

Circuiti Magnetici

Introduzione

Un circuito magnetico è il volume di mezzo materiale entro il quale si svolgono le linee di un campo magnetico prodotto da correnti che fluiscono in un sistema di conduttori. Nello studio dei circuiti magnetici ci riferiremo a campi magnetici quasi stazionari per i quali, cioè, le variazioni nel tempo delle grandezze elettromagnetiche sono sufficientemente lente da consentire di trascurare le correnti di spostamento rispetto alle correnti di conduzione. In questo caso, le equazioni di Maxwell, che descrivono i fenomeni elettromagnetici, si semplificano, come si mostrerà nel seguito. In **Tabella 1** sono riportate le Equazioni di Maxwell in forma differenziale e in forma integrale:

Tabella 1 - Equazioni di Maxwell

Forma Differenziale	Forma Integrale	
$\nabla \times \bar{E} = \text{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$	$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$	<i>L. Faraday</i>
$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$	$\oint \bar{H} \cdot d\bar{l} = I + \int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{S}$	<i>L. Ampère</i>
$\nabla \cdot \bar{D} = \rho$	$\int_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = Q$	<i>L. Gauss</i>
$\nabla \cdot \bar{B} = 0$	$\int_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0$	<i>L. Gauss</i>

Dove \bar{E} [V/m] e \bar{D} [C/m²] sono i vettori campo elettrico e spostamento dielettrico e \bar{H} [A/m] e \bar{B} [T] sono i vettori campo magnetico e induzione magnetica, Φ [Wb] è il flusso di induzione, \bar{J} [A/m²] è il vettore densità di corrente, I [A] è la corrente, ρ è la densità di carica. Si può passare dalla forma differenziale o puntuale a quella integrale utilizzando i due teoremi del calcolo vettoriale:

il Teorema di Stokes:

$$\int_S (\nabla \times \bar{A}) \cdot d\bar{S} = \oint_l \bar{A} \cdot d\bar{l}$$

e il Teorema della Divergenza:

$$\int_V (\nabla \cdot \bar{A}) \cdot dV = \oint_S \bar{A} \cdot d\bar{S}$$

I campi sopra citati si sviluppano in mezzi materiali (conduttori, dielettrici, magnetici) caratterizzati, a seconda del fenomeno che li coinvolge, dalle seguenti grandezze scalari: conduttività σ [S/m]; permittività dielettrica ε [F/m]; permeabilità magnetica μ [H/m]. In mezzi materiali, che assumeremo in questa trattazione per ipotesi continui, omogenei, isotropi e lineari, le prime due grandezze sono costanti caratteristiche del materiale mentre la terza varia, nei materiali ferromagnetici che verranno trattati nel seguito, al variare della magnetizzazione dello stesso materiale¹.

Per la modellazione dei campi elettromagnetici nei mezzi materiali si fa ricorso, oltre che alle equazioni di Maxwell, anche alle equazioni costitutive del mezzo che descrivono il legame fra le grandezze

¹ In un mezzo materiale la relazione che lega \bar{B} ad \bar{H} è: $\bar{B} = \mu_0 \bar{H} + \mu_0 \bar{M}$ dove la magnetizzazione \bar{M} rappresenta la densità dei dipoli magnetici per unità di volume. Poiché $\bar{M} = \chi_m \bar{H}$ con χ_m suscettività magnetica del materiale, la precedente relazione si può riscrivere come: $\bar{B} = \mu_0 \bar{H} + \mu_0 \chi_m \bar{H} = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m) \bar{H}$. La quantità $1 + \chi_m$ è la permeabilità magnetica relativa μ_r del materiale.

coinvolte. In **Tabella 2** sono riportate le equazioni costitutive di un mezzo nel quale si vogliono studiare il campo di corrente, il campo elettrico e il campo magnetico stazionari, rispettivamente:

Tabella 2 – Equazioni costitutive dei mezzi materiali

Campo	Equazione costitutiva
Campo di corrente	$E=\rho J$
Campo elettrico	$D=\epsilon E$
Campo magnetico	$B=\mu H$

In condizioni di stazionarietà o quasi stazionarietà il campo magnetico è descritto dalle equazioni:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \text{ oppure } \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \text{ oppure } \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2)$$

L'equazione (1) rappresenta la *Legge di Ampère*: l'integrale circolare è esteso a una linea chiusa su cui è definito un verso di percorrenza e la corrente I è la totale corrente concatenata con la linea chiusa. Con corrente intendiamo tanto lo spostamento delle cariche libere quanto la cosiddetta «corrente di spostamento», dovuta alla variazione nel tempo del vettore densità di flusso elettrico. Il segno positivo della corrente è quello di avanzamento di una vite destrorsa che si avvita nel verso associato alla linea chiusa (*Regola di Maxwell*), come indicato in **Figura 1**.

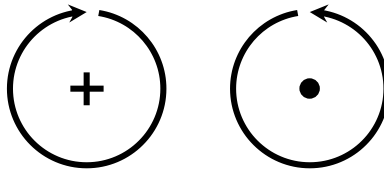


Figura 1– Regola di Maxwell o della Vite Destrogiara (a sinistra la corrente entra del piano della figura, a destra la corrente esce dal piano della figura).

L'equazione (2) rappresenta la *Legge di Gauss* per il campo magnetico e postula la solenoidalità del vettore induzione magnetica.

Definendo il flusso del vettore induzione magnetica come:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

e applicando l'integrale a una superficie chiusa si ha:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

ovvero il flusso magnetico che attraversa una superficie chiusa è nullo.

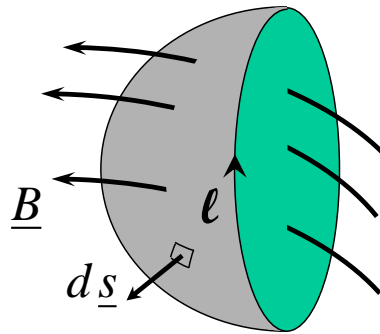


Figura 2 – Flusso concatenato con una linea chiusa.

Diverse superfici che hanno lo stesso contorno, hanno lo stesso flusso concatenato. Si parla quindi spesso di flusso concatenato con una linea chiusa, intendendo con questa, il contorno della superficie su cui si calcola il flusso del vettore induzione magnetica (**Figura 2**). Alla linea chiusa è associato un verso positivo di percorrenza che è in relazione con il verso positivo del campo secondo la regola di Maxwell.

Si sperimenta che una carica q in movimento con velocità \vec{v} nelle vicinanze di un conduttore percorso da una corrente I (**Figura 3**) è soggetta a una forza.

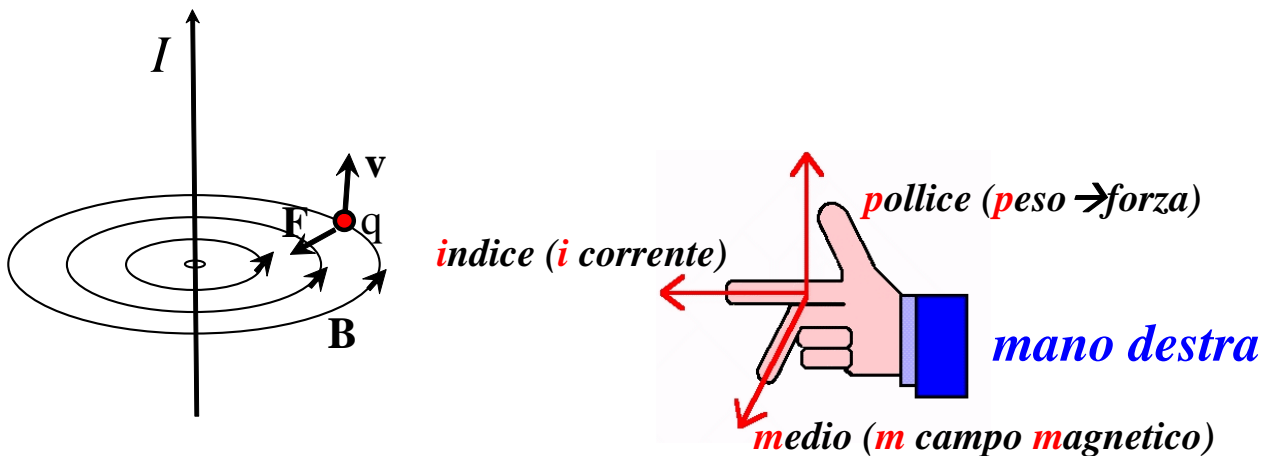


Figura 3 – Campo magnetico prodotto da una corrente filiforme.

La forza esercitata sulla carica dipende, oltre che dal valore dell'induzione magnetica, dalla carica e dalla velocità della stessa secondo la relazione:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = i \times \vec{B}$$

Tale forza è sempre perpendicolare sia alla direzione di spostamento della carica (cioè alla corrente i), sia al campo magnetico (**Figura 3**).

Una conseguenza è che il campo magnetico non è in grado di compiere un lavoro lungo le proprie linee di forza, perché queste sono perpendicolari alla forza che il campo può esercitare. Tali linee di forza sono sempre chiuse su se stesse (data la solenoidalità del campo magnetico) e nel caso siano prodotte da una corrente che circola in un filo, giacciono su un piano perpendicolare al filo stesso.

La *Legge di Biot-Savart* esprime la relazione tra il campo magnetico prodotto da una corrente I che scorre in un conduttore di lunghezza infinita e la corrente stessa, e dipende dal mezzo materiale in cui si sviluppa il campo attraverso la permeabilità magnetica μ :

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

Utilizzando la relazione costitutiva del mezzo magnetico, possiamo eliminare dalla legge di Biot-Savart la dipendenza dalle proprietà del mezzo, introducendo nella precedente equazione il campo magnetico H :

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

Induttanza

Come riportato precedentemente, la Legge di Gauss per i campi magnetici postula la solenoidalità del vettore induzione magnetica \vec{B} , ciò significa che le linee del campo magnetico sono chiuse e non esistono quindi né pozzi né sorgenti per tali linee, diversamente da quanto avviene per i campi elettrici.

Questa proprietà consente di introdurre il concetto di *tubo di flusso*, ovvero una regione di spazio entro cui si sviluppano le linee di campo magnetico, racchiusa da una superficie laterale in cui \vec{B} è tangente (vedi **Figura 4**).

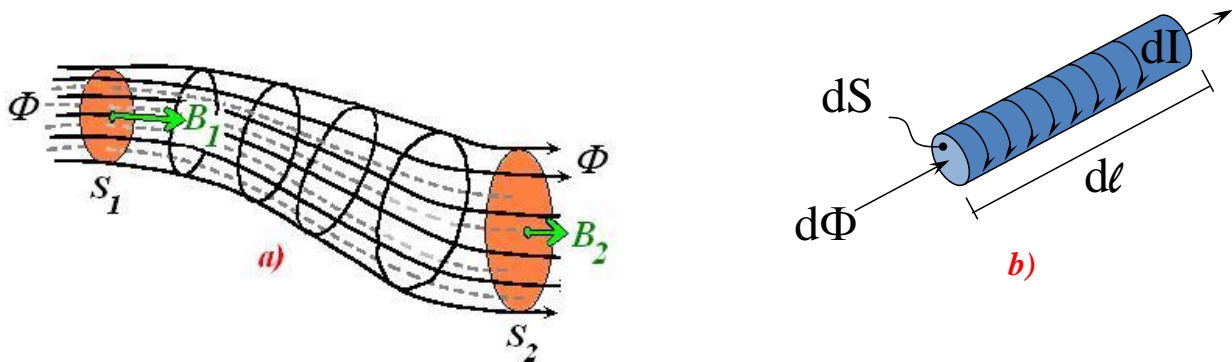


Figura 4 – Tubo di flusso (a) e solenoide infinitesimo (b).

Se supponiamo che il tubo di flusso sia di sezione trasversale infinitesima dS e lunghezza infinitesima $d\ell$, in modo da poter considerare il campo \vec{B} uniforme e diretto lungo la direzione dell'asse del tubo di flusso, il flusso $d\Phi$ sarà costante in ciascuna sezione trasversale e varrà:

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS$$

Possiamo ritenere che il campo nel tubo di flusso sia prodotto da un avvolgimento di N spire avvolto come in **Figura 4b**) e attraversato da una corrente dI . In flusso concatenato con le N spire del solenoide è:

$$d\Phi_c = N d\Phi = N B dS$$

Applicando la legge di Ampere a una linea chiusa che concatena le N spire si ha:

$$\oint_l \bar{H} \cdot d\mathbf{l} = NdI$$

La quantità NdI è la corrente concatenata con la linea chiusa e viene chiamata *Forza Magnetomotrice* (FMM). Possiamo definire l'induttanza del solenoide in **Figura 4b**) come:

$$L = \frac{d\Phi_c}{dI} = NBdS \frac{N}{Hdl} = N^2 \frac{B}{H} \frac{dS}{dl} = N^2 \frac{d\Phi}{dU_m} = N^2 \mu \frac{dS}{dl}$$

dove $U_m = \int_l \bar{H} \cdot d\mathbf{l}$ è la tensione magnetica.

Nell'espressione dell'induttanza L il rapporto $d\Phi/dU_m$ è indipendente dal numero di spire dell'induttore infinitesimo di **Figura 4b** e caratterizza quindi esclusivamente il tronco di tubo di flusso sul quale le spire sono avvolte. Questo rapporto è chiamato *Permeanza magnetica*, o semplicemente *Permeanza*, e sarà qui indicato con G_m :

$$G_m = \frac{d\Phi}{dU_m} = \mu \frac{dS}{dl} [H]$$

Il suo inverso è la *Riluttanza magnetica*:

$$R_m = \frac{dU_m}{d\Phi} = \frac{1}{\mu} \frac{dl}{dS} [H^{-1}]$$

Permeanza e riluttanza dipendono esclusivamente dalla geometria del tubo di flusso e dalle caratteristiche del materiale e legano fra loro il flusso concatenato e la corrente. L'introduzione di queste grandezze consente di eliminare le grandezze \bar{B} e \bar{H} dalle equazioni risolutive di un circuito magnetico, consentendo al contempo di esprimere le stesse in termini di grandezze integrali flusso concatenato e tensione magnetica. La relazione che caratterizza il generico tubo di flusso è quindi:

$$U_m = R_m \Phi \qquad \text{Legge di Hopkinson}$$

In questo modo si riesce a formalizzare l'analisi di un circuito magnetico in termini di sistema a parametri concentrati, simile a quella sviluppata per i circuiti elettrici. Escludendo, infatti, alcune peculiarità di cui parleremo di seguito, se si fa corrispondere alla tensione magnetica la tensione elettrica, al flusso la corrente e alla riluttanza magnetica la resistenza, la Legge di Hopkinson è analoga alla Legge di Ohm:

$$V = RI \qquad \text{Legge di Ohm}$$

Da questa analogia deriva la possibilità di sviluppare, per l'analisi dei circuiti magnetici, una trattazione simile a quella sviluppata per i circuiti elettrici. L'analogia tra grandezze elettriche e magnetiche è riportata nella seguente **Tabella 3**.

Tabella 3 – Corrispondenza tra grandezze elettriche e magnetiche

Circuiti Elettrici		Circuiti magnetici	
Grandezza	Simbolo	Grandezza	Simbolo
Forza elettromotrice	E [V]	Forza magnetomotrice	FMM [Aspire]
Tensione elettrica	V [V]	Tensione magnetica	U_m [Aspire]
Corrente	I [A]	Flusso	Φ [Wb]
Resistenza	R [Ω]	Riluttanza	R_m [H^{-1}]
Conduttanza	G [S]	Permeanza	G_m [H]
Campo Elettrico	\vec{E} [V/m]	Campo magnetico	\vec{H} [A/m]
Densità di corrente	\vec{J} [A/m ²]	Induzione magnetica	\vec{B} [T=Wb/m ²]
Conducibilità elettrica	σ [$(\Omega m)^{-1}$]	Permeabilità magnetica	μ [H/m]

Mezzi Materiali

Come visto precedentemente, la riluttanza, la permeanza, e quindi l'induttanza dipendono dalle caratteristiche del mezzo materiale in cui si svolge il campo magnetico. Ad esempio, un solenoide avvolto in aria avrà, a parità di geometria, un'induttanza diversa da quella di uno avvolto su di un nucleo di materiale ferromagnetico.

I mezzi materiali sono caratterizzati, dal punto di vista magnetico, dal valore della permeabilità magnetica:

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r \left[\frac{H}{m} \right]$$

dove μ_r è la permeabilità magnetica relativa (grandezza adimensionale) e μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [H/m]}$$

I mezzi materiali si dividono in due grandi categorie:

- Mezzi Normali
- Mezzi Anomali.

Mezzi Normali

Nei mezzi Normali la permeabilità magnetica non dipende dallo stato di magnetizzazione del mezzo cioè dai valori di \vec{B} ed \vec{H} . Il suo valore è costante e la relazione costitutiva $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ è lineare. Inoltre, il valore di permeabilità relativa è prossimo al valore unitario.

I mezzi normali, a loro volta, possono essere classificati in:

- Mezzi Diamagnetici: Nei mezzi diamagnetici si ha una perfetta compensazione tra i momenti magnetici di ogni singolo atomo l'applicazione di un campo magnetico esterno anche molto intenso dà luogo ad una magnetizzazione molto debole e diretta in verso opposto al campo. La suscettività χ_m è quindi negativa. Si tratta di suscettività molto piccole ed indipendenti dalla temperatura dell'ordine di -10^{-5}). Questi materiali hanno, quindi, un valore di permeabilità magnetica relativa inferiore all'unità (cioè minore di quella del vuoto) ma molto vicina ad essa.

Tra i mezzi diamagnetici ci sono il rame (Cu), l'argento (Ag), lo zinco (Zn), il piombo (Pb), ed anche l'acqua.

- Mezzi Paramagnetici: Se gli atomi o le molecole possiedono un momento magnetico proprio, l'azione del campo esterno produce un allineamento parziale dei momenti secondo il verso del campo. Tale effetto magnetizzante è il risultato dell'equilibrio tra l'azione ordinante del campo magnetico e quella disordinante dell'agitazione termica. Se l'interazione magnetica tra atomi adiacenti è trascurabile, non si ha magnetizzazione spontanea a livello macroscopico: la suscettività χ_m è positiva ed ha valori molto molto bassi alla temperatura ambiente (dell'ordine di 10^{-3}). Essa decresce al crescere della temperatura. Pertanto i materiali paramagnetici, come quelli diamagnetici, hanno un valore di permeabilità magnetica relativa di poco superiore all'unità e permeabilità magnetica $\mu \cong \mu_0$. Tra questi si hanno l'alluminio (Al), il magnesio (Mg), il manganese (Mn), il platino (Pt), ed anche l'aria.

In **Tabella 4** sono riportati i valori di permeabilità relativa per alcuni materiali diamagnetici e paramagnetici. Sono materiali diamagnetici anche i materiali isolanti quali l'aria e i materiali plastici. Dalla **Tabella 4** è evidente che i valori di permeabilità relativa per i mezzi normali differiscono molto poco dall'unità, cioè dalla permeabilità del vuoto. Nei calcoli si può assumere per questi materiali il valore di permeabilità pari a quella del vuoto ($4\pi \cdot 10^{-7}$ [H/m]).

Tabella 4 – Permeabilità Magnetica relativa di alcuni materiali diamagnetici, paramagnetici e ferromagnetici (all'induzione di 0,002 T)

Materiali Diamagnetici		Materiali Paramagnetici		Materiali Ferromagnetici (B=0,002 T)	
Materiale	μ_r	Materiale	μ_r	Materiale	μ_r
Rame	$1-10 \cdot 10^{-6}$	Alluminio	$1+22 \cdot 10^{-6}$	Ferro	200
Argento	$1-25 \cdot 10^{-6}$	Platino	$1+300 \cdot 10^{-6}$	Lamiere al Si	1000
Bismuto	$1-17 \cdot 10^{-6}$	Aria	$1+0,6 \cdot 10^{-6}$	Nichel	100-600
Acqua	$1-9 \cdot 10^{-6}$			Permalloy*	8000
				Mumetal**	20000

* Lega Ferro-Nichel

** Lega Ferro, Nichel, Molibdeno, Silicio, Rame

In **Figura 5** sono riportate le caratteristiche di magnetizzazione per i materiali diamagnetici (μ_D), paramagnetici (μ_P) e per il vuoto (μ_0). In tutti e tre i casi la caratteristica è lineare.

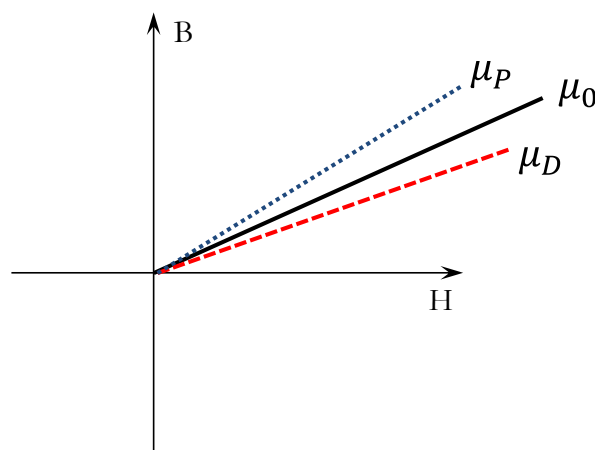


Figura 5– Caratteristiche di magnetizzazione per materiali diamagnetici (μ_D), paramagnetici (μ_P) e del vuoto (μ_0)

Nei Mezzi Anomali, invece, μ non è costante e dipende dallo stato di magnetizzazione, cioè dai valori di \bar{B} e \bar{H} . La relazione costitutiva $B = \mu H$ continua a valere ma è una relazione non-lineare. Questo, come si vedrà nel seguito, introdurrà delle particolarità nell'analisi dei circuiti magnetici.

Mezzi Anomali

I materiali anomali, comunemente chiamati ferromagnetici, hanno una permeabilità relativa molto alta (da 100 a oltre 20000) e funzione del punto di lavoro. Sono materiali ferromagnetici il ferro (Fe), il nichel (Ni), il cobalto (Co) e le loro leghe. In **Tabella 4** sono riportati i valori di permeabilità magnetica relativa all'induzione di 0,002T, per alcuni materiali ferromagnetici di uso comune.

Per tracciare la caratteristica di magnetizzazione dei materiali ferromagnetici si può procedere sperimentalmente: si prenda un provino di materiale ferromagnetico, totalmente smagnetizzato (il punto di lavoro corrisponde a valori nulli di \bar{B} ed \bar{H}). Si applichi un campo magnetico H crescente, ad esempio attraverso un avvolgimento di N spire come quello di **Figura 6**, facendo progressivamente aumentare la corrente I e quindi la FMM applicata.

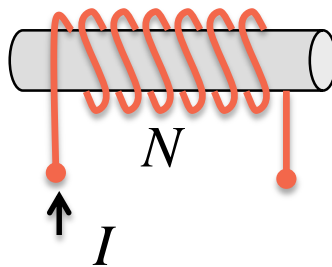


Figura 6 – Magnetizzazione di un provino

La caratteristica di magnetizzazione segue l'andamento riportato in **Figura 7** detta *Curva di Prima Magnetizzazione*.

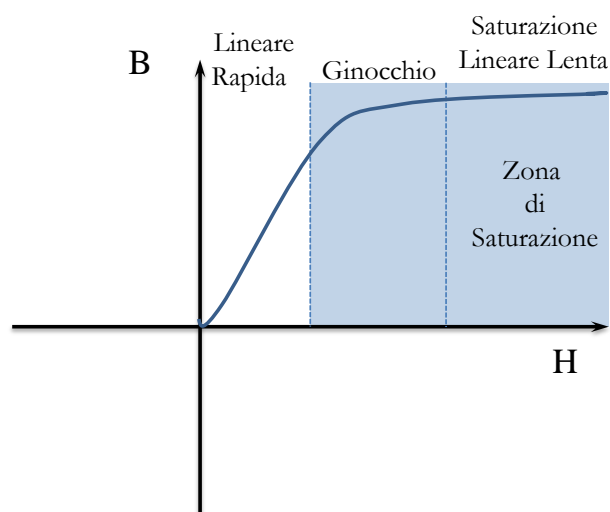


Figura 7 – Curva di Prima Magnetizzazione

All'aumentare del campo H , dopo un piccolo tratto, il comportamento è lineare con una pendenza ripida. Superato un certo valore di campo H , la caratteristica subisce una inflessione, cioè mostra un ginocchio, dopo il quale la caratteristica riprende un andamento lineare con una pendenza molto bassa. In questa condizione il materiale ha raggiunto lo stato di saturazione e per ulteriori incrementi del campo applicato il valore dell'induzione non aumenta significativamente².

Per i materiali ferromagnetici comunemente utilizzati nelle macchine elettriche, la cui permeabilità relativa in zona lineare è dell'ordine delle migliaia (per esempio 5000), il valore dell'induzione raggiunto nella zona di saturazione è compreso tra 1,2 e 2,0 [T].

Continuando ad aumentare il campo H applicato al provino di **Figura 6** sino a un valore massimo H_{max} si faccia diminuire lo stesso riportandolo al valore nullo ($I=0$). Contrariamente a quanto ci si potrebbe aspettare, il valore dell'induzione non si annulla e il materiale non ripercorre la curva di prima magnetizzazione, ma presenta un certo ritardo chiamato isteresi (vedi **Figura 8**).

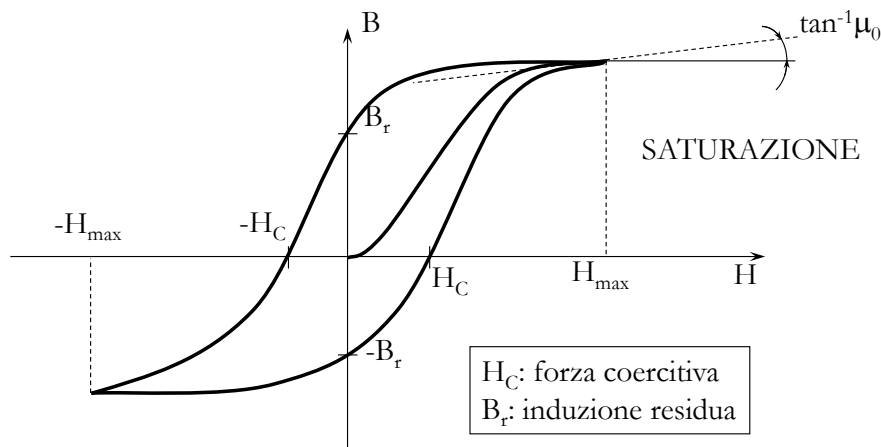


Figura 8 – Ciclo di Isteresi

In corrispondenza del campo $H=0$ il valore dell'induzione è diverso da zero e pari a B_r detta induzione residua o magnetizzazione residua. Questa magnetizzazione residua viene sfruttata ad esempio per realizzare magneti permanenti utilizzando materiali che hanno valori di questa particolarmente alti.

² Nei materiali ferromagnetici è possibile osservare una magnetizzazione anche in assenza di un campo magnetico esterno (magnetizzazione spontanea). In tali materiali, a dispetto dell'agitazione termica, è presente un agente ordinante dovuto alla forte interazione fra dipoli elementari vicini che determina l'orientazione dei corrispondenti momenti tutti nella medesima direzione. Per questi materiali, a temperatura ambiente, è possibile raggiungere la saturazione (cioè il parallelismo di tutti i dipoli magnetici) con campi esterni relativamente deboli.

Si noti che, mentre a basse temperature la magnetizzazione spontanea risulti sostanzialmente indipendente dalla temperatura, all'aumentare della temperatura la magnetizzazione diminuisce per effetto dell'azione disordinante dell'agitazione termica sui dipoli magnetici elementari. Dal punto di vista microscopico, i materiali ferromagnetici sono formati dall'aggregazione di innumerevoli "domini magnetici" o "domini di Weiss" delle dimensioni di 10^{-3} ÷ 10^{-6} m che sono composti da molecole o atomi che possiedono un momento magnetico proprio e sono allineati fra loro. Se il materiale è allo stato nativo i momenti magnetici dei domini di Weiss sono orientati casualmente, producendo quindi una magnetizzazione macroscopicamente nulla. In presenza di un campo magnetico esterno, tuttavia, i momenti magnetici tendono ad allinearsi. Tale allineamento permane anche se il campo magnetico esterno è rimosso, dando origine ad una magnetizzazione residua. Tale effetto magnetizzante è il risultato dell'equilibrio statistico tra l'azione ordinatrice del campo magnetico e quella disordinatrice dell'agitazione termica: aumentando la temperatura, e conseguentemente aumentando l'agitazione termica degli atomi, tutta la struttura cristallina si altera, i dipoli magnetici non sono più orientati e il materiale passa allo stato paramagnetico. La temperatura caratteristica di questo passaggio è detta punto di Curie e per il ferro vale 775° .

Per annullare il valore di B_r è necessario applicare un campo di segno opposto (ad esempio invertendo il verso della corrente). Il valore di B decresce annullandosi in corrispondenza di un valore di $H = -H_c$ detto campo coercitivo (o forza coercitiva). Continuando a diminuire il campo applicato fino al valore $-H_{max}$ si raggiunge un valore simmetrico di induzione. Diminuendo il campo sino ad annullarlo, la curva segue un andamento simmetrico al precedente raggiungendo, in corrispondenza del valore nullo di H, il valore $-B_r$. Invertendo nuovamente il campo e aumentandolo sino a $H = +H_c$ il valore di B si annulla. Infine, aumentando il campo H sino ad H_{max} si ritorna al precedente punto di saturazione. Il materiale, durante questo esperimento, ha compiuto un intero ciclo che prende il nome di *Ciclo di Isteresi Simmetrico*. Da questo punto in poi, ripetendo il ciclo di magnetizzazione tra gli stessi valori estremi $-H_{max} \div +H_{max}$, il materiale seguirà sempre la stessa curva. Questo può avvenire, ad esempio, applicando al solenoide in **Figura 6** una corrente sinusoidale.

Si noti che, applicando un ciclo di magnetizzazione tra due valori estremi di campo differenti tra loro, il materiale segue un ciclo di isteresi non simmetrico. In entrambi i casi, tuttavia, il comportamento del materiale è non-lineare.

