
- Il diagramma permette di riconoscere il **trend centrale** e la **dispersione** dei dati.
- Un'ispezione visiva (**qualitativa**) del diagramma rivela che i due trattamenti sono verosimilmente differenti.

5

Concetti di statistica di base – Descrizioni grafiche della variabilità

Confronto tra trattamenti

- Rappresentazione dei campioni tramite "diagrammi a scatola" ("box-plots")



6

Confronto tra campioni

Confronto tra trattamenti

- I due diversi trattamenti possono essere visti come due **livelli del fattore** "formulazioni"
- **Modello statistico per i dati:**

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \qquad \begin{cases} i = 1,2 \\ j = 1,2,\ldots,n_i \end{cases}$$

y_{ij}
j-esima osservazione dal livello i-esimo

μ_i
Media della risposta al livello i-esimo

ε_{ij}
Variabile aleatoria normale associata con la j-esima osservazione

7

Confronto tra campioni

Confronto tra trattamenti

- **Assunzione**:
- Gli errori ε sono normali, indipendenti e identicamente distribuiti (**i.i.d.**):

$$\varepsilon \approx N\left(0, \sigma^2\right)$$

8

Confronto tra campioni – Test statistici – Definizione del problema

Confronto tra trattamenti

- Dal punto di vista formale, si possono definire le seguenti **ipotesi nulla H_0** e l'**ipotesi alternativa H_1**:

$$H_0: \quad \mu_1=\mu_2$$

$$H_1: \quad \mu_1\neq\mu_2$$

9

Confronto tra campioni – Test statistici – Definizione del problema

Confronto tra trattamenti

- **Tipologia di errori** che possono essere commessi durante un test statistico:
- **Errore di tipo I**: **rigettare** l'ipotesi H_0 di partenza nonostante essa fosse **vera**

$$\alpha = P(\text{errore di tipo I}) = P(\text{rigetto } H_0 \mid H_0 \text{ è vera})$$

- **Errore di tipo II**: **non rigettare** H_0 nonostante essa fosse **falsa**

$$\beta = P(\text{errore di tipo II}) = P(\text{non rigetto } H_0 \mid H_0 \text{ è falsa})$$

- Si deve ridurre al minimo il rischio (le probabilità α e β) di incorrere in questi due tipi di errore

10

Test statistici – Esempio: t-Test per il confronto di due campioni – Ricetta 1/4

Confronto tra trattamenti

- Scegliere un **livello di significatività** α del test (in genere α=0.05).
- Rappresenta la probabilità di sbagliare, nel caso in cui arrivassimo alla conclusione di rigetto dell'ipotesi nulla.
- Calcolare il **valore critico** $t_{\alpha/2}$ tale che:

$$P\left(-t_{\alpha/2} \le T \le t_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

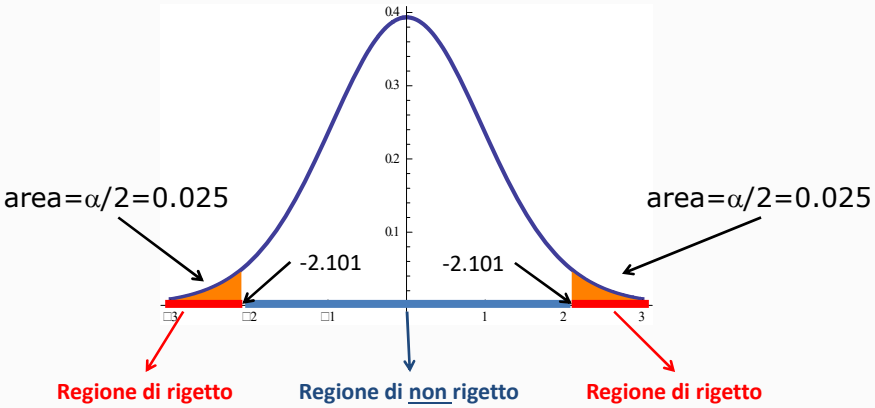
dove T è la distribuzione t di Student a (n_1+n_2-2) gradi di libertà

11

Test statistici – Esempio: t-Test per il confronto di due campioni – Ricetta 2/4

Confronto tra trattamenti

- Distribuzione T di student a 18 gdl con l'evidenzia delle regioni critiche



12

Test statistici – Esempio: t-Test per il confronto di due campioni – Ricetta 3/4

Confronto tra trattamenti

- Calcolare

$$t_0 = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{S_P^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

