

# Circuiti Magnetici

# ELETTROMAGNETISMO

- Quantità basilari: **SORGENTI, CAMPI**  
(La sorgente di un campo elettromagnetico è invariabilmente una carica elettrica, a riposo o in moto)
- Regole Operative: **Calcolo Vettoriale**
- Postulati Fondamentali: **EQUAZIONI DI MAXWELL**

# Equazioni di Maxwell

Forma Differenziale	Forma Integrale	
$\nabla \times \bar{E} = \text{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$	$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$	L. Faraday
$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$	$\oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = I + \int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{S}$	L. Ampère
$\nabla \cdot \bar{D} = \rho$	$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = Q$	L. Gauss
$\nabla \cdot \bar{B} = 0$	$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0$	L. Gauss

Teorema di Stokes:  $\int_S (\nabla \times \bar{A}) \cdot d\bar{S} = \oint_l \bar{A} \cdot d\bar{l}$

Teorema della divergenza:  $\int_V \nabla \cdot \bar{A} \cdot dV = \oint_S \bar{A} \cdot d\bar{S}$

# IPOSTESI SUI MEZZI MATERIALI

CONTINUI - OMOGENEI - ISOTROPI - LINEARI

Caratterizzati dalle seguenti grandezze scalari:

- $\gamma$  conduttività [S/m]
- $\varepsilon$  permittività [F/m]
- $\mu$  permeabilità [H/m]

# QUANTITA' DI BASE

## CORRENTE ELETTRICA

$$i = dq / dt \text{ [A]}$$

## DENSITA' DI CORRENTE $\bar{J}$

- Misura la quantità di corrente che fluisce attraverso l'unità di superficie normale alla direzione del flusso di corrente

## CAMPI

ELETTRICO  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Intensità Di Campo Elettrico } \bar{E} \text{ [V/m]} \\ \text{Densità di Flusso Elettrico } \bar{D} \text{ [C/m}^2\text{]} \end{array} \right.$

MAGNETICO  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Induzione Magnetica } \bar{B} \text{ [T=V} \cdot \text{s/m}^2\text{]} \\ \text{Intensità di Campo Magnetico } \bar{H} \text{ [A/m]} \end{array} \right.$

# RELAZIONI COSTITUTIVE DEL MEZZO

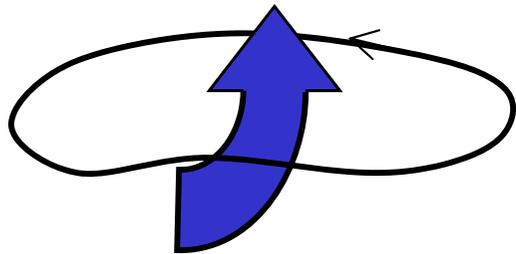
Campo	Equazione costitutiva
Campo di corrente	$\bar{J} = \sigma \bar{E}$
Campo elettrico	$\bar{D} = \epsilon \bar{E}$
Campo magnetico	$\bar{B} = \mu \bar{H}$

costanti universali	simbolo	valore	unità
velocità della luce nel vuoto	$c$	$3 \times 10^8$	$m/s$
permeabilità del vuoto	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$	$H/m$
permettività del vuoto	$\epsilon_0$	$8,854 \times 10^{-12}$	$F/m$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299792458 \frac{m}{s}$$

# RELAZIONI MISTE FRA GRANDEZZE SCALARI E VETTORIALI

## TEOREMA DELLA CIRCUITAZIONE

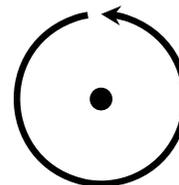
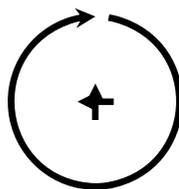


$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} \qquad \oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = I$$

Legge di Ampère

## REGOLA DI MAXWELL

- Il segno positivo della corrente è quello di avanzamento dei una vite destrorsa che si avvita nel verso associato alla linea chiusa

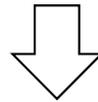


**FLUSSO DI INDUZIONE:**  $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

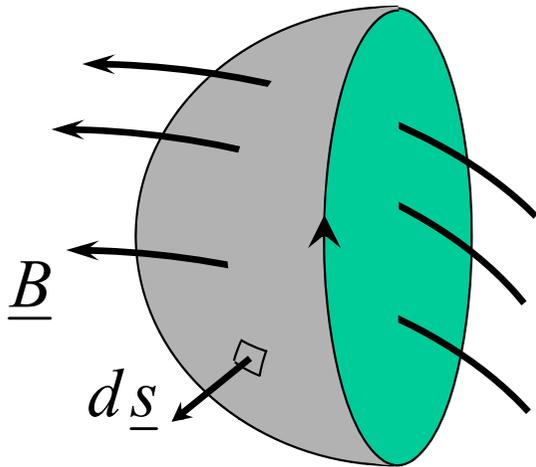
Applicando l'integrale ad una superficie chiusa:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

(Legge di Gauss)



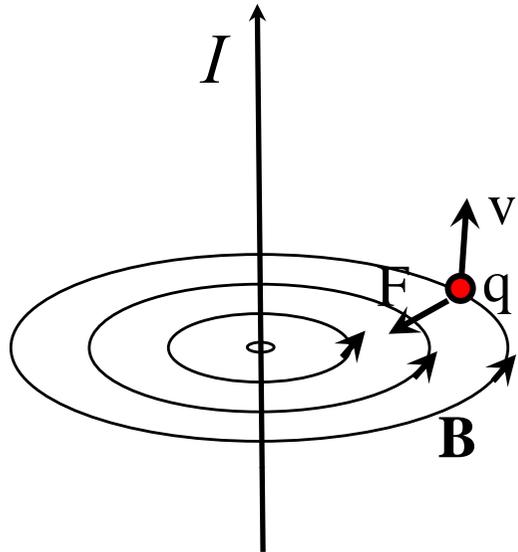
$\vec{B}$  E' SOLENOIDALE



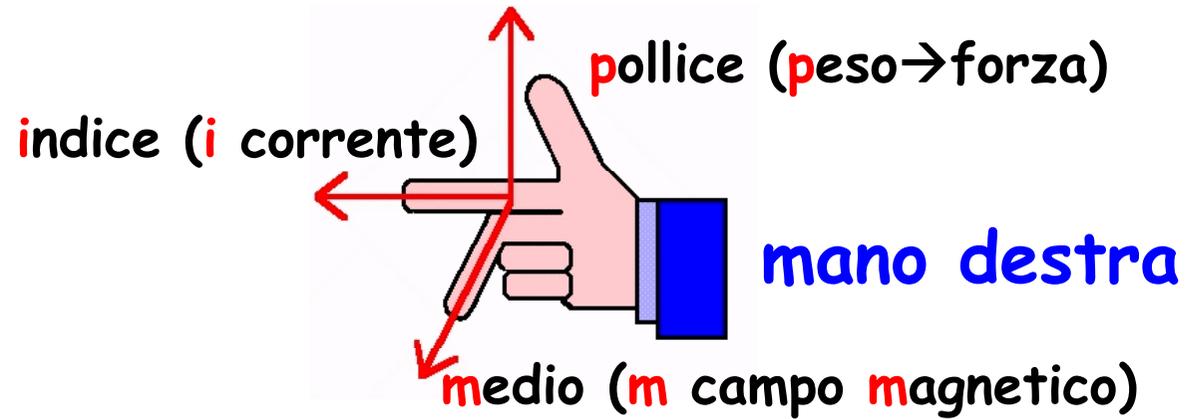
Applicando il teorema della divergenza:  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

- Diverse superfici che hanno lo stesso contorno, hanno lo stesso flusso concatenato → Si parla di flusso concatenato con una linea chiusa

# Campo Magnetico



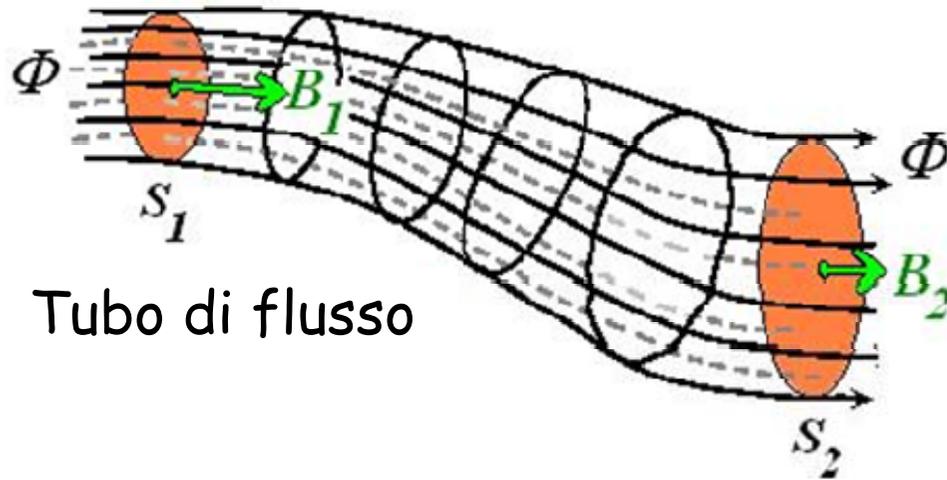
$$\bar{F} = (q\bar{v} \times \bar{B}) = (i \times \bar{B}) \quad \text{forza indotta}$$



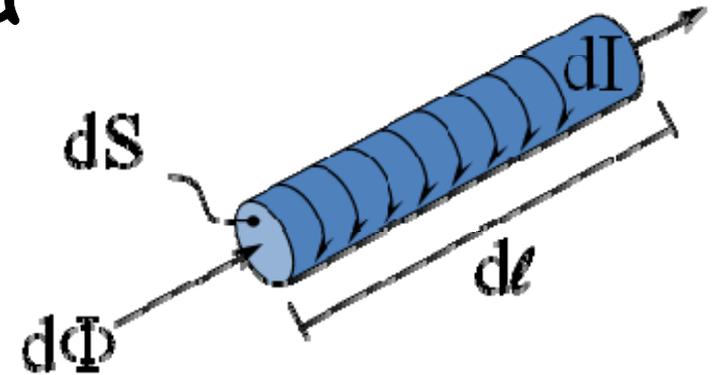
$$\left. \begin{aligned} B &= \mu \frac{|I|}{2\pi r} \\ \bar{B} &= \mu \bar{H} \end{aligned} \right\} \Rightarrow H = \frac{|I|}{2\pi r}$$

Legge di Biot-Savart

# Induttanza



Tubo di flusso



Solenoide infinitesimo

$$d\Phi = \bar{B} \cdot d\bar{S} = BdS$$

$$d\Phi_c = Nd\Phi = NBdS \rightarrow \text{Flusso concatenato con N spire}$$

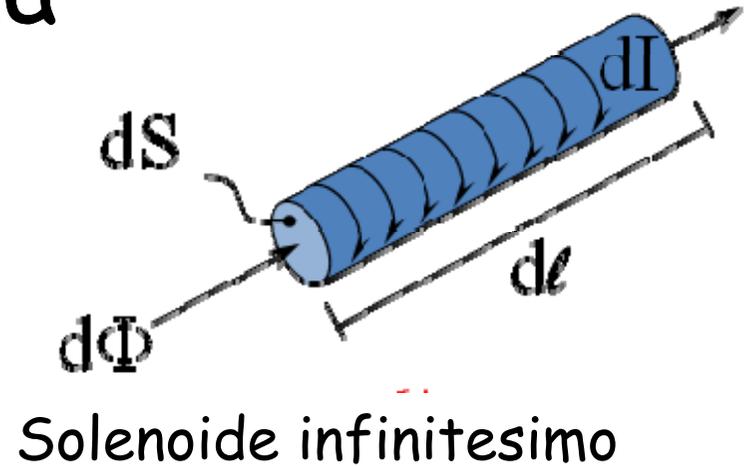
Applicando la legge di Ampère:

$$\oint_l \bar{H} \cdot dl = N \cdot dI \rightarrow \text{Forza Magneto motrice (FMM)}$$

$$U_m = \int_l \bar{H} \cdot dl \rightarrow \text{Tensione Magnetica}$$

# Induttanza

$$L = \frac{d\Phi_c}{dI} = NBdS \frac{N}{Hdl} =$$
$$= N^2 \frac{B}{H} \frac{dS}{dl} = N^2 \frac{d\Phi_c}{dU_m} = N^2 \mu \frac{dS}{dl}$$



$$P_m = \frac{d\Phi_c}{dU_m} = \mu \frac{dS}{dl} [H] \rightarrow \text{Permeanza magnetica}$$

$$R_m = \frac{dU_m}{d\Phi_c} = \frac{1}{\mu} \frac{dl}{dS} [H^{-1}] \rightarrow \text{Riluttanza Magnetica}$$

$$U_m = R_m \Phi \rightarrow \text{Legge di Hopkinson}$$

# Corrispondenza tra grandezze elettriche e magnetiche

Circuiti Elettrici		Circuiti magnetici	
<i>Grandezza</i>	<i>Simbolo</i>	<i>Grandezza</i>	<i>Simbolo</i>
Forza elettromotrice	$E$ [V]	Forza magnetomotrice	$FMM$ [Aspire]
Tensione elettrica	$V$ [V]	Tensione magnetica	$U_m$ [Aspire]
Corrente	$I$ [A]	Flusso	$\Phi$ [Wb]
Resistenza	$R$ [ $\Omega$ ]	Riluttanza	$R_m$ [ $H^{-1}$ ]
Conduttanza	$G$ [S]	Permeanza	$P_m$ [H]
Campo Elettrico	$\bar{E}$ [V/m]	Campo magnetico	$\bar{H}$ [A/m]
Densità di corrente	$\bar{J}$ [A/m <sup>2</sup> ]	Induzione magnetica	$\bar{B}$ [T=Wb/m <sup>2</sup> ]
Conducibilità elettrica	$\sigma$ [( $\Omega m$ ) <sup>-1</sup> ]	Permeabilità magnetica	$\mu$ [H/m]