Lavoro di Isteresi

Un materiale ferromagnetico assoggettato ad un ciclo di isteresi assorbe un lavoro, per unità di volume, pari all'area del ciclo di isteresi. Infatti, il lavoro elementare dL compiuto durante una trasformazione infinitesima che porta il flusso magnetico concatenato con il provino di **Figura 6** dal valore Φ_c al valore $\Phi_c + d\Phi_c$ è espresso da:

$$dL = I \cdot d\Phi_c$$

con

$$d\Phi_c = Nd\Phi$$

da cui:

$$dL = NI \cdot d\Phi$$

Ma

$$NI = H \cdot l$$

e

$$\Phi = dB \cdot S$$

da cui:

$$dL = HdB \cdot V$$

dove V è il volume del provino.

Quando viene compiuto un intero ciclo di isteresi il lavoro volumico assorbito dal provino sarà:

$$L = \oint H dB$$

L'integrale a secondo membro rappresenta proprio l'area del ciclo di isteresi. Quindi il lavoro compiuto durante un ciclo di isteresi coincide con l'area dello stesso ciclo, come volevamo dimostrare.

Il valore delle variabili di stato \bar{B} ed \bar{H} sono le stesse all'inizio ed alla fine del ciclo. Conseguentemente sarà la stessa l'energia magnetica immagazzinata prima e dopo il termine del ciclo. Il lavoro compiuto durante il ciclo non ha, quindi, contribuito ad accrescere l'energia magnetica immagazzinata, cioè non ha contribuito allo stato di magnetizzazione del materiale. Questo lavoro non può quindi che essere stato convertito in calore, che prende il nome di *Calore di Isteresi*.

Il valore di questa energia termica è stato determinato sperimentalmente da Charles Proteus Steinmetz, che ha fornito una formula empirica:

$$L = k_{ist} \cdot B_{max}^n \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

Dove B_{max} è il valore massimo dell'induzione durante il ciclo di isteresi, n (detto esponente di Steinmetz) varia tra 1,8 e 2,2 a seconda del valore di induzione, e k_{ist} è una costante che dipende dal tipo di materiale. Infatti, al variare del materiale varia la forma e la dimensione del ciclo. Inoltre, all'aumentare del valore massimo dell'induzione il ciclo diventa più ampio.

Introducendo una certa approssimazione si può considerare il calore di isteresi come una funzione quadratica con l'induzione. La presenza di questa dissipazione di energia in calore rappresenta una perdita che dovrà essere messa in conto nei dispositivi, in particolare nelle macchine elettriche, che presentano parti in materiale ferromagnetico. Si noti che le perdite per isteresi in una macchina elettrica che funziona in regime sinusoidale sono proporzionali alla frequenza della corrente di magnetizzazione poiché il materiale compie, nell'unità di tempo, un numero di cicli pari alla frequenza stessa.

Queste perdite non sono le uniche perdite nei materiali ferromagnetici assoggettati ad una magnetizzazione ciclica. Infatti, si mostrerà nel seguito che sono presenti delle perdite dovute alla circolazione, nei nuclei di materiale ferromagnetico, di correnti indotte, dette correnti parassite.

Materiali Dolci e Duri

Da quanto precedentemente detto risulta evidente che la scelta del materiale con cui realizzare i nuclei di materiale ferromagnetico delle macchine elettriche a induzione è fondamentale per limitare le perdite per isteresi e quindi aumentare il rendimento della stessa macchina.

I materiali ferromagnetici possono essere raggruppati in due classi:

- **Materiali Dolci:** hanno un ciclo di isteresi stretto con una bassa forza coercitiva (**Figura 9a**) e sono facili da magnetizzare. Hanno, inoltre, una permeabilità alta. Essi sono utilizzati nelle macchine elettriche quali trasformatori, motori e generatori. Quelli maggiormente utilizzati sono il ferro e le sue leghe con nichel, cobalto e silicio, gli acciai a basso tenore di carbonio e le ferriti dolci. L'aggiunta di silicio al ferro per ottenere leghe Fe-Si ha numerosi effetti benefici: aumento della resistività elettrica con conseguente diminuzione delle perdite per correnti parassite (di cui si parlerà nel seguito); aumento della permeabilità magnetica. Come effetto negativo si registra il fatto

che un alto tenore di silicio aumenta la fragilità del materiale. Per apparecchiature per le comunicazioni elettriche (quali trasformatori audio e di misura) vengono utilizzate leghe Ni-Fe con permeabilità molto più elevata a bassi valori del campo.

- **Materiali Duri:** sono caratterizzati da una elevata forza coercitiva e da una elevata induzione residua (**Figura 9b**). Sono utilizzati per realizzare magneti permanenti. Una volta magnetizzati, i materiali duri sono difficili da smagnetizzare. Appartengono a questa classe alcune leghe Alnico. Si tratta di leghe a base di ferro con aggiunte di Alluminio, Nichel, Cobalto e Rame.

Come già detto, i materiali ferromagnetici dolci hanno cicli di isteresi molto stretti e quindi perdite per isteresi molto basse quando sono assoggettati ad eccitazioni sinusoidali. Il comportamento di un materiale ferromagnetico dolce (fatta eccezione per le perdite per isteresi) può essere descritto dalla sua *Curva Normale di Magnetizzazione*. Essa è il luogo dei vertici dei cicli di isteresi simmetrici ed è quasi sovrapponibile alla curva di prima magnetizzazione. In **Figura 10** è riportata la curva normale di magnetizzazione per un materiale ferromagnetico dolce.

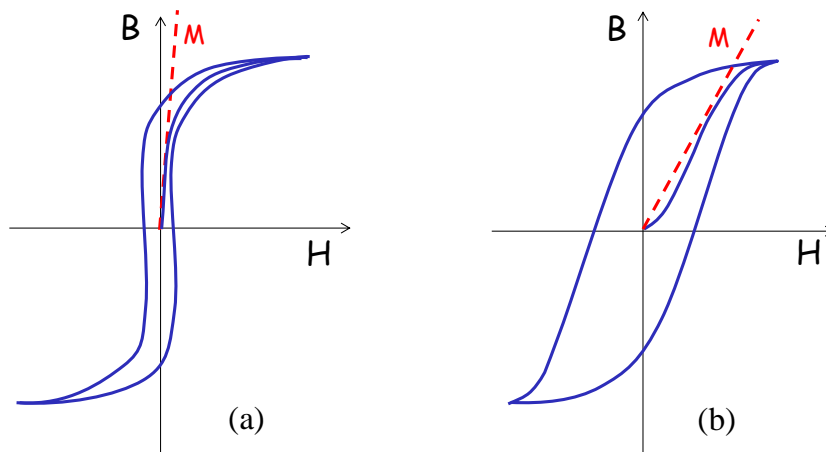


Figura 9 – Cicli di Isteresi per un materiale ferromagnetico dolce (a) e duro (b).

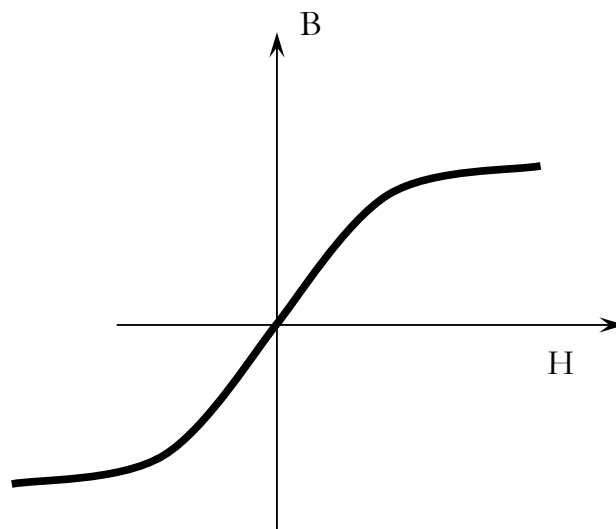


Figura 10– Curva Normale di Magnetizzazione di un materiale dolce.

E' consueto fornire la caratteristica normale di magnetizzazione in forma tabellare. In **Tabella 5** è riportata, in forma tabellare, la caratteristica di magnetizzazione per l'Acciaio Fuso.

Dalla curva di magnetizzazione del materiale è possibile definire la permeabilità magnetica del materiale dalla $\mu = B/H$. In **Tabella 5** sono riportati anche i valori di permeabilità magnetica relativa. Questa assume valori costanti per bassi valori di H per poi decrescere a partire dal ginocchio della curva normale di magnetizzazione (saturazione) per tendere asintoticamente al valore μ_0 .

Tabella 5 – Permeabilità Magnetica relativa di alcuni materiali diamagnetici, paramagnetici e ferromagnetici (all'induzione di 0,002 T)

B [Wb / m²]	H [A / m]	μ_r
0,10	70	1140
0,20	90	1780
0,30	100	2400
0,40	120	2660
0,50	140	2860
0,60	170	2820
0,80	270	2370
1,00	400	2000
1,20	620	1550
1,40	1200	930
1,60	3500	365
1,80	10 000	144
2,00	25 000	64

In **Figura 11** è riportata la curva di Permeabilità relativa in funzione del campo H per l'acciaio fuso. La curva è riportata in scala logaritmica per meglio evidenziare il picco che altrimenti sarebbe troppo stretto perché possa essere percepito.

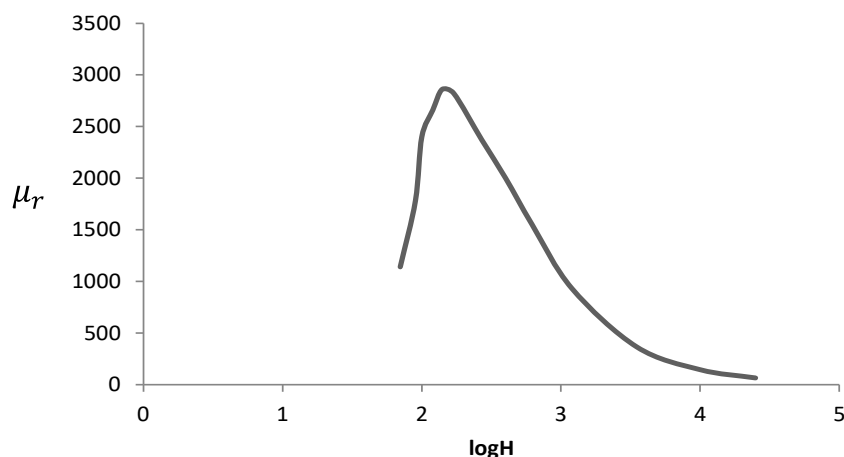


Figura 11 – Curva di permeabilità magnetica relativa in funzione del campo H per l'acciaio fuso.

Circuiti magnetici

Nel modello circuitale a parametri concentrati è stato introdotto il componente ideale induttore, che è un componente bipolare, passivo e non dissipativo, che mette in gioco una energia immagazzinata nel campo magnetico. Esso rappresenta il modello ideale di un conduttore attraversato da corrente che genera un campo magnetico le cui linee di campo sono linee chiuse (solenoidaltà del vettore induzione magnetica). Nel caso di un avvolgimento di N spire avvolte in aria e attraversate dalla corrente I (solenoidale avvolto in aria), ad esempio, il campo prodotto è quello rappresentato in **Figura 12**. Come si nota, le linee di flusso si chiudono in tutto lo spazio circostante il solenoide.

Se avvolgiamo, invece, un conduttore di N spire su un nucleo di materiale ferromagnetico, quale ad esempio quello di forma toroidale riportato in **Figura 13**, il campo magnetico avrà un andamento del tipo riportato nella stessa **Figura 13**. Come si nota, il nucleo di materiale ferromagnetico costituisce un percorso preferenziale per le linee del campo magnetico prodotto dalla FMM pari ad NI , le quali si chiudono prevalentemente nel nucleo stesso. A condizione di realizzare il nucleo in materiale di permeabilità magnetica molto elevata, la riluttanza incontrata da ciascuna linea di flusso chiusa entro il nucleo è molto inferiore a quella di una eventuale linea che si chiudesse in aria. Allora si può ritenere che le linee di flusso sono tutte concentriche con l'asse del toro, che costituisce quindi un *tubo di flusso* per il campo magnetico.

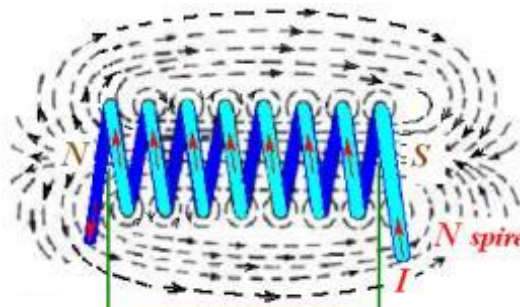


Figura 12 – Campo magnetico prodotto dalla corrente I che scorre in un conduttore di N spire avvolto in aria.

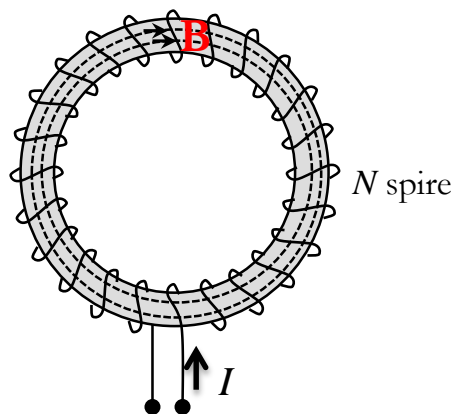


Figura 13 – Campo magnetico prodotto dalla corrente I che scorre in un conduttore di N spire su di un toro di materiale ferromagnetico

Occorre osservare che il rapporto fra la permeabilità magnetica del nucleo, indicata comunemente con μ_{fe} , e quella dell'aria che lo circonda ($\cong \mu_0$), è circa 10^{3+5} . Il flusso magnetico è quindi prevalentemente, ma non totalmente, confinato all'interno del nucleo. Questo non accade nel caso del campo di corrente le cui linee si possono ritenere tutte confinate all'interno dei conduttori. Il rapporto tra conducibilità dei materiali e conduttori e quella dell'aria è infatti dell'ordine di 10^8 . Non esistono, inoltre, contrariamente al caso del campo di corrente, buoni isolanti magnetici. L'ipotesi, quindi, che il nucleo sia un tubo di flusso è solo una approssimazione. Nel seguito assumeremo che il flusso sia incanalato nei nuclei, assumeremo, cioè, che non vi siano linee di flusso che si chiudono in aria. Questo flusso è detto flusso disperso. Quando, più avanti, ricaveremo i modelli circuitali delle macchine ad induzione reali, rimuoveremo questa ipotesi e vedremo come questi flussi dispersi possono essere messi in conto nel modello circuitale a parametri concentrati introducendo opportuni componenti circuitali.

Un circuito magnetico in senso lato è tutto lo spazio entro il quale si svolgono le linee del campo magnetico prodotte dalle correnti che scorrono in un sistema di conduttori. Per gli scopi applicativi si utilizzano nuclei di materiale ferromagnetico per incanalare il flusso (o i flussi) lungo percorsi a bassa riluttanza. Considereremo, quindi, da qui in poi, come circuiti magnetici l'insieme dei nuclei di materiale ferromagnetico e dei conduttori che generano le *FMM*.

Un circuito magnetico, costituito da più tronchi di tubo di flusso collegati tra loro è, ad esempio, quello mostrato in **Figura 14**. Nella **Figura 14a** è mostrata una sua rappresentazione tridimensionale, mentre la **Figura 14b** mostra la sua rappresentazione mediana. I tratti orizzontali del nucleo sono chiamati *gioghi*, mentre quelli verticali *colonne*. La sezione trasversale del nucleo (uguale per le colonne ed i gioghi nell'esempio di **Figura 14**) è pari ad S , mentre con γ si indica la linea media delle linee di flusso, assunta pari al luogo dei baricentri delle sezioni trasversali. Si considereranno le linee di flusso tutte concentrate nella linea media e di lunghezza pari alla lunghezza della stessa.

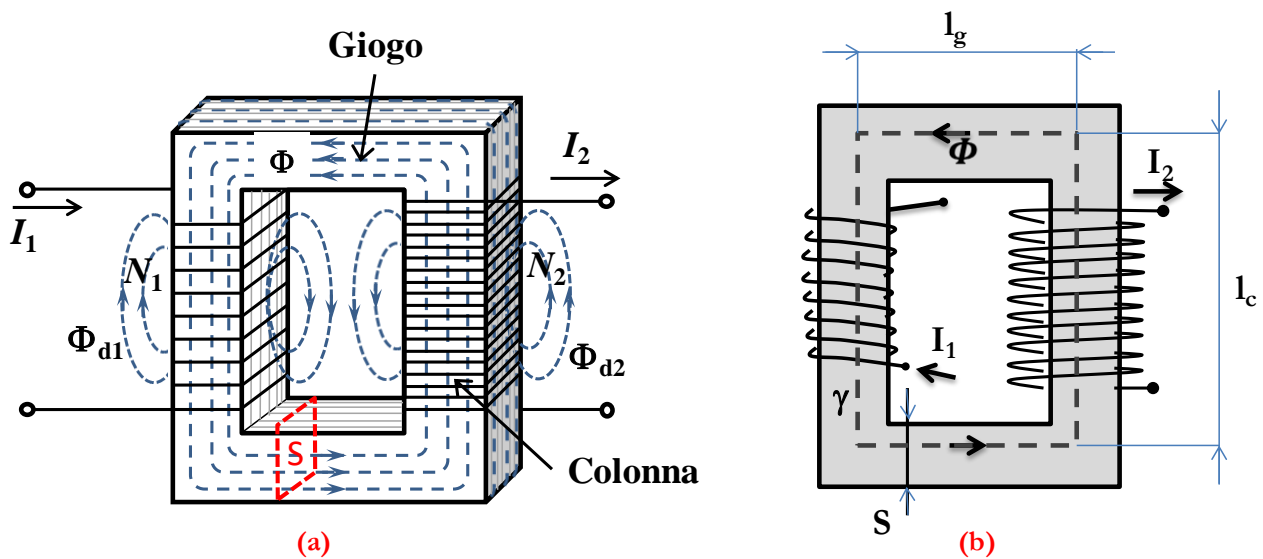


Figura 14 – Circuito magnetico (a) e sua rappresentazione mediana (b).

Circuiti magnetici sono presenti in molti dispositivi di uso comune quali:

- gli elettromagneti: sono dispositivi con funzioni sia di protezione che di manovra (ad esempio, relè, impianti di sollevamento rottami, ecc.);
- i circuiti per magneti permanenti;
- i circuiti magnetici per macchine elettriche: trasformatori, motori asincroni, alternatori, ecc.

Circuiti magnetici inerti

Nelle applicazioni alle macchine elettriche ad induzione, i nuclei di materiale ferromagnetico sono realizzati con materiali dolci perché questi, come detto, hanno cicli di isteresi stretti; in tal modo è possibile limitare le perdite per isteresi, proporzionali all'area del ciclo stesso. Inoltre, come vedremo più avanti, per limitare le perdite per correnti parassite, i nuclei vengono laminati nella direzione delle linee di flusso, così come mostrato in **Figura 14**. Questi circuiti magnetici sono detti *inerti*.

L'ipotesi di considerare tutto il flusso confinato all'interno del nucleo di materiale ferromagnetico consente una notevole semplificazione nell'analisi dei circuiti magnetici. Consideriamo, ad esempio, il circuito magnetico in **Figura 14**. Per ciascun tronco di tubo di flusso (i due gioghi e le due colonne) varrà:

$$U_m = R_m \Phi$$

dove la riluttanza del generico tronco di tubo di flusso di lunghezza l e sezione S costante è:

$$R_m = \frac{1}{\mu_{fe}} \frac{l}{S} \quad [H^{-1}]$$

Quindi la riluttanza del nucleo sarà la somma delle riluttanze dei singoli tronchi di tubo di flusso:

$$R_m = 2R_{mg} + 2R_{mc} = \frac{1}{\mu_{fe}} \frac{2l_g + 2l_c}{S}$$

dove con R_{mg} si intende la riluttanza di ciascun giogo e con R_{mc} quella delle colonne. Si noti che, essendo il flusso costante in ogni sezione trasversale del nucleo ed essendo tutte le sezioni trasversali uguali nell'esempio considerato, anche l'induzione in ogni sezione sarà costante e quindi sarà costante la permeabilità μ_{fe} . Questo non è vero in generale se i flussi nei diversi tronchi sono differenti e/o se sono differenti le sezioni trasversali dei tronchi di tubo di flusso che avrebbero quindi una magnetizzazione diversa e di conseguenza una permeabilità differente.

Applicando la Legge di Ampere o della Circuitazione alla linea chiusa γ di **Figura 14.b** si ha:

$$\oint H \cdot dl = \sum U_m = \sum R_m \Phi = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

L'equazione che descrive il circuito magnetico di **Figura 14** è:

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = (2R_{mg} + 2R_{mc}) \Phi = R_m \Phi$$

In alcune applicazioni, quando ad esempio si vuole rendere disponibile il flusso prodotto o perché è necessario che alcune parti del circuito magnetico siano mobili rispetto ad altre, il circuito stesso può comprendere tratti in aria detti *traferri* (vedi **Figura 15**).

I tratti in aria, avendo permeabilità magnetica molto bassa (pari circa a quella del vuoto) hanno una riluttanza molto più elevata di quella dei tratti in ferro. Spesso si può introdurre una approssimazione e trascurare le riluttanze dei tratti in ferro rispetto a quelle dei tratti in aria.

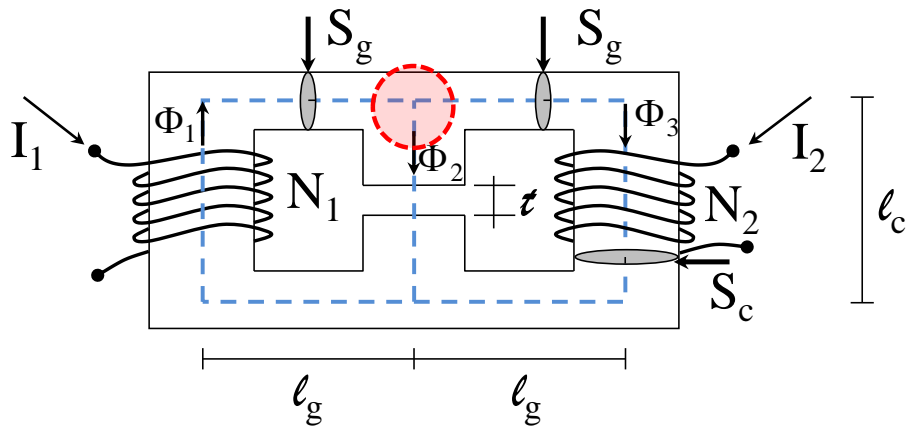


Figura 15– Circuito magnetico con un traferro di spessore t .

Nel caso, come quello di **Figura 15**, in cui i diversi tronchi siano attraversati da flussi differenti, essendo il flusso solenoidale, per ogni superficie chiusa, come quella in rosso nella stessa **Figura 15**, varrà (Legge di Gauss):

$$\sum \Phi = 0$$

Inoltre, possiamo applicare la legge della circuitazione lungo qualunque linea chiusa e, prendendo come linea chiusa un qualunque percorso sulla linea media (in azzurro in **Figura 15**) si ha:

$$\sum U_m = \sum R_m \Phi$$

Possiamo riconoscere, quindi, una analogia tra i circuiti elettrici e i circuiti magnetici, la quale si basa sulla corrispondenza tra grandezze di campo elettrico e grandezze di campo magnetico, già introdotte e riportate in **Tabella 3**. In **Tabella 6** sono riportate le analogie tra circuiti elettrici e circuiti magnetici.

Tabella 6 – Analogia tra circuiti elettrici e circuiti magnetici

Circuiti Elettrici		Circuiti magnetici	
Forza elettromotrice	E [V]	Forza magnetomotrice	NI [Aspire]
Tensione elettrica	V [V]	Tensione magnetica	U_m [Aspire]
Corrente	I [A]	Flusso	Φ [Wb]
Resistenza	R [Ω]	Riluttanza	R_m [H^{-1}]
Conduttanza	G [S]	Permeanza	G_m [H]
Legge di Ohm	$V = RI$	Legge di Hopkinson	$U_m = R_m \Phi$
Legge di Kirhhoff alle correnti	$\sum I = 0$	Legge di Gauss	$\sum \Phi = 0$
Legge di Kirhhoff alle tensioni	$\sum E = \sum RI$	Legge di Ampere	$\sum NI = \sum R_m \Phi$

Da questa analogia è possibile far corrispondere ad un circuito magnetico un equivalente circuito elettrico a parametri concentrati. Per il circuito magnetico di **Figura 15**, ad esempio, il circuito elettrico corrispondente è quello riportato in **Figura 16**.

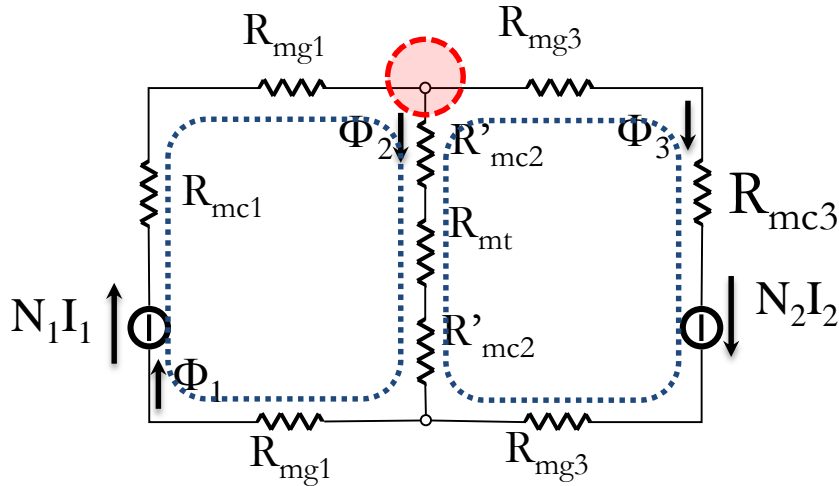


Figura 16– Circuito elettrico corrispondente al circuito magnetico di **Figura 15**.

I generatori di tensione corrispondono alle amperspire. Il verso è determinato utilizzando la regola della vita destrogira. Le resistenze hanno il valore delle riluttanze dei diversi tratti di ferro e del traferro. Per il generico tratto i -simo in ferro sarà: $R_{mi} = \frac{1}{\mu_{fe}} \frac{l_i}{S_i}$, mentre per il traferro sarà: $R_{mt} = \frac{1}{\mu_0} \frac{t}{S_t}$ (la sezione del traferro è maggiore di qualche percento di quella del ferro affacciato, a causa del rigonfiamento delle linee di campo in corrispondenza del traferro. Questo effetto è noto come effetto di bordo. Se il traferro è molto piccolo in confronto alla sezione affacciata, questa maggiorazione può essere trascurata).

Il sistema di equazioni che descrive il circuito magnetico in **Figura 15** può essere ricavato utilizzando il circuito elettrico equivalente in **Figura 16**. In particolare, utilizzando l'analogia tra circuiti elettrici e circuiti magnetici di **Tabella 6**, e applicando la legge di Kirchhoff alle correnti (flussi) al nodo in rosso in **Figura 16**, e la legge di Kirchhoff alle tensioni (tensioni magnetiche) alle due maglie in azzurro nella stessa **Figura 16**, si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0 \\ (R_{mc1} + 2R_{mg1}) \cdot \Phi_1 + (2R'_{mc2} + R_{mt}) \cdot \Phi_2 = N_1 I_1 \\ (R_{mc3} + 2R_{mg3}) \cdot \Phi_3 - (2R'_{mc2} + R_{mt}) \cdot \Phi_2 = N_2 I_2 \end{cases}$$

con

$$R_{mc1} = \frac{1}{\mu_{c1}} \cdot \frac{\ell_c}{S_c}; R_{mc3} = \frac{1}{\mu_{c3}} \cdot \frac{\ell_c}{S_c}; R'_{mc2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_{c2}} \cdot \frac{\ell_c - t}{S_c};$$

$$R_{mg1} = \frac{1}{\mu_{g1}} \cdot \frac{\ell_g}{S_g}; R_{mg3} = \frac{1}{\mu_{g3}} \cdot \frac{\ell_g}{S_g};$$

$$R_{mt} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{t}{S_t}$$

I diversi tronchi del circuito magnetico hanno sezioni differenti e flussi diversi, quindi si avranno diversi valori di induzione e quindi di permeabilità magnetica. Questa è una importante differenza con i circuiti elettrici. Infatti, mentre nei circuiti elettrici i parametri circuitali sono noti e costanti (in particolare i valori di resistenza sono costanti), nei circuiti magnetici i valori delle riluttanze non sono costanti e dipendono dalla magnetizzazione. La conseguenza è che, mentre la legge di Ohm è una relazione lineare (e quindi il sistema che descrive il circuito elettrico è lineare), la Legge di Hopkinson è non lineare (e il sistema di equazioni che descrive il circuito magnetico è non lineare a causa del comportamento non lineare dei materiali ferromagnetici).

Il sistema di equazioni del circuito può essere utilizzato per risolvere due distinti problemi:

1. Problema Diretto: sono noti i flussi nei diversi tratti, vincolati dalla prima delle equazioni ($\Phi_1, \Phi_2, e \Phi_3$ nel caso dell'esempio) e si devono determinare le amperspire impresse ($N_1 I_1 e N_2 I_2$);
2. Problema Inverso: sono note le amperspire impresse e si devono determinare i flussi nei diversi tratti.

Il problema diretto è risolvibile in un unico passo, in quanto, come vedremo più avanti, noti i flussi è possibile determinare la magnetizzazione di ogni tratto di circuito magnetico, e quindi il corrispondente valore di permeabilità magnetica (facendo uso della caratteristica di magnetizzazione del materiale).

Viceversa, la soluzione del problema inverso in un unico passo è possibile solo se il materiale lavora nel tratto rettilineo della curva normale di magnetizzazione. In questo caso è possibile assumere, per il calcolo delle riluttanze dei tratti in ferro, un valore costante di permeabilità magnetica, relativo a tale tratto. Le riluttanze, quindi, analogamente a quanto assunto nei circuiti elettrici, sono parametri circuitali noti e il sistema di equazioni garantisce la soluzione del problema.