- dove S_P^2 è la stima della varianza campionaria comune $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$:

$$S_P^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

  - Nota: nel caso di $n=n_1=n_2$, l'espressione si riduce a

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}$$

13

Test statistici – Esempio: t-Test per il confronto di due campioni – Ricetta 4/4

Confronto tra trattamenti

- Si confronta il t_0 osservato con il valore critico $t_{\alpha/2}$

$$|t_0| < t_{\alpha/2}$$

- **non** rigettiamo l'ipotesi nulla H_0.
- Non si hanno evidenze sperimentali tali da affermare che i due trattamenti siano **significativamente diversi**

$$|t_0| > t_{\alpha/2}$$

- Si **rigetta** l'ipotesi nulla: i due trattamenti sono significativamente diversi
- Si corre un «rischio» di affermare la conclusione sbagliata pari al livello di significatività α del test

14

Test statistici – Esempio: t-Test per il confronto di due campioni – Teoria

Confronto tra trattamenti

- La differenza delle medie dei due trattamenti può essere vista come una VA di tipo normale:

$$\bar{y}_1 - \bar{y}_2 \sim N\left[\mu_1 - \mu_2, \sigma^2\left(1/n_1 + 1/n_2\right)\right]$$

- **Se** i due trattamenti provenissero dalla **stessa popolazione** (ovvero $\mu_1=\mu_2$, $\sigma_1^2=\sigma_2^2$), e la **varianza σ^2 fosse nota**, la statistica:

$$z_0 = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sigma\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$$

- sarebbe un valore osservato di una Gaussiana di tipo standard ($Z \sim N(0,1)$)
- t_0 è un'osservazione di una T di student a (n_1+n_2-2) gdl:

15

Test statistici – Esempio: t-Test per il confronto di due campioni – Teoria

Confronto tra trattamenti

- Dato che la **varianza è ignota**, si ricorre alla sua stima S_P^2, per cui la statistica t_0:

$$t_0 = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{S_P^2\left(1/n_1 + 1/n_2\right)}}$$

- è relativa ad una ***T* di student a (n_1+n_2-2)** g.d.l.
- **Se H_0 fosse vera**, ci si aspetta quindi che la probabilità per t_0 di cadere nell'intervallo [$-t_{\alpha/2}$, $t_{\alpha/2}$] sia pari a 100(1-α).
- Un campione che produce dei risultati al di fuori di questo intervallo non sarebbe usuale
  - è quindi più plausibile che l'ipotesi nulla di partenza sia sbagliata

16

Test statistici – Esempio: t-Test per il confronto di due campioni – Applicazione

Confronto tra trattamenti

- Per le emulsioni alimentari dell'esempio
- Calcolo valore critico $t_{\alpha/2}$:
  - (da tabelle disponibili in letteratura o, equivalentemente, con l'ausilio di software)

  $t_{\alpha/2}$=2.101
- Calcolo statistica t_0:

$$S_P^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{9\cdot 1.602 + 9\cdot 0.983}{18} = 1.2928$$

$$t_0 = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{S_P\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} = \frac{67.06 - 71.69}{1.137\sqrt{1/10 + 1/10}} = -9.109$$

17

Test statistici – Esempio: t-Test per il confronto di due campioni – Applicazione

Confronto tra trattamenti

- Conclusioni:

$$|t_0| \gg t_{\alpha/2}$$

- Il valore osservato t_0 è maggiore (in valore assoluto) del valore critico $t_{\alpha/2}$

- I **due trattamenti sono significativamente differenti** con un **rischio (errore di tipo I) del 5%** che tale conclusione sia sbagliata

18

Test statistici – Definizione ipotesi alternative

Confronto tra trattamenti

- L'ipotesi alternativa presa in considerazione

$$H_1: \quad \mu_1 \neq \mu_2$$

- contempla l'eventualità che i due trattamenti presi in considerazione siano solo **differenti**

$$H_1: \quad \mu_1 < \mu_2 \quad \text{oppure } \mu_1 < \mu_2$$

- Tale ipotesi prende il nome di **ipotesi alternativa "two-sided"** (valori sia maggiori che minori portano al rigetto di H_0).
- In altri casi, la natura del problema può suggerire altre espressioni per le ipotesi alternative.