## Esempi di induttanze

# MEZZI MATERIALI (Normali e Anormali)

## Mezzi Normali:

- DIAMAGNETICI  $\mu_r < \cong 1$  (Cu, Ag, Zn, Pb, ...)
- PARAMAGNETICI  $\mu_r > \cong 1$  (Mg, Al, Mn, ...)
- AMAGNETICI  $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$

Permeabilità Magnetica relativa di alcuni materiali diamagnetici, paramagnetici e ferromagnetici (all'induzione di 0,002 T)

Materiali Diamagnetici		Materiali Paramagnetici		Materiali Ferromagnetici (B=0,002 T)	
Materiale	$\mu_r$	Materiale	$\mu_r$	Materiale	$\mu_r$
Rame	$1-10 \cdot 10^{-6}$	Alluminio	$1+22 \cdot 10^{-6}$	Ferro	200
Argento	$1-25 \cdot 10^{-6}$	Platino	$1+300 \cdot 10^{-6}$	Lamiere al Si	1000
Bismuto	$1-17 \cdot 10^{-6}$	Aria	$1+0,6 \cdot 10^{-6}$	Nichel	100-600
Acqua	$1-9 \cdot 10^{-6}$			Permalloy*	8000
				Mumetal**	20000

\* Lega Ferro-Nichel

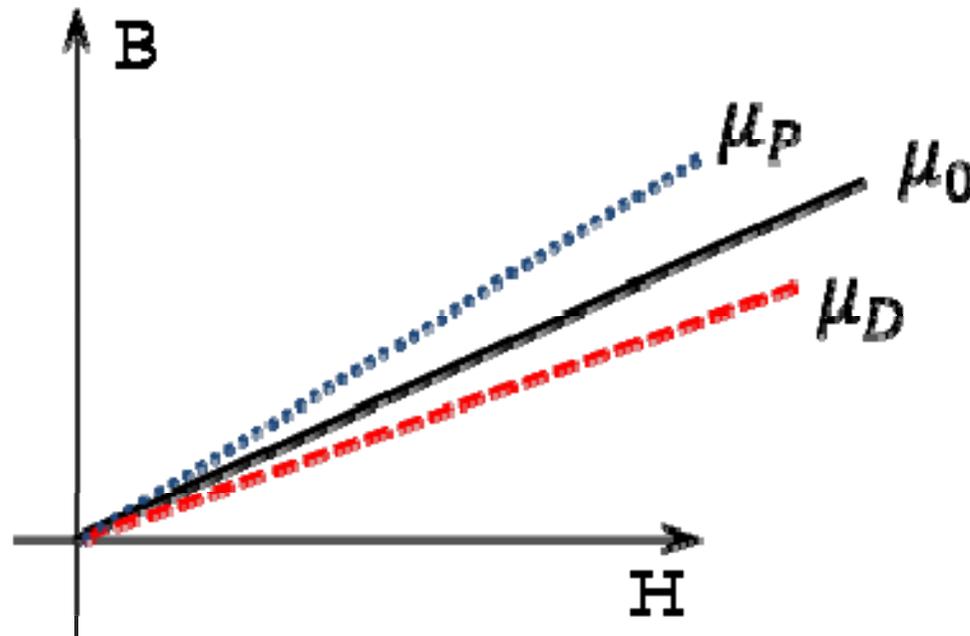
\*\* Lega Ferro, Nichel, Molibdeno, Silicio, Rame

# MEZZI MATERIALI

## Mezzi Normali:

- DIAMAGNETICI  $\mu_r < \cong 1$  (Cu, Ag, Zn, Pb, ...)
- PARAMAGNETICI  $\mu_r > \cong 1$  (Mg, Al, Mn, ...)
- AMAGNETICI  $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$

Caratteristiche di magnetizzazione per i materiali diamagnetici ( $\mu_D$ ) paramagnetici ( $\mu_P$ ) e per il vuoto ( $\mu_0$ ):



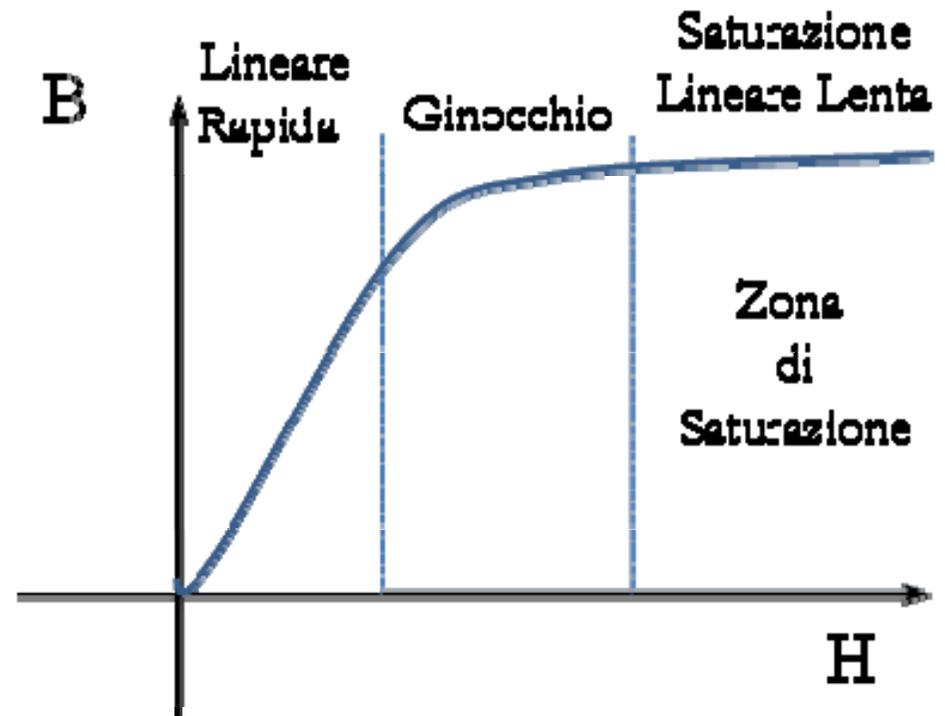
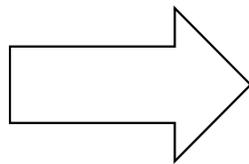
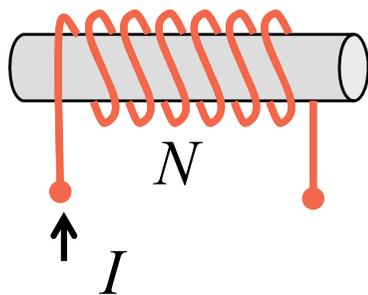
# MEZZI MATERIALI

## Mezzi Anormali:

- FERROMAGNETICI  $\mu_r \gg 1$  (Fe, Ni, ...)

$\mu_r$  è funzione del campo magnetico e quindi dipende dal punto di lavoro

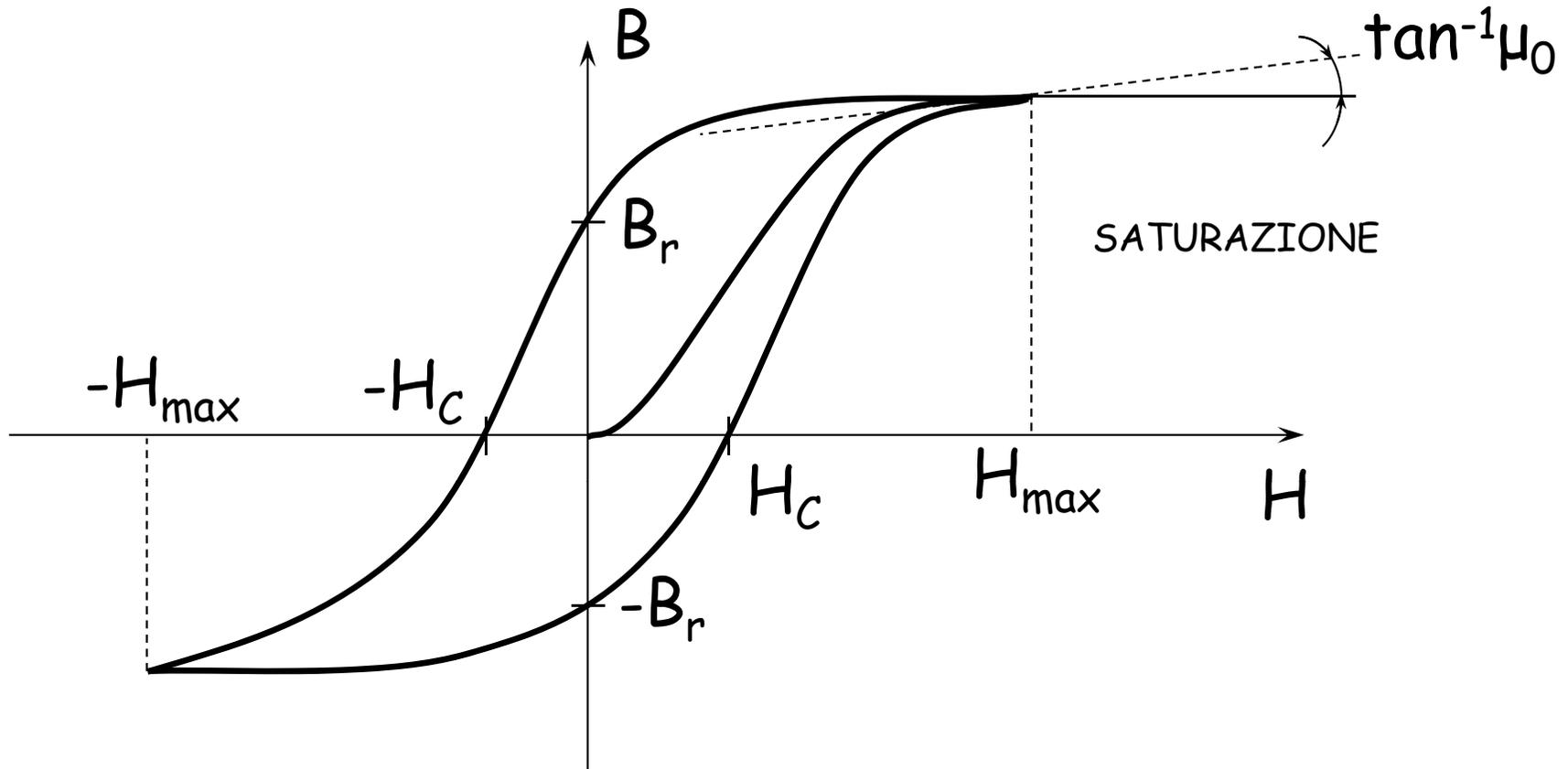
Magnetizzazione  
di un provino



Curva di prima magnetizzazione

# Ciclo di Isteresi

$B = f(H)$  NON LINEARE



$H_c$ : forza coercitiva  
 $B_r$ : induzione residua

UN MATERIALE FERROMAGNETICO, ASSOGGETTATO AD UN CICLO DI ISTERESI, ASSORBE UN LAVORO PER UNITA' DI VOLUME PARI ALL'AREA DEL CICLO DI ISTERESI.

### Dimostrazione

$\Phi_C \rightarrow \Phi_C + d\Phi_C$  Un incremento del flusso concatenato, dà luogo a:

$$dL = I \cdot d\Phi_C = N \cdot I \cdot d\Phi = H \cdot l \cdot dB \cdot A = H \cdot dB \cdot V$$

$$dL_{vol} = \frac{dL}{V} = H \cdot dB \quad \text{incremento del lavoro speso per unità di volume}$$

$$L_{vol} = \oint H \cdot dB \quad \text{incremento di lavoro volumico speso nel ciclo}$$

Poiché  $\bar{H}$  e  $\bar{B}$  sono variabili di stato, tale lavoro non si ritrova sotto forma di energia magnetica accumulata nel materiale, ma viene convertito in CALORE DI ISTERESI.