Si noti tuttavia che, nei circuiti magnetici inerti, si cerca di far lavorare il ferro nella zona del ginocchio della curva normale di magnetizzazione poiché con valori relativamente bassi del campo si ottengono valori elevati di induzione. Superato il ginocchio, invece, per ottenere valori maggiori di induzione dovremmo applicare valori molto elevati del campo H . In questo caso, nelle equazioni del circuito sono incogniti sia i flussi che le riluttanze (funzioni dei flussi). Il sistema non è quindi lineare e per la sua risoluzione occorre procedere iterativamente, risolvendo ad ogni iterazione un problema diretto in cui si assumono noti i flussi e procedendo, iterazione dopo iterazione, ad aggiustamenti dei valori dei flussi. La discussione sulla convergenza di un tale metodo esula dagli scopi di questo insegnamento. Più avanti, per maggiore chiarezza, si mostrerà un caso semplice in cui la procedura iterativa può essere descritta anche graficamente.

Per risolvere un problema di analisi di un circuito magnetico inerte si introducono, generalmente, le seguenti ipotesi:

- si trascurano gli effetti di bordo (quindi le sezioni dei trasferri si considerano coincidenti con quelle del ferro affacciato);
- la lunghezza di ciascun tratto si considera coincidente con la linea media (quindi si considerano tutte le linee di flusso di lunghezza pari alla linea media);
- il nucleo di materiale ferromagnetico viene considerato un tubo di flusso (quindi si trascurano i flussi dispersi che si chiudono in percorsi che comprendono tratti in aria. Nello studio delle macchine elettriche ad induzione questa ipotesi verrà di seguito rimossa);
- l'induzione viene considerata costante tratto per tratto.

Problema Diretto

Come già detto, in un problema diretto sono noti i flussi nei diversi tratti, e si devono determinare le amperspire impresse. Facciamo riferimento ad un esempio semplice, come quello riportato in **Figura 17**.

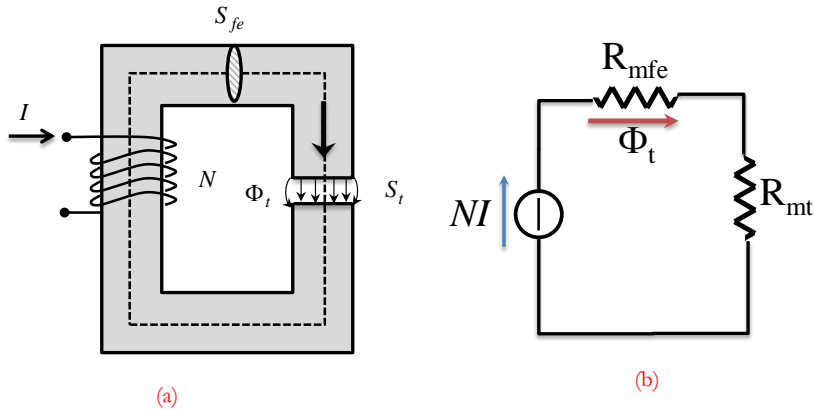


Figura 17 – Elettromagnete: (a)circuito magnetico; (b) circuito elettrico corrispondente

In questo problema, fissato un valore di induzione al traferro, e quindi un certo flusso Φ_t , occorre stabilire il corrispondente valore di Amperspire (NI) da applicare. È nota la geometria del circuito. Si può scrivere l'equazione alla unica maglia nel circuito elettrico corrispondente:

$$NI = (R_{mfe} + R_{mt})\Phi_t$$

con $\Phi_t = B_t \cdot S_t$ e B_t valore di induzione che vi vuole realizzare.

Il valore di induzione nei tratti in ferro sarà, invece: $B_{fe} = \Phi_t/S_{fe}$ in quanto, trascurando il flusso disperso, il flusso è lo stesso in tutte le sezione trasversali. Il nucleo di materiale ferromagnetico ha una determinata curva normale di magnetizzazione, come quella riportata in **Figura 18**, che si riferisce alla lamiera al silicio. In corrispondenza del valore B_{fe} si legge, nella curva caratteristica del materiale il corrispondente valore di H_{fe} , da cui si ricava il valore della $\mu_{fe} = \frac{B_{fe}}{H_{fe}}$ in corrispondenza del punto di lavoro del materiale. Nota la permeabilità del nucleo, si risale alla riluttanza R_{mfe} (la riluttanza del traferro non dipende dal punto di lavoro in quanto l'aria ha una permeabilità costante) e si può ricavare il valore di Amperspire cercato.

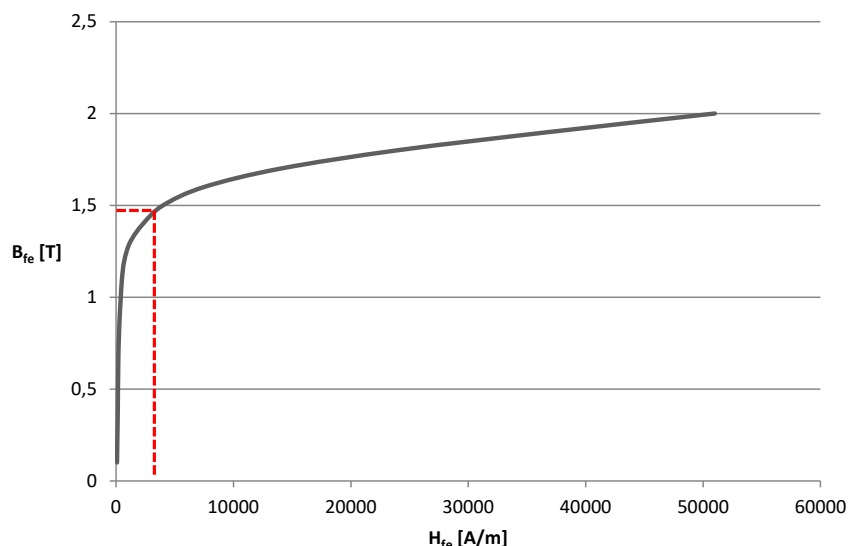


Figura 18 – Caratteristica normale di magnetizzazione delle lamiere al silicio.

Problema Inverso

In un problema inverso sono note le Amperspire impresse e si devono determinare i flussi nei diversi tratti. Anche in questo caso, facciamo riferimento all'esempio riportato in **Figura 17**. In questo caso, l'equazione:

$$NI = (R_{mfe} + R_{mt})\Phi_t$$

che descrive il circuito è una equazione non lineare data la dipendenza della R_{mfe} dal flusso. Occorre risolvere iterativamente il problema risolvendo una serie di problemi diretti, ciascuno dei quali assume noto il valore del flusso. Per scopi didattici, si procederà in forma grafica costruendo la così detta *Caratteristica di Magnetizzazione Totale del Circuito* (da non confondersi con la curva normale di magnetizzazione del materiale). Questa curva riporta in ascisse il numero di Amperspire ed in ordinate il valore del flusso (**Figura 19**) e si costruisce per punti assegnando diversi valori al flusso e risolvendo in corrispondenza a questi valori altrettanti problemi diretti. Una volta costruita la curva, la soluzione al problema inverso si ottiene entrando nel grafico con il valore delle Amperspire assegnate $(NI)_V$ e leggendo il corrispondente valore del flusso al traferro Φ_V , e da qui risalendo al valore dell'induzione prodotta.

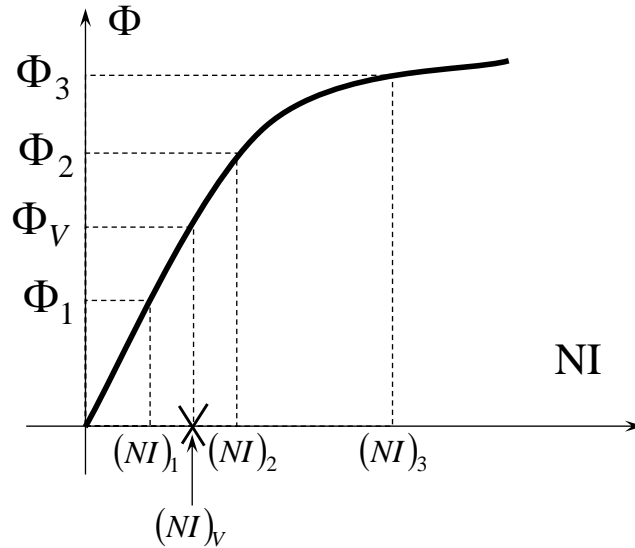


Figura 19 – Caratteristica di Magnetizzazione Totale del circuito magnetico di **Figura 17**

La suddetta caratteristica può essere ottenuta anche in forma tabellare, come nell'esempio che segue.

Esempio

Calcolare il coefficiente di autoinduzione della bobina in **Figura 20a**, sapendo che essa è costituita da $N=1000$ spire attraversate da una corrente $I=2A$. E' nota la geometria del circuito magnetico: $t = 3$ mm, $a = 20$ mm, $\ell = 50$ mm. Il nucleo è costituito da lamiere al silicio, la cui caratteristica di magnetizzazione è riportata in forma tabellare in **Figura 20c**. In **Figura 20b** è riportato il circuito elettrico corrispondente.

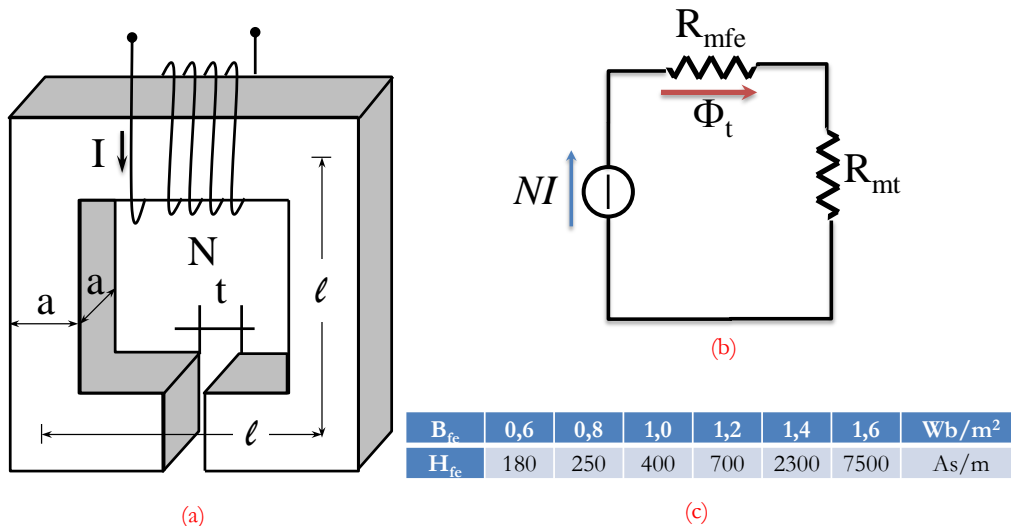


Figura 20 – (a) Circuito magnetico; (b) circuito elettrico corrispondente; (c) tabella di magnetizzazione delle lamiere al silicio.

$\ell_t \approx 4\ell = 200$ mm = 0,2 m; $S = a \cdot a = 400$ mm² = $4 \cdot 10^{-4}$ m²; $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ H/m; $NI = 2000$ As. L'equazione alla maglia può essere scritta anche nella seguente forma:

$$NI = H_{fe} \cdot \ell_{fe} + \frac{B_{fe}}{\mu_0} t = 0,2H_{fe} + 2387,32 B_{fe}$$

E' possibile costruire una tabella di magnetizzazione totale del circuito (analoga alla curva di cui precedentemente detto), valutando, per ogni coppia di valori B_{fe} e H_{fe} della tabella di magnetizzazione del materiale il corrispondente valore di Amperspire totali $(NI)_{tot}$ (**Tabella 7**).

Tabella 7 – Tabella di Magnetizzazione Totale del circuito in **Figura 20**.

B_{fe}	H_{fe}	$(NI)_{tot}$
0,6	180	1468,39
0,8	250	1959,86
1,0	400	2467,32
1,2	700	3004,79
1,4	2300	3802,25
1,6	7500	5319,72

Il valore di Amperspire assegnato, pari a 2000, è compreso tra i valori della seconda e terza riga in **Tabella 7**. Si procede quindi interpolando tra questi valori:

$$B = \frac{2000 - 1959,86}{2467,32 - 1959,86} \cdot (1 - 0,8) + 0,8 = 0,8158 [T]$$

$$\Phi = B \cdot S = 3,2633 \cdot 10^{-4} [Wb]$$

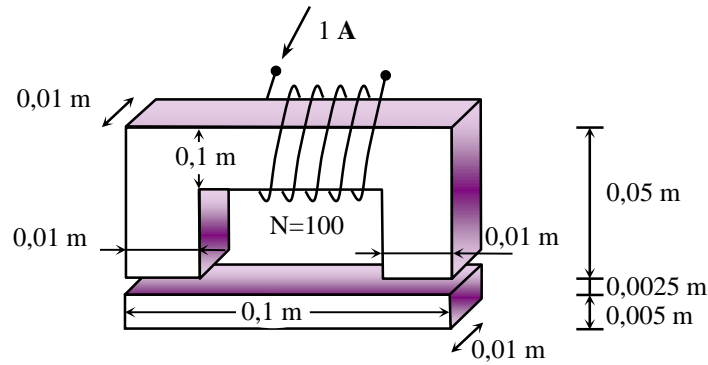
Il valore dell'induttanza della bobina è:

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{2000 \cdot 3,2633 \cdot 10^{-4}}{2} = 163 [mH]$$

Risoluzione di problemi inversi introducendo alcune ipotesi semplificative

Esempio

Calcolare il flusso magnetico nella barretta sul fondo della struttura di **Figura 21** nell'ipotesi che il flusso sia confinato nel nucleo magnetico e che lo stesso lavori nel tratto lineare della caratteristica di magnetizzazione e abbia $\mu_r = 10000$.


Figura 21 – Circuito magnetico

- Lunghezza media della U: $l_U = (0,045 \times 2) + 0,09 = 0,18 \text{ m}$
- Lunghezza dei traferri: $l_{\text{traf}} = 0,005 \text{ m}$
- Lunghezza della barretta: $l_{\text{barr}} = 0,09 \text{ m}$

Sezioni trasversali:

$$\text{Ferro: } S_f = (0,01) \times (0,01) = 0,0001 \text{ m}^2$$

$$\text{Traferro: } S_{\text{traf}} = 0,0001 \text{ m}^2$$

(Per i traferri, per tenere conto degli effetti di bordo, avremmo potuto maggiore la sezione di qualche percento).

$$\mathfrak{R}_{mU} = \frac{l_U}{\mu_r \mu_o S_f} = \frac{0,18}{10000 \times 4\pi \cdot 10^{-7} \times 0,0001} = 1,43 \cdot 10^5 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{Wb}}$$

$$\mathfrak{R}_{mbar} = \frac{l_{bar}}{\mu_r \mu_o S_f} = \frac{0,09}{10000 \times 4\pi \cdot 10^{-7} \times 0,0001} = 0,715 \cdot 10^5 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{Wb}}$$

$$\mathfrak{R}_{mtraf} = \frac{l_{traf}}{\mu_o S_{traf}} = \frac{0,005}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 0,0001} = 3,98 \cdot 10^7 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{Wb}}$$

$$\mathfrak{R}_{mtot} = \mathfrak{R}_{mU} + \mathfrak{R}_{mbar} + \mathfrak{R}_{mtraf} \cong \mathfrak{R}_{mtraf} = 3,98 \cdot 10^7 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{Wb}}$$

$$\Phi = \frac{NI}{\mathfrak{R}_{mtot}} = \frac{100 \text{ A} \cdot \text{s}}{3,98 \cdot 10^7 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{Wb}}} = 2,51 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}$$

$$B = \frac{\Phi}{S_{traf}} = \frac{2,51 \cdot 10^{-6}}{0,0001} = 2,51 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$$

Esempio

Il materiale ferromagnetico del circuito magnetico di **Figura 22** sta lavorando nella regione lineare della caratteristica di magnetizzazione. Determinare il coefficiente di autoinduzione dell'avvolgimento di N spire sapendo che:

$$d = 50\text{cm}$$

$$S_{fe} = 200\text{cm}^2$$

$$\mu_{rfe} = 1000$$

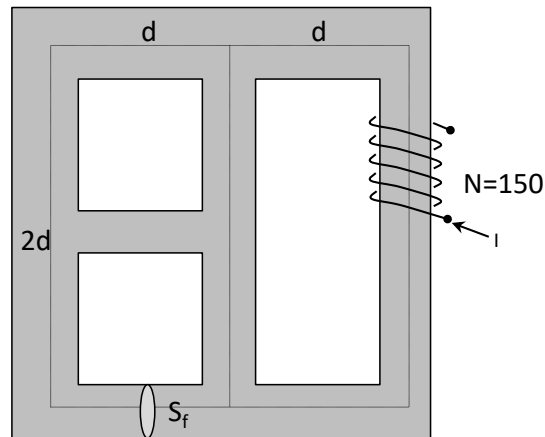


Figura 22 – Circuito magnetico

La riluttanza del generico tratto di tubo di flusso di lunghezza d è:

$$\mathfrak{R}_d = \frac{d}{\mu_0 \mu_{rfe} S_{fe}} = \frac{0,5}{1000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 198,94 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$$

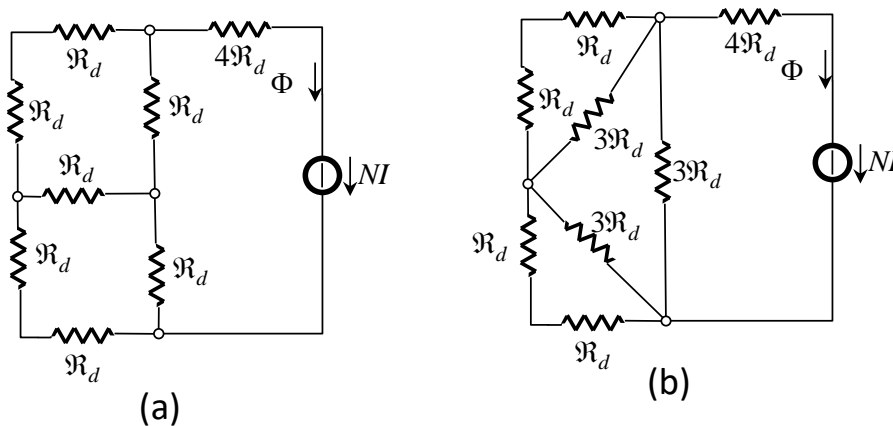


Figura 23 – (a) Circuito elettrico corrispondente al circuito magnetico di Figura 22; (b) Circuito elettrico equivalente dopo la trasformazione stella-triangolo.

In Figura 23a è riportato il circuito elettrico corrispondente a quello magnetico di Figura 22. In Figura 23b la stella di riluttanze è sostituita con l'equivalente a triangolo in modo da poter procedere alla ulteriore semplificazione del circuito elettrico. Con questa semplificazione si può ricavare una riluttanza equivalente vista dai morsetti del generatore di FMM:

$$\mathfrak{R}_{d_{eq}} = \left\{ \left[2 \cdot (2\mathfrak{R}_d // 3\mathfrak{R}_d) \right] // 3\mathfrak{R}_d \right\} + 4\mathfrak{R}_d = 2 \frac{6\mathfrak{R}_d^2}{5\mathfrak{R}_d} // 3\mathfrak{R}_d + 4\mathfrak{R}_d =$$

$$= \frac{\frac{36}{5}\mathfrak{R}_d^2}{\frac{12}{5}\mathfrak{R}_d + 3\mathfrak{R}_d} + 4\mathfrak{R}_d = \frac{36}{27}\mathfrak{R}_d + 4\mathfrak{R}_d = \frac{16}{3}\mathfrak{R}_d$$

$$\Phi = \frac{NI}{\mathfrak{R}_{d_{eq}}} = \frac{3NI}{16\mathfrak{R}_d} \quad \Phi_c = \frac{3N^2I}{16\mathfrak{R}_d} \Rightarrow$$

$$L = \frac{\Phi_c}{I} = \frac{3N^2}{16\mathfrak{R}_d} = \frac{3}{16} \frac{150^2}{198,94 \cdot 10^3} = 21,21 \text{ mH}$$

Esempio

Trascurando le riluttanze dei tratti in ferro rispetto a quelle dei traferri, si vuole determinare il coefficiente di autoinduzione dell'avvolgimento in **Figura 24**. La sezione trasversale S del circuito magnetico è pari a 16 cm^2 , $N_1=N_3=30$, $N_2=10$.

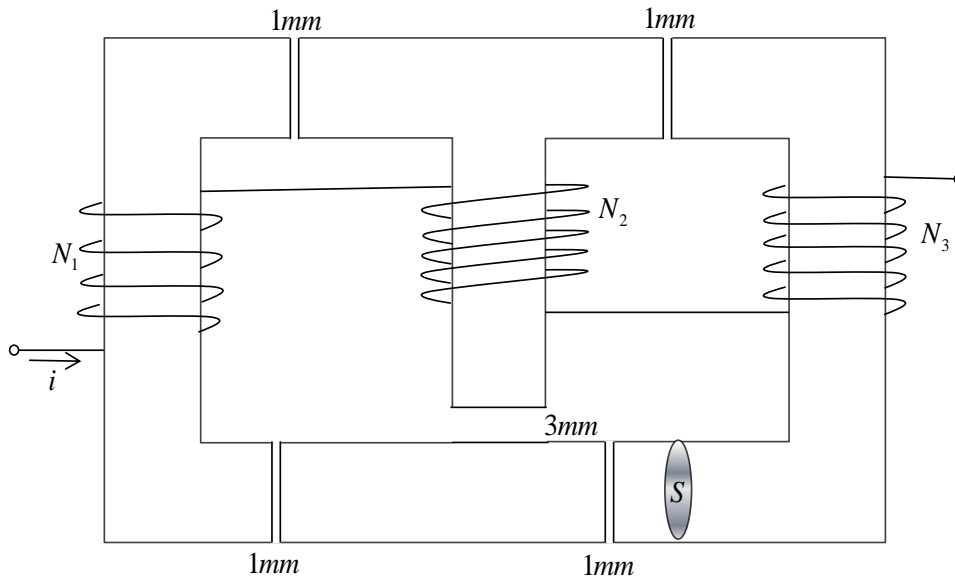


Figura 24 – Circuito magnetico

In **Figura 25** è riportato il circuito elettrico corrispondente a quello magnetico di **Figura 24** dove la riluttanza dei traferri è pari a:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{t}{S} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-3}}{16 \cdot 10^{-4}} = 4,97 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

Applicando il metodo delle correnti cicliche si può scrivere:

$$\begin{bmatrix} 5\mathfrak{R} & 3\mathfrak{R} \\ 3\mathfrak{R} & 5\mathfrak{R} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N_1 - N_2)i \\ (N_3 - N_2)i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20i \\ 20i \end{bmatrix}$$

$$\Phi_1 = \frac{\begin{vmatrix} 20i & 3\mathfrak{R} \\ 20i & 5\mathfrak{R} \end{vmatrix}}{(25 - 9)\mathfrak{R}^2} = \frac{100 - 60}{16\mathfrak{R}} i = \frac{5i}{2\mathfrak{R}}$$

$$\Phi_2 = \Phi_1$$

Da cui:

$$\Phi_c = N_1\Phi_1 - N_2(\Phi_1 + \Phi_2) + N_3\Phi_2 = \frac{30 \cdot 5}{2\mathfrak{R}} i - 10 \frac{5i}{\mathfrak{R}} + \frac{30 \cdot 5}{2\mathfrak{R}} i = \frac{150 - 50}{\mathfrak{R}} i = \frac{100}{\mathfrak{R}} i$$

$$L = \frac{\Phi_c}{i} = \frac{100}{\mathfrak{R}} = \frac{100}{4.97 \cdot 10^5} = 0.2mH$$

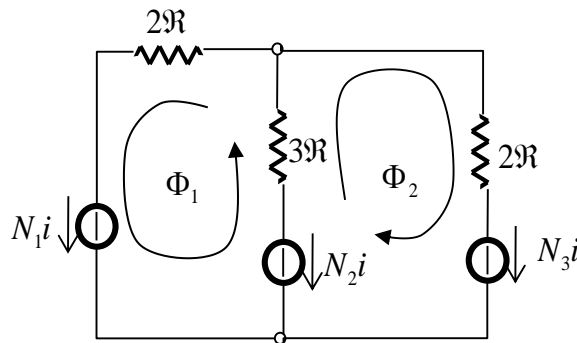


Figura 25 – Circuito elettrico corrispondente al circuito magnetico di Figura 24.

Circuiti magnetici attivi

I circuiti magnetici attivi realizzano dei magneti permanenti. Essi sono costruiti con materiali magnetici duri caratterizzati, come visto precedentemente, da cicli di isteresi molto larghi. Un circuito magnetico realizzato con un materiale duro e provvisto di un traferro, come quello in Figura 26, anche in assenza di forza magnetomotrice impressa (valore del campo H nullo), presenta un valore di induzione al traferro diversa da zero. Per questo motivo questo tipo di circuito magnetico è detto *attivo*.

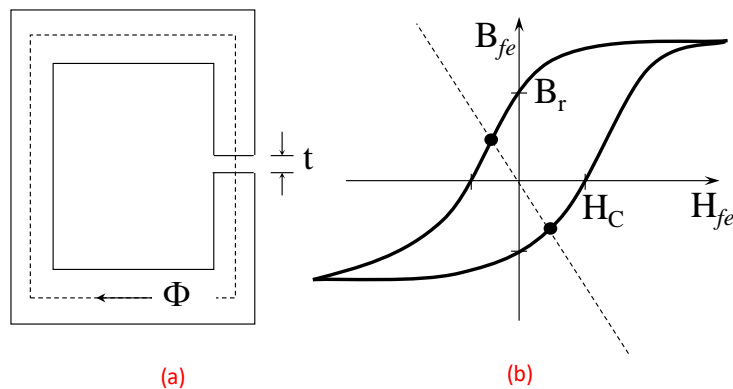


Figura 26 – Magnete permanente (a); Ciclo di isteresi di un materiale duro (b).

Per trovare questo valore di induzione dobbiamo, come di consueto, risolvere le equazioni del circuito. Nel caso dell'esempio in **Figura 26**, supponiamo che la sezione trasversale del nucleo (S_{fe}) sia costante (anche il flusso in tutte le sezioni sarà costante, essendo, con le ipotesi fatte precedentemente, il nucleo un tubo di flusso).

$$B_{fe} \cdot S_{fe} = B_t \cdot S_t \Rightarrow B_{fe} = B_t \frac{S_t}{S_{fe}}$$

Supponiamo che la sezione trasversale del traferro (S_t) sia leggermente maggiore di quella del ferro, per tenere conto degli effetti di bordo. Siano l_{fe} e t le lunghezze del tratto in ferro e del traferro, rispettivamente. Applicando la legge della circuitazione lungo la linea media (a tratteggio in **Figura 26**) si ottiene:

$$H_{fe} \cdot l_{fe} + H_t \cdot t = 0$$

L'uguaglianza a zero del secondo membro di questa equazione deriva dal fatto che le correnti concatenate col la linea media sono nulle.

La permeabilità magnetica dell'aria è costante, da cui: $H_t = B_t/\mu_0$. Ricavando il valore del campo H_t al traferro:

$$H_t = -\frac{l_{fe}}{t} H_{fe}$$

Possiamo ricavare la relazione fra B_{fe} e H_{fe} :

$$B_{fe} = B_t \frac{S_t}{S_{fe}} = \mu_0 H_t \frac{S_t}{S_{fe}} = -\mu_0 \frac{l_{fe}}{t} \frac{S_t}{S_{fe}} H_{fe}$$

Si tratta di una retta nel piano $B_{fe} - H_{fe}$ passante per l'origine e con coefficiente angolare pari a $-\mu_0 \frac{l_{fe}}{t} \frac{S_t}{S_{fe}}$, quindi con pendenza negativa. Il circuito magnetico andrà a lavorare in corrispondenza dell'intersezione del ciclo di isteresi con tale retta (vedi **Figura 26b**). Sono due i possibili punti di lavoro che dipendono dalla magnetizzazione del materiale.

Come si può notare, l'inclinazione della retta dipende dalle dimensioni geometriche del nucleo e del traferro. In particolare, se il traferro ha uno spessore molto piccolo, tendente a zero, il coefficiente angolare della retta tende ad ∞ e la retta diventa verticale: il circuito lavorerà all'induzione residua B_r . Viceversa, se le dimensioni del traferro aumentano fino a tendere al valore ∞ , la retta tende a diventare orizzontale e l'intensità del campo tende alla forza coercitiva H_c mentre l'induzione è nulla. A questo ultimo caso si riferisce anche il caso di un ago magnetico dove si ha un traferro praticamente infinito e l'ago è soggetto alla forza coercitiva.

Per modificare la distribuzione delle linee del campo magnetico all'interno del traferro spesso si sagomano le espansioni polari e si inserisce un ulteriore tratto di circuito magnetico (**Figura 27a**). Questo secondo tratto è libero di ruotare modificando conseguentemente il valore dell'induzione alla quale il circuito si mette a lavorare. Questo effetto viene sfruttato, ad esempio, nella costruzione delle

macchine a corrente continua dove il campo all'interno della struttura viene reso il più possibile sinusoidale sagomando opportunamente le espansioni polari (**Figura 27b**).

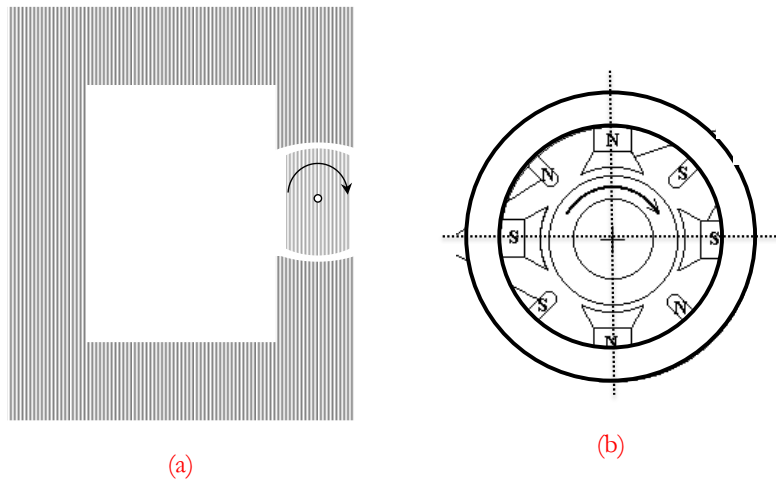


Figura 27 – (a) Magnete permanente a traferro variabile; (b) sezione di una macchina a corrente continua.

Circuiti elettrici mutuamente accoppiati

Nello studio della teoria dei circuiti, nel modello a parametri concentrati è presente un componente ideale, la *Mutua Induttanza*, che mette in conto i fenomeni di accoppiamento elettromagnetico tra due circuiti elettrici dovuti al loro accoppiamento magnetico. Il simbolo circuitale è quello di **Figura 28**.

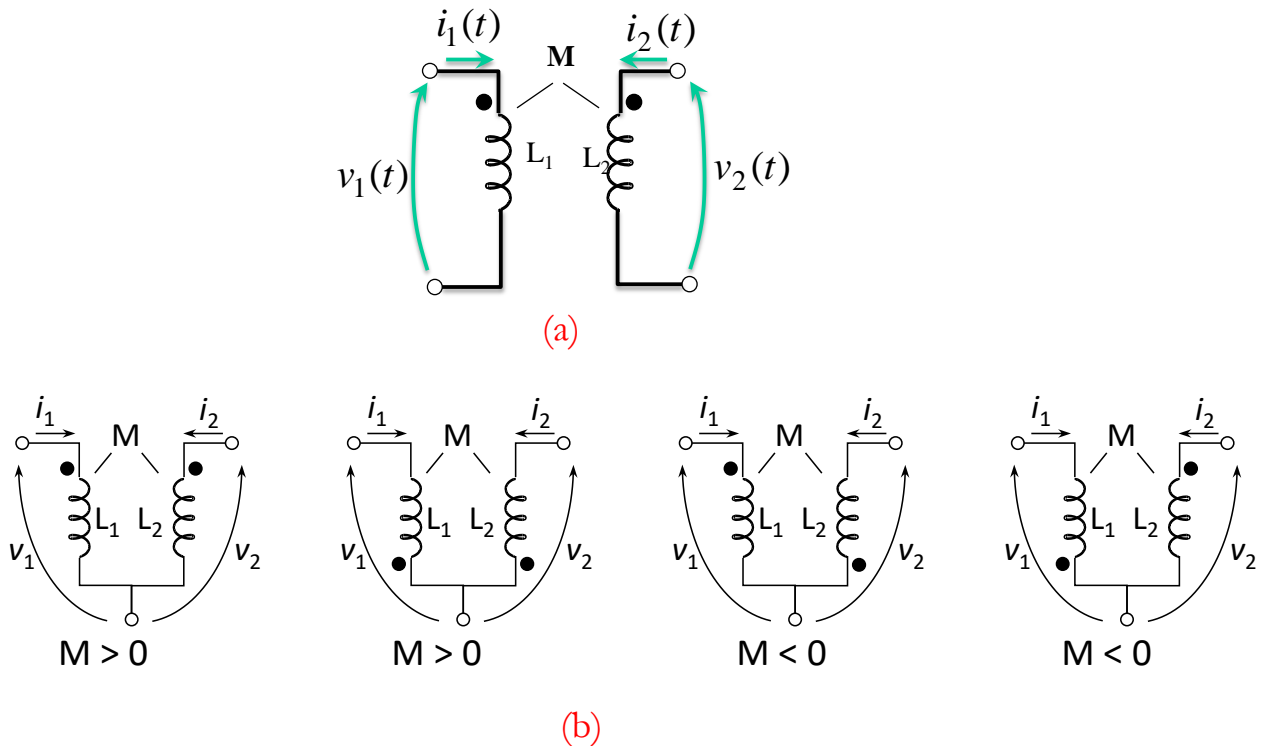


Figura 28 – Mutua Induttanza (a) simbolo circuitale; (b) Convenzione dei pallini.

Questo componente ideale ha un corrispondente fisico in un circuito magnetico, ad esempio, come quello in **Figura 29**.

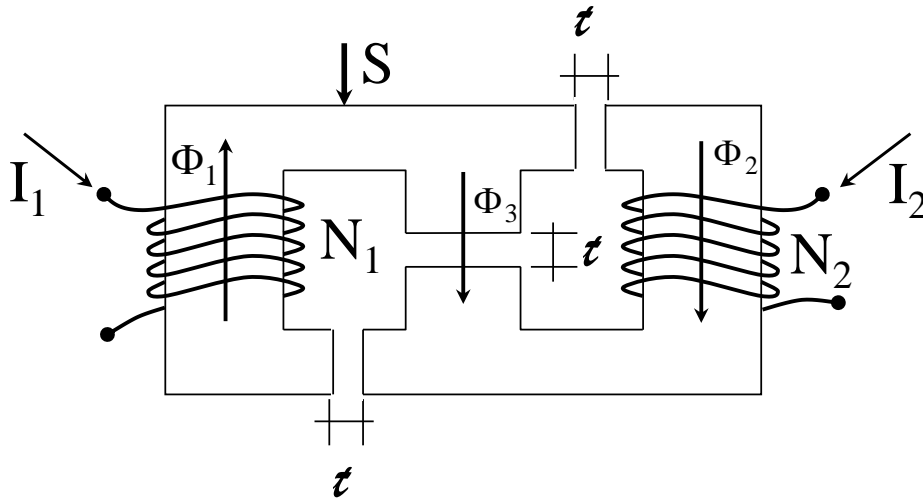


Figura 29 – Circuito elettrici accoppiati attraverso un campo magnetico.

Due conduttori, attraversati da due correnti I_1 ed I_2 , sono avvolti in N_1 e N_2 spire rispettivamente, su di un nucleo di materiale ferromagnetico. Il nucleo ha una sezione costante e pari a S e sono presenti tre traferri di lunghezze uguali e pari a t .

Le equazioni descrittive del doppio bipolo di **Figura 28** sono le seguenti:

$$\begin{cases} \varphi_{c1} = L_1 \cdot i_1 + M_{12} \cdot i_2 \\ \varphi_{c2} = M_{21} \cdot i_1 + L_2 \cdot i_2 \end{cases}$$

con $M_{12} = M_{21}$

Derivando:

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt} \\ v_2(t) = M \cdot \frac{di_1}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

dove φ_{c1} e φ_{c2} sono i flussi concatenati con i due avvolgimenti 1 e 2.

Si noti che il parametro mutua induttanza (M) può essere positivo o negativo a seconda dei versi dei flussi e quindi (attraverso la regola di Maxwell), a seconda di come sono avvolti i due conduttori. Come si mostrerà di seguito, il valore dei parametri circuitali, e quindi anche il segno della mutua, può essere determinato risolvendo il circuito magnetico che realizza l'accoppiamento. Ciò significa analizzare il doppio bipolo all'interno della superficie limite che ne contiene i fenomeni elettromagnetici. Nella Teoria dei Circuiti i componenti sono studiati solo al di fuori della superficie limite; occorre quindi associare al componente circuitale Mutua Induttanza di **Figura 28** una ulteriore informazione, che è rappresentata dalla così detta *Convenzione dei Pallini*: la mutua è assunta positiva se entrambe le correnti i_1 e i_2 entrano (o escono) dai morsetti contrassegnati con i pallini, viceversa la mutua è assunta negativa se una corrente entra e l'altra esce dai morsetti contrassegnati con i pallini (**Figura 28b**).

Per ricavare i parametri circuitali L_1 (autoinduttanza del circuito 1), L_2 (autoinduttanza del circuito 2) ed M (mutua induttanza), occorre ricavare i flussi Φ_1 e Φ_2 nel circuito magnetico di **Figura 29**, e quindi determinare i flussi concatenati con i due avvolgimenti. A tal fine, come già visto precedentemente, possiamo fare riferimento al circuito elettrico corrispondente a quello magnetico (vedi **Figura 30**). Si è ipotizzato di trascurare le riluttanze dei tratti in ferro rispetto a quelli del traferro (infatti la permeabilità dei tratti in ferro è molto più alta di quella dell'aria)

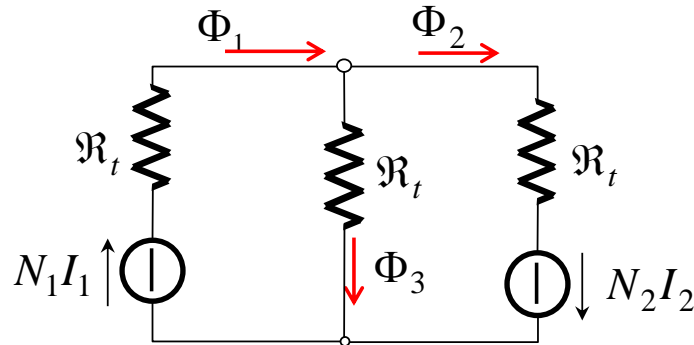


Figura 30 – Circuito elettrico corrispondente al circuito magnetico di **Figura 29**.

La riluttanza dei traferri è:

$$\mathfrak{R}_t = \frac{1}{\mu_0} \frac{t}{S}$$

Le equazioni del circuito sono:

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 \\ N_1 I_1 = \mathfrak{R}_t \Phi_1 + \mathfrak{R}_t \Phi_3 \\ N_2 I_2 = \mathfrak{R}_t \Phi_2 - \mathfrak{R}_t \Phi_3 \end{cases}$$

Risolvendo rispetto a Φ_1 e Φ_2 :

$$\begin{cases} \Phi_3 = \Phi_1 - \Phi_2 \\ N_1 I_1 = 2\mathfrak{R}_t \Phi_1 - \mathfrak{R}_t \Phi_2 \\ N_2 I_2 = -\mathfrak{R}_t \Phi_1 + 2\mathfrak{R}_t \Phi_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2\mathfrak{R}_t & -\mathfrak{R}_t \\ -\mathfrak{R}_t & 2\mathfrak{R}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 I_1 \\ N_2 I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \Phi_1 = \frac{2}{3\mathfrak{R}_t} N_1 I_1 + \frac{1}{3\mathfrak{R}_t} N_2 I_2 \\ \Phi_2 = \frac{1}{3\mathfrak{R}_t} N_1 I_1 + \frac{2}{3\mathfrak{R}_t} N_2 I_2 \end{cases}$$

Il flusso concatenato con le N_1 spire dell'avvolgimento 1 sarà N_1 volte il flusso Φ_1 , così come il flusso concatenato con le N_2 spire dell'avvolgimento 2 sarà N_2 volte il flusso Φ_2 :

$$\begin{cases} \Phi_{c1} = \frac{2}{3\mathfrak{R}_t} N_1^2 I_1 + \frac{1}{3\mathfrak{R}_t} N_1 N_2 I_2 \\ \Phi_{c2} = \frac{1}{3\mathfrak{R}_t} N_1 N_2 I_1 + \frac{2}{3\mathfrak{R}_t} N_2^2 I_2 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} L_1 = \frac{2N_1^2}{3\mathfrak{R}_t} \\ L_2 = \frac{2N_1^2}{3\mathfrak{R}_t} \\ M_{12} = M_{21} = \frac{N_1N_2}{3\mathfrak{R}_t} \end{cases}$$

Si noti che la mutua induttanza $M_{12} = M_{21}$ come in premessa. Una dimostrazione rigorosa di questo fatto è riportata più avanti.

Esempio

Per il circuito di **Figura 31**, calcolare la potenza attiva e reattiva erogate dal generatore sinusoidale $e(t)$, nell'ipotesi di trascurare i flussi dispersi Sia \mathfrak{R} la riluttanza di ogni tronco. Inoltre sono noti: $N_1 = 75$ spire; $N_2 = 100$ spire; $\mathfrak{R} = 10^5 \text{ H}^{-1}$; $R = 50 \ \Omega$; $C = 150 \ \mu\text{F}$; $E = 10 \text{ V}$; $f = 50 \text{ Hz}$.

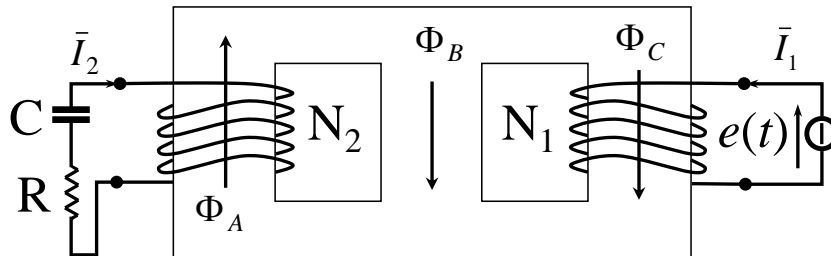


Figura 31 – Circuito magnetico.

In **Figura 32** è riportato il circuito elettrico corrispondente a quello magnetico di **Figura 31**.

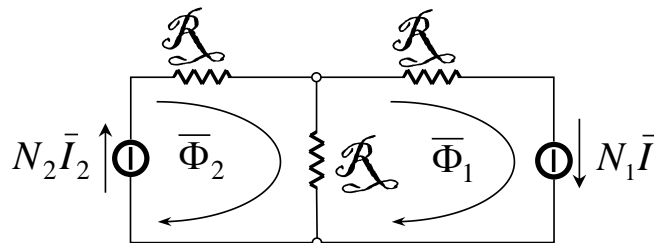


Figura 32 – Circuito elettrico corrispondente al circuito magnetico di **Figura 31**

Applicando il metodo delle correnti cicliche ai due flussi indicati nella figura si ha:

$$\begin{cases} N_2 \cdot I_2 = 2\mathfrak{R} \cdot \Phi_2 - \mathfrak{R} \cdot \Phi_1 \\ N_1 \cdot I_1 = 2\mathfrak{R} \cdot \Phi_1 - \mathfrak{R} \cdot \Phi_2 \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} \Phi_1 = 2\Phi_2 - \frac{N_2 \cdot I_2}{\mathfrak{R}} \\ N_1 \cdot I_1 = 2\mathfrak{R} \cdot \left(2\Phi_2 - \frac{N_2 \cdot I_2}{\mathfrak{R}} \right) - \mathfrak{R} \cdot \Phi_2 \end{cases}$$

$$N_1 \cdot I_1 = -2N_2 \cdot I_2 + 4\mathfrak{R} \cdot \Phi_2 - \mathfrak{R} \cdot \Phi_2 = -2N_2 \cdot I_2 + 3\mathfrak{R} \cdot \Phi_2$$

$$\begin{cases} \Phi_2 = \frac{N_1 \cdot I_1}{3\mathcal{R}} + \frac{2N_2 \cdot I_2}{3\mathcal{R}} \\ \Phi_1 = -\frac{2N_2 \cdot I_2}{\mathcal{R}} + \frac{2N_2 \cdot I_2}{3\mathcal{R}} + \frac{2N_1 \cdot I_1}{3\mathcal{R}} = \frac{N_2 \cdot I_2}{3\mathcal{R}} + \frac{2N_1 \cdot I_1}{3\mathcal{R}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_{c2} = N_2 \Phi_2 = \frac{N_1 N_2 \cdot I_1}{3\mathcal{R}} + \frac{2N_2^2 \cdot I_2}{3\mathcal{R}} \\ \Phi_{c1} = N_1 \Phi_1 = \frac{N_1 N_2 \cdot I_2}{3\mathcal{R}} + \frac{2N_1^2 \cdot I_1}{3\mathcal{R}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1 = \frac{2N_1^2}{3\mathcal{R}} = 0,0375 \text{ H} \\ L_2 = \frac{2N_2^2}{3\mathcal{R}} = 0,0667 \text{ H} \\ M = \frac{N_1 N_2}{3\mathcal{R}} = 0,025 \text{ H} \end{cases}$$

I parametri così determinati consentono di caratterizzare il componente Mutua Induttanza nel circuito elettrico in **Figura 33** con $\omega L_1 = 2\pi f L_1 = 11,78 \ \Omega$; $\omega L_2 = 20,94 \ \Omega$; $\omega M = 7,85 \ \Omega$; $1 / \omega C = 21,22 \ \Omega$.

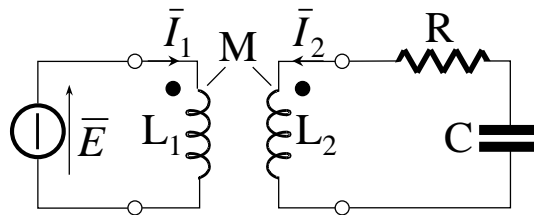


Figura 33 – Circuito elettrico.

Risolvendo il circuito elettrico si ha:

$$\begin{cases} \bar{E} = j\omega L_1 \cdot \bar{I}_1 + j\omega M \cdot \bar{I}_2 \\ 0 = j\omega L_2 \cdot \bar{I}_2 + j\omega M \cdot \bar{I}_1 + R \cdot \bar{I}_2 - \frac{j}{\omega C} \cdot \bar{I}_2 \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} 10 = j11,78 \cdot \bar{I}_1 + j7,85 \cdot \bar{I}_2 \\ 0 = j7,85 \cdot \bar{I}_1 + (50 - j0,28) \cdot \bar{I}_2 \end{cases} \quad \bar{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & j7,85 \\ 0 & 50 - j0,28 \end{vmatrix}}{\Delta} = 0,83 \angle -84,68^\circ$$

$$\dot{S} = \bar{E} \cdot \bar{I}_1^* = 10 \angle 0^\circ \cdot 0,83 \angle 84,68^\circ = 0,769 + j8,264$$

$$P = 0,769 \text{ W} \quad Q = 8,264 \text{ VAR}$$

Esempio

Per il circuito magnetico in **Figura 34**, assumendo che tutti i traferri abbiano riluttanza pari a \mathcal{R}_0 e che la riluttanza dei tratti in ferro sia trascurabile, determinare i coefficienti di auto e mutua induzione dei due avvolgimenti.

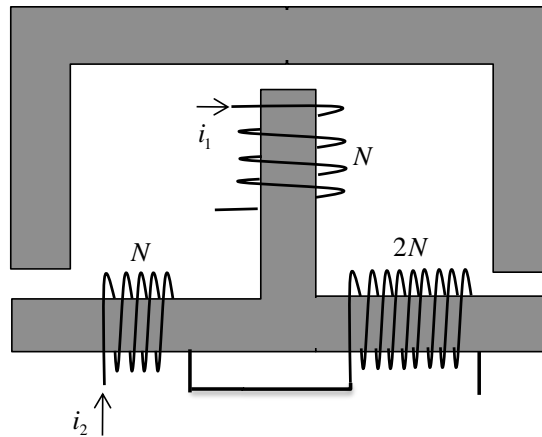


Figura 34 – Circuito magnetico

In **Figura 35** è riportato il circuito elettrico corrispondente a quello magnetico di **Figura 34**.

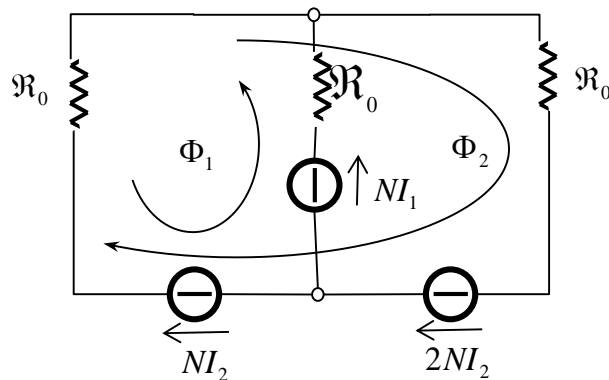


Figura 35 – Circuito elettrico corrispondente al circuito magnetico di **Figura 34**

Applicando il metodo delle correnti cicliche ai due flussi indicati nella figura si ha:

$$\begin{cases} 2\mathfrak{R}_0\Phi_1 - \mathfrak{R}_0\Phi_2 = NI_1 - NI_2 \rightarrow \Phi_1 = \frac{\Phi_2}{2} + \frac{NI_1 - NI_2}{2\mathfrak{R}_0} \\ 2\mathfrak{R}_0\Phi_2 - \mathfrak{R}_0\Phi_1 = 3NI_2 \xrightarrow{\times 2} 4\mathfrak{R}_0\Phi_2 - 2\mathfrak{R}_0\Phi_1 = 6NI_2 \end{cases}$$

E sommando membro a membro:

$$3\mathfrak{R}_0\Phi_2 = NI_1 + 5NI_2$$

Da cui:

$$\Phi_2 = \frac{1}{3} \frac{NI_1}{\mathfrak{R}_0} + \frac{5}{3} \frac{NI_2}{\mathfrak{R}_0}$$

$$\Phi_1 = \frac{2}{3} \frac{NI_1}{\mathfrak{R}_0} + \frac{1}{3} \frac{NI_2}{\mathfrak{R}_0}$$

$$\Phi_{c1} = N\Phi_1 = \frac{2N^2 I_1}{3\mathfrak{R}_0} + \frac{N^2 I_2}{3\mathfrak{R}_0}$$

$$\Phi_{c2} = 2N\Phi_2 + N(\Phi_2 - \Phi_1) = \frac{2N^2 I_1}{3\mathfrak{R}_0} + \frac{10N^2 I_2}{3\mathfrak{R}_0} + N(\Phi_2 - \Phi_1)$$

$$\Phi_2 - \Phi_1 = -\frac{NI_1}{3\mathfrak{R}_0} + \frac{4NI_2}{3\mathfrak{R}_0}$$

$$\Phi_{c2} = \frac{2N^2 I_1}{3\mathfrak{R}_0} + \frac{10N^2 I_2}{3\mathfrak{R}_0} - \frac{N^2 I_1}{3\mathfrak{R}_0} + \frac{4N^2 I_2}{3\mathfrak{R}_0} = \frac{N^2 I_1}{3\mathfrak{R}_0} + \frac{14N^2 I_2}{3\mathfrak{R}_0}$$

$$\begin{cases} \Phi_{c1} = \frac{2N^2}{3\mathfrak{R}_0} I_1 + \frac{N^2}{3\mathfrak{R}_0} I_2 \\ \Phi_{c2} = \frac{N^2}{3\mathfrak{R}_0} I_1 + \frac{14N^2}{3\mathfrak{R}_0} I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = \frac{2N^2}{3\mathfrak{R}_0} \\ L_2 = \frac{14N^2}{3\mathfrak{R}_0} \\ M = \frac{N^2}{3\mathfrak{R}_0} \end{cases}$$

Esempio

Determinare l'energia totale accumulata nel circuito elettrico in **Figura 36**, sapendo che il circuito elettrico è a regime e che:

$$E = 10 \text{ V}; A_1 = 5 \text{ A}; A_2 = 4 \text{ A}$$

$$L = 12 \text{ mH}; R_1 = 2 \Omega; R_2 = 5 \Omega;$$

$$R_3 = 7 \Omega; R_4 = 15 \Omega$$

$$N_1 = 100; N_2 = 200$$

$$S_f = 60 \text{ cm}^2; t_1 = 2 \text{ mm}; t_2 = 4 \text{ mm}; t_3 = 6 \text{ mm}$$

$$\mu_{fe} = \infty$$

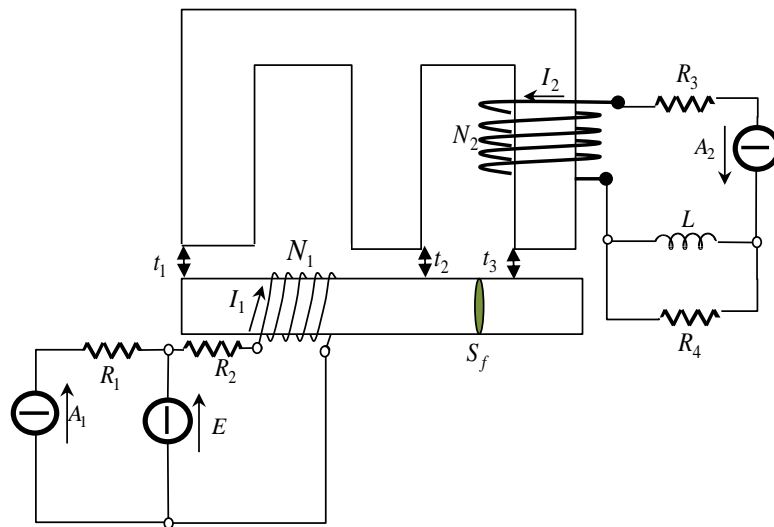


Figura 36 – Circuito magnetico

In **Figura 37** è riportato il circuito elettrico corrispondente a quello magnetico di **Figura 36**.

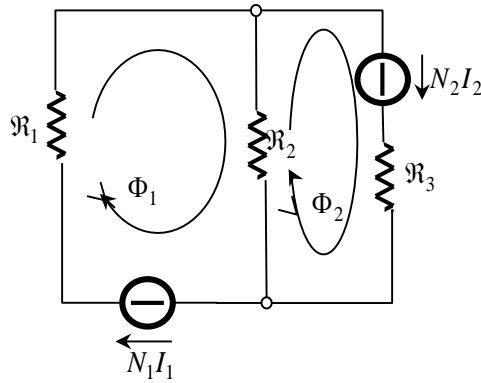


Figura 37 – Circuito elettrico corrispondente al circuito magnetico di **Figura 36**

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{1}{\mu_0} \frac{t_1}{S_f} = 2,65 \cdot 10^5 H^{-1}$$

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{1}{\mu_0} \frac{t_2}{S_f} = 5,305 \cdot 10^5 H^{-1}$$

$$\mathfrak{R}_3 = \frac{1}{\mu_0} \frac{t_3}{S_f} = 7,9576 \cdot 10^5 H^{-1}$$

Applicando il metodo delle correnti cicliche ai due flussi indicati nella figura si ha:

$$\begin{bmatrix} (\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2) & -\mathfrak{R}_2 \\ -\mathfrak{R}_2 & (\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 I_1 \\ N_2 I_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = (\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2) \cdot (\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3) - \mathfrak{R}_2^2 = 77,36 \cdot 10^{10}$$

$$\Phi_1 = \frac{(\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3) \cdot N_1 I_1 + \mathfrak{R}_2 \cdot N_2 I_2}{\Delta}$$

$$\Phi_2 = \frac{(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2) \cdot N_2 I_2 + \mathfrak{R}_2 \cdot N_1 I_1}{\Delta}$$

Da cui:

$$\Phi_{c1} = N_1 \Phi_1 = N_1^2 \frac{(\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3)}{\Delta} I_1 + N_1 N_2 \frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta} I_2$$

$$\Phi_{c2} = N_2 \Phi_2 = N_1 N_2 \frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta} I_1 + N_2^2 \frac{(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2)}{\Delta} I_2$$

$$L_1 = N_1^2 \frac{(\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3)}{\Delta} = 17,1 mH$$

$$L_2 = N_2^2 \frac{(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2)}{\Delta} = 41,13 mH$$

$$M = N_1 N_2 \frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta} = 13,715 mH$$

I parametri così determinati consentono di caratterizzare il componente Mutua Induttanza nel circuito elettrico in **Figura 38**.

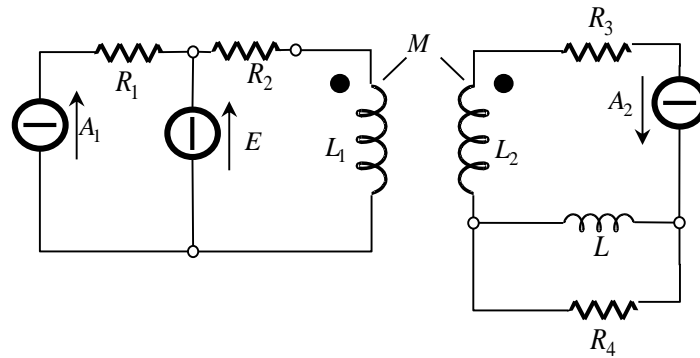


Figura 38 – Circuito elettrico che accumula l'energia da determinare nell'esercizio

Poiché però il circuito è a regime e il regime conseguito è quello stazionario (i generatori forniscono valori di tensioni e correnti costanti), il circuito a regime diventa quello di **Figura 39**.

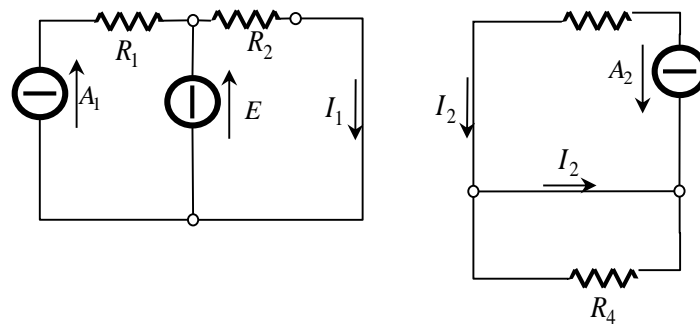


Figura 39 – Circuito di **Figura 38** in regime stazionario.

$$I_1 = \frac{E}{R_2} = 2A$$

$$I_2 = -A_2 = -4A$$

Da cui, l'energia immagazzinata nel circuito è la somma dell'energia immagazzinata nella mutua e di quella immagazzinata nell'induttore L, cioè: $W = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2 + \frac{1}{2}LI_2^2 = 349,52mJ$

Trasformatore induttivo

Sin qui abbiamo fatto l'ipotesi che il nucleo di materiale ferromagnetico fosse in grado di incanalare tutto il flusso. Tuttavia, questa ipotesi, come già sottolineato in precedenza, introduce delle approssimazioni spesso non accettabili. Vedremo di seguito come rimuovendo questa ipotesi si arrivi a definire il modello circuitale a parametri concentrati del così detto trasformatore induttivo.

Supponiamo di considerare il circuito magnetico di **Figura 14** dove rimuoviamo l'ipotesi di flusso costante in tutto il nucleo (vedi **Figura 40**).

Chiamiamo primario l'avvolgimento percorso dalla corrente I_1 e secondario quello percorso dalla corrente I_2 . La corrente I_1 , se agisse da sola, farebbe circolare un flusso che in parte si incanala nel nucleo magnetico e in parte si chiude in aria. Il primo flusso si concatena con l'avvolgimento secondario, mentre il secondo non contribuisce all'accoppiamento magnetico tra i due circuiti e viene chiamato Flusso Disperso Primario Φ_{d1} . Analogamente, la corrente I_2 , se agisse da sola, farebbe

circolare un flusso che in parte si incanala nel nucleo magnetico e in parte si chiude in aria. Chiamiamo quest'ultimo Flusso Disperso Secondario Φ_{d2} . Se le due correnti agiscono contemporaneamente ci sarà un flusso totale che si incanala nel nucleo magnetico (somma o differenza dei due flussi precedenti, secondo la regola di Maxwell. Nel caso di **Figura 40** i due flussi si sommano). Il totale flusso incanalato nel nucleo prende il nome di Flusso Principale e indicato con Φ . Si noti che stiamo introducendo nella nostra modellazione del fenomeno una certa approssimazione; in effetti ci saranno linee di flusso che si concatenano solo in parte con l'avvolgimento primario e altre che si concatenano in parte con l'avvolgimento secondario e altre che si concatenano con parte delle spire primarie e con parte di quelle secondarie. Tuttavia l'esperienza ha mostrato che il modello adottato risponde in maniera soddisfacente alle esigenze pratiche.

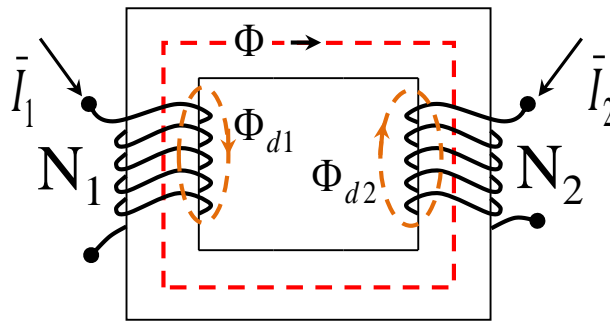


Figura 40 – Circuiti elettrici mutuamente accoppiati.

Il flusso concatenato con la singola spira dell'avvolgimento primario sarà $\Phi_1 = \Phi + \Phi_{d1}$ e, analogamente, sarà $\Phi_2 = \Phi + \Phi_{d2}$ quello concatenato con la singola spira dell'avvolgimento secondario. I flussi concatenati con gli avvolgimenti primario e secondario saranno:

$$(*) \begin{cases} \Phi_{c1} = N_1 \Phi + N_1 \Phi_{d1} \\ \Phi_{c2} = N_2 \Phi + N_2 \Phi_{d2} \end{cases}$$

I circuiti elettrici corrispondenti ai circuiti magnetici interessati dai tre flussi Φ , Φ_{d1} e Φ_{d2} sono rappresentati in **Figura 41**. Per il circuito di **Figura 41a** sarà:

$$\Phi = G_m (N_1 I_1 + N_2 I_2)$$

essendo G_m la permeanza del nucleo di materiale ferromagnetico entro cui si chiudono le linee del flusso principale.

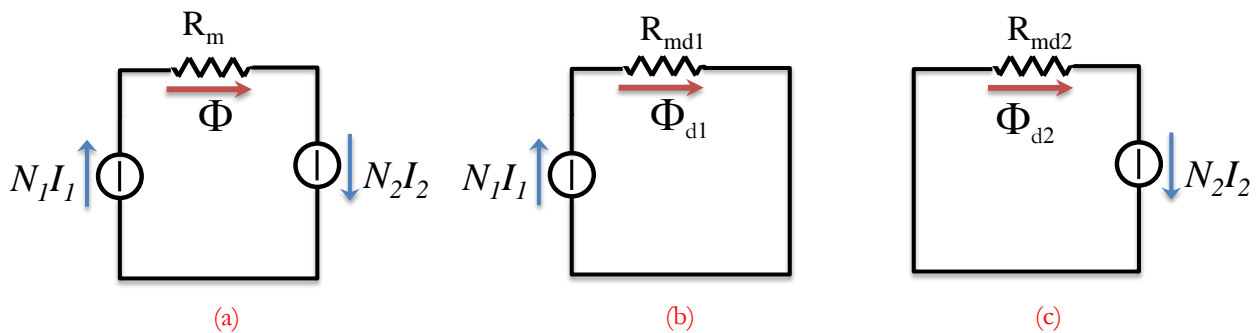


Figura 41 – Circuiti elettrici corrispondenti ai circuiti magnetici del flusso principale (a), del flusso di dispersione primario (b), e del flusso di dispersione secondario (c).

I flussi dispersi Φ_{d1} e Φ_{d2} circolano in circuiti che si chiudono parzialmente nel nucleo e prevalentemente in aria. Per essi è possibile trascurare la riluttanza dei tratti in ferro e ritenere quindi le riluttanze R_{md1} e R_{md2} , e quindi le rispettive permeanze G_{md1} e G_{md2} , costanti. Nel circuito magnetico relativo al flusso di dispersione primaria Φ_{d1} agisce la sola FMM $N_1 I_1$ (vedi **Figura 41b**), e sarà:

$$\Phi_{d1} = G_{md1}(N_1 I_1)$$

In modo analogo, il flusso di dispersione secondario sarà (vedi **Figura 41c**):

$$\Phi_{d2} = G_{md2}(N_2 I_2)$$

da cui:

$$\begin{cases} \Phi_{cd1} = N_1 \Phi_{d1} = N_1^2 G_{md1} I_1 \\ \Phi_{cd2} = N_2 \Phi_{d2} = N_2^2 G_{md2} I_2 \end{cases}$$

Le quantità $N_1^2 G_{md1}$ e $N_2^2 G_{md2}$ sono dimensionalmente delle induttanze, che vengono chiamate:

$$L_{d1} = N_1^2 G_{md1} \quad \text{Induttanza di dispersione primaria;}$$

$$L_{d2} = N_2^2 G_{md2} \quad \text{Induttanza di dispersione secondaria.}$$

Questi valori devono essere i più bassi possibile poiché i flussi di dispersione non contribuiscono all'accoppiamento elettromagnetico tra i due avvolgimenti a fronte di un impegno di Amperspire.

Inoltre, si definisce una ulteriore grandezza, il cui significato sarà chiarito più avanti:

$$L_m = N_1^2 G_m \quad \text{Induttanza di magnetizzazione.}$$

Equazioni della Mutua

Riprendendo le equazioni (*) e sostituendo i valori dei flussi appena trovati si ottiene:

$$\begin{cases} \Phi_{c1} = N_1 \Phi + N_1 \Phi_{d1} = N_1^2 (G_m + G_{md1}) I_1 + N_1 N_2 G_m I_2 \\ \Phi_{c2} = N_2 \Phi + N_2 \Phi_{d2} = N_1 N_2 G_m I_1 + N_2^2 (G_m + G_{md2}) I_2 \end{cases}$$

Anche in questo caso si possono riconoscere grandezze che sono dimensionalmente delle induttanze.

In particolare, se chiamiamo:

$$L_1 = \left. \frac{\Phi_{c1}}{I_1} \right|_{I_2=0} = N_1^2 (G_m + G_{md1}) \quad \text{Induttanza propria dell'avvolgimento primario (o autoinduttanza a vuoto del primario);}$$

$$L_2 = \left. \frac{\Phi_{c2}}{I_2} \right|_{I_1=0} = N_2^2 (G_m + G_{md2}) \quad \text{Induttanza propria dell'avvolgimento secondario (o autoinduttanza a vuoto del secondario);}$$

$$M = \left. \frac{\Phi_{c1}}{I_2} \right|_{I_1=0} = \left. \frac{\Phi_{c2}}{I_1} \right|_{I_2=0} = N_1 N_2 G_m \quad \text{Induttanza mutua}$$

sarà:

$$\begin{cases} \Phi_{c1} = L_1 I_1 + M I_2 \\ \Phi_{c2} = M I_1 + L_2 I_2 \end{cases}$$

Nell'ipotesi di considerare correnti variabili nel tempo, derivando le precedenti equazioni otteniamo le equazioni della mutua induttanza, già introdotte precedentemente:

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

L'utilizzo di queste ultime equazioni differenziali nella Teoria dei Circuiti, anziché le precedenti equazioni lineari, deriva dal fatto che il modello circuitale proposto utilizza, quali variabili descrittive, solo le tensioni e le correnti.

Circuito equivalente del trasformatore induttivo

Riprendendo le equazioni (*) e sostituendo i valori delle induttanze di magnetizzazione, e di dispersione primaria e secondaria precedentemente definite si ottiene:

$$\Phi_{c1} = N_1^2 (G_m + G_{md1}) I_1 + N_1 N_2 G_m I_2 = L_{d1} I_1 + L_m I_1 + N_1 N_2 G_m I_2$$

Moltiplicando e dividendo per N_1 l'ultimo termine del secondo membro si ottiene:

$$\Phi_{c1} = L_{d1} I_1 + L_m I_1 + N_1^2 \frac{N_2}{N_1} G_m I_2 = L_{d1} I_1 + L_m \left(I_1 + \frac{N_2}{N_1} I_2 \right) = L_{d1} I_1 + L_m \left(I_1 + \frac{1}{n} I_2 \right)$$

con $n = \frac{N_1}{N_2}$ rapporto di trasformazione.

Analogamente:

$$\Phi_{c2} = N_1 N_2 G_m I_1 + L_{d2} I_2 + N_2^2 G_m I_2$$

Moltiplicando per $n = \frac{N_1}{N_2}$:

$$n\Phi_{c2} = L_m I_1 + nL_{d2} I_2 + N_1 N_2 G_m I_2 = n^2 L_{d2} \frac{I_2}{n} + L_m \left(I_1 + \frac{1}{n} I_2 \right)$$

cioè:

$$\begin{cases} \Phi_{c1} = L_{d1} I_1 + L_m \left(I_1 + \frac{1}{n} I_2 \right) \\ n\Phi_{c2} = n^2 L_{d2} \frac{I_2}{n} + L_m \left(I_1 + \frac{1}{n} I_2 \right) \end{cases}$$

Queste due equazioni costituiscono un modo alternativo di descrivere una mutua induttanza. Esse hanno una realizzazione circuitale che, ricordando le equazioni del trasformatore ideale:

$$\begin{cases} v_1 = n v_2 \\ i_1 = -\frac{1}{n} i_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi_{c1} = n \Phi_{c2} \\ i_1 = -\frac{1}{n} i_2 \end{cases}$$

corrisponde al doppio bipolo di **Figura 42**, detto *Trasformatore Induttivo*.

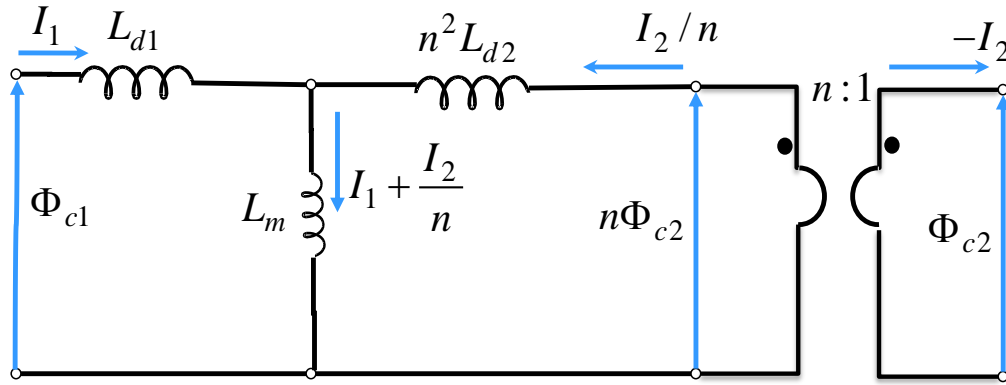


Figura 42 – Circuito equivalente del trasformatore induttivo riferito al primario.

Analogamente a quanto già visto per il trasformatore ideale, per riportare una grandezza dal secondario al primario:

- le tensioni ed i flussi si moltiplicano per il rapporto di trasformazione (o rapporto spire);
- le correnti si dividono per il rapporto spire;
- le induttanze si moltiplicano per il quadrato del rapporto spire.

Analogamente, si può ottenere il circuito equivalente riferito al secondario.

La rimozione dell'ipotesi di assenza di flussi dispersi, ovvero la rimozione dell'ipotesi di considerare il nucleo di materiale ferromagnetico con permeabilità magnetica infinita, ha portato a costruire un circuito che, oltre all'effetto trasformatore, modellato con un trasformatore ideale, tiene conto sia dei flussi dispersi, modellati introducendo le due induttanze di dispersione primaria e secondaria, sia del flusso di magnetizzazione che, in presenza di una riluttanza finita del nucleo ferromagnetico, necessita di Amperspire per essere sostenuto; l'induttanza di magnetizzazione mette in conto proprio questo secondo aspetto.

Equivalenza di doppi bipoli

I parametri circuitali del trasformatore induttivo in **Figura 42** possono essere espressi in funzione dei parametri della mutua: L_1 , L_2 ed M . Infatti i due doppi bipoli nella **Figura 28** e **Figura 42** sono equivalenti. Applicando le regole per l'equivalenza di doppi bipoli si ottiene che:

$$L_1 = \left. \frac{\Phi_{c1}}{I_1} \right|_{I_2=0} = L_{d1} + L_m$$

$$M = \left. \frac{\Phi_{c1}}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{1}{n} L_m$$

$$L_2 = \left. \frac{\Phi_{c2}}{I_2} \right|_{I_1=0} = L_{d2} + \frac{1}{n^2} L_m$$

da cui:

$$\begin{cases} L_{d1} = L_1 - nM \\ L_m = nM \\ n^2 L_{d2} = n^2 L_2 - nM \end{cases}$$

In **Figura 43** è riportato il circuito equivalente del trasformatore induttivo in funzione dei parametri della mutua.

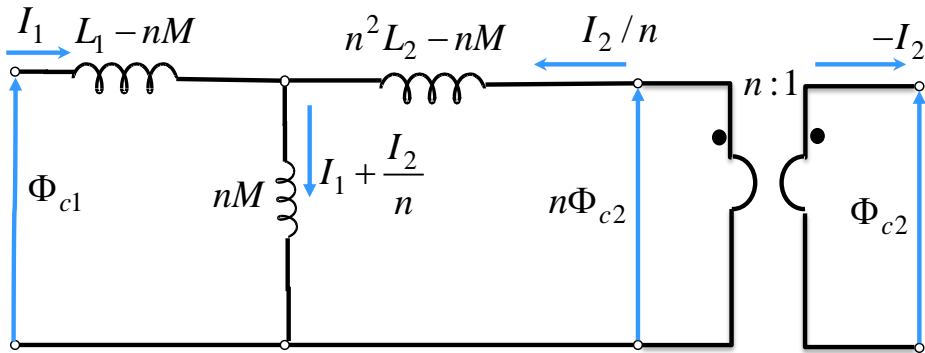


Figura 43 – Circuito equivalente del trasformatore induttivo in funzione dei parametri della mutua.

In conclusione, due circuiti mutuamente accoppiati ammettono un circuito equivalente costituito da un doppio bipolo induttivo a T collegato in cascata con un trasformatore ideale. In questa rappresentazione circuitale, meglio che nella rappresentazione a mutua induttanza di **Figura 28**, sono evidenziati i vari aspetti fisici coinvolti, cioè l'effetto trasformatore che si ottiene imponendo un determinato rapporto spire, e le induttanze di dispersione primaria e secondaria, nonché quella di magnetizzazione.

Se imponessimo nulli i flussi dispersi (mantenendo però una riluttanza non nulla del nucleo magnetico) il circuito equivalente sarebbe quello di **Figura 44**. In questo caso si avrebbe un accoppiamento perfetto ($k=1$) e il doppio bipolo caratterizza il *Trasformatore Perfetto*.

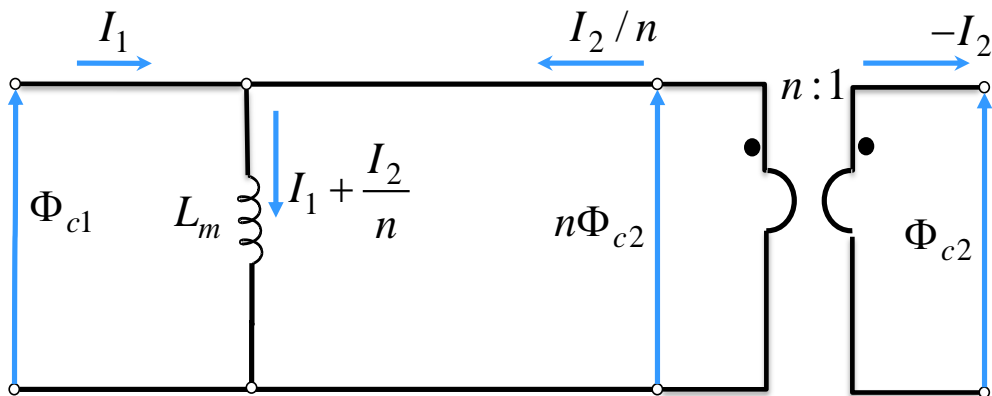


Figura 44 –Trasformatore perfetto

Se infine anche la riluttanza del nucleo ferromagnetico fosse per ipotesi nulla (ferro ideale con $\mu_r = \infty$) l'induttanza di magnetizzazione degenererebbe in un circuito aperto ed il circuito equivalente si ridurrebbe a quello del trasformatore ideale.

Il trasformatore ideale rappresenta quindi il modello di un sistema di due avvolgimenti accoppiati attraverso un nucleo di materiale magnetico ideale (ferro ideale) che incanala tutto il flusso e con riluttanza nulla. Inoltre, non è sede di perdite per effetto Joule negli avvolgimenti primario e secondario (perdite nel rame), né di perdite per isteresi e correnti parassite nel nucleo ferromagnetico.

Energia associata a due circuiti mutuamente accoppiati

Il componente mutua induttanza, analogamente all'induttore, immagazzina energia nel campo magnetico. Esso è un componente passivo e non dissipativo. Abbiamo assunto che $M_{12} = M_{21} = M$ dove $M_{12} = \left. \frac{\Phi_{c1}}{I_2} \right|_{I_1=0}$ e $M_{21} = \left. \frac{\Phi_{c2}}{I_1} \right|_{I_2=0}$.

Supponiamo per assurdo che $M_{12} \neq M_{21}$ e poniamo $M_{21} = M_{12} + g$.

La potenza assorbita dal doppio bipolo di **Figura 28** è:

$$p(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_{12} i_1 i_2 \right) + g i_2 \frac{d i_1}{dt}$$

Se si compie un lavoro Δw_1 che porta il punto di lavoro sul piano di stato $(i_1 - i_2)$ in **Figura 45**, dal punto A al punto B lungo il percorso l_1 e un lavoro Δw_2 da B ad A lungo l_2 , per la condizione di non dissipatività dovrà essere:

$$\Delta w_1 + \Delta w_2 = \oint p(t) dt = 0$$

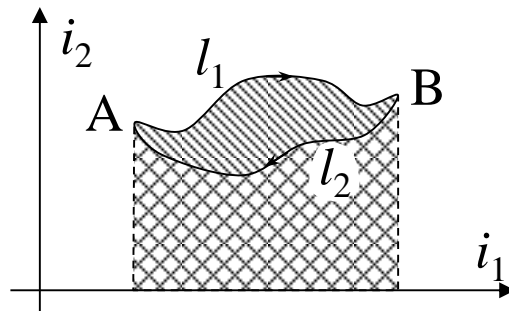


Figura 45 – Lavoro compiuto dal bipolo in una trasformazione ciclica.

Allora Δw_1 e Δw_2 devono dipendere solo dagli estremi e non dal percorso compiuto, da cui discende che l'integrando $p(t)$ deve essere un differenziale esatto. Questo è verificato solo se il parametro $g = 0$. Infatti, il termine $\oint g i_2 d i_1$ rappresenta l'area a tratteggio semplice in **Figura 45**; il termine $\int g i_2 d i_1$ assume valori diversi lungo i due percorsi l_1 ed l_2 . Quindi, dalla condizione di non-dissipatività del componente discende che g deve essere uguale a zero, da cui $M_{12} = M_{21}$, come volevamo dimostrare. Inoltre, dalla stessa condizione discende che:

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)$$

cioè è il differenziale esatto della funzione W_m che rappresenta l'energia magnetica totale immagazzinata da $-\infty$ a t . Possiamo scegliere l'istante iniziale $t = -\infty$ coincidente con quello in cui entrambi gli induttori sono scarichi (per esempio al momento della costruzione del dispositivo):

$$W_m = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)$$

Per la condizione di passività deve essere:

$$W_m = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau \geq 0 \quad \forall t$$

da cui

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \geq 0 \quad \forall t$$

Si tratta di una forma quadratica semi-definita positiva che è soddisfatta se:

$$\begin{vmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{vmatrix} \geq 0$$

Cioè se sono maggiori o uguali a zero tutti i minori del determinante:

$$\begin{cases} L_1 L_2 - M^2 \geq 0 \\ L_1 \geq 0 \\ L_2 \geq 0 \end{cases}$$

Dalla $L_1 L_2 - M^2 \geq 0$, introducendo il *Coefficiente di Accoppiamento*:

$$K = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

la condizione di passività sarà verificata se:

$$0 \leq K \leq 1$$

Se $K = 0$ sarà $M = 0$, non c'è accoppiamento tra i due circuiti. Questo accade se la riluttanza R_m del circuito magnetico del nucleo è ∞ (la permeanza $G_m = 0$). Questa condizione si può verificare: i) se i due conduttori sono posti a grande distanza l'uno dall'altro sicché nessuna linea di flusso prodotto dalla corrente che circola in un avvolgimento si concatena con l'altro avvolgimento e viceversa; ii) se gli assi dei due avvolgimenti sono ortogonali.

Se $K = 1$ si avrà un accoppiamento perfetto: tutto il flusso prodotto dalla corrente in un avvolgimento si concatena con l'altro avvolgimento e viceversa; non ci sono quindi flussi dispersi, e le induttanze di dispersione primaria e secondaria sono nulle (si tratta di una condizione ideale).

Legge dell'Induzione Magnetica

Se abbandoniamo l'ipotesi di stazionarietà, è noto che esiste una interazione fra i campi elettrici e i campi magnetici: un campo elettrico variabile dà luogo ad un campo magnetico, e viceversa.

Supponiamo di avere una spira che delimita una superficie S , la quale concatena un flusso $\varphi = \varphi(t)$ variabile nel tempo. La spira sarà sede di una forza elettromotrice indotta (f.e.m) pari a:

$$e = - \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{Legge di Faraday}$$

quale che sia la causa che determina la variazione del flusso concatenato con la spira, purché la spira sia conduttrice. Si noti, infatti, che, quando si parla di flusso concatenato si può fare riferimento ad un percorso chiuso geometrico ideale che delimita una superficie, mentre quando si parla di f.e.m. indotta il percorso chiuso deve essere di materiale conduttore.

La variazione del flusso concatenato può avvenire sia perché il campo magnetico è variabile nel tempo (f.e.m. variazionale):

$$e = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \text{Forza Elettromotrice Variazionale}$$

sia perché cambiano le dimensioni o la posizione della spira, mentre resta costante il campo magnetico di indotto (f.e.m. mozionale):

$$e = \oint_l \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad \text{Forza Elettromotrice Mozionale}$$

In questo secondo caso il verso della f.e.m. segue la Regola della Mano Destra (vedi **Figura 46**) dove il vettore induzione ha il verso dell'indice, la velocità ha il verso del pollice, e il medio ha il verso della f.e.m.:

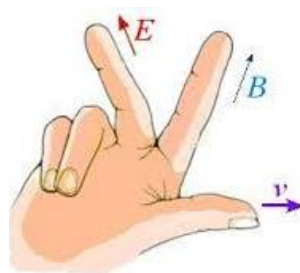


Figura 46 –Regola della Mano Destra

In **Figura 47** è riportata una spira, immersa in un campo magnetico costante, in cui un lato, di lunghezza l , si sposta, con velocità \vec{v} . La spira sarà sede di una f.e.m. di tipo mozionale.

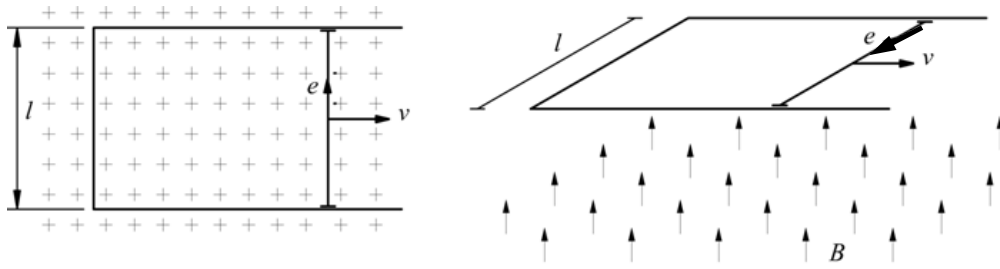


Figura 47 – F.e.m. mozionale indotta in una spira immersa in un campo magnetico B costante.

Se la spira si deforma (o cambia posizione) ed è immersa in un campo di induzione variabile, la f.e.m. totale sarà la somma di quella mozionale e di quella variazionale:

$$e = \oint_l \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Questi effetti costituiscono i principi di funzionamento delle macchine elettriche ad induzione. Nel trasformatore, ad esempio, gli avvolgimenti (quindi le spire) sono fissi nello spazio ma soggetti a campi variabili sinusoidalmente (f.e.m. variazionale). Se invece immergiamo una spira in un campo di induzione costante e ne facciamo variare la posizione, al variare della giacitura della spira all'interno del campo, cambia (con il prodotto scalare) il flusso concatenato con essa. Nel caso di **Figura 48a**, la normale alla spira forma un angolo α con la direzione del campo, ed il flusso concatenato è pari a:

$$\varphi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS \cos \alpha$$

Nel caso di **Figura 48b**, la normale alla spira forma un angolo $\alpha = 0$ con la direzione del campo, ed il flusso concatenato è pari al valore massimo:

$$\varphi = BS$$

Nel caso di **Figura 48c**, la normale alla spira forma un angolo $\alpha = 90^\circ$ con la direzione del campo, ed il flusso concatenato è nullo.

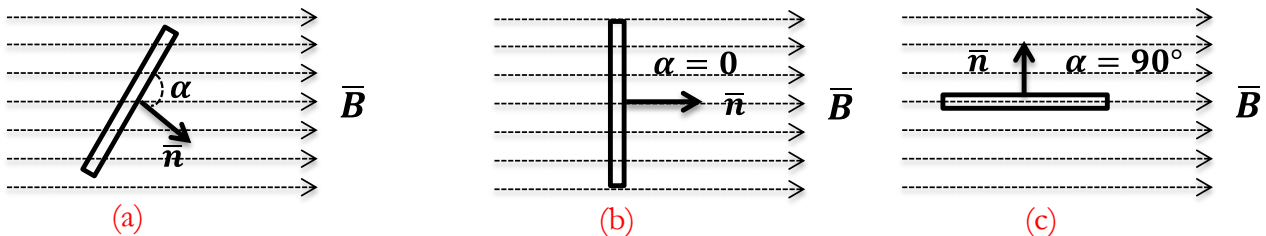


Figura 48 – Schema del generatore di tensione.

Per realizzare un generatore di tensione sinusoidale si sfrutta proprio questo comportamento: una bobina costituita da N spire piane viene fatta ruotare, attraverso un motore primo, con velocità angolare ω costante, all'interno di un campo magnetico costante, creato, ad esempio, da due espansioni polari (**Figura 49**). Il flusso concatenato con ciascuna spira della bobina varierà con legge sinusoidale:

$$\varphi = \bar{B} \cdot d\bar{S} = BScos\omega t$$

ed ai capi della bobina potrà essere prelevata una f.e.m. mozionale:

$$e = -N \frac{d\varphi}{dt} = \omega NBSsin\omega t = E sin\omega t$$

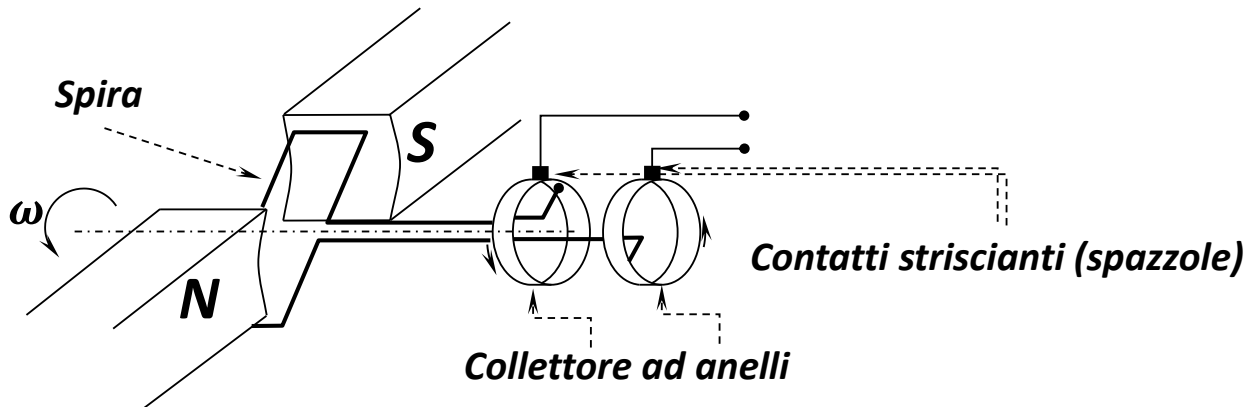


Figura 49 –Schema di principio di un generatore di tensione sinusoidale.

Per poter collegare la bobina ad un circuito fisso nello spazio è necessario interporre fra la parte rotante della macchina e il circuito fisso un dispositivo, detto collettore. Nel caso di **Figura 49**, il collettore è costituito da due anelli collegati alle estremità della spira e su cui strisciano due spazzole. In questo caso il collettore è detto *ad anelli*.

Correnti parassite

In un circuito magnetico, il nucleo di materiale ferromagnetico è attraversato da un flusso variabile nel tempo ed è, quindi, sede di correnti indotte che danno luogo ad una dissipazione di energia per effetto Joule e per questo chiamate correnti parassite (o correnti di Foucault). Infatti si può immaginare che, avendo il materiale ferromagnetico una conducibilità non trascurabile, una qualunque sezione trasversale del nucleo sia sede di tanti percorsi di richiusura per le correnti dovute alle forze elettromotrici indotte. Queste correnti danno luogo ad una dissipazione di potenza in calore, che può essere contenuta riducendo lo spessore del nucleo, come verrà dimostrato di seguito (**Figura 50**).

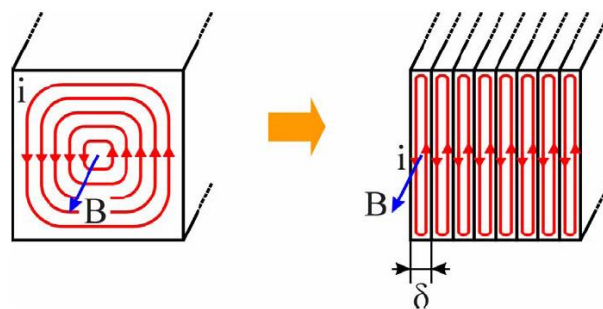


Figura 50–Correnti di Foucault o Correnti Parassite.

Al fine di calcolare la potenza, e quindi l'energia dissipata in calore, dalle correnti parassite si consideri una lastra di materiale ferromagnetico di spessore d molto piccolo rispetto alle altre dimensioni (**Figura 51**), e supponiamo che sia sede di un campo magnetico variabile nel tempo con legge sinusoidale e parallelo ad una delle dimensioni principali. Nel piano ortogonale alla direzione del campo si immagini una spira rettangolare con larghezza di base pari ad a , altezza $2y$ e spessore infinitesimo dy . Sia $b(t) = B_{MAX} \sin \omega t$ l'induzione magnetica nel piano della sezione. Il flusso concatenato con la spira di lati a e $2y$ sarà variabile nel tempo e pari a $\varphi(t) = B_{MAX} a \cdot 2y \sin \omega t$ e pertanto la spira sarà sede della f.e.m.:

$$e(t) = -\frac{d\varphi}{dt} = -\omega B_{MAX} a \cdot 2y \cos \omega t$$

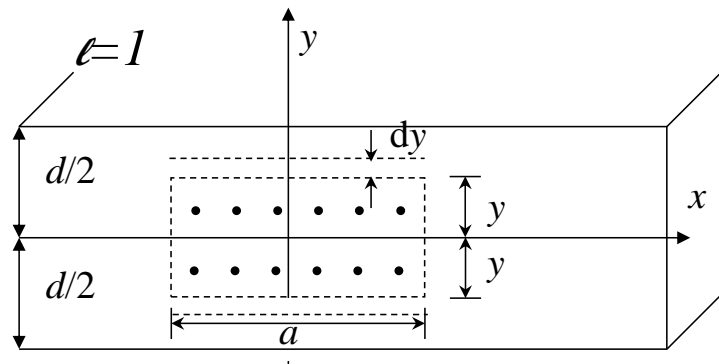


Figura 51–Lastra soggetta ad un campo magnetico variabile sinusoidalmente e con direzione uscente dal piano della figura.

Questa f.e.m. è distribuita, in parti uguali, sui due lati della spira paralleli all'asse x poiché i contributi lungo i lati paralleli all'asse y si elidono con quelli delle spire contigue (vedi **Figura 52**).

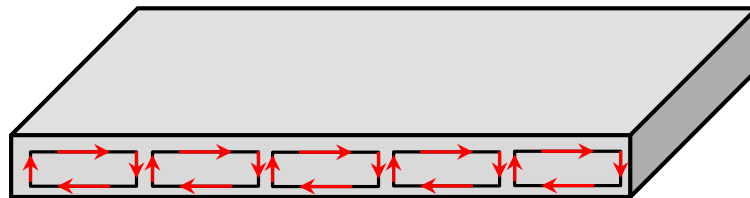


Figura 52 – Spire contigue su cui si inducono le f.e.m.

Il valore efficace della f.e.m. nel lato della spira parallelo all'asse x è pari a:

$$E = \frac{\omega B_{MAX} a y}{\sqrt{2}}$$

Inoltre la conduttanza di tale lato è

$$dG = \frac{1}{\rho} \frac{dy \cdot l}{a}$$

dove $dy \cdot l$ è la sezione trasversale del lato ed a la sua lunghezza.

Se poniamo $l = 1$, la potenza dissipata nel lato è:

$$dP = E^2 dG = \frac{\omega^2 B_{MAX}^2 a^2 y^2}{2\rho} \frac{dy}{a} = \frac{\omega^2 B_{MAX}^2 a}{2\rho} y^2 dy$$

La potenza dissipata sulla lastra per unità di lunghezza e per una larghezza a si ottiene integrando la precedente relazione fra 0 e $d/2$ e moltiplicando per due il risultato:

$$P = 2 \frac{\omega^2 B_{MAX}^2 a}{2\rho} \int_0^{d/2} y^2 dy = \frac{\omega^2 B_{MAX}^2 a d^3}{24\rho}$$

La potenza per unità di volume (potenza volumica) dissipata nella lastra è:

$$p_V = \frac{\omega^2 B_{MAX}^2 d^2}{24\rho} = \frac{\pi^2 f^2 B_{MAX}^2 d^2}{6\rho}$$

Questa espressione mette in evidenza come la potenza volumica dissipata in un materiale ferromagnetico sottoposto ad una magnetizzazione sinusoidale è proporzionale, a meno di una costante di proporzionalità, al quadrato della frequenza, al quadrato del valore massimo dell'induzione, ed al quadrato dello spessore della lastra. La costante di proporzionalità dipende dal tipo di materiale.

Per limitare questa potenza dissipata, che costituisce una perdita (detta *Perdita per Correnti Parassite*) e contribuisce ad abbassare il rendimento del dispositivo, possiamo ridurre lo spessore del materiale laminando il nucleo in direzione parallela alle linee del campo magnetico. Si può fare questo utilizzando dei lamierini e isolandoli tra loro con opportuni isolanti elettrici come carta, mica o materiali siliconici. Lo spessore dei lamierini varia, generalmente, tra 0,35 mm e 3 mm a seconda dell'applicazione. In macchine statiche, quali i trasformatori, si possono usare gli spessori inferiori; nelle macchine rotanti, soggetti a sforzi meccanici, occorre utilizzare lamierini con spessori maggiori.

Si possono ulteriormente ridurre queste perdite riducendo la conducibilità del materiale (o aumentando la resistività) drogando il materiale con una certa percentuale di silicio. Il drogaggio ha il doppio vantaggio di aumentare la resistività del materiale, e quindi ridurre le perdite per correnti parassite, e di ridurre l'area del ciclo di isteresi del materiale e quindi ridurre contestualmente anche le perdite per isteresi. Il tenore di silicio varia dal 3 al 5%; percentuali maggiori aumenterebbero troppo la fragilità delle lamiere. Tenori maggiori di silicio possono essere utilizzati, ancora una volta, nelle macchine statiche, mentre ove si abbiano organi in movimento occorre limitare la percentuale di drogaggio.

Cifra di perdita

Sia le perdite per isteresi che per correnti parassite sono imputabili a fenomeni che avvengono nei nuclei di materiale ferromagnetico e sono comunemente indicate come *Perdite nel Ferro*. Si noti che, nei circuiti magnetici, come quelli delle macchine ad induzione (trasformatore, macchina asincrona, macchina sincrona), oltre alle perdite nel ferro vi sono anche perdite per effetto Joule dovute alla circolazione delle correnti negli avvolgimenti. Queste perdite sono comunemente denominate *Perdite nel Rame*. Nelle macchine elettriche che presentano organi in movimento, quali ad esempio, le macchine elettriche rotanti, si avranno anche perdite meccaniche per attrito e ventilazione, generalmente di entità inferiore alle due precedenti perdite.

La potenza totale perduta nel ferro è pari alla somma delle perdite per isteresi e per correnti parassite. Come visto in precedenza, la formula di Steinmetz consente di calcolare il lavoro dissipato in un ciclo di

isteresi per unità di volume. In regime sinusoidale, il materiale sarà sottoposto a tanti cicli di isteresi nell'unità di tempo, pari alla frequenza dei segnali sinusoidali. La potenza volumica persa per isteresi è quindi:

$$p_{ist} = k_{ist} f B_{MAX}^n$$

Mentre quella dissipata per correnti parassite è:

$$p_{cp} = k_{cp} f^2 B_{MAX}^2 d^2$$

La totale potenza dissipata nel ferro è la somma delle due perdite:

$$p = k_{ist} f B_{MAX}^n + k_{cp} f^2 B_{MAX}^2 d^2$$

e si può ritenere con buona approssimazione una funzione quadratica con il valore massimo dell'induzione.

Si definisce *Cifra di Perdita* la potenza volumica totale (dissipata per isteresi e correnti parassite) per unità di volume di materiale considerato, quando l'induzione ha un valore massimo pari ad 1 Tesla e con frequenza pari a 50Hz.

La cifra di perdita viene fornita insieme alle caratteristiche del materiale. Nota la cifra di perdita è possibile risalire alla potenza dissipata nel ferro moltiplicando la stessa per il valore massimo dell'induzione e per il volume di materiale utilizzato:

$$P = \text{Cifra di Perdita} \cdot B_{MAX}^2 \cdot m^3 \text{ di materiale [W]}$$

I lamierini comunemente utilizzati nelle macchine elettriche ad induzione hanno cifra di perdita compresa fra 0,6 e 3,6 [W/kg].

Trasformatore Reale

Il trasformatore è una macchina elettrica statica (senza parti in movimento) costituita, in linea di principio, da due avvolgimenti (primario e secondario), avvolti su di un nucleo di materiale ferromagnetico, come quello di **Figura 40**. Nell'ipotesi di considerare il ferro ideale ($\mu_r = \infty$, perdite per isteresi e correnti parassite nulle, riluttanza del nucleo nulla) e il rame ideale (perdite Joule negli avvolgimenti primario e secondario nulle), il modello di tale dispositivo corrisponde, come già visto, ad un trasformatore ideale.

Rimuovendo l'ipotesi di $\mu_r = \infty$, e assumendo come schematizzazione valida per la distribuzione dei flussi, quella introdotta precedentemente e riportata in **Figura 40**, il comportamento del circuito magnetico può essere modellato con il circuito del trasformatore induttivo di **Figura 42**. In **Figura 53** è riportato il circuito equivalente del trasformatore induttivo nel dominio della frequenza, assumendo che le variabili elettriche abbiano un andamento sinusoidale iso-frequenziale (cioè si sia in regime sinusoidale):

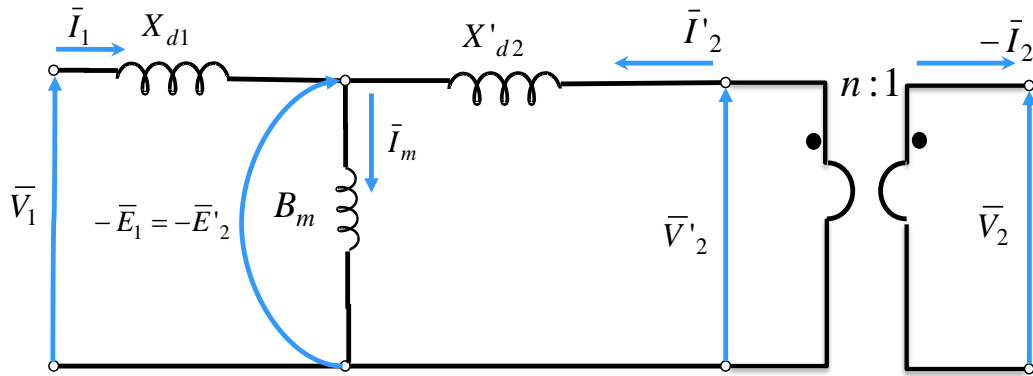


Figura 53–Circuito equivalente del trasformatore induttivo nel dominio dei fasori.

In esso le induttanze di dispersione sono state sostituite dalle reattanze di dispersione X_{d1} e X_{d2} , e all'induttanza di magnetizzazione è stata sostituita la suscettanza di magnetizzazione B_m . Inoltre, le grandezze secondarie riportate al primario sono indicate con un apice. La corrente totale sul ramo trasversale, la cui funzione è quella di sostenere il flusso principale è stata indicata con \bar{I}_m e prende il nome di corrente magnetizzante. Con \bar{E}_1 ed \bar{E}_2 si indicano le f.e.m primaria e secondaria dovute al flusso principale:

$$\bar{E}_1 = -j\omega N_1 \bar{\Phi}$$

$$\bar{E}_2 = -j\omega N_2 \bar{\Phi}$$

La corrente magnetizzante è in quadratura con \bar{E}_1 e in fase con il flusso $\bar{\Phi}$.

La rimozione delle ipotesi di ferro ideale comporta, oltre alla nascita dei flussi di dispersione primario e secondario, di cui si tiene conto nel circuito equivalente attraverso le due induttanze di dispersione, anche la presenza di perdite nel ferro per isteresi e per correnti parassite. Queste, come precedentemente riportato, variano con il quadrato dell'induzione massima, quindi del flusso e di conseguenza variano con il quadrato della f.e.m. indotta $E_1 = E'_2$. Se ne può, quindi, tenere conto, disponendo un opportuno resistore (di conduttanza G) in parallelo all'induttanza di magnetizzazione e cioè sottoposto alla f.e.m. indotta al primario (vedi **Figura 54**).

La rimozione dell'ipotesi di rame ideale comporta che le correnti \bar{I}_1 e \bar{I}_2 negli avvolgimenti primario e secondario dissipino, per effetto Joule, in ciascuno dei due avvolgimenti una potenza proporzionale al quadrato del valore efficace della corrente. La costante di proporzionalità è proprio il valore delle resistenze dell'avvolgimento considerato. Occorre, quindi, mettere in conto nel modello circuitale queste perdite, dette *Perdite nel Rame* e pari a:

$$P_{cu} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2$$

Si può tenere conto di queste perdite collegando due resistenze R_1 e R_2 in serie alle maglie primaria e secondaria, dove R_1 e R_2 sono proprio le resistenze dei due avvolgimenti primario e secondario. Possiamo anche riportare la resistenza R_2 al primario, moltiplicandola per il quadrato del rapporto spire. Essa sarà sede della medesima perdita di potenza. Infatti:

$$R'_2 I_2'^2 = n^2 R_2 \cdot \left(\frac{I_2}{n}\right)^2 = R_2 I_2^2$$

Il circuito equivalente del trasformatore reale è quello riportato in **Figura 54**. La corrente \bar{I}_{fe} tiene conto delle perdite nel ferro, la corrente totale nel ramo trasversale $\bar{I}_0 = \bar{I}_{fe} + \bar{I}_m$ è detta corrente a vuoto (il significato sarà più chiaro nel seguito).

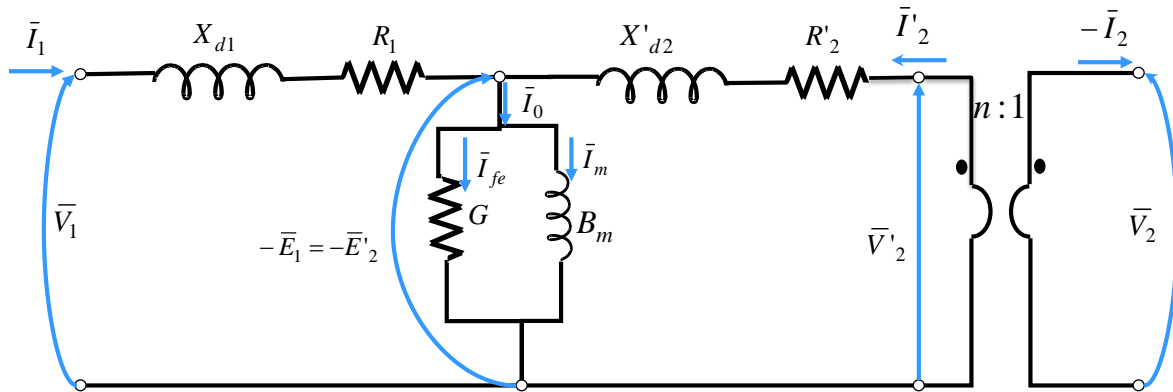


Figura 54– Circuito equivalente del trasformatore reale (riportato al primario).

Questo circuito a parametri concentrati è un modello adeguato, ai fini pratici, per analizzare il funzionamento del trasformatore ad una sola frequenza.

Si noti che, se il trasformatore è alimentato con una tensione $v_1(t)$ sinusoidale, anche la f.e.m. $e_1(t)$, e quindi $\varphi(t)$ sono sinusoidali. Se il nucleo, sede del flusso principale, è costituito di materiale ferromagnetico dolce (per contenere le perdite nel ferro) la relazione fra campo magnetico e induzione, è non lineare ed espressa dalla curva normale di magnetizzazione del materiale. Questa non linearità comporta che la corrente magnetizzante $i_m(t)$ non è sinusoidale, ma risulta distorta (vedi **Figura 55**). In particolare si può dimostrare che, in assenza di isteresi (**Figura 56**):

- $i_m(t)$ contiene armoniche dispari (pulsazione 3ω , 5ω ecc.);
- il contributo principale è costituito dalla terza armonica (che risulta in opposizione con la fondamentale).

Dato che in genere $i_m(t)$ è piccola rispetto alle altre correnti, in prima approssimazione è possibile trattarla come sinusoidale, attribuendole un valore efficace pari a quello della corrente distorta. Nel nostro modello, quindi, trascuriamo gli effetti dovuti alla non linearità del materiale magnetico (modello del primo ordine) ritenendo tutte le grandezze elettriche sinusoidali iso-frequenziali con la tensione di alimentazione.

Se il trasformatore viene fatto funzionare in modo da imporre un andamento sinusoidale alla corrente magnetizzante, per effetto della non linearità del nucleo risulterà distorto il flusso. In queste condizioni anche le tensioni sono distorte. Questa situazione si può verificare, ad esempio, nei sistemi trifase. Si può dimostrare che, in questo caso, il flusso contiene armoniche dispari e che il contributo dominante è dovuto alla terza armonica, che risulta in fase con il flusso stesso. La trattazione di questi effetti distorsivi esula dalle finalità di questo insegnamento.

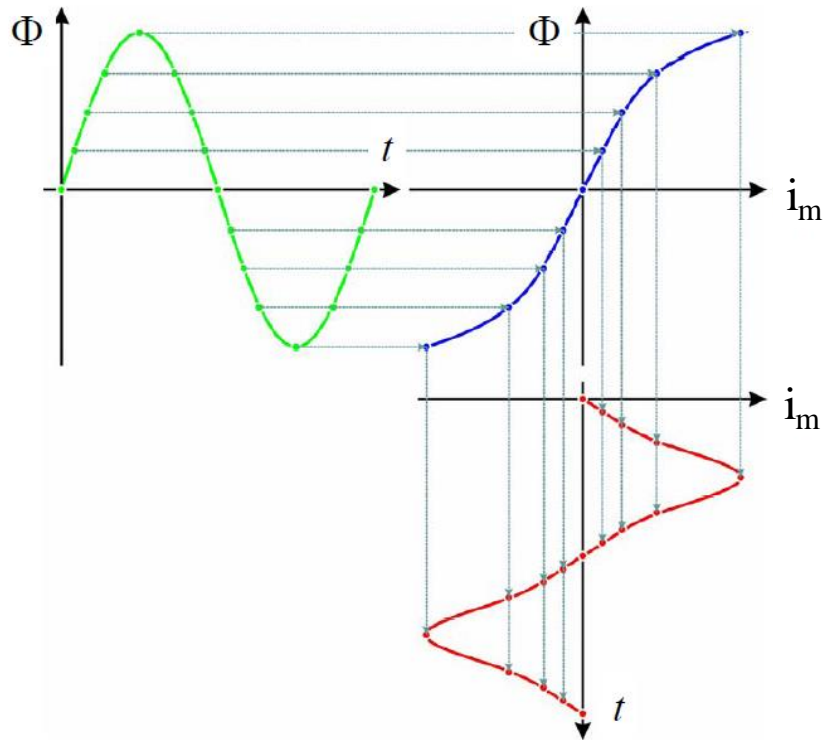


Figura 55–Distorsione della corrente magnetizzante.

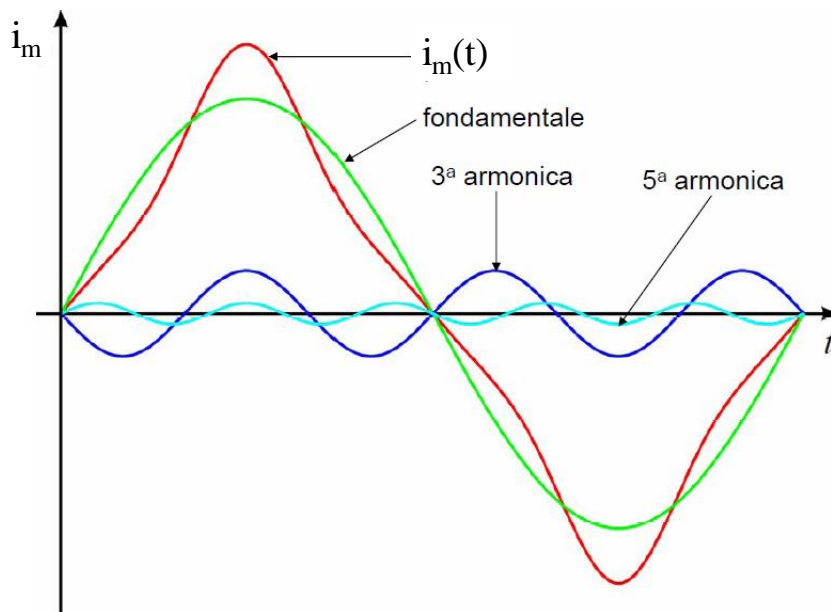


Figura 56–Andamento della corrente magnetizzante.

Di seguito verranno analizzate particolari condizioni di funzionamento del trasformatore e si mostrerà come, attraverso delle misure effettuate in queste particolare condizioni di funzionamento, è possibile determinare i parametri del circuito equivalente.

Funzionamento a vuoto

Supponiamo di alimentare il primario con una tensione \bar{V}_1 pari a quella nominale \bar{V}_{1n} (i valori nominali in una macchina sono quei valori che caratterizzano il comportamento della stessa in condizioni di massimo rendimento e rispetto ai quali la macchina è stata collaudata ed è garantita) e lasciare aperti i morsetti del secondario. Quest'ultimo non è attraversato da corrente e l'impedenza longitudinale del secondario può essere sostituita da un corto circuito. La corrente primaria sarà attraversata da una corrente \bar{I}_0 fortemente sfasata in ritardo rispetto a \bar{V}_1 per la predominanza degli elementi reattivi della macchina rispetto a quelli resistivi. Questa corrente viene chiamata corrente a vuoto e coincide con quella nel ramo trasversale. Questa corrente, non avendo il contributo della corrente secondaria, è molto piccola. Generalmente essa ha valori compresi fra 4% e 12% della corrente nominale e decrescenti al crescere della potenza del trasformatore.

Il funzionamento del trasformatore a vuoto, cioè con i morsetti secondari aperti, è descritto dal circuito equivalente di **Figura 57**.

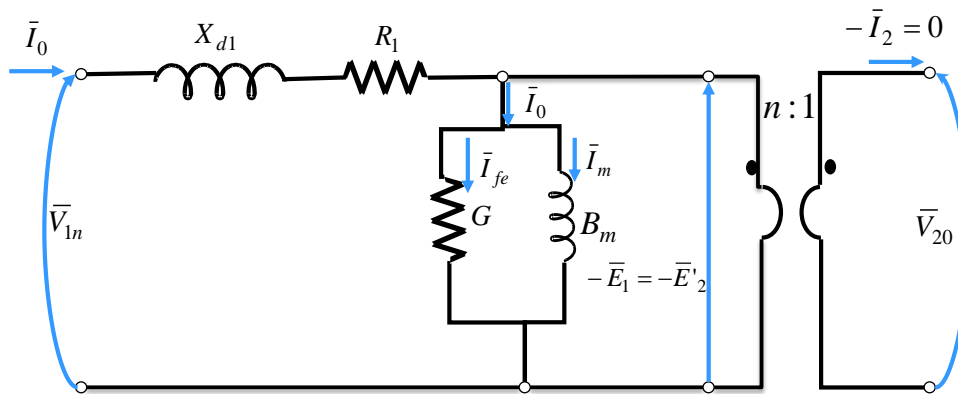


Figura 57–Circuito equivalente del trasformatore a vuoto.

Si noti che, in queste condizioni, la caduta di tensione nell'impedenza primaria $\bar{Z}_1 = R_1 + jX_{d1}$ è molto piccola (si può ritenere trascurabile) e la tensione è $\bar{V}_1 \approx -\bar{E}_1 = j\omega N_1 \bar{\Phi}$ con il valore efficace di \bar{E}_1 pari a:

$$E_1 = 4,44 N_1 f \Phi_{MAX}$$

Nell'avvolgimento secondario si genera un f.e.m. $\bar{E}_2 = -j\omega N_2 \bar{\Phi}$ con valore efficace:

$$E_2 = 4,44 N_2 f \Phi_{MAX}$$

e la tensione $\bar{V}_{20} = -\bar{E}_2$. In questo caso il rapporto:

$$\frac{V_1}{V_{20}} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2} = n$$

è pari al rapporto spire, cioè al rapporto di trasformazione del trasformatore ideale. Quindi il rapporto di trasformazione di un trasformazione reale coincide con il rapporto tra la tensione primaria nominale e la tensione secondaria a vuoto.

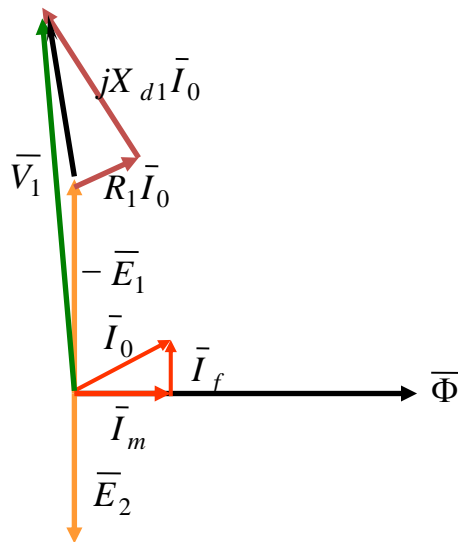


Figura 58–Diagramma fasoriale del trasformatore a vuoto.

In **Figura 58** è riportato il diagramma fasoriale del trasformatore a vuoto. Le proporzioni del disegno non rispecchiano quelle reali. La corrente magnetizzante I_m è molto maggiore di I_{fe} (il circuito è fortemente induttivo). Inoltre la caduta di tensione nel ramo longitudinale è molto piccola, dell'ordine di pochi per mille della tensione primaria nominale e può essere trascurata.

Prova a vuoto

Questa ultima considerazione porta a considerare un circuito equivalente del trasformatore a vuoto semplificato sostituendo l'impedenza primaria con un corto circuito (**Figura 59**).

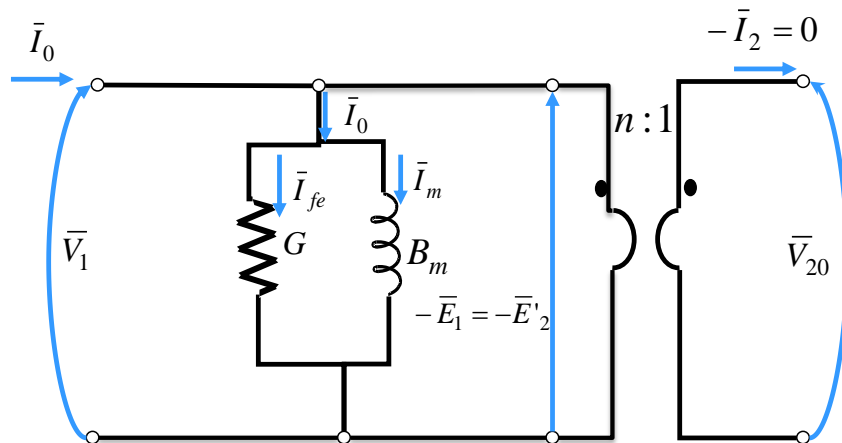


Figura 59 – Circuito equivalente semplificato del trasformatore a vuoto.

Questo circuito semplificato mette in evidenza come sia possibile trascurare le perdite di eccitazione $R_1 I_0^2$ rispetto a quelle nel ferro $G E_1^2$ (rapporto di poche unità per mille), e di trascurare la potenza reattiva richiesta per l'eccitazione del flusso disperso rispetto a quelle necessarie a sostenere il flusso principale.

Per determinare i parametri del circuito equivalente di **Figura 59**, cioè i parametri del ramo trasversale del circuito equivalente del trasformatore reale, si può operare con una prova, detta *Prova a Vuoto*. Il dispositivo di misura, mostrato in **Figura 60**, comprende un wattmetro, un amperometro e due voltmetri. Mediante un variatore di tensione si fa variare la tensione primaria tra zero ed un valore di poco superiore alla tensione nominale e si rilevano i corrispondenti valori misurati dagli strumenti.

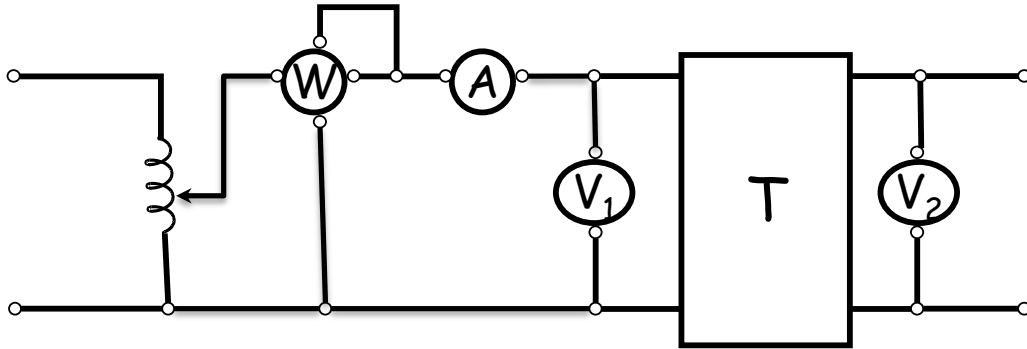


Figura 60 – Sistema di misura per la prova a vuoto del trasformatore.

Dalle lettura dei due voltmetri in corrispondenza al valore di tensione nominale primaria si risale al valore del rapporto di trasformazione.

Il wattmetro misura la potenza entrante nel primario. Essa non può che essere la potenza dissipata nella conduttanza G , che, come già osservato, rappresenta la potenza dissipata nel ferro per isteresi e correnti parassite, cioè la potenza assorbita dal trasformatore nel funzionamento a vuoto P_0 è pari alle perdite nel ferro P_{fe} . Riportando le misure rilevate in un diagramma $V_1 - P_0$ (curva rossa in **Figura 61**) essa mostra un andamento a parabola che consegue dal legame quadratico fra le perdite nel ferro e la tensione.

L'amperometro misura il valore della corrente a vuoto. Riportando le misure rilevate in un diagramma $V_1 - I_0$ (curva azzurra in **Figura 61**) essa mostra un andamento a saturazione, che, a meno delle scale, coincide con la curva normale di magnetizzazione del nucleo, essendo la corrente proporzionale alle amperspire di magnetizzazione e quindi al campo magnetico mentre, come già osservato, la tensione è proporzionale al flusso e quindi all'induzione.

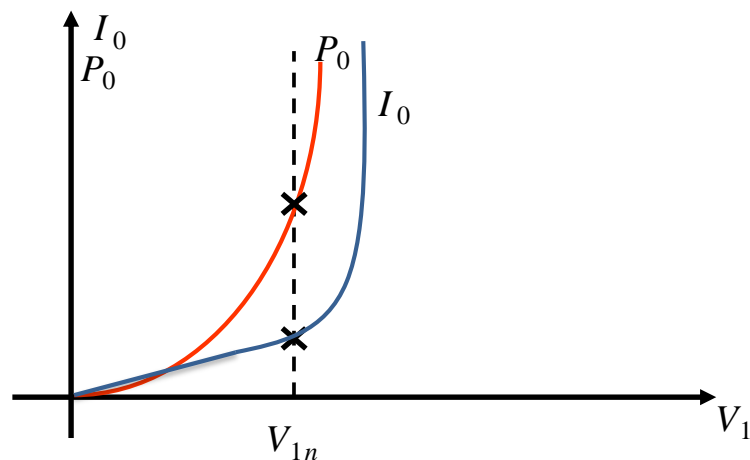


Figura 61–Andamento della potenza assorbita e della corrente primaria nel trasformatore a vuoto.

Le curve di **Figura 61** consentono, per qualunque valore di tensione primaria, di determinare i parametri del ramo trasversale (che ha ammettenza $\dot{Y} = G + jB_m$ attraverso le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} Y = \frac{I_0}{V_1} \\ G = \frac{P_0}{V_1^2} \\ B_m = \sqrt{Y^2 - G^2} \end{cases}$$

I parametri dell'ammettenza a vuoto verranno, in particolare, determinati in corrispondenza del valore della tensione nominale.

Funzionamento in corto circuito

Se facciamo lavorare il trasformatore con i morsetti del secondario chiusi in corto circuito e il primario alimentato con la tensione nominale negli avvolgimenti primario e secondario circolano delle correnti di corto circuito I_{1cc} ed I_{2cc} molto maggiori delle correnti nominali (da 7 a 30 volte superiori) e non possono, quindi essere sopportate dai circuiti del trasformatore. Se però si applica, ai morsetti primari, una tensione ridotta, tale da far circolare negli avvolgimenti le correnti nominali, il funzionamento in corto circuito del trasformatore può essere operato in tutta sicurezza. Questa tensione ridotta prende il nome di tensione di corto circuito ed indicata con V_{1cc} . Il suo ordine di grandezza varia da pochi percento al 15% della tensione nominale, decrescendo al crescere della potenza nominale del trasformatore. Il circuito equivalente del trasformatore in corto circuito è riportato in **Figura 62**.

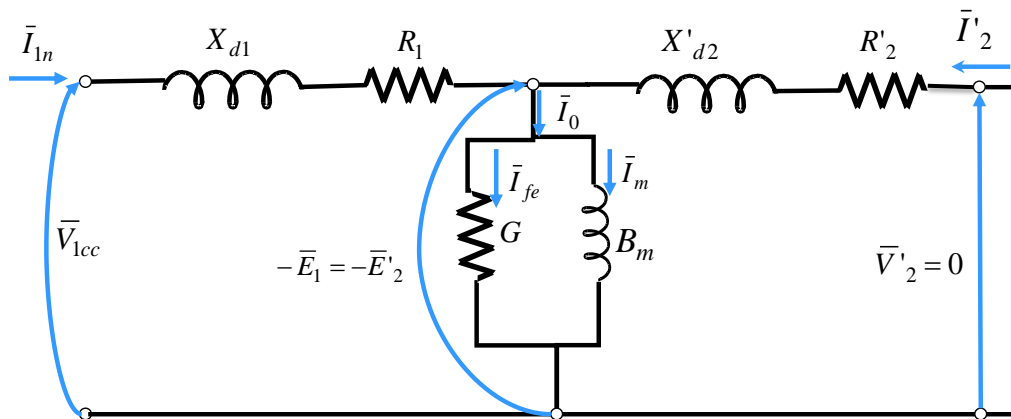


Figura 62 – Circuito equivalente del trasformatore in corto circuito.

Si già osservato che, in presenza della tensione nominale, la corrente I_0 assume valori dell'ordine di pochi percento della corrente primaria nominale; quando la tensione primaria è pari a quella di corto circuito la corrente nel ramo trasversale del circuito equivalente assume valori di pochi per mille della stessa ed il ramo trasversale può perciò essere considerato un ramo aperto. Il circuito equivalente del trasformatore in corto circuito può essere, quindi, semplificato in quello di **Figura 63**.

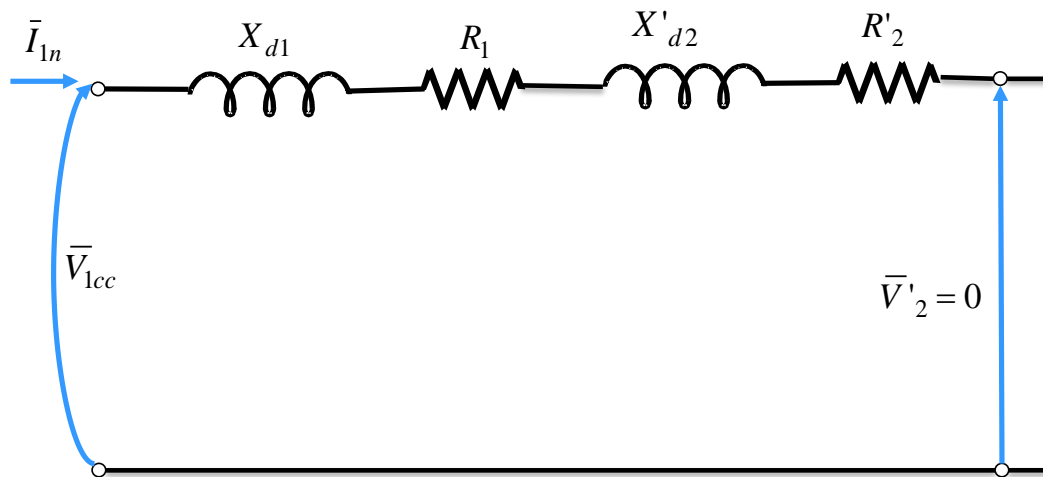


Figura 63 – Circuito equivalente semplificato del trasformatore in corto circuito.

Prova in corto circuito

Questa semplificazione equivale a trascurare le perdite nel ferro rispetto a quelle nel rame e la potenza reattiva necessaria per sostenere il flusso principale rispetto a quella necessaria per sostenere i flussi di dispersione.

Il circuito equivalente si riduce a quello in **Figura 63**, cioè si riduce ad una impedenza $\dot{Z}'_{cc} = (R_1 + R'_2) + j(X_{d1} + X'_{d2}) = R'_{cc} + jX'_{cc}$ (impedenza di corto circuito riferita al primario) i cui valori possono essere determinati attraverso una prova, detta *Prova in Corto Circuito*. Il dispositivo di misura, mostrato in **Figura 64**, comprende un wattmetro, un amperometro e un voltmetro. Mediante un variatore di tensione si fa variare la tensione primaria tra zero ed un valore di poco superiore alla tensione di corto circuito. Questa viene rilevata in corrispondenza della lettura dell'amperometro uguale al valore nominale della corrente.

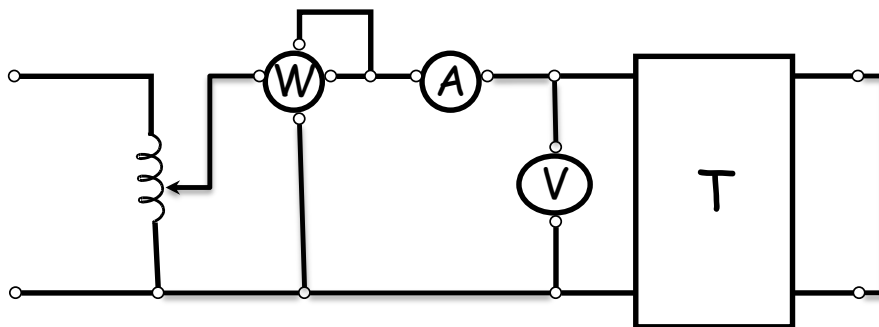


Figura 64–Sistema di misura per la prova in corto circuito del trasformatore.

Il wattmetro misura la potenza entrante nel primario. Essa non può che essere, in questa condizione di funzionamento, la potenza dissipata nelle due resistenze primaria e secondaria, che, come già osservato, rappresenta la potenza dissipata per effetto Joule negli avvolgimenti; cioè la potenza assorbita dal trasformatore nel funzionamento in corto circuito P_{cc} è pari alle perdite nel rame P_{cu} . Riportando le misure rilevate in un diagramma $I_1 - P_{cc}$ (curva rossa in **Figura 65**) essa mostra un andamento a parabola che consegue dal legame quadratico fra le perdite nel rame e la corrente.

Il voltmetro misura il valore della tensione in corto circuito. Riportando le misure rilevate in un diagramma $I_1 - V_{cc}$ (curva azzurra in **Figura 65**) essa è con buona approssimazione una retta passante per l'origine. Infatti, il legame corrente-tensione è determinato in gran parte dalla reattanza di corto circuito X'_{cc} la quale è costante in quanto essa è determinata dalle riluttanze dei circuiti in cui si sviluppano le linee dei flussi dispersi, le quali sono prevalentemente in aria. Si noti che, il rapporto tra resistenza e reattanza di corto circuito è molto piccola essendo prevalente la natura induttiva del circuito.

Le curve di **Figura 65** consentono, in corrispondenza della corrente nominale, di determinare i parametri dell'impedenza di corto circuito attraverso le seguenti relazioni:

$$Z'_{cc} = \frac{V_{1cc}}{I_{1n}}$$

$$R'_{cc} = \frac{P_{cc}}{I_{1n}^2}$$

$$X'_{cc} = \sqrt{Z'^2_{cc} - R'^2_{cc}}$$

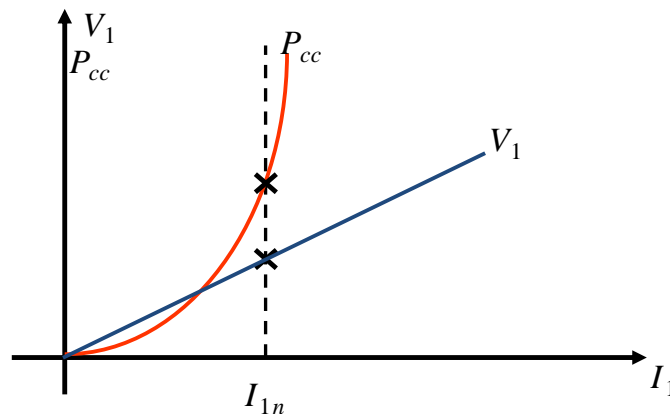


Figura 65–Andamento della potenza assorbita e della tensione primaria nel trasformatore in cto-cto.

Funzionamento a carico

Supponiamo di collegare ai morsetti del secondario un carico prevalentemente induttivo di impedenza $\dot{Z}_L = Z_L e^{j\varphi_L}$ che richiede una potenza attiva P_2 ad una tensione \bar{V}_2 con un determinato fattore di potenza $\cos\varphi_L$ noti. La corrente secondaria determinerebbe, se agisse da sola, una f.m.m. e quindi un flusso, altissimi, mentre, in effetti, questo è praticamente determinato solo dalla tensione primaria. Infatti, nel primario si crea una corrente che si scompone in due addendi, uno atto a creare la f.m.m. magnetizzante $N_1 I_0$, l'altro capace di compensare la f.m.m. creata dalla corrente secondaria.

Le due correnti primaria e secondaria differiscono quindi per la sola corrente \bar{I}_0 che produce le amperspire necessarie per mantenere il flusso principale (oltre che sopperire alle perdite nel ferro). Questa corrente a vuoto, come già osservato, è una frazione di pochi percento della corrente primaria nominale. Quindi le due correnti primaria e secondaria sono poco diverse fra loro.

Facendo riferimento al circuito equivalente di **Figura 66** (che differisce da quello di **Figura 54** solo per il fatto che le grandezze secondarie non sono riportate al primario) è possibile, partendo dalla conoscenza dei dati del carico, determinare tutte le grandezza elettriche che interessano il circuito stesso.

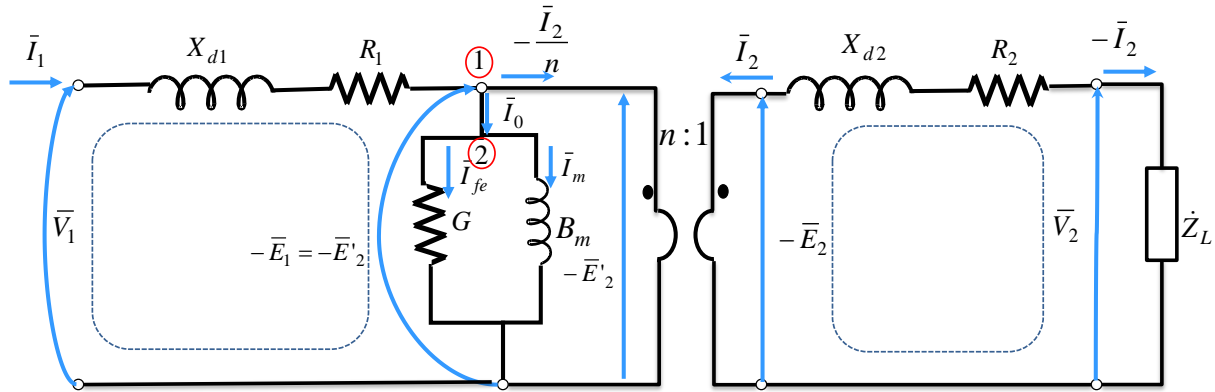


Figura 66– Circuito equivalente del trasformatore a carico.

Le equazioni del circuito sono le seguenti:

$$\bar{V}_2 = -\dot{Z}_L \bar{I}_2 \quad \text{Equazione del carico}$$

$$-\bar{E}_2 = \bar{V}_2 + (R_2 + jX_{d2})(-\bar{I}_2) \quad \text{Maglia secondaria}$$

$$\begin{cases} -\bar{E}_1 = -\bar{E}'_2 = -n\bar{E}_2 \\ \bar{I}'_2 = -\frac{\bar{I}_2}{n} \end{cases} \quad \text{Equazioni del trasformatore ideale}$$

$$\begin{cases} \bar{E}_1 = -j\omega N_1 \bar{\Phi} \\ \bar{E}_2 = -j\omega N_2 \bar{\Phi} \end{cases} \quad \text{Forze elettromotrici indotte primaria e secondaria}$$

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_0 - \frac{\bar{I}_2}{n} = \bar{I}_0 + \bar{I}'_2 \quad \text{Nodo 1}$$

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_{fe} + \bar{I}_m \quad \text{Nodo 2}$$

$$\bar{I}_0 = -(G + jB_m)\bar{E}_1 \quad \text{Equazione del ramo trasversale}$$

$$\bar{V}_1 = -\bar{E}_1 + (R_1 + jX_{d1})\bar{I}_1 \quad \text{Maglia primaria}$$

In **Figura 67** è riportato il diagramma fasoriale che riporta tutte le grandezze elettriche nel funzionamento a carico, che può essere costruito, a partire dai dati del carico, utilizzando le equazione precedenti. La prassi prevede di assumere il flusso come fasore di riferimento (con fase zero) sebbene è più consueto ipotizzare noti i valori di tensione e corrente al carico. Per rendere più leggibile il diagramma le correnti nel ramo trasversale e le cadute di tensione su R_1 , R_2 , X_{d1} e X_{d2} sono state rappresentate fuori scala (normalmente le loro ampiezze sono molto più piccole).

corto circuito al primario \dot{Z}'_{cc} . In circuito equivalente semplificato è riportato in **Figura 68**, che può essere schematizzato anche come in **Figura 69** con le grandezze riferite al primario.

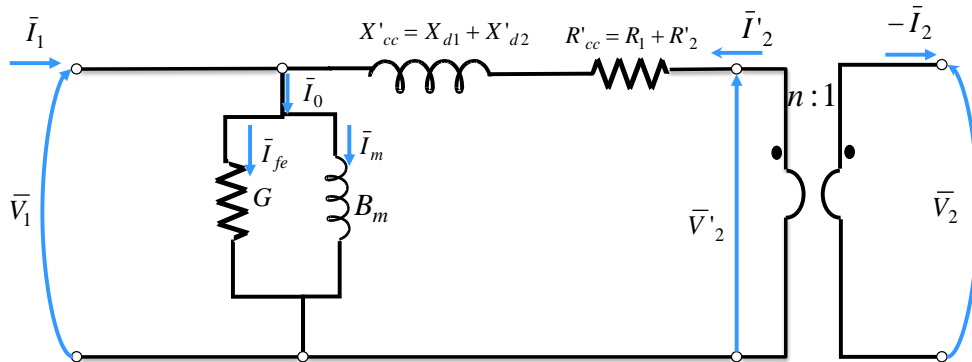


Figura 68 – Circuito equivalente semplificato del trasformatore.

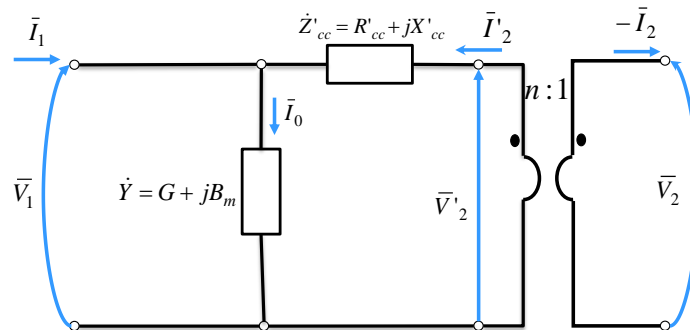


Figura 69–Circuito equivalente semplificato del trasformatore con le grandezze al primario.

Analogamente, si possono riferire le grandezze al secondario ottenendo il circuito equivalente semplificato di **Figura 70**, con:

$$\dot{Z}''_{cc} = \left(\frac{R_1}{n^2} + R_2 \right) + j \left(\frac{X_{d1}}{n^2} + X_{d2} \right)$$

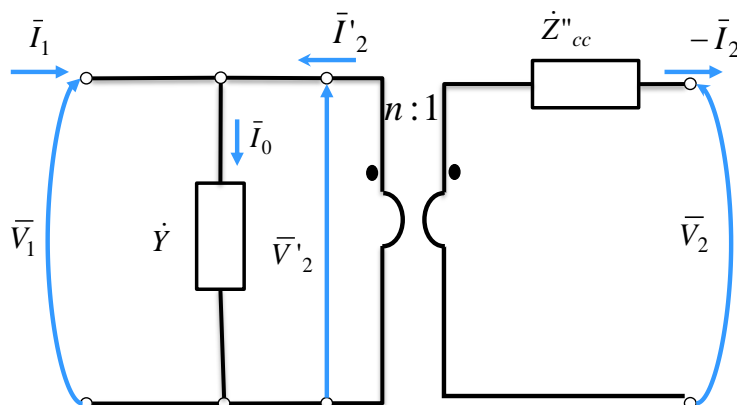


Figura 70–Circuito equivalente semplificato del trasformatore con le grandezze al secondario.

Dati di Targa di un trasformatore

Come visto precedentemente, un trasformatore è caratterizzato da un insieme di valori nominali che ne definiscono le prestazioni ai fini delle garanzie e del collaudo. Questi valori, assieme ad altre informazioni, sono riportati su una targa apposta sul trasformatore (dati di targa). I principali dati di targa sono:

- Frequenza nominale: f [Hz];
- Tensione nominale primaria (valore efficace): V_{1n} [V];
- Tensione nominale secondaria a vuoto (valore efficace): V_{20} [V];
- Rapporto di trasformazione a vuoto: $n = \frac{V_{1n}}{V_{20}}$ (si ricava dai due precedenti valori);
- Potenza apparente nominale: $S_n = V_{1n} I_{1n} = V_{20} I_{2n}$ [VA];

Inoltre, nella targa, vengono generalmente forniti i dati delle prove a vuoto ed in cortocircuito in percento rispetto ai valori nominali. Ad esempio:

- Potenza a vuoto (pari alle perdite nel ferro): $P_0\%$;
- Corrente a vuoto: $I_0\%$;
- Potenza in corto circuito (pari alle perdite nel rame): $P_{cc}\%$;
- Tensione di corto circuito: $V_{cc}\%$.

Dai dati di targa, facendo riferimento ai circuiti equivalenti semplificati, è possibile risalire ai parametri del circuito equivalente del trasformatore:

$$\dot{Z}'_{cc} = \frac{V_{cc}\%}{100} \cdot \frac{V_{1n}^2}{S_n}; \quad R'_{cc} = \frac{P_{cc}\%}{100} \cdot \frac{V_{1n}^2}{S_n} \Rightarrow X'_{cc} = \sqrt{Z'^2_{cc} - R'^2_{cc}}$$

$$Y = \frac{I_0\%}{100} \cdot \frac{S_n}{V_{1n}^2}; \quad G = \frac{P_0\%}{100} \cdot \frac{S_n}{V_{1n}^2} \Rightarrow B_m = \sqrt{Y^2 - G^2}$$

Possono essere forniti anche valori diversi da cui peraltro è possibile risalire a quelli elencati sopra.

Esempio

I dati di targa di un trasformatore monofase sono i seguenti:

$$n = \frac{12kV}{260V}; S_n = 40kVA; f = 50Hz; V_{cc}\% = 4\%; P_{cc}\% = 1,8\%; P_0\% = 0,4\%; \cos\varphi_0 = 0,2$$

Da questi dati è possibile risalire al circuito equivalente semplificato. Infatti:

$$P_{cc} = \frac{P_{cc}\%}{100} \cdot S_n = \frac{1,8}{100} \cdot 40000 = 720W$$

$$I_{2n} = \frac{S_n}{V_{20}} = \frac{40000}{260} = 153,85A$$

$$\dot{Z}''_{cc} = \frac{V_{cc}\%}{100} \cdot \frac{V_{20}}{I_{2n}} = \frac{4}{100} \cdot \frac{260}{153,85} = 0,0676\Omega$$

$$R''_{cc} = \frac{P_{cc}}{I_{2n}^2} = \frac{720}{153,85^2} = 0,0304\Omega \Rightarrow X''_{cc} = \sqrt{Z''^2_{cc} - R''^2_{cc}} = 0,0604\Omega$$

$$P_0 = \frac{P_0\%}{100} \cdot S_n = \frac{0,4}{100} \cdot 40000 = 160W$$

$$G = \frac{P_0}{V_{1n}^2} = \frac{160}{12000^2} = 1,11 \cdot 10^{-6} S$$

$$\frac{B_m}{G} = \tan\varphi_0 \Rightarrow B_m = G \tan\varphi_0 = 5,44 \cdot 10^{-6} S \Rightarrow Y = \sqrt{G^2 + B_m^2} = 5,55 \cdot 10^{-6} S$$

Oppure:

$$P_0 = V_{1n} I_0 \cos\varphi_0 \Rightarrow I_0 = \frac{P_0}{V_{1n} \cos\varphi_0} = \frac{160}{12000 \cdot 0,2} = 0,0667 A$$

$$Y = \frac{I_0}{V_{1n}} = 5,55 \cdot 10^{-6} S; \quad B_m = \sqrt{Y^2 - G^2} = 5,44 \cdot 10^{-6} S$$

Rendimento

Il rendimento del trasformatore, così come quello di qualunque altra macchina elettrica, viene definito come il rapporto tra la potenza attiva assorbita dal carico P_u e la potenza attiva erogata al primario P_e ; indicando con $P_p = P_{fe} + P_{cu}$ le perdite complessive nella macchina (cioè la potenza complessiva dissipata in calore nel rame e nel ferro) sarà:

$$\eta = \frac{P_u}{P_e}$$

Questa definizione è poco adatta per ricavare sperimentalmente il rendimento. Infatti, P_u e P_e sono molto simili tra loro e la valutazione del loro rapporto è molto sensibile agli errori di misura. Inoltre, le potenze in gioco possono essere molto elevate.

Si può, quindi, riscrivere l'espressione del rendimento come:

$$\eta = \frac{P_u}{P_u + P_p} = 1 - \frac{P_p}{P_u + P_p} = 1 - \frac{P_{fe} + P_{cu}}{P_u + P_{fe} + P_{cu}}$$

Le perdite nel ferro non dipendono dal carico, mentre quelle nel rame variano con il quadrato della corrente, e quindi dipendono dal carico, così come dipende dal carico la potenza P_u .

Possiamo quindi definire il rendimento convenzionale del trasformatore in funzione del carico:

$$\eta_c = \frac{V_2 I_2 \cos\varphi_2}{V_2 I_2 \cos\varphi_2 + R''_{cc} I_2^2 + P_{fe}}$$

Nella **Figura 71** sono riportati gli andamenti del rendimento convenzionale, delle perdite nel rame e delle perdite nel ferro al variare del rapporto tra la corrente secondaria e quella nominale, detto *fattore di carico*. Le perdite nel ferro sono costanti mentre le perdite nel rame variano con il quadrato di questo rapporto. Si può dimostrare che il rendimento convenzionale è massimo quando le perdite nel rame e nel ferro sono uguali. In una macchina scelta bene in base al servizio che deve rendere, la potenza nominale deve corrispondere a quella che rende massimo il rendimento.

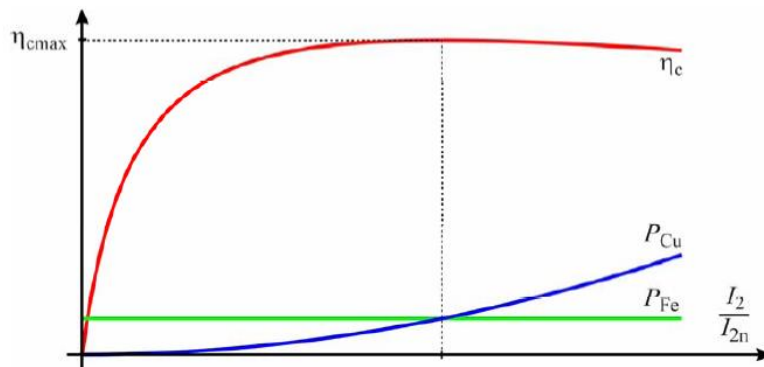


Figura 71 – Curve del rendimento convenzionale e delle perdite nel rame e nel ferro con il fattore di carico.

I trasformatori, essendo macchine statiche, hanno rendimenti molto elevati. Valori tipici di rendimento variano da 92% a oltre 99% per potenze nominali da 1kVA a 50 MVA. Si raggiungono valori oltre il 99.5% per i trasformatori di potenza ancora maggiore.

Particolarità costruttive

Le due forme costruttive più comuni del trasformatore monofase sono quelle usualmente indicate come nucleo a colonne (con gli avvolgimenti disposti intorno a ciascuna delle colonne) e nucleo a mantello o corazzato (con entrambi gli avvolgimenti disposti sulla colonna centrale e parzialmente “circondati” dal nucleo), come illustrato nella **Figura 72**. Il nucleo viene costruito assemblando fra loro varie parti, in particolare gli elementi verticali (cioè le colonne) vengono serrate fra loro dagli elementi orizzontali, chiamati gioghi. Questo tipo di struttura presenta il vantaggio di poter utilizzare lamierini di forma rettangolare, più facili da lavorare, e di inserire facilmente gli avvolgimenti. Il *giunto* fra colonne e gioghi può presentare due differenti configurazioni: giunto piallato o giunto intercalato, così come mostrato in **Figura 73**. L'inconveniente è costituito dalla presenza di pur ridottissimi traferri (dell'ordine di 0,05 mm o meno nei trasformatori di potenza maggiore), che incrementano la riluttanza complessiva. I lamierini comunemente utilizzati sono di acciaio speciale (da trasformatore) con spessore da alcuni millimetri (piccolissima potenza) a 0.35-0.5 mm. Essi vengono isolati tra loro mediante carta (0.03 mm) o vernici. Per piccoli trasformatori (fino a qualche kVA) si affida l'isolamento allo strato di ossido che si forma sulla loro superficie. Come già detto il materiale viene drogato con silicio (qualche per cento): la cifra di perdita di questi materiali è di pochi W/kg (per 1 Wb/m² e 50 Hz) (le lamiere normali arrivano a 3 W/kg).

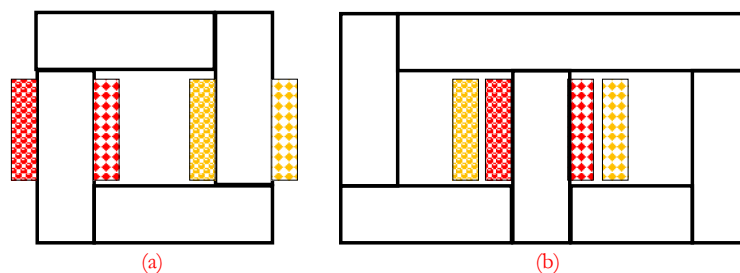


Figura 72 – (a) Nucleo a colonne; (b) Nucleo a mantello (o corazzato). In rosso e giallo sono riportati gli avvolgimenti primario e secondario.

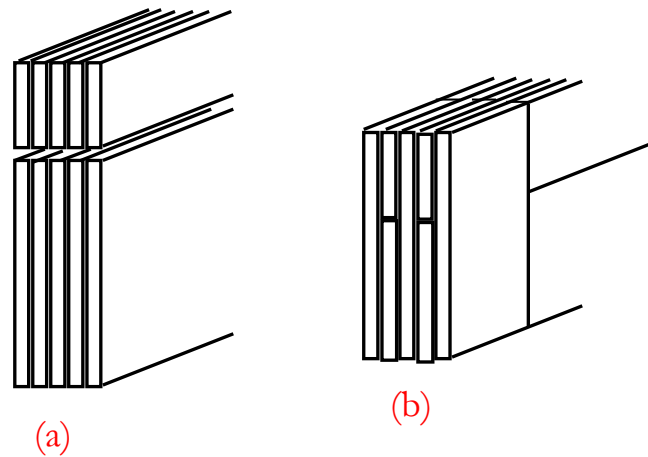


Figura 73–(a) Giunto piallato; (b) Giunto intercalato.

Per trasformatori di piccola potenza ($<1\text{kVA}$) il trasformatore può essere realizzato con nucleo bobinato (sia a colonne che a mantello) costituito da un lamierino ferromagnetico avvolto a spirale in più strati, fino a costituire la struttura, priva di discontinuità, intorno alla quale alloggiare gli avvolgimenti (**Figura 74**).

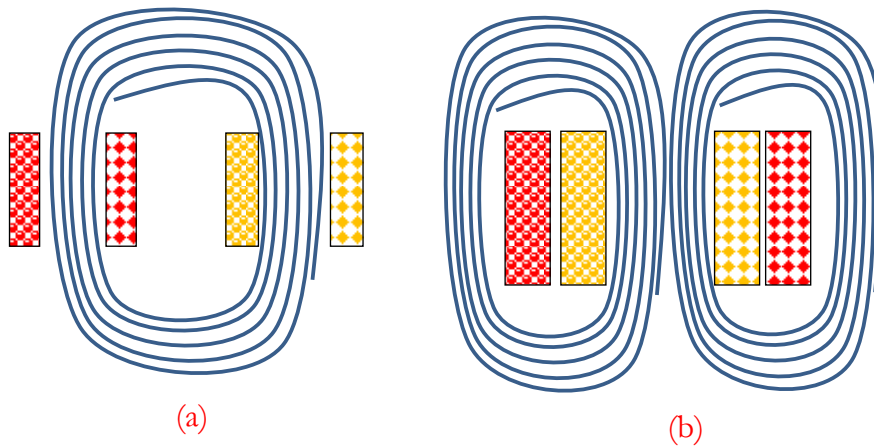


Figura 74 – Nucleo bobinato (o avvolto): (a) a colonne; (b) a mantello.

Gli avvolgimenti sono realizzati in rame o in alluminio. Quest'ultimo presenta un costo inferiore a quello del rame con una conducibilità leggermente minore. La sezione dei conduttori può essere circolare oppure, per ottenere il riempimento ottimale, anche rettangolare (piattina). Gli avvolgimenti possono avere una configurazione concentrica (con l'avvolgimento a più bassa tensione all'interno) o alternata, come mostrato in **Figura 75**. Queste disposizioni degli avvolgimenti minimizzano i flussi dispersi. Naturalmente gli avvolgimenti in alta tensione e bassa tensione devono essere adeguatamente isolati fra di loro utilizzando isolanti quali carta impregnata d'olio, cotone, smalti e vernici speciali, cartone naturale o bachelizzato. La scelta dell'isolamento è legata alla differenza di potenziale fra i due avvolgimenti.

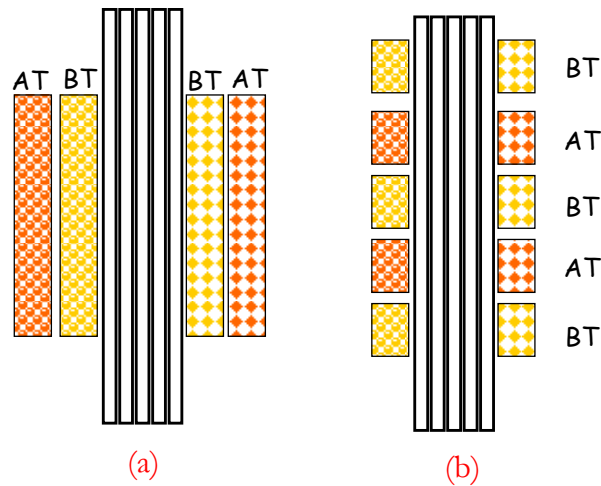


Figura 75 – (a) Avvolgimento concentrico; (b) Avvolgimento alternato.

Raffreddamento

Il trasformatore, come le altre macchine elettriche ad induzione, è sede di perdite di energia che si trasformano in calore sia nel rame che nel ferro. È quindi necessario predisporre opportuni sistemi di raffreddamento che garantiscano di mantenere la temperatura entro limiti stabiliti per preservare la durata della stessa macchina.

I sistemi di raffreddamento possono essere classificati in diversi modi: 1) a seconda dell'esistenza o meno di un fluido intermediario si ha il raffreddamento in aria o in olio; 2) a seconda dell'esistenza o meno di mezzi che attivano la trasmissione del calore si ha il raffreddamento naturale o il raffreddamento forzato (o artificiale). Si possono trovare le diverse combinazioni di raffreddamento in relazione alla potenza dei trasformatori. Nella **Tabella 8** sono riportati i valori di potenze e tensioni relative ai diversi tipi di sistemi di raffreddamento. Nel raffreddamento ad aria-naturale (cioè senza forzamento) lo smaltimento del calore avviene per convezione naturale ed irraggiamento. Si aumenta lo scambio d'aria aumentando la superficie di scambio termico attraverso delle alette metalliche intorno agli avvolgimenti. Nel raffreddamento ad olio-naturale il trasformatore è immerso in un cassone pieno d'olio. Nel sistema olio-forzato è presente un circuito idraulico dell'olio e uno scambiatore di calore per aumentare l'efficienza di raffreddamento.

Tabella 8 - Sistemi di raffreddamento

Fluido intermediario	Aria	Olio
Mezzo di attivazione		
Naturale	Piccole potenze e tensioni modeste: $S < 150-200 \text{ kVA}$; $V < 10 \text{ kV}$	Potenze da 5 a 6000 kVA; Tensioni fino a 70 kV
Forzato	Presenza di ventilatori. Medie potenze	Potenze da 10 a 400 MVA e oltre; Tensioni maggiori di 70 kV

Campo Magnetico Rotante

Alla base del funzionamento delle macchine elettriche rotanti vi è il *Teorema di Galileo Ferraris* o del Campo Magnetico Rotante. Esso afferma che un sistema polifase di correnti che scorre in un

opportuno sistema di conduttori genera un campo magnetico di intensità costante la cui direzione ruota in un piano con moto uniforme, genera cioè un *Campo Magnetico Rotante* del tutto simile a quello ottenuto facendo ruotare un magnete permanente utilizzando un motore primario (cioè fornendo energia meccanica).

Dimostrazione

Consideriamo una bobina percorsa da una corrente variabile sinusoidalmente con pulsazione ω ; verrà generato un campo magnetico variabile sinusoidalmente con la stessa pulsazione della corrente e con direzione fissa nello spazio e pari alla normale alla spira (secondo la regola di Maxwell). In **Figura 76** è mostrata la spira percorsa dalla corrente:

$$i(t) = I_{MAX} \sin \omega t$$

Il campo magnetico sarà un vettore che giace sempre nella direzione dell'asse della spira ed ha una ampiezza variabile nel tempo con legge sinusoidale mostrata a tratteggio nella stessa figura. All'istante $t = 0$ il vettore \vec{H} è nullo; per $t = T/4$ con T periodo della sinusoide \vec{H} ha ampiezza massima pari ad H_{MAX} (vettore rosso in figura); per $t = t_1$ \vec{H} ha ampiezza H_1 (vettore blu in figura); per $t = 3T/4$ \vec{H} ha ampiezza minima pari ad $-H_{MAX}$ (vettore verde in figura). Riassumendo, una bobina fissa nello spazio genera un campo magnetico fisso nello spazio ma con ampiezza che varia con legge sinusoidale.

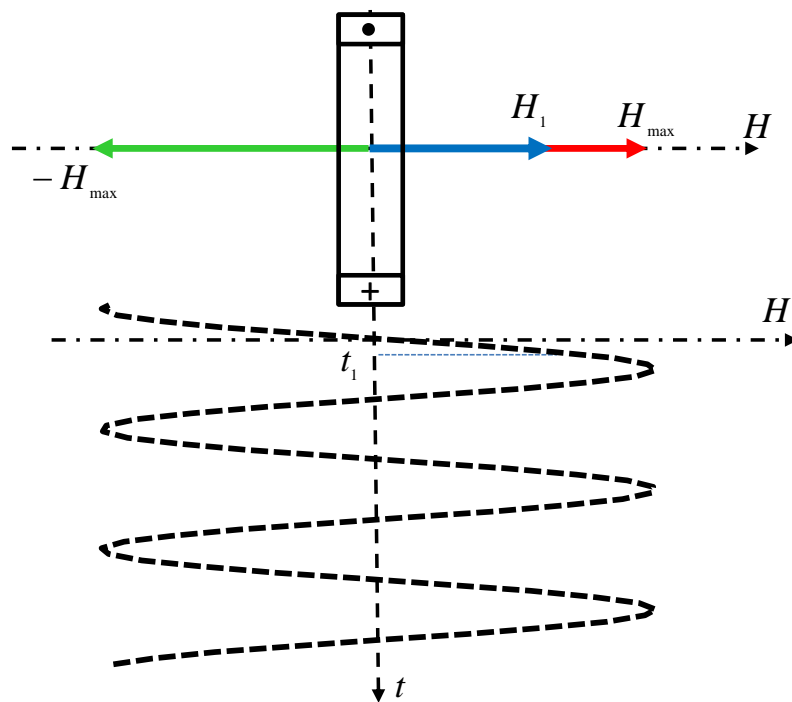


Figura 76 – Campo magnetico prodotto da una bobina percorsa da una corrente sinusoidale.

Un campo così fatto può essere scomposto in due vettori rotanti di ampiezza pari ad $\frac{H_{MAX}}{2}$ e che ruotano con velocità angolare costante ω pari alla pulsazione della corrente, uno in senso orario (vettore destrorso \vec{D}) e l'altro in senso antiorario (vettore sinistrorso \vec{S}).

$$\vec{H} = D \sin \omega t + S \sin \omega t = 2D \sin \omega t$$

In **Figura 77** è riportata una rappresentazione grafica della precedente espressione riferita a tre differenti istanti di tempo. All'istante $t = 0$ i due vettori rotanti sono in opposizione di fase e la loro risultante è nulla (**Figura 77a**). All'istante $t = t_1$ il vettore \bar{D} ha ruotato di un angolo pari a ωt_1 in verso orario, mentre il vettore \bar{S} ha ruotato di uno stesso angolo in verso antiorario; la loro somma è un vettore di ampiezza H_1 in direzione della normale alla spira (**Figura 77b**). All'istante $t = T/4$ la componente destrorsa ha ruotato di 90° in senso orario mentre la componente sinistrorsa ha ruotato di 90° in senso antiorario; il campo magnetico risultante ha ampiezza massima pari al doppio della ampiezza delle componenti e direzione pari a quella dell'asse della bobina (**Figura 77c**).

Si può sintetizzare quanto sin qui visto dicendo che: la risultante di due vettori di uguale ampiezza rotanti in versi opposti a velocità angolare costante è un vettore di direzione fissa (pari a quella dell'asse della spira) e ampiezza variabile con legge sinusoidale compiendo un periodo per ogni giro dei vettori componenti. Viceversa, ogni vettore alternativo avente direzione fissa nello spazio si può scomporre in due componenti rotanti.

Nel seguito verrà mostrato come, sovrapponendo due o più campi alternati della stessa frequenza, opportunamente sfasati nel tempo, e agenti in opportune direzioni, è possibile ottenere che le rispettive componenti rotatorie in un dato verso si annullino e che le componenti rotatorie nel verso opposto si sommino: la risultante sarà un campo rotante di ampiezza costante. La dimostrazione riportata nel seguito si riferisce al caso trifase, tuttavia quanto verrà detto può essere esteso ad un qualunque sistema polifase.

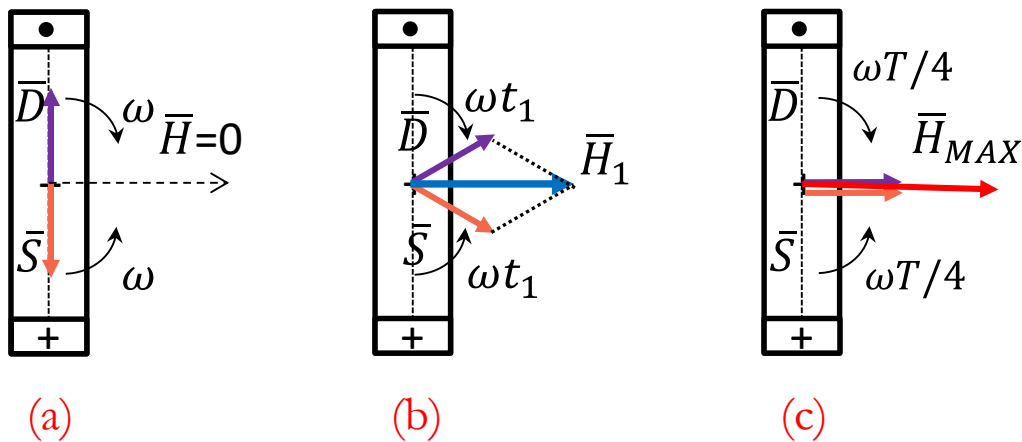


Figura 77 –Componenti destrorsa e sinistrorsa e corrispondente campo magnetico in diversi istanti di tempo: (a) per $t = 0$, $\bar{H} = 0$; b) per $t = t_1$, $\bar{H} = H_1$; c) per $t = \frac{T}{4}$, $\bar{H} = H_{MAX}$.

Si consideri un sistema di tre bobine spazialmente sfasate di 120° l'una rispetto all'altra, come quelle di **Figura 78**. Le tre bobine sono attraversate da un sistema trifase di correnti elettricamente sfasate di 120° una rispetto all'altra, cioè da un sistema trifase diretto:

$$\begin{cases} i_1 = I_{MAX} \cos \omega t \\ i_2 = I_{MAX} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ i_3 = I_{MAX} \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \end{cases}$$

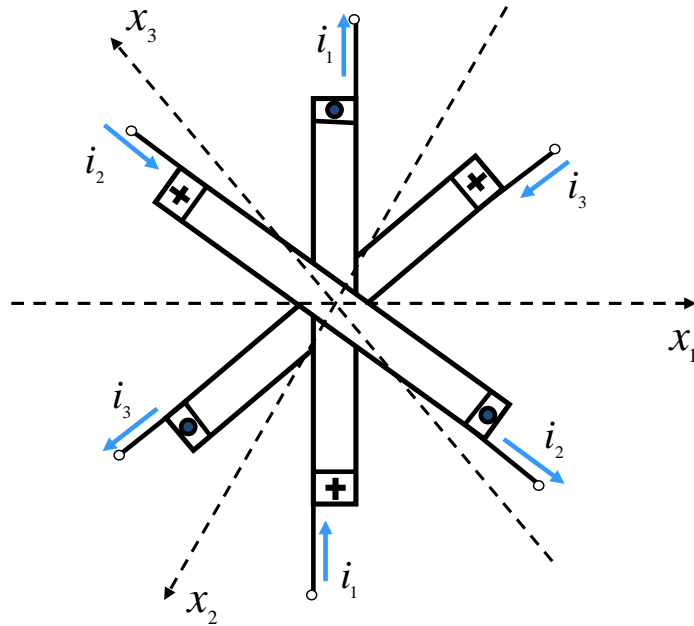


Figura 78 – Sistema di tre bobine angularmente sfasate di 120° e attraversate da un sistema trifase equilibrato di correnti.

Ciascuna delle tre bobine genera un campo magnetico di ampiezza variabile con andamento sinusoidale e diretto secondo il proprio asse.

Nell'istante $t = 0$ la bobina 1 (con asse in direzione x_1 e attraversata dalla corrente i_1) genera un campo H_1 in direzione x_1 . Esso può essere scomposto nelle componenti destrorsa e sinistrorsa che avranno direzione ortogonale all'asse della bobina e saranno in opposizione di fase fra loro, così come riportato in **Figura 79a**. Infatti, all'istante iniziale la corrente ha ampiezza nulla ed anche il campo magnetico ha ampiezza nulla. Nello stesso istante $t = 0$ la bobina 2 (con asse in direzione x_2 ed attraversata dalla corrente i_2) genera un campo H_2 in direzione x_2 . Poiché all'istante iniziale la corrente i_2 è in ritardo di $\frac{2\pi}{3}$ rispetto alla i_1 le componenti destrorsa e sinistrorsa saranno sfasate di 120° rispettivamente in senso antiorario ed orario rispetto alla direzione ortogonale all'asse della bobina, così come riportato in **Figura 79b**. Nello stesso istante $t = 0$ la bobina 3 (con asse in direzione x_3 ed attraversata dalla corrente i_3) genera un campo H_3 in direzione x_3 . Poiché all'istante iniziale la corrente i_3 è in anticipo di $\frac{2\pi}{3}$ rispetto alla i_1 le componenti destrorsa e sinistrorsa saranno sfasate di 120° rispettivamente in senso orario ed antiorario rispetto alla direzione ortogonale all'asse della bobina, così come riportato in **Figura 79c**.

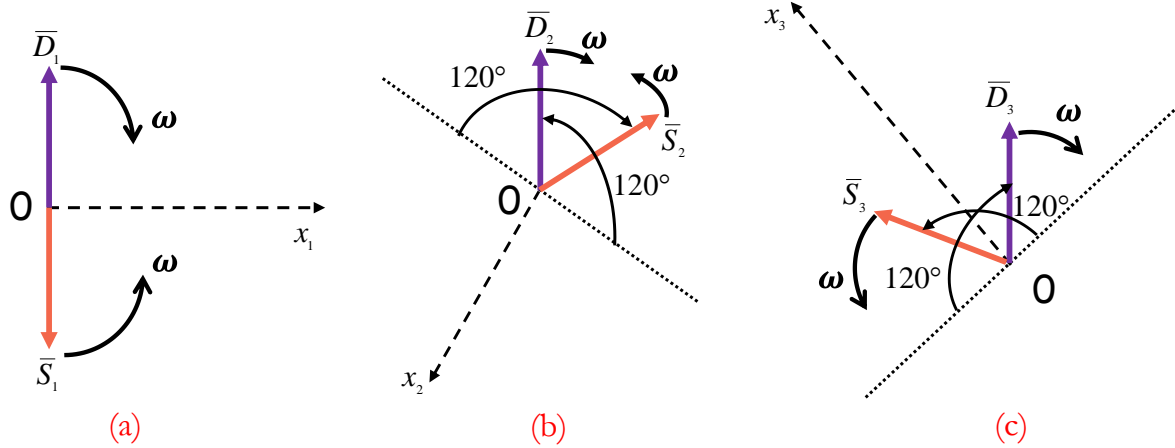


Figura 79 – Componenti destrorsa e sinistrorsa dei campi prodotti dalle tre bobine nell'istante $t = 0$.

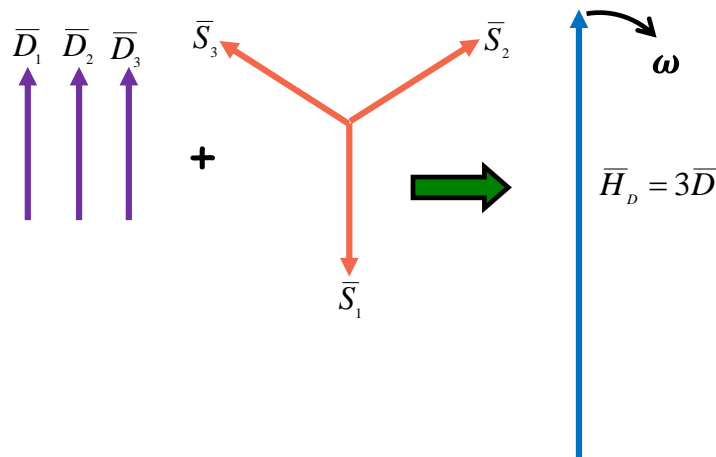


Figura 80 – Risultante della composizione delle componenti destrorsa e sinistrorsa nelle tre bobine.

Il campo prodotto dalle tre bobine si ottiene sommando tutte le componenti destrorse e sinistrorse. Come si evince dalla **Figura 80**, dove vengono riportate le componenti di **Figura 79**, le tre componenti destrorse hanno uguale ampiezza (pari a $\frac{H_{MAX}}{2}$), e sono in fase mentre le tre componenti sinistrorse hanno uguale ampiezza (pari a $\frac{H_{MAX}}{2}$) ma sono sfasate di 120° l'una rispetto all'altra; la loro somma è quindi pari a zero. La somma dei campi prodotti dalle tre bobine è pari, quindi, ad un vettore di ampiezza costante e pari a pari a $\frac{3}{2}H_{MAX}$ e direzione variabile con velocità angolare ω costante in verso orario, come riportato nella stessa **Figura 80**. Come volevamo dimostrare, il sistema descritto produce quindi un campo magnetico di ampiezza costante che ruota con velocità angolare pari alla pulsazione delle correnti.

E' facile verificare che, se invertiamo il senso di avvolgimento delle bobine 2 e 3 o se alimentiamo le tre bobine con un sistema di correnti simmetrico inverso, anziché diretto, saranno le componenti destrorse ad annullarsi e quelle sinistrorse a sommarsi, dando luogo ad un campo magnetico di pari ampiezza ma che ruota in verso antiorario.

Se la frequenza di alimentazione è pari a 50 Hz, la velocità angolare sarà $\omega = 2\pi f \text{ rad/s}$ o anche, come più di consueto viene indicato, $\omega = f \cdot 60 = 50 \cdot 60 = 3000 \text{ giri/minuto}$.

Il campo magnetico realizzato può essere sfruttato per realizzare alcune importanti macchine elettriche quali i motori sincroni e i motori asincroni. In queste applicazioni può essere necessario realizzare differenti velocità angolari. Questo può essere ottenuto modificando opportunamente il sistema delle bobine, per realizzare un diverso numero di polarità. Infatti, il sistema delle tre bobine precedentemente analizzato, realizza un campo magnetico con un solo paio di poli N-S, come quello realizzato da un magnete permanente posto in rotazione da un motore primario (vedi **Figura 81**).

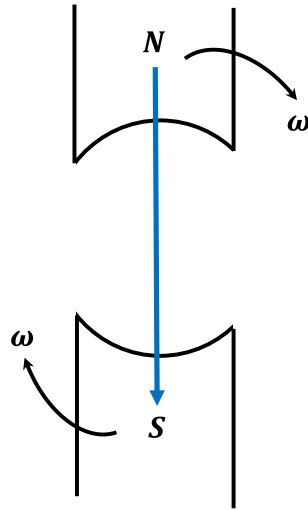


Figura 81 – Campo magnetico rotante creato da un magnete permanente posto in rotazione da un motore primario.

È possibile, modificando il sistema di avvolgimenti realizzare più paia polari e, conseguentemente, realizzare una differente velocità angolare del campo magnetico che è legata al numero di paia polari p dalla seguente relazione:

$$\Omega = \frac{\omega}{p} = \frac{f \cdot 60}{p} \text{ giri/minuto}$$

Infatti, facendo riferimento, per semplicità, al campo magnetico rotante prodotto dal magnete con un solo paio polare (N-S), posto in rotazione a velocità angolare ω , come quello riportato in **Figura 81**, per riportare questo campo magnetico nella stessa condizione spaziale da cui è partito, occorre che il magnete ruoti di 360° . Se supponiamo di avere un magnete con due coppie polari (N-S-N-S), per riportare il campo magnetico da esso prodotto nella condizione spaziale da cui è partito, esso deve percorrere solo mezza circonferenza (180°). Quindi, la velocità angolare che occorre ad un campo magnetico prodotto da un magnete con due coppie polari per riportarsi nella condizione iniziale sarà la metà della precedente. Analoghe considerazioni possono farsi se il campo è prodotto da un sistema di avvolgimenti con due coppie polari, come quello riportato in **Figura 82**, dove il passo polare è la distanza (sulla circonferenza tratteggiata), tra due poli contigui di pari polarità.

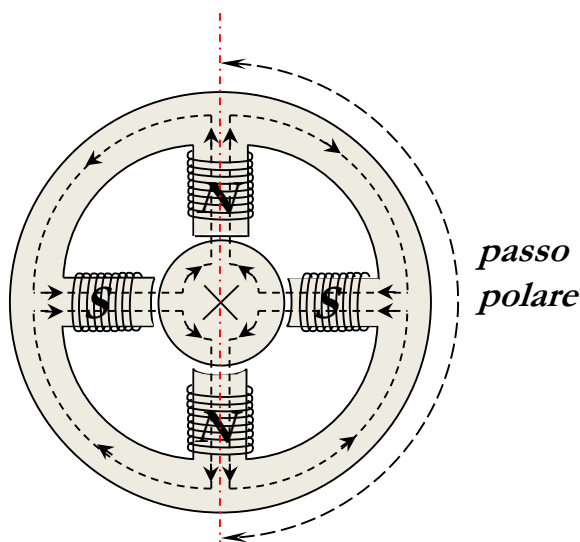


Figura 82 – Avvolgimento con due paia polari.

Nella **Tabella 9** sono riportate le velocità angolari corrispondenti a differenti paia polari, alla frequenza di 50 Hz:

Tabella 9 - Velocità angolare Ω in funzione delle paia polari p

p	1	2	3	4	5	6
$\Omega = \frac{50 \cdot 60}{p}$	3000	1500	1000	750	600	500

Applicazioni dei campi magnetici rotanti

Il campo magnetico rotante trova applicazione in importanti macchine elettriche rotanti ad induzione. Di seguito verranno illustrati i principi di funzionamento di due macchine molto diffuse nella pratica elettrica: il motore sincrono e il motore asincrono. I dettagli costruttivi e gli approfondimenti sulle macchine elettriche esulano dalle finalità di questo corso.

Motore Asincrono

Supponiamo di avere un magnete permanente posto in rotazione ad una certa velocità angolare (come quello in **Figura 81**) e supponiamo di immergere nel campo magnetico da esso prodotto un cilindro metallico (conduttore) come in **Figura 83**.

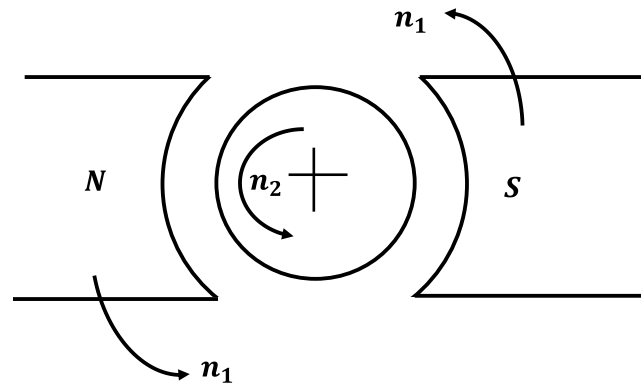


Figura 83 – Principio di funzionamento del Motore Asincrono

Se l'elettromagnete è fermo, poiché il suo campo magnetico è di intensità costante, non sono presenti, nel cilindro né f.e.m. variazionali, né mozionali, ed il cilindro conduttore resterà fermo. Se però mettiamo in rotazione il magnete permanente alla velocità di rotazione pari a n_1 giri/minuto, il cilindro conduttore sarà sede di f.e.m. indotte e quindi sarà percorso da correnti in dei circuiti di richiusura, che si oppongono alla causa che le ha generate (la rotazione del magnete) e il cilindro si metterà in rotazione (con velocità pari a n_2 giri/minuto) per cercare di annullare la velocità relativa pari a $n_1 - n_2$. Il cilindro non potrà mai raggiungere la velocità del magnete perché se la raggiungesse cesserebbe il moto relativo e si avrebbe l'estinzione delle correnti indotte e conseguentemente la forza motrice necessaria a mantenere la rotazione. La differenza di velocità $n_1 - n_2$ è detta scorrimento. Lo scorrimento dipende dalla coppia resistente all'asse del cilindro che non è mai nulla, dipendendo, oltre che da un eventuale carico meccanico, anche dagli attriti dell'asse sui cuscinetti. La velocità del cilindro è tanto più piccola quanto maggiore è la coppia resistente applicata all'asse. Se si sostituisce il moto del magnete con un campo magnetico rotante, come quello precedentemente descritto, si realizza una macchina elettromagnetica che trasforma l'energia elettrica fornita al sistema di avvolgimenti in energia meccanica di rotazione dell'asse del cilindro. Su questo principio si basa una delle più diffuse macchine elettriche ad induzione, il *Motore Asincrono*. Il suo nome deriva dall'asincronia o *scorrimento* fra la velocità del campo magnetico rotante e quella dell'asse del cilindro.

Motore Sincrono

In campo magnetico rotante di Galileo Ferraris è anche alla base del funzionamento del *Motore Sincrono*. Se nel campo magnetico prodotto dal magnete permanente di **Figura 81**, messo in rotazione a velocità angolare n_1 giri/minuto da un motore primo, viene posizionato un secondo magnete (vedi **Figura 69**) libero di ruotare intorno al proprio asse, per l'attrazione costante che si esercita fra i poli opposti dei due magneti, il secondo viene trascinato in rotazione alla medesima velocità del primo: $n_1 = n_2$.

Analogamente a quanto detto per il motore asincrono, se il campo rotante è prodotto da una serie di avvolgimenti fissi e il magnete rotante è sostituito da un elettromagnete eccitato in corrente continua, si realizza il motore sincrono. La sua particolarità, rispetto al motore asincrono, è che il primo è vincolato a ruotare alla velocità di sincronismo $\Omega = \frac{\omega}{p}$.

Per la reversibilità delle azioni elettromeccaniche, mettendo in rotazione l'elettromagnete, si raccoglie ai morsetti dell'avvolgimento trifase una terna di tensioni sinusoidali. Si realizza cioè, un generatore sincrono, detto anche alternatore, molto utilizzato nelle centrali elettriche.

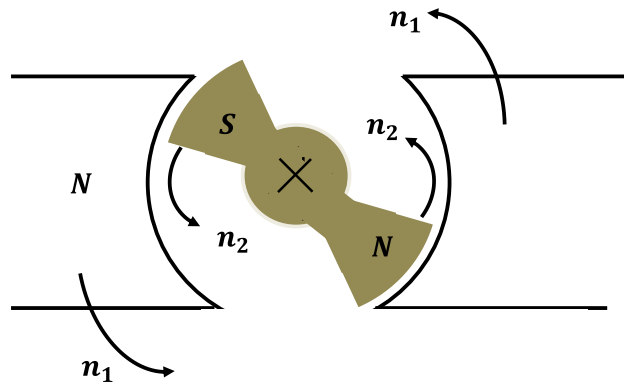


Figura 84 – Principio di funzionamento del Motore Sincrono