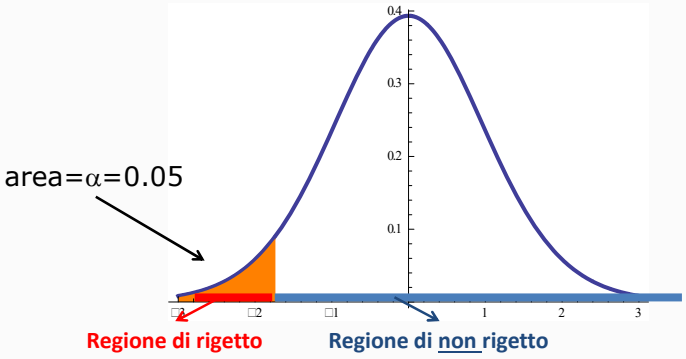
19

Test statistici – Definizione ipotesi alternative «one sided»

Confronto tra trattamenti

$$H_1: \quad \mu_1 < \mu_2$$

- Si arriva al rigetto dell'ipotesi nulla solo se μ_1 è significativamente **minore** di μ_2



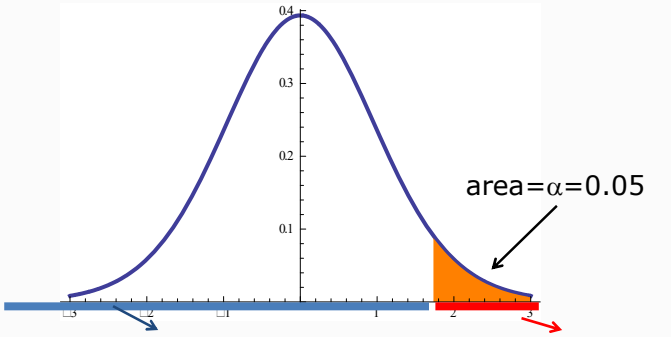
20

Test statistici – Definizione ipotesi alternative «one sided»

Confronto tra trattamenti

H_1: $\mu_1 > \mu_2$

- Si arriva al rigetto dell'ipotesi nulla solo se μ_1 è significativamente **maggiore** di μ_2



21

Intervalli di fiducia – Differenza di medie

Confronto tra trattamenti

- Supponiamo di essere interessati a determinare un intervallo di fiducia al 95% per la differenza $\delta_1=\mu_1-\mu_2$ delle medie.
- A tale scopo, si consideri la statistica:

$$t = \frac{d_1 - \delta_1}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

- essa è distribuita secondo una $t_{n1+n2-2}$.

22

Intervalli di fiducia – Differenza di medie

Confronto tra trattamenti

- Da cui:

$$P\left(-t_{\alpha/2} \le \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \le t_{\alpha/2}\right) = \gamma$$

- ovvero:

$$P\left((\bar{y}_1 - \bar{y}_2) - t_{\alpha/2}S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \le (\mu_1 - \mu_2) \le (\bar{y}_1 - \bar{y}_2) + t_{\alpha/2}S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right) = \gamma$$

- Per cui

$$CONF\left\{\underbrace{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) - t_{\alpha/2}S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}_{L} \le \underbrace{(\mu_1 - \mu_2)}_{\theta} \le \underbrace{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) + t_{\alpha/2}S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}_{U}\right\}$$

23

Intervalli di fiducia differenza di due medie - Applicazione

Confronto tra trattamenti

- Per l'esempio introduttivo

$$CONF\left\{\underbrace{(67.06 - 71.69)}_{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)} - \underbrace{(2.101)}_{t_{\alpha/2}}\underbrace{1.137}_{S_P}\underbrace{\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}}_{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \le (\mu_1 - \mu_2) \le \underbrace{(67.06 - 71.69)}_{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)} + \underbrace{(2.101)}_{t_{\alpha/2}}\underbrace{1.137}_{S_P}\underbrace{\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}}_{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right\}$$

- ovvero:

$$CONF\{-5.70 \le \mu_1 - \mu_2 \le -3.56\}$$

- Da notare che il valore μ_1-μ_2=0 non è incluso nell'intervallo, confermando ulteriormente che l'ipotesi $\mu_1=\mu_2$ non è plausibile per il livello di significatività $\alpha=1-\gamma=5\%$.