Si è trovato sperimentalmente che il lavoro massico assorbito in un ciclo è:

$$L = k_{ist} \cdot B_{\max}^n \left[ \frac{W}{m^3} \right] \quad \text{Formula di Steinmetz}$$

$k_{ist}$  : dipende dal materiale

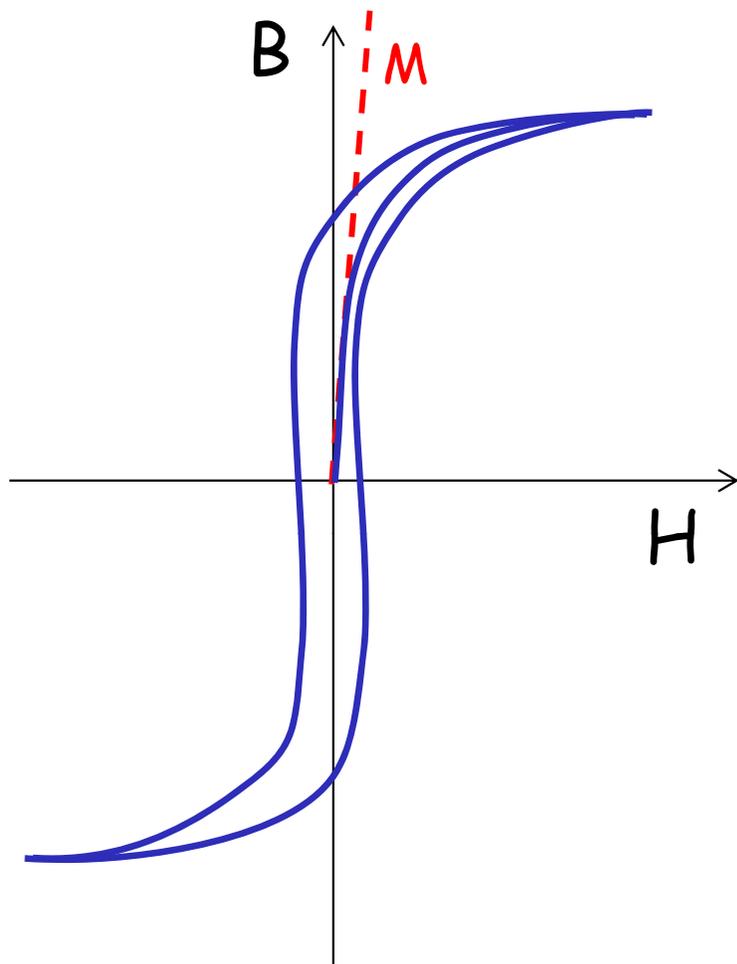
$n$  : 1,8 ÷ 2,2

MATERIALI  
FERROMAGNETICI

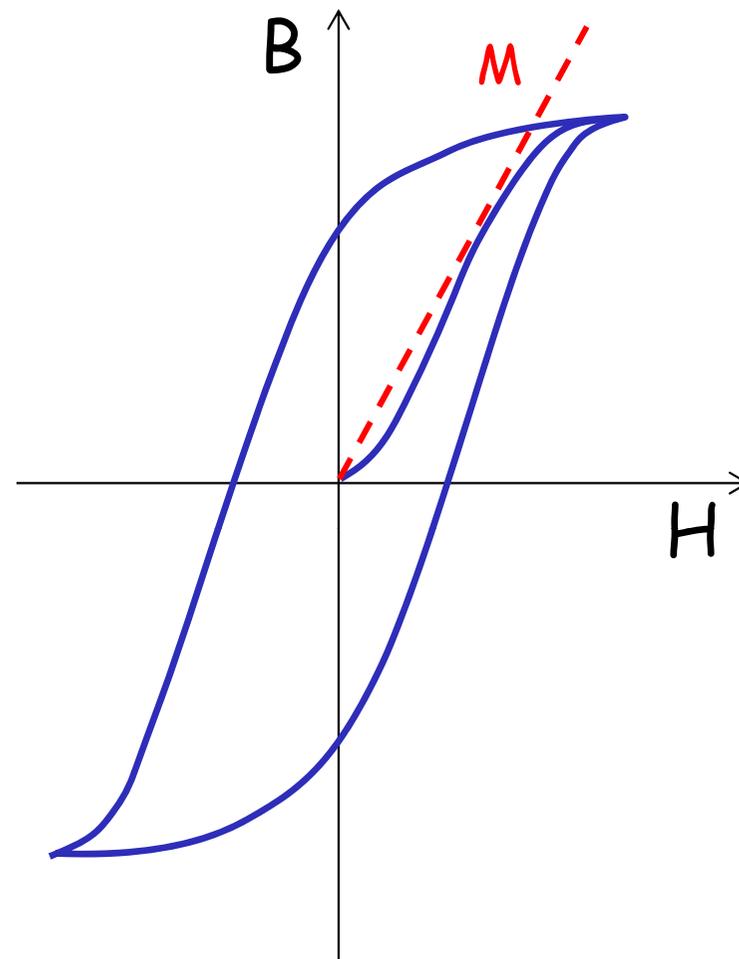
DOLCI (Cicli di isteresi stretti)

DURI (Cicli di isteresi larghi)

# Cicli di Isteresi



Materiale ferromagnetico dolce

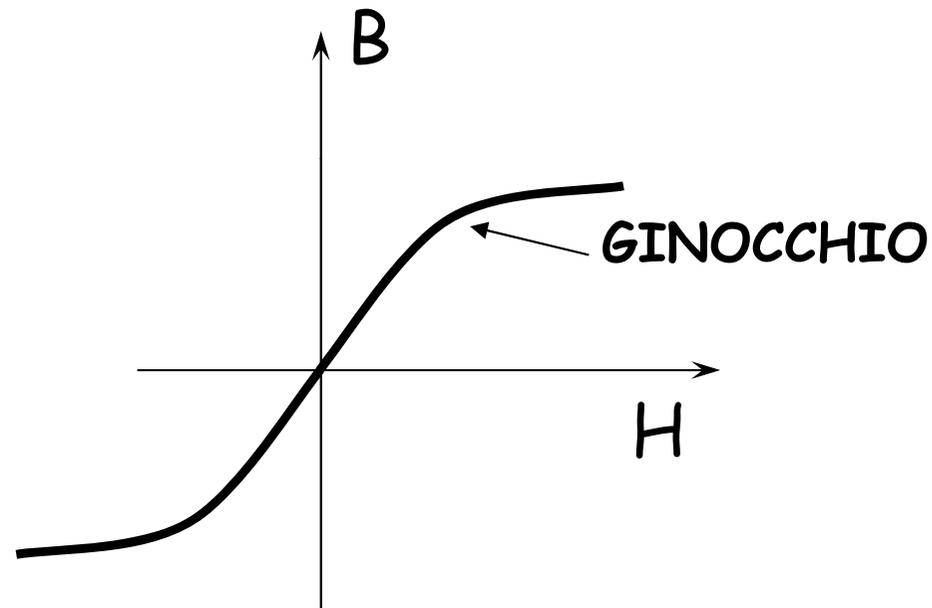


Materiale ferromagnetico duro

# MATERIALI DOLCI

Eccetto che per le perdite per isteresi, il comportamento può essere descritto mediante la **Curva normale di magnetizzazione**:  
luogo dei punti vertici dei cicli di isteresi simmetrici

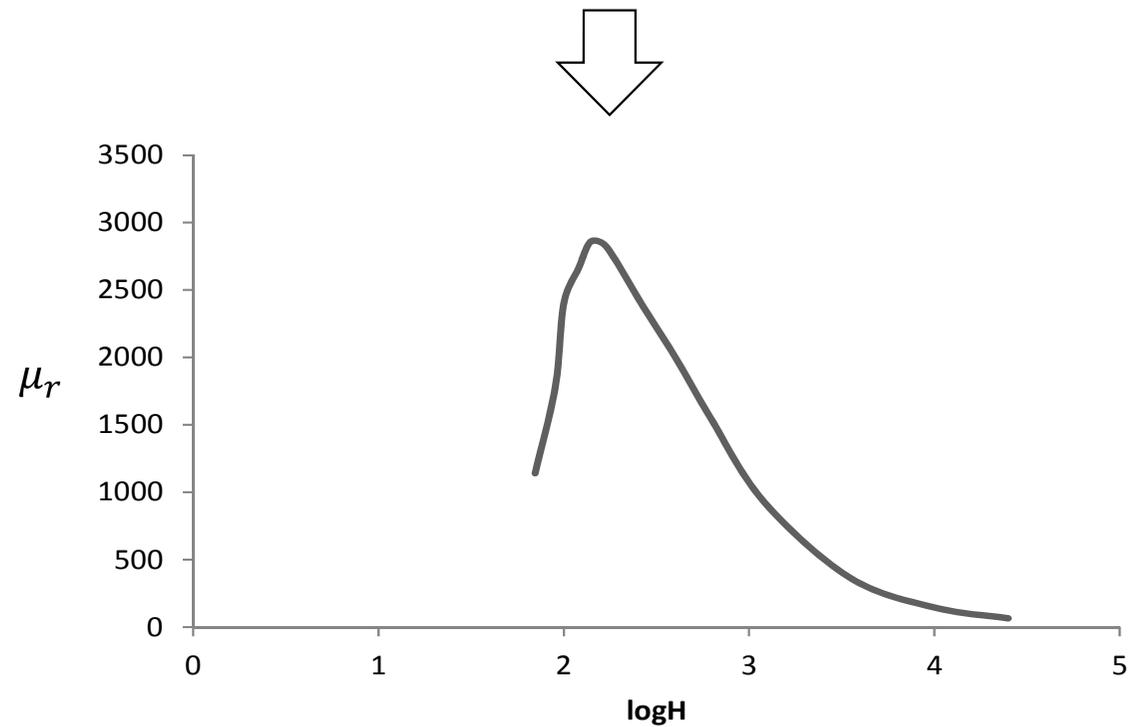
## CURVA NORMALE DI MAGNETIZZAZIONE



# Es: ACCIAIO FUSO

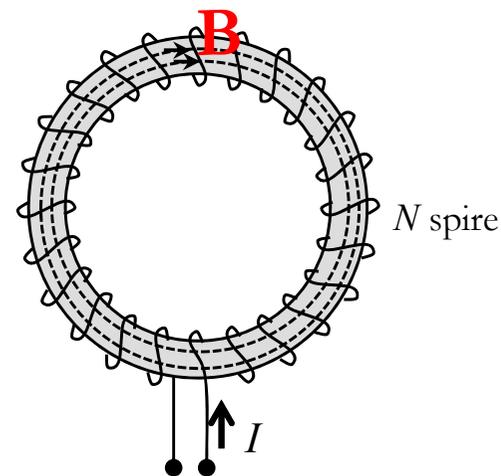
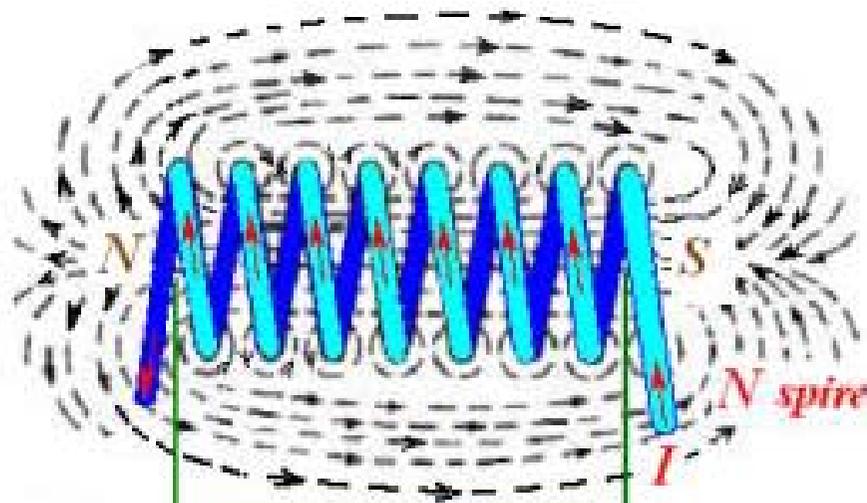
<b>B [Wb / m<sup>2</sup>]</b>	<b>H [A / m ]</b>	<b><math>\mu_r</math></b>
<b>0,10</b>	<b>70</b>	<b>1140</b>
<b>0,20</b>	<b>90</b>	<b>1780</b>
<b>0,30</b>	<b>100</b>	<b>2400</b>
<b>0,40</b>	<b>120</b>	<b>2660</b>
<b>0,50</b>	<b>140</b>	<b>2860</b>
<b>0,60</b>	<b>170</b>	<b>2820</b>
<b>0,80</b>	<b>270</b>	<b>2370</b>
<b>1,00</b>	<b>400</b>	<b>2000</b>
<b>1,20</b>	<b>620</b>	<b>1550</b>
<b>1,40</b>	<b>1200</b>	<b>930</b>
<b>1,60</b>	<b>3500</b>	<b>365</b>
<b>1,80</b>	<b>10 000</b>	<b>144</b>
<b>2,00</b>	<b>25 000</b>	<b>64</b>

Curva di permeabilità magnetica relativa in funzione del campo H per l'acciaio fuso



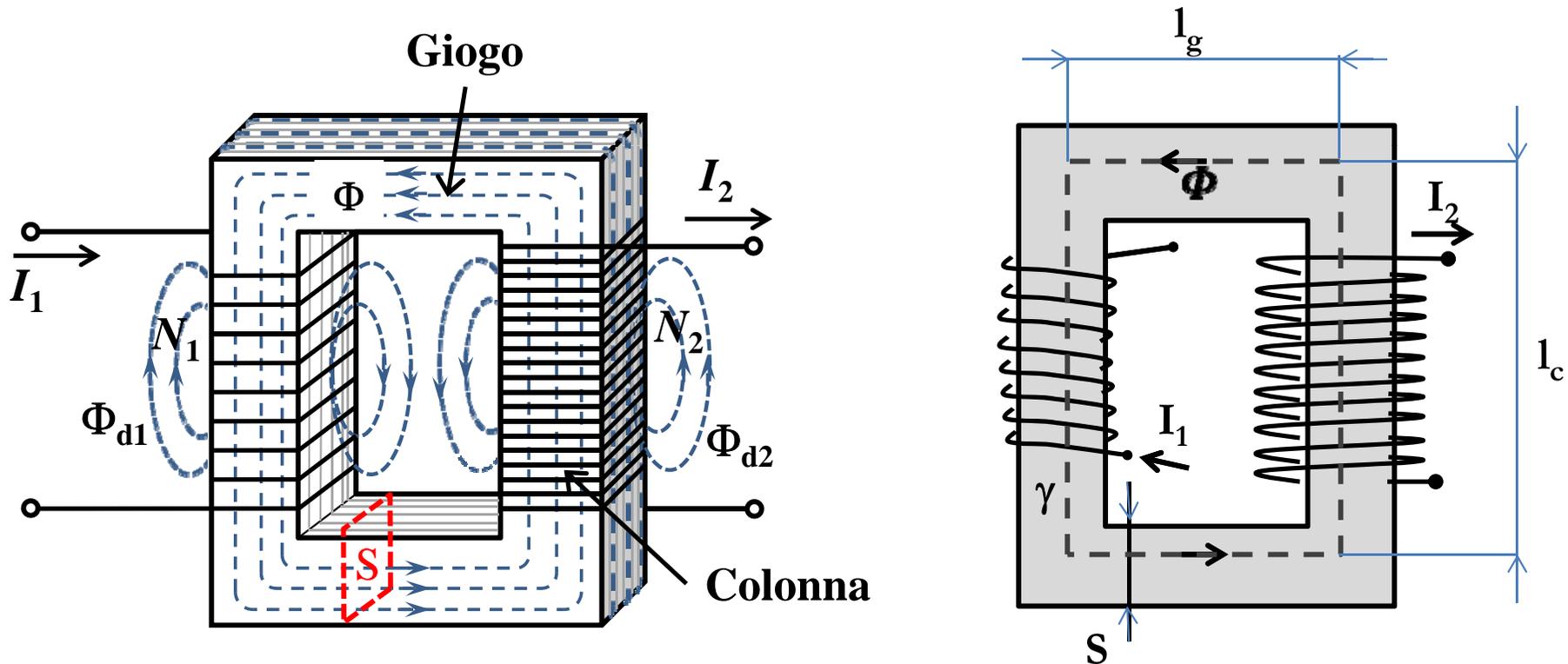
# CIRCUITI MAGNETICI

- Un bipolo induttivo e' un componente con 2 morsetti che non dà luogo a dissipazione di energia ed è idoneo ad immagazzinare energia sotto forma di energia magnetica nel suo interno e nel mezzo circostante
- Attraversato da corrente, genera linee magnetiche chiuse che costituiscono il flusso magnetico
- Lo spazio entro cui si chiudono le linee magnetiche rappresenta il **circuito magnetico**



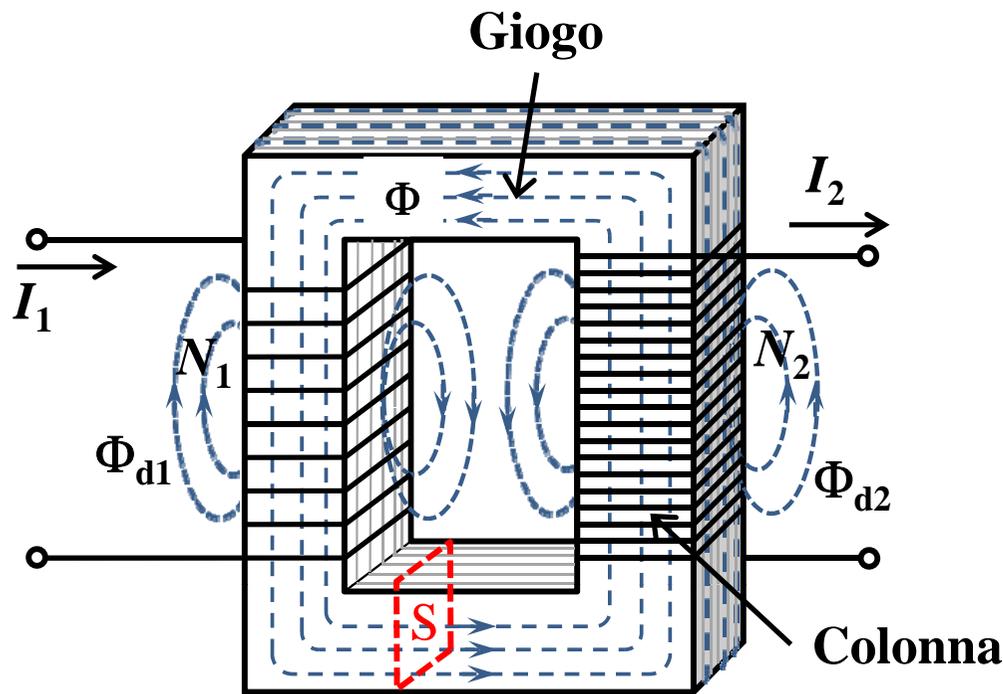
# CIRCUITI MAGNETICI

- Il flusso magnetico è quindi prevalentemente, ma non totalmente, confinato all'interno del nucleo.
- Un circuito magnetico in senso lato è tutto lo spazio entro il quale si svolgono le linee del campo magnetico prodotte dalle correnti che scorrono in un sistema di conduttori



# CIRCUITO MAGNETICO INERTE

- E' COSTITUITO DA MATERIALI MAGNETICI DOLCI



Se  $\mu_r \gg 1$  si può immaginare che i flussi siano canalizzati nel nucleo ferromagnetico. E' un'ipotesi semplificativa.

Per ogni tubo di flusso:

$$U_m = R_m \Phi \rightarrow \Phi = P_m U_m$$

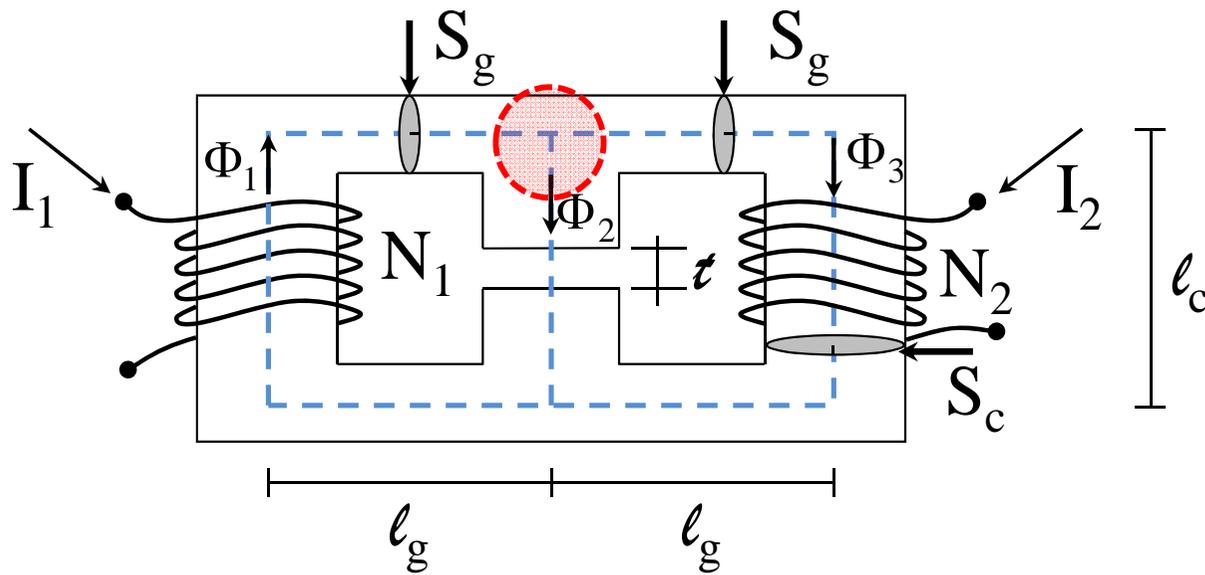
$$R_m = \frac{1}{\mu_{fe}} \frac{l}{S} [H^{-1}]$$

La riluttanza del nucleo sarà la somma delle riluttanze dei singoli tronchi di tubo di flusso

$$R_m = 2R_{mg} + 2R_{mc} = \frac{1}{\mu_{fe}} \frac{2l_g + 2l_c}{S} [H^{-1}]$$

$$\oint H \cdot dl = \sum U_m = \sum R_m \Phi = N_1 I_1 + N_2 I_2 \rightarrow N_1 I_1 + N_2 I_2 = (2R_{mg} + 2R_{mc}) \Phi = R_m \Phi$$

# CIRCUITO MAGNETICO INERTE



Per ogni superficie chiusa:

$$\Sigma \Phi = 0$$

(Legge di Gauss)

Per ogni percorso chiuso:

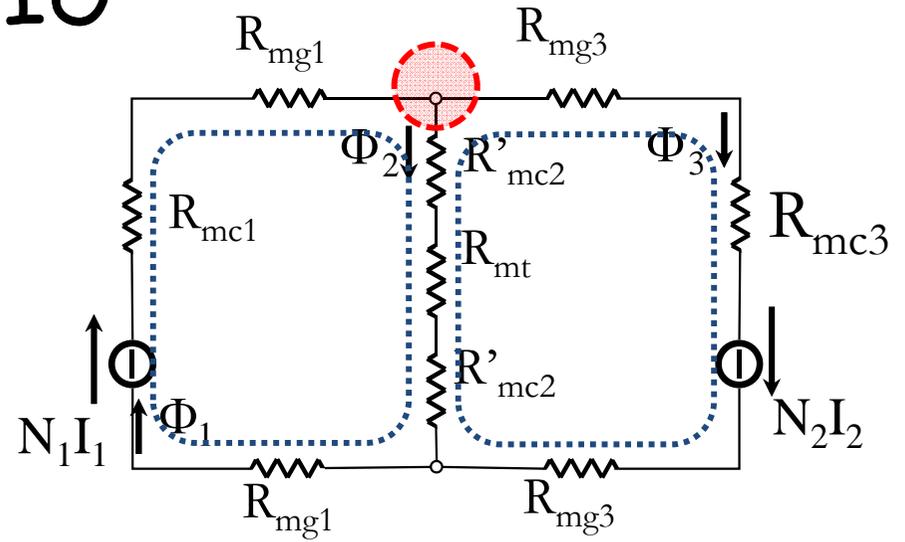
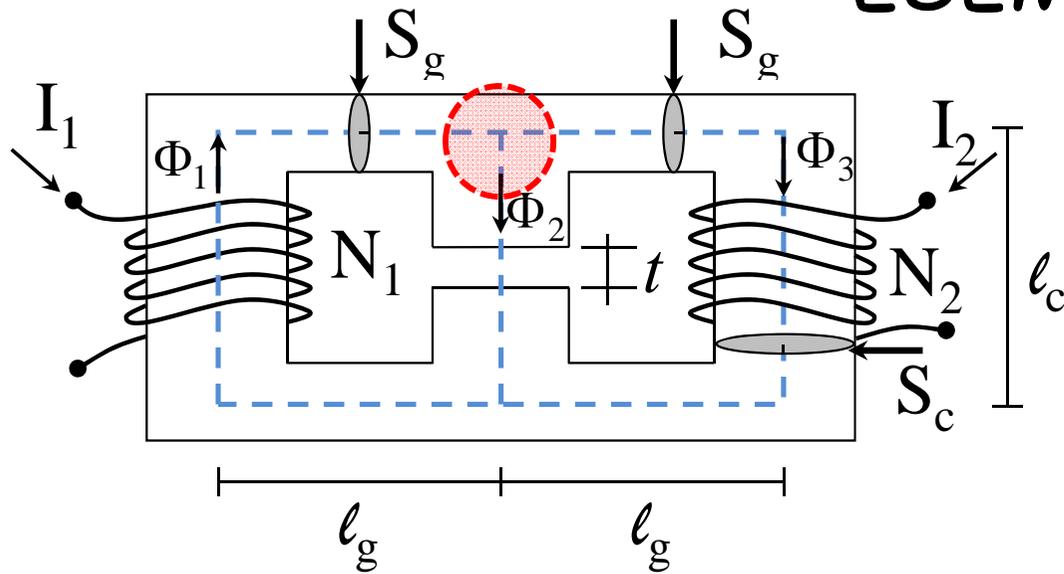
$$\Sigma U_m = \Sigma R_m \Phi = \Sigma I$$

- SI RICONOSCE UN'ANALOGIA TRA CIRCUITI ELETTRICI E CIRCUITI MAGNETICI
- LE DIFFERENZE SOSTANZIALI SONO:
  - In un circuito magnetico con f.m.m. concentrata il flusso varia da sezione a sezione
  - Non esistono buoni isolanti magnetici

# Analogia tra circuiti elettrici e circuiti magnetici

Circuiti Elettrici		Circuiti magnetici	
Forza elettromotrice	$E$ [V]	Forza magnetomotrice	$NI$ [Aspire]
Tensione elettrica	$V$ [V]	Tensione magnetica	$U_m$ [Aspire]
Corrente	$I$ [A]	Flusso	$\Phi$ [Wb]
Resistenza	$R$ [ $\Omega$ ]	Riluttanza	$R_m$ [ $H^{-1}$ ]
Conduttanza	$G$ [S]	Permeanza	$P_m$ [H]
Legge di Ohm	$V = RI$	Legge di Hopkinson	$U_m = R_m \Phi$
Legge di Kirhhoff alle correnti	$\Sigma I = 0$	Legge di Gauss	$\Sigma \Phi = 0$
Legge di Kirhhoff alle tensioni	$\Sigma E = \Sigma RI$	Legge di Ampere	$\Sigma NI = \Sigma R_m \Phi$

# ESEMPIO



$$\mathcal{R}_{mc1} = \frac{1}{\mu_{c1}} \cdot \frac{l_c}{S_c}; \mathcal{R}_{mc3} = \frac{1}{\mu_{c3}} \cdot \frac{l_c}{S_c}; \mathcal{R}'_{mc2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_{c2}} \cdot \frac{l_c - t}{S_c};$$

$$\mathcal{R}_{mg1} = \frac{1}{\mu_{g1}} \cdot \frac{l_g}{S_g}; \mathcal{R}_{mg3} = \frac{1}{\mu_{g3}} \cdot \frac{l_g}{S_g}; \mathcal{R}_{mt} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{t}{S_t}$$

$$\begin{cases} \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0 \\ (\mathcal{R}_{mc1} + 2\mathcal{R}_{mg1}) \cdot \Phi_1 + (2\mathcal{R}'_{mc2} + \mathcal{R}_{mt}) \cdot \Phi_2 = N_1 I_1 \\ (\mathcal{R}_{mc3} + 2\mathcal{R}_{mg3}) \cdot \Phi_3 - (2\mathcal{R}'_{mc2} + \mathcal{R}_{mt}) \cdot \Phi_2 = N_2 I_2 \end{cases}$$

E' un sistema non lineare

# PROBLEMI

- **PROBLEMA DIRETTO:** Trovare le amperspire necessarie a generare un assegnato flusso nei diversi tratti (es: al traferro)
- **PROBLEMA INVERSO:** Trovare il flusso nei diversi tratti (es: al traferro) note le amperspire di eccitazione

ELETTROMAGNETI: RELE', IMPIANTI DI SOLLEVAMENTO  
ROTTAMI, ...  
Sono dispositivi con funzioni sia di  
protezione che di manovra

CIRCUITI PER MAGNETI PERMANENTI

CIRCUITI MAGNETICI PER MACCHINE ELETTRICHE:  
Trasformatore, Macchine Asincrone, ...

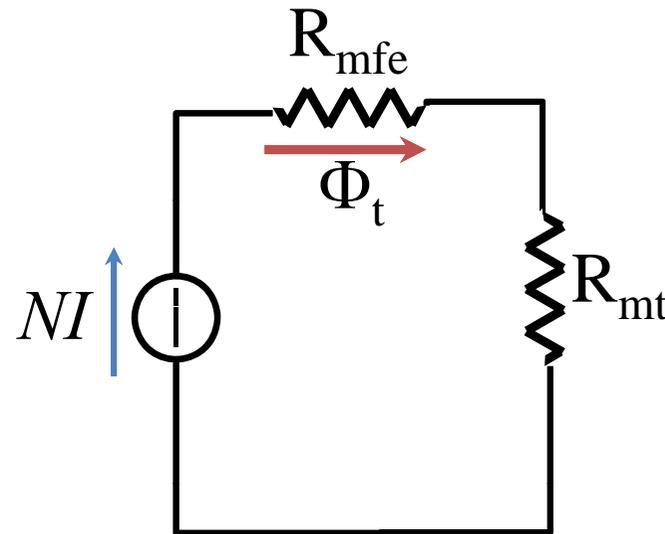
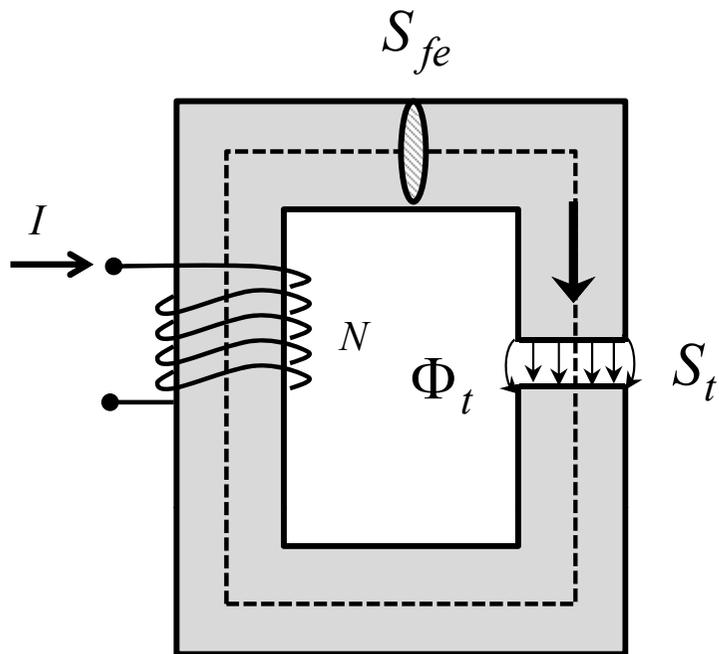
# IPOSTESI SUI CIRCUITI MAGNETICI

- Si trascurano gli effetti di bordo
- La lunghezza di ciascun tratto si considera coincidente con la linea media
- Il nucleo di materiale ferromagnetico viene considerato un tubo di flusso
- L'induzione viene considerata costante tratto per tratto

# PROBLEMA DIRETTO:

noto il flusso ricavare le amperspire

Esempio: L'ELETTROMAGNETE



$$NI = \Phi_t (\mathcal{R}_{mfe} + \mathcal{R}_{mt})$$

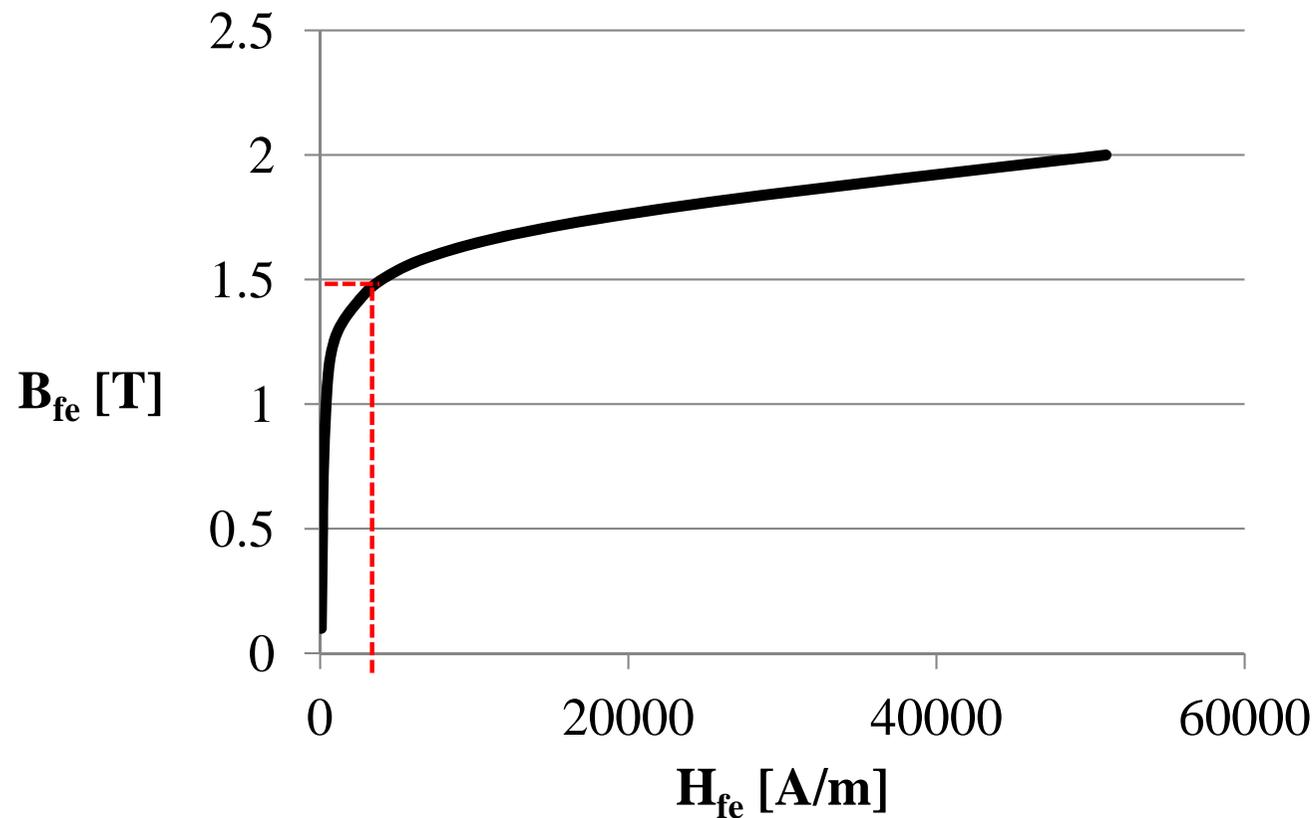
Nota  $\Phi_t \rightarrow B_t = \frac{\Phi_t}{S_t} \rightarrow H_t = \frac{B_t}{\mu_0}$

Hp: il flusso è lo stesso  
in tutte le sezione trasversali

$$B_{fe} = \frac{\Phi_t}{S_{fe}} \rightarrow \text{Si legge } \mu \rightarrow$$

**PROBLEMA DIRETTO:**  
noto il flusso ricavare le amperspire

Caratteristica normale di magnetizzazione delle lamiere al silicio:

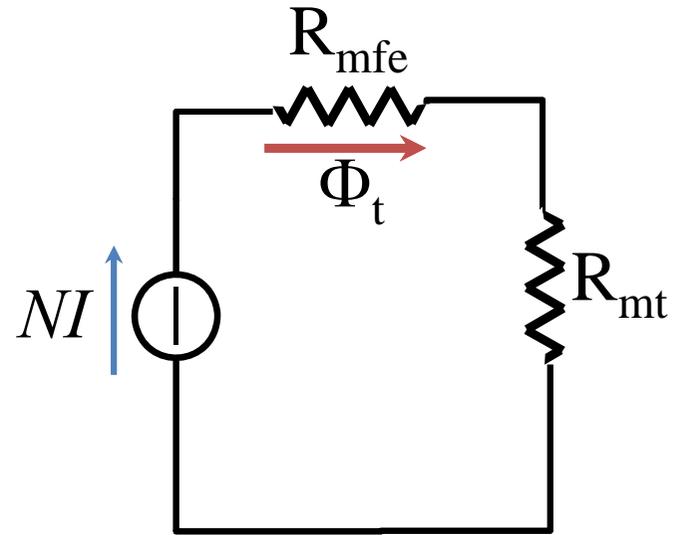
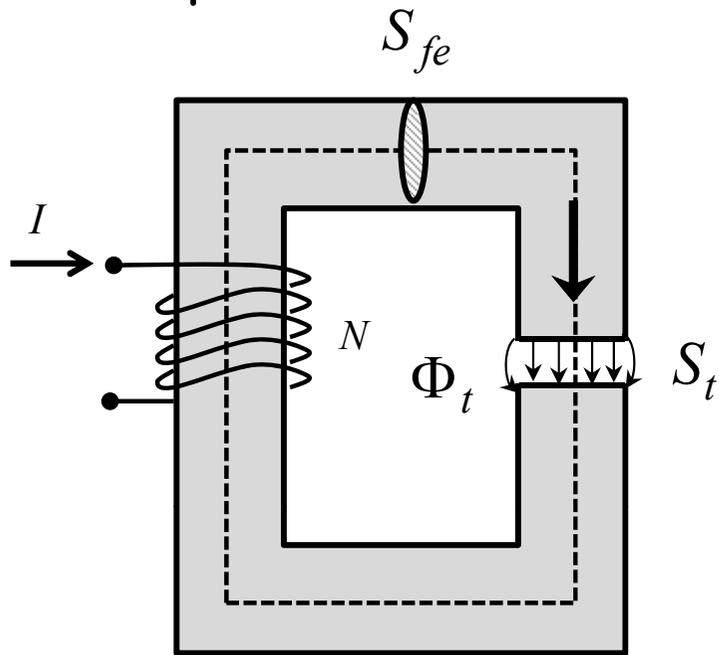


$$\mu_{fe} = \frac{B_{fe}}{H_{fe}} \rightarrow \mathcal{R}_{m fe}$$

# PROBLEMA *INVERSO*:

note le amperspire ricavare il flusso

Esempio: L'ELETTROMAGNETE



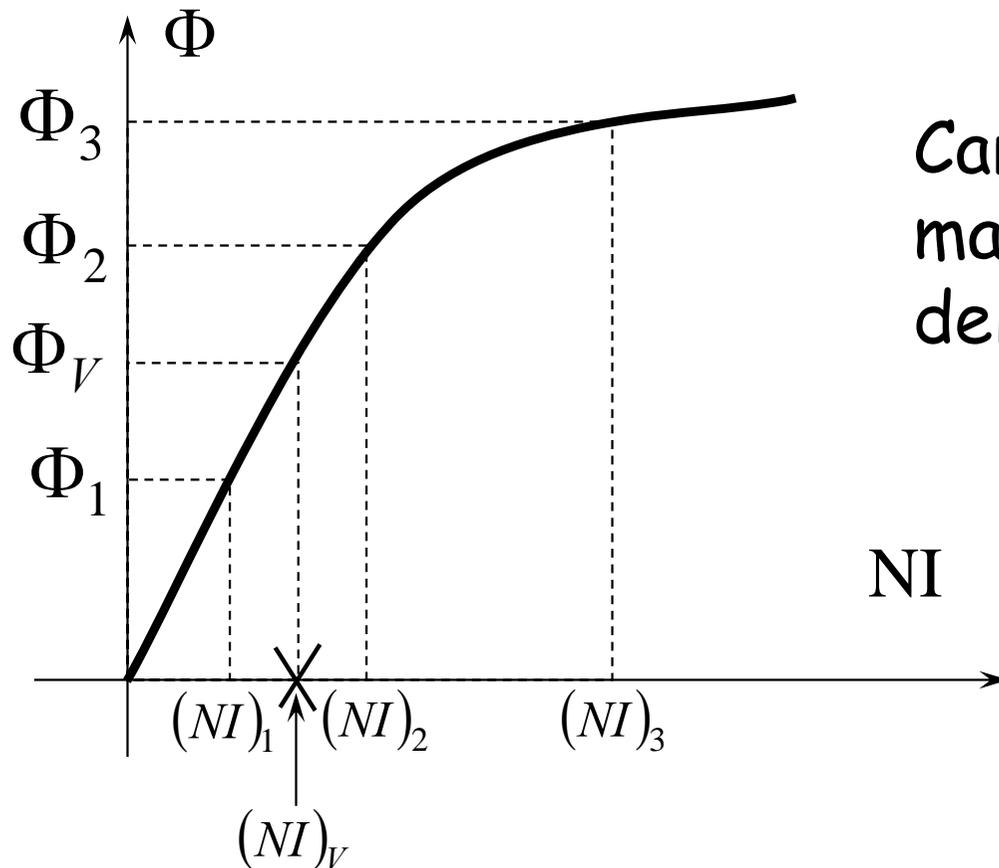
$$NI = \Phi_t (R_{mfe} + R_{mt})$$

## PROBLEMA *INVERSO*:

note le amperspire ricavare il flusso

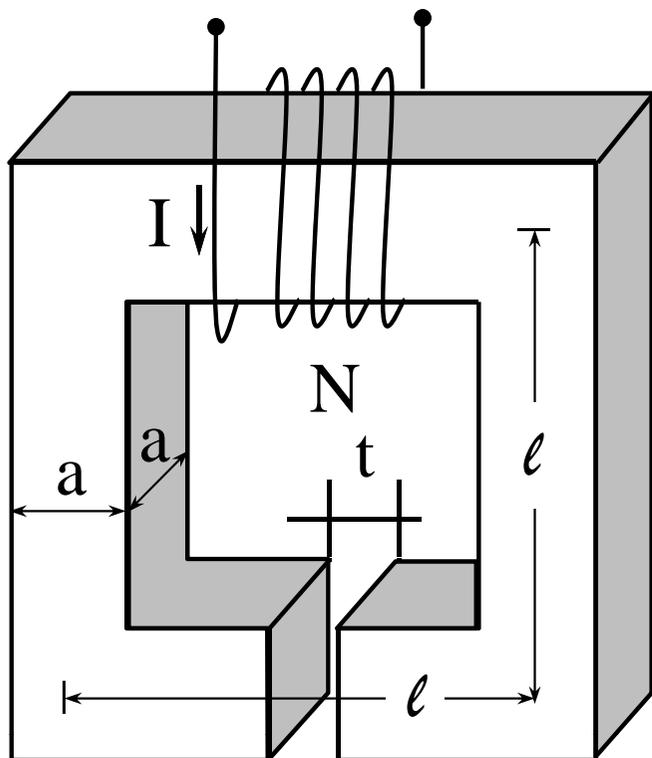
Esempio: L'ELETTROMAGNETE

GRAFICAMENTE:



Caratteristica di magnetizzazione totale del circuito

# ESEMPIO



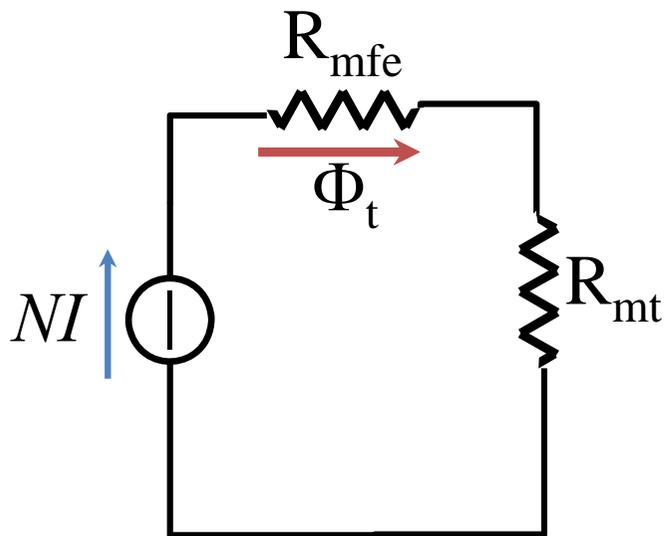
Calcolare il coefficiente di autoinduzione della bobina di  $N = 1000$  spire

$H_p$ : non ci sono flussi dispersi

<b>B</b>	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	<b>Wb/m<sup>2</sup></b>
<b>H</b>	180	250	400	700	2300	7500	<b>As/m</b>

Tabella di magnetizzazione del ferro al silicio

$t = 3 \text{ mm}$   
 $a = 20 \text{ mm}$   
 $l = 50 \text{ mm}$   
 $I = 2 \text{ A}$

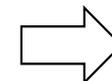


$$l_f = 4l = 200 \text{ mm} = 0,2 \text{ m}$$

$$S = a \cdot a = 400 \text{ mm}^2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

$$NI = 2000 \text{ As}$$



$$NI = H_{fe} \cdot l_{fe} + \frac{B_{fe}}{\mu_0} t = 0,2H_f + 2387,32 \cdot B_{fe}$$

$B_{fe}$	$H_{fe}$	$(NI)_t$
0,6	180	1468,39
0,8	250	1959,86
1,0	400	2467,32
1,2	700	3004,78
1,4	2300	3802,25
1,6	7500	5319,71

Interpolando:

$$B = \frac{2000 - 1959,86}{2467,32 - 1959,86} \cdot 0,2 + 0,8 = 0,8158$$

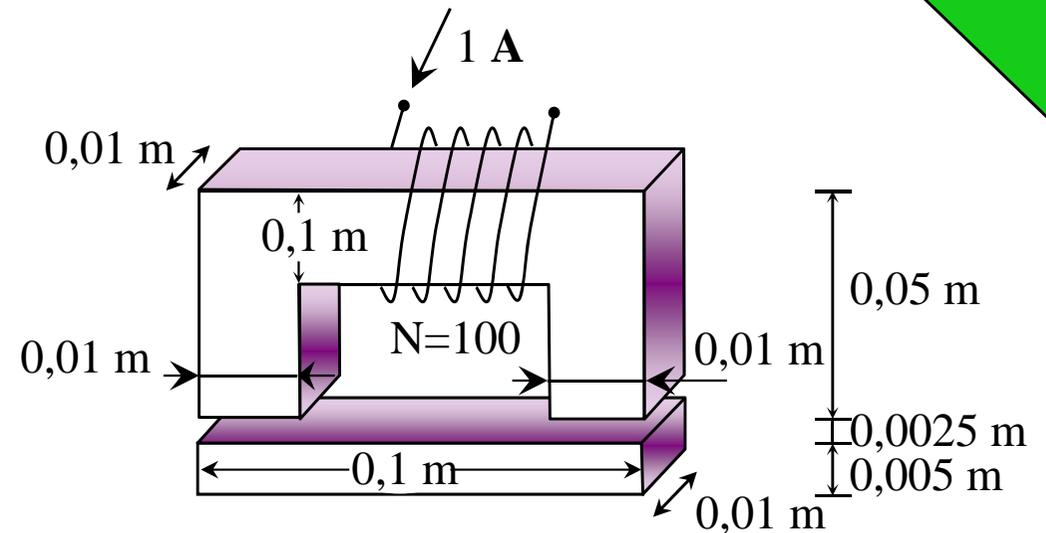
$$\Phi = B \cdot S = 3,2633 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$L = \frac{N\Phi}{I} = 0,163 \text{ H} = 163 \text{ mH}$$

# ESEMPIO

Calcolare il flusso magnetico nella barretta sul fondo della struttura nell'ipotesi che il flusso sia confinato nel nucleo magnetico e che lo stesso lavori nel tratto lineare della caratteristica di magnetizzazione e abbia

$$\mu_r = 10000$$



- Lunghezza media della U:  $l_U = (0,045 \times 2) + 0,09 = 0,18 \text{ m}$
- Lunghezza dei traferri:  $l_{\text{traf}} = 0,005 \text{ m}$
- Lunghezza della barretta:  $l_{\text{barr}} = 0,09 \text{ m}$
- Sezioni trasversali: Ferro:  $S_f = (0,01) \times (0,01) = 0,0001 \text{ m}^2$  Traferro:  $S_{\text{traf}} = 0,001 \times 10^3 \text{ m}^2$

(Per i traferri, per tenere conto degli effetti di bordo, avremmo potuto aumentare la sezione di qualche percento).

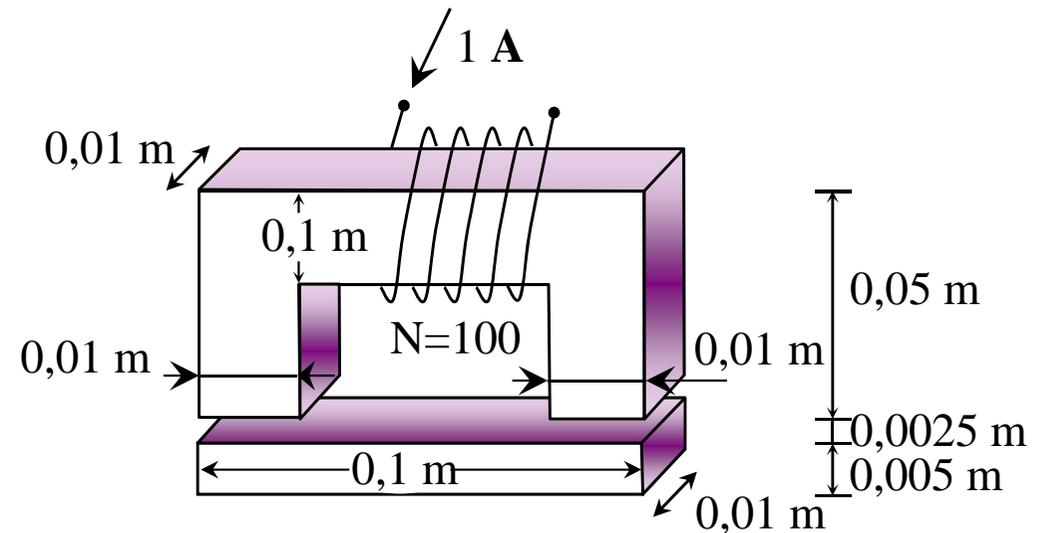
$$\mathcal{R}_U = \frac{l_U}{\mu_r \mu_0 S_f} = \frac{0,18}{10000 \times 4\pi \cdot 10^{-7} \times 0,0001} = 1,43 \cdot 10^5 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{Wb}}$$

$$\mathcal{R}_{\text{bar}} = \frac{l_{\text{bar}}}{\mu_r \mu_0 S_f} = \frac{0,09}{10000 \times 4\pi \cdot 10^{-7} \times 0,01 \times 0,005} = 1,43 \cdot 10^5 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{Wb}}$$

# ESEMPIO

Calcolare il flusso magnetico nella barretta sul fondo della struttura nell'ipotesi che il flusso sia confinato nel nucleo magnetico e che lo stesso lavori nel tratto lineare della caratteristica di magnetizzazione e abbia

$$\mu_r = 10000$$



$$\mathcal{R}_{traf} = \frac{l_{traf}}{\mu_o S_{traf}} = \frac{2 \times 0,0025}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 0,001} = 3,98 \cdot 10^7 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{Wb}}$$

$$\mathcal{R}_{tot} = \mathcal{R}_U + \mathcal{R}_{bar} + \mathcal{R}_{traf} \cong \mathcal{R}_{traf} = 3,98 \cdot 10^7 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{Wb}}$$

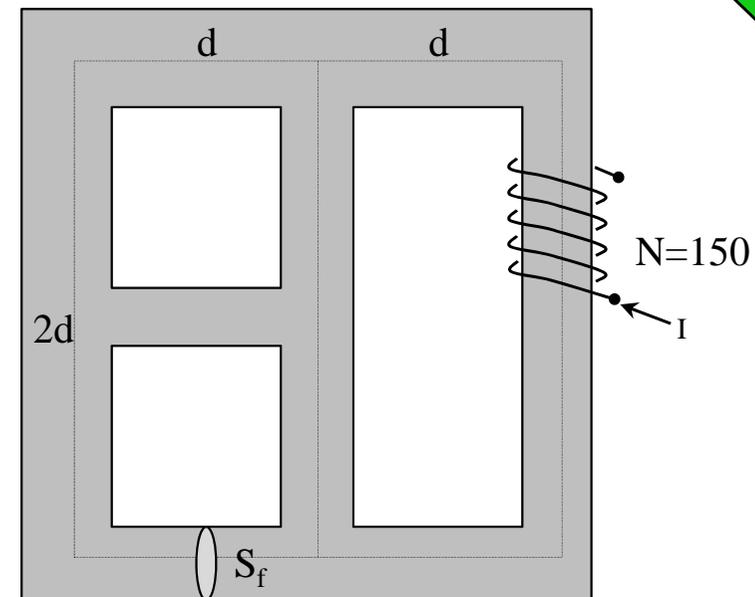
$$\Phi = \frac{NI}{\mathcal{R}_{tot}} = \frac{100 \text{A} \cdot \text{s}}{3,98 \cdot 10^7 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{Wb}}} = 2,51 \cdot 10^{-6} \text{Wb}$$

$$B = \frac{\Phi}{S_{traf}} = \frac{2,51 \cdot 10^{-6}}{0,01 \times 0,01} = 2,52 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$$

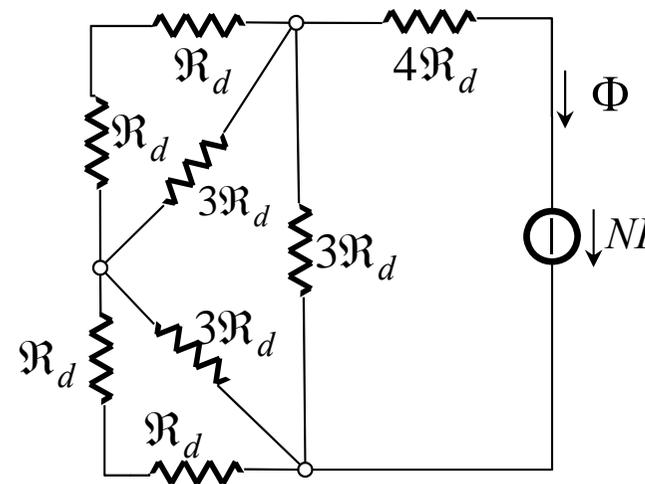
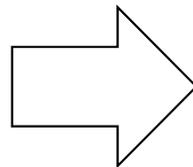
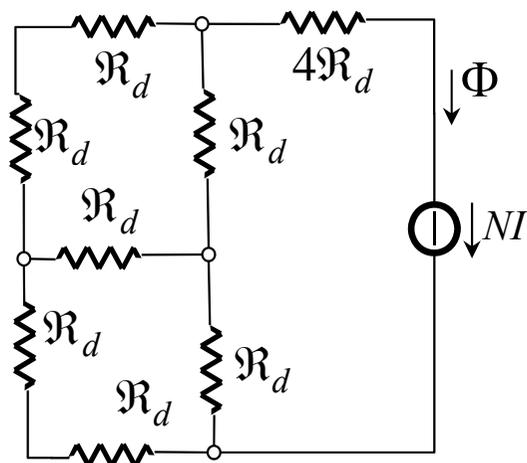
# ESEMPIO

Il ferro sta lavorando in regione lineare della caratteristica di magnetizzazione. Determinare il coefficiente di autoinduzione dell'avvolgimento di  $N$  spire sapendo che:

$$d = 50\text{cm}; \quad S_{fe} = 200\text{cm}^2; \quad \mu_{rfe} = 1000$$



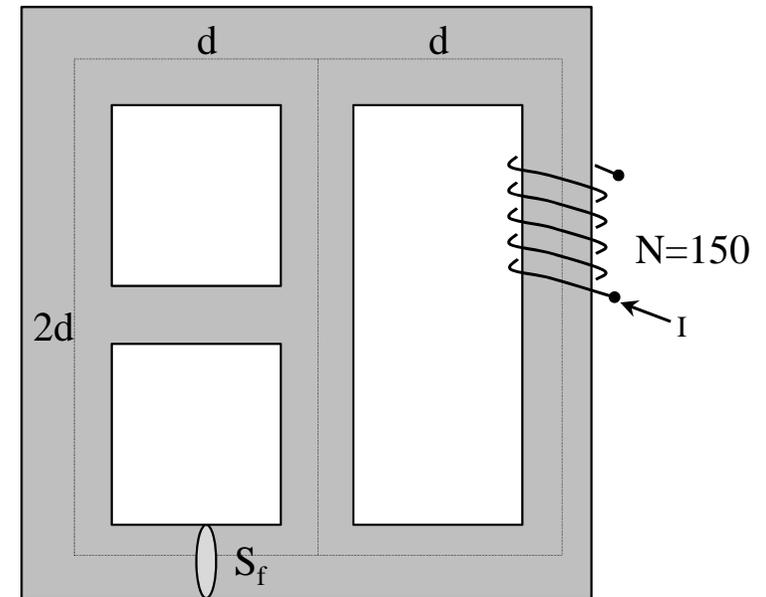
$$\mathcal{R}_d = \frac{d}{\mu_0 \mu_{rfe} S_{fe}} = \frac{0,5}{1000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 198,94 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$$



# ESEMPIO

Il ferro sta lavorando in regione lineare della caratteristica di magnetizzazione. Determinare il coefficiente di autoinduzione dell'avvolgimento di  $N$  spire sapendo che:

$$d = 50\text{cm}; \quad S_{fe} = 200\text{cm}^2; \quad \mu_{rfe} = 1000$$



$$\mathfrak{R}_{d_{eq}} = \{2 \cdot (2\mathfrak{R}_d // 3\mathfrak{R}_d)\} // 3\mathfrak{R}_d + 4\mathfrak{R}_d = 2 \frac{6\mathfrak{R}_d^2}{5\mathfrak{R}_d} // 3\mathfrak{R}_d + 4\mathfrak{R}_d =$$

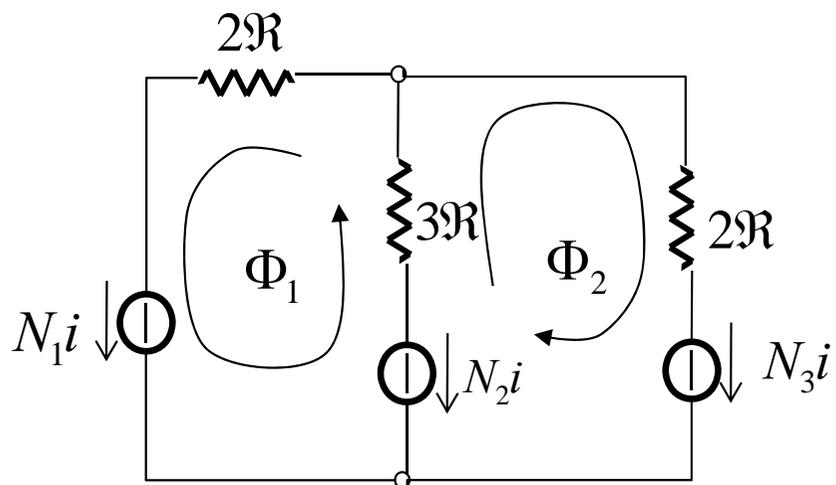
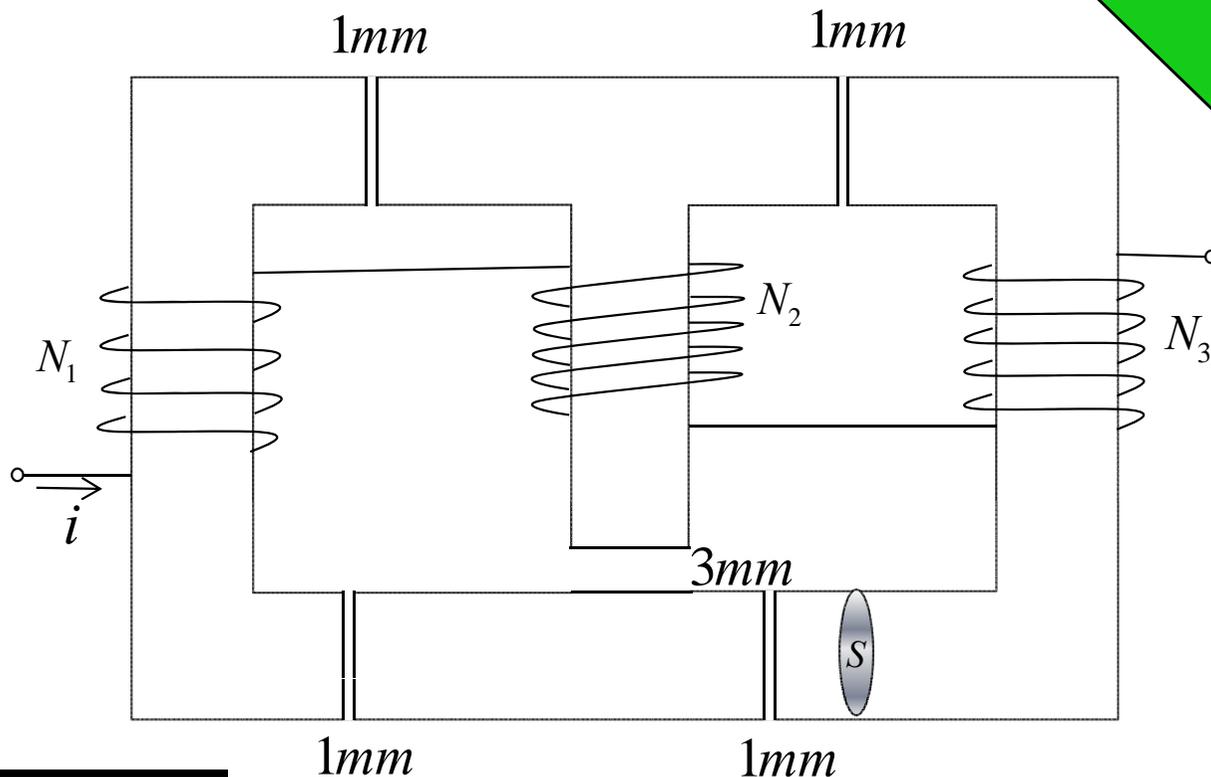
$$= \frac{\frac{36}{5} \mathfrak{R}_d^2}{\frac{12}{5} \mathfrak{R}_d + 3\mathfrak{R}_d} + 4\mathfrak{R}_d = \frac{36}{27} \mathfrak{R}_d + 4\mathfrak{R}_d = \frac{16}{3} \mathfrak{R}_d$$

$$\Phi = \frac{NI}{\mathfrak{R}_{d_{eq}}} = \frac{3}{16} \frac{NI}{\mathfrak{R}_d} \quad \Phi_c = \frac{3}{16} \frac{N^2 I}{\mathfrak{R}_d} \Rightarrow L = \frac{\Phi_c}{I} = \frac{3}{16} \frac{N^2}{\mathfrak{R}_d} = \frac{3}{16} \frac{150^2}{198,94 \cdot 10^3} = 21,21 \text{ mH}$$

# ESEMPIO

Trascurando le riluttanze dei tratti in ferro, determinare il coefficiente di autoinduzione dell'avvolgimento.

La sezione trasversale  $S$  del circuito magnetico è  $16 \text{ cm}^2$ ,  $N_1=N_3=30$ ,  $N_2=10$ .

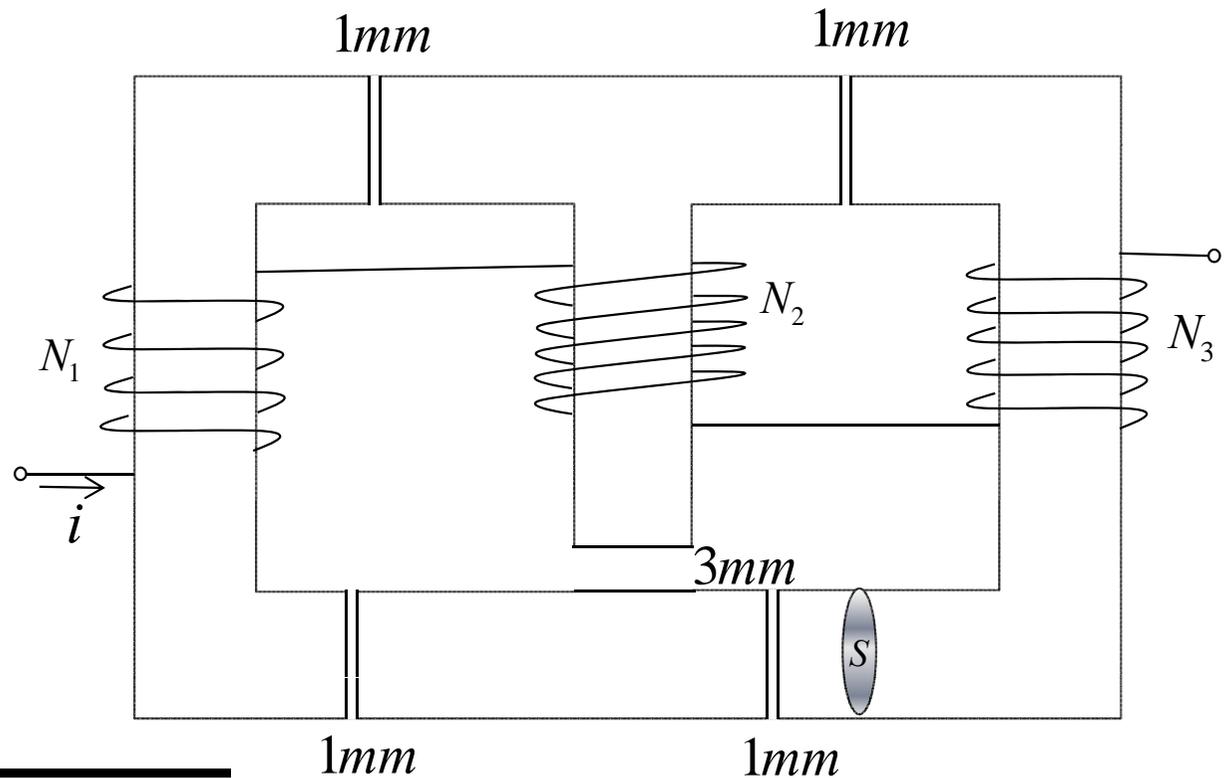


$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{t}{S} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-3}}{16 \cdot 10^{-4}} = 4.97 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

# ESEMPIO

Trascurando le riluttanze dei tratti in ferro, determinare il coefficiente di autoinduzione dell'avvolgimento.

La sezione trasversale  $S$  del circuito magnetico è  $16 \text{ cm}^2$ ,  $N_1=N_3=30$ ,  $N_2=10$ .



$$\begin{bmatrix} 5\mathcal{R} & 3\mathcal{R} \\ 3\mathcal{R} & 5\mathcal{R} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N_1 - N_2)i \\ (N_3 - N_2)i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20i \\ 20i \end{bmatrix}$$

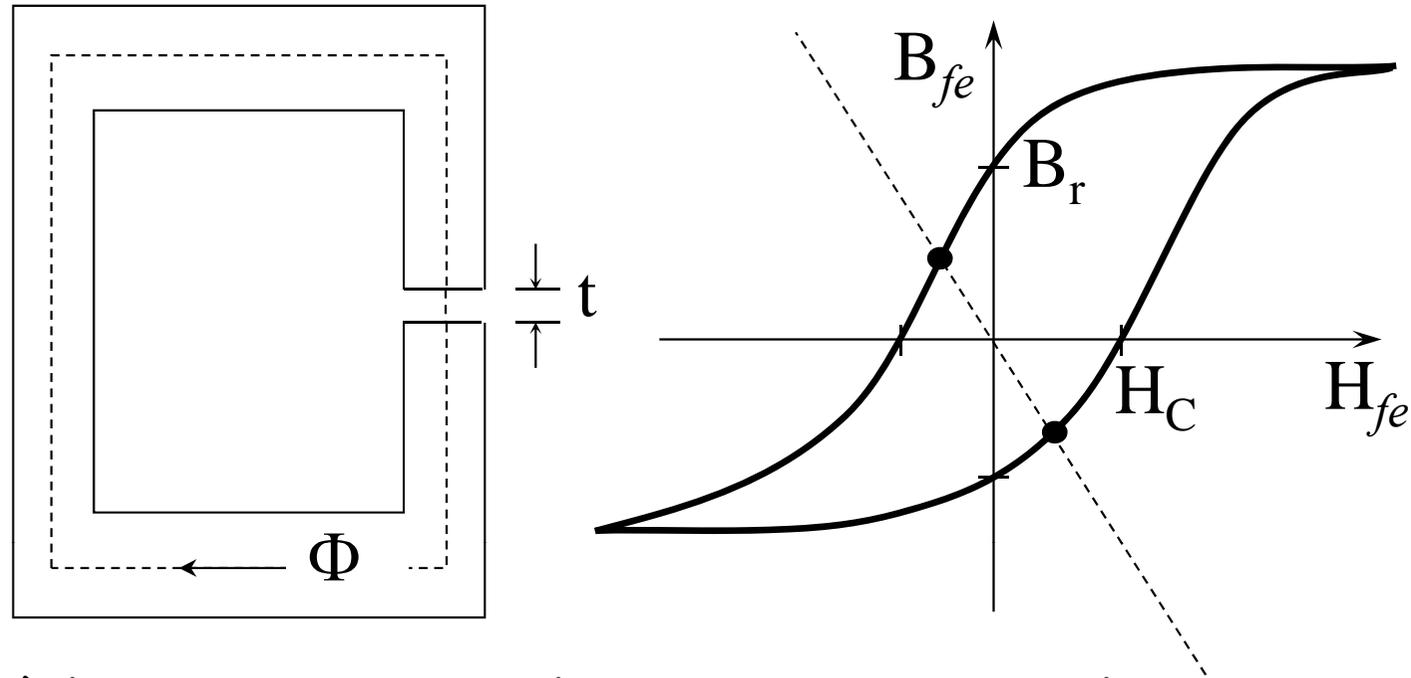
$$\Phi_1 = \frac{\begin{vmatrix} 20i & 3\mathcal{R} \\ 20i & 5\mathcal{R} \end{vmatrix}}{(25-9)\mathcal{R}^2} = \frac{100-60}{16\mathcal{R}} i = \frac{5i}{2\mathcal{R}} \quad \Phi_2 = \Phi_1$$

$$\Phi_c = N_1\Phi_1 - N_2(\Phi_1 + \Phi_2) + N_3\Phi_2 = \frac{30 \cdot 5}{2\mathcal{R}} i - 10 \frac{5i}{\mathcal{R}} + \frac{30 \cdot 5}{2\mathcal{R}} i = \frac{150-50}{\mathcal{R}} i = \frac{100}{\mathcal{R}} i$$

$$L = \frac{\Phi_c}{i} = \frac{100}{\mathcal{R}} = \frac{100}{4.97 \cdot 10^5} = 0.2 \text{ mH}$$

# CIRCUITO MAGNETICO ATTIVO

- E' COSTITUITO DA MATERIALI MAGNETICI DURI



$H_p$ : il flusso è lo stesso in tutte le sezione trasversali

$$B_{fe} \cdot S_{fe} = B_t \cdot S_t \quad \rightarrow \quad B_{fe} = B_t \frac{S_t}{S_{fe}}$$

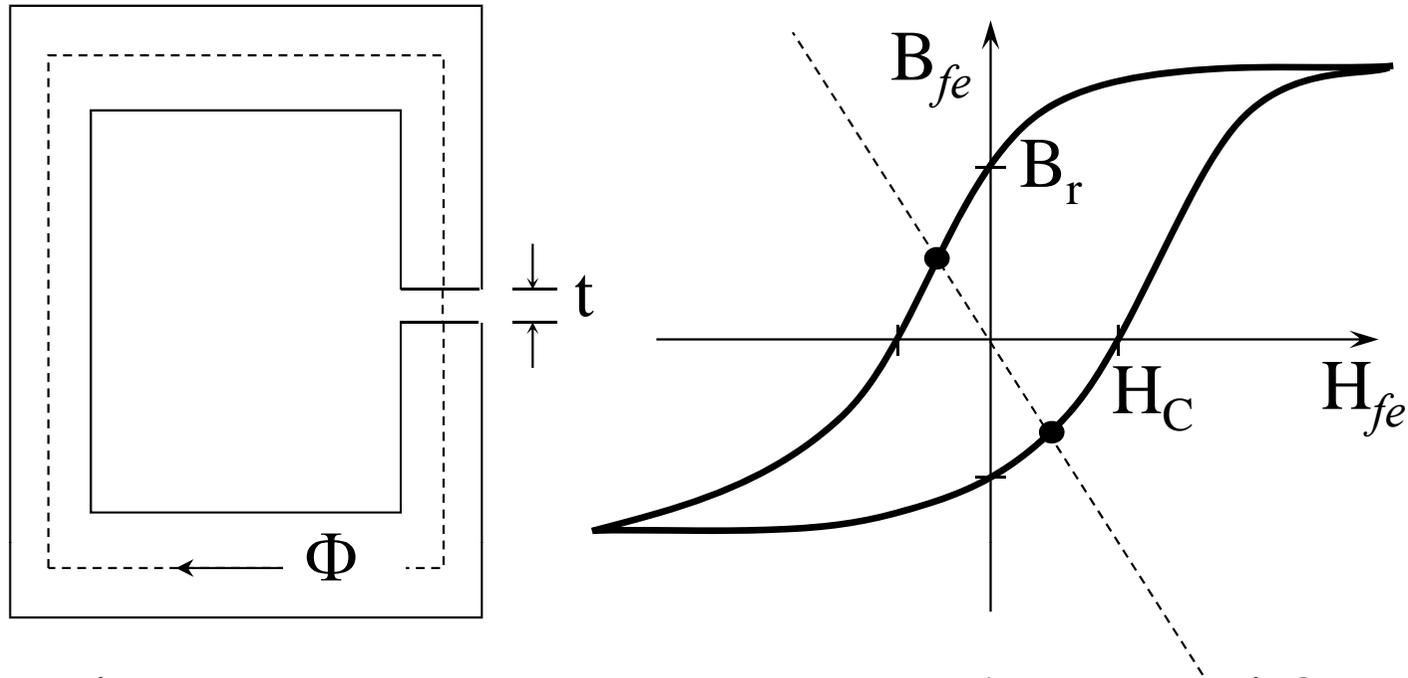
$l_{fe}$  lunghezza del tratto in ferro

$t$  lunghezza del traferro

$$H_{fe} \cdot l_{fe} + H_t \cdot t = 0 \quad \rightarrow \quad H_t = -H_{fe} \frac{l_{fe}}{t}$$

# CIRCUITO MAGNETICO ATTIVO

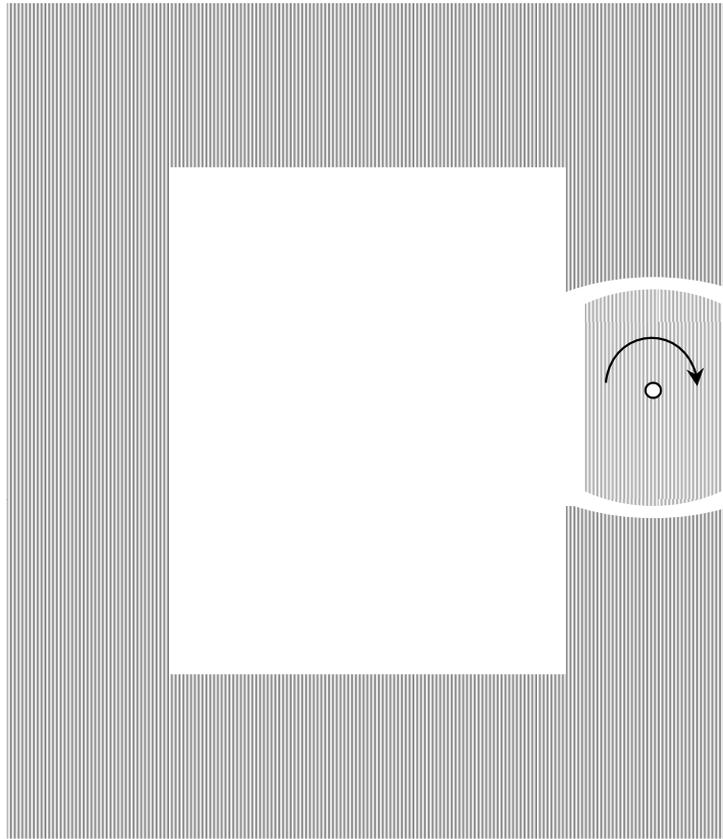
- E' COSTITUITO DA MATERIALI MAGNETICI DURI



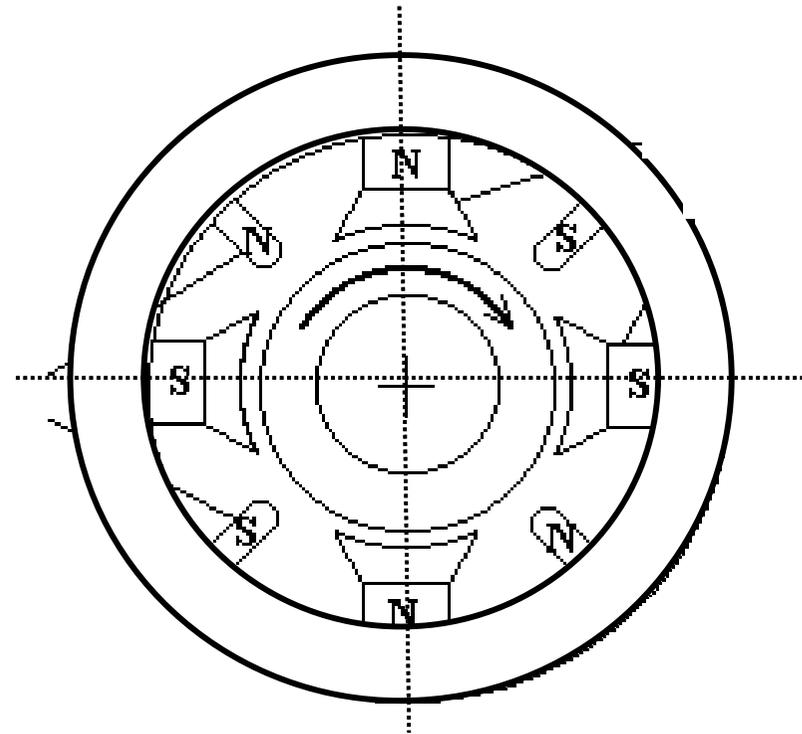
Calcoliamo le relazioni tra campo magnetico e induzione nel ferro:

$$B_{fe} = B_t \frac{S_t}{S_{fe}} = \mu_0 \frac{S_t}{S_{fe}} H_t = -\mu_0 \frac{l_{fe}}{t} \frac{S_t}{S_{fe}} H_{fe}$$

# CIRCUITO MAGNETICO ATTIVO



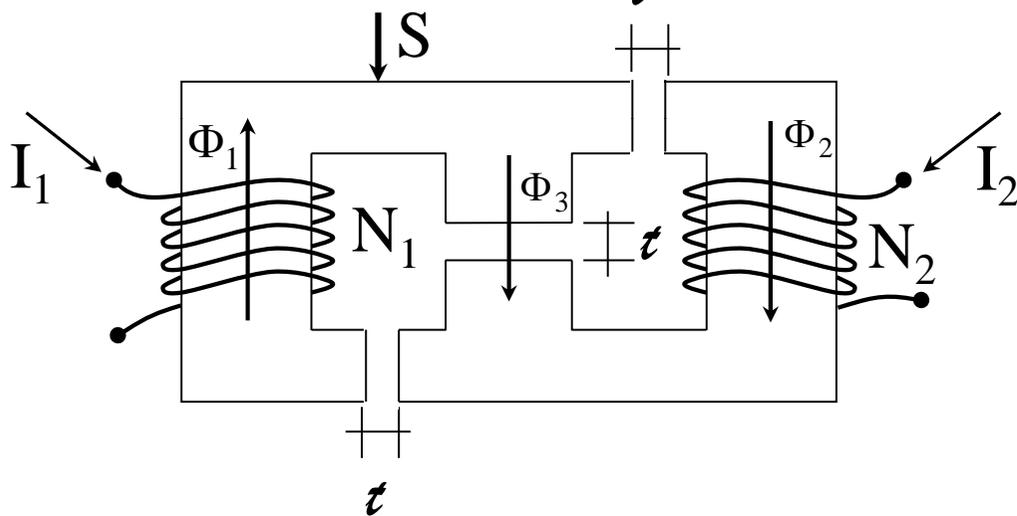
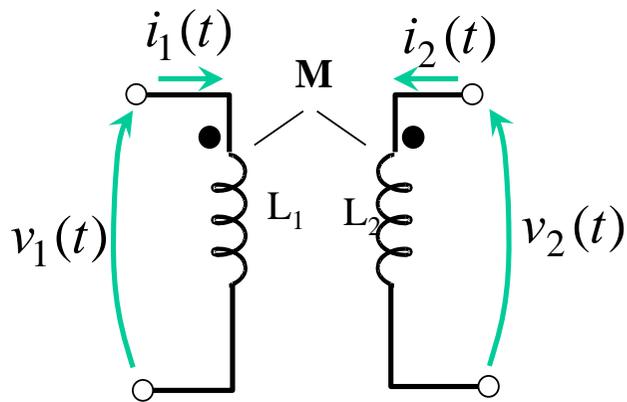
Magnete permanente a traferro variabile



Sezione di una macchina a corrente continua

# CIRCUITI MUTUAMENTE ACCOPPIATI

Simbolo circuitale della  
Mutua Induttanza