24

Test statistici – Esempio: t-Test per il confronto di due campioni – Estensioni

Confronto tra trattamenti

- $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ – **Parte 1/2**
- In presenza di un test delle ipotesi:

$$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \quad \mu_1 \neq \mu_2$$

- in cui non è possibile assumere che le varianze dei campioni siano uguali, si può ricorrere alla statistica test

$$t_0 = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

25

Test statistici – Esempio: t-Test per il confronto di due campioni – Estensioni

Confronto tra trattamenti

- **Caso in cui $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ – Parte 2/2**
- essendo la statistica *t* ben approssimata da una *t* di student a υ gradi di libertà:

$$\upsilon = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} - \frac{\left(S_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$$

26

Test statistici – Esempio: Test per il confronto di due campioni – Estensioni

Confronto tra trattamenti

- **σ_1^2 e σ_2^2 note – 1/2**
- In presenza di un test delle ipotesi:

$$H_0: \quad \mu_1=\mu_2$$

$$H_1: \quad \mu_1\neq\mu_2$$

- in cui le varianze sono a priori note, si può usare la statistica:

$$z_0 = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

- Se entrambi le popolazioni sono normali (o le dimensioni del campioni sono grandi) la statistica $z_0 \sim N(0,1)$

27

Test statistici – Esempio: Test per il confronto di due campioni – Estensioni

Confronto tra trattamenti

- **σ_1^2 e σ_2^2 note – 2/2**
- La regione critica per i test delle ipotesi può essere calcolata usando la distribuzione **normale** di tipo **standard** anziché la t di student. Sarà necessario calcolare il valore critico z_α tale che, per esempio (caso test ipotesi two-sided):

$$P\left(-z_{\alpha/2} \le Z \le z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

28

Esempio introduttivo – Confronto medie con "blocco"

Confronto tra trattamenti

- Si consideri di nuovo il caso dell'esempio introduttivo.
- La randomizzazione dei campioni ha portato alla selezione casuale di:
  - 10 campioni da modificare
  - 10 campioni non trattati che saranno usati come controllo

- Tale politica implica una inevitabile sorgente di variazione:
  - la **casualità** nella **scelta** dei campioni da destinare ai due trattamenti si aggiunge alla eventuale variazione indotta dalla differenza dei trattamenti

29

Esempio introduttivo – Confronto medie con "blocco"

Confronto tra trattamenti

- Strategia possibile per eliminare tale sorgente di incertezza:

1. Si selezionano 10 campioni (anziché 20) non modificati
2. Se ne misura la viscosità
3. In seguito, gli **stessi** campioni sono modificati con l'aggiunta dell'additivo.
4. Si ripete la misura della viscosità sui campioni modificati

30

Esempio introduttivo – Confronto medie con "blocco"

Confronto tra trattamenti

- Il modello statistico per descrivere la procedura è il seguente:

$$y_{ij} = \mu_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \qquad \begin{cases} i = 1,2 \\ j = 1,2,\ldots,n_i \end{cases}$$

y_{ij}
j-esima osservazione dal livello i-esimo

μ_i
Media al livello i-esimo

β_j
Effetto del campione specifico

ε_{ij}
Variabile aleatoria normale associata con la j-esima osservazione

31

Esempio introduttivo – Confronto medie con "blocco"

Confronto tra trattamenti

- In questo modo è possibile valutare la differenza per la coppia *j-ma*:

$$d_j = y_{1j} - y_{2j} \qquad j = 1,\ldots,n$$

- Il valore atteso di questa differenza è

$$\begin{aligned} \mu_d &= E[d_j] \\ &= E[y_{1j} - y_{2j}] \\ &= E[y_{1j}] - E[y_{2j}] \\ &= \mu_1 + \beta_j - (\mu_2 + \beta_j) \\ &= \mu_1 - \mu_2 \end{aligned}$$

È possibile fare inferenza sulla differenza di medie lavorando semplicemente con **le differenze delle coppie**

32

Esempio introduttivo – Confronto medie con "blocco"

Confronto tra trattamenti

- Testare H_0: $\mu_1=\mu_2$ è equivalente a testare

$$H_0: \quad \mu_d=0$$

$$H_1: \quad \mu_d\neq 0$$

- La statistica test per questa ipotesi è ancora una *t* a (n-1) gdl:

$$t_0=\frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{S_d^2}{n}}}$$

- dove

$$\bar{d}=\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j}{n} \quad \text{e} \quad S_d^2=\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(d_j-\bar{d}\right)^2}{n-1}$$

33

Esempio introduttivo – Confronto medie con "blocco"

Confronto tra trattamenti

- La possibilità di una campagna sperimentale con dati accoppiati, risulta da preferire alla campagna sperimentale completamente randomizzata.
- Si elimina una sorgente di incertezza dovuta alle differenze eventualmente presenti tra i campioni (e non dovute ai trattamenti).
- La filosofia del "blocco"permette di eliminare sorgenti di incertezza presenti nel campione di dati.

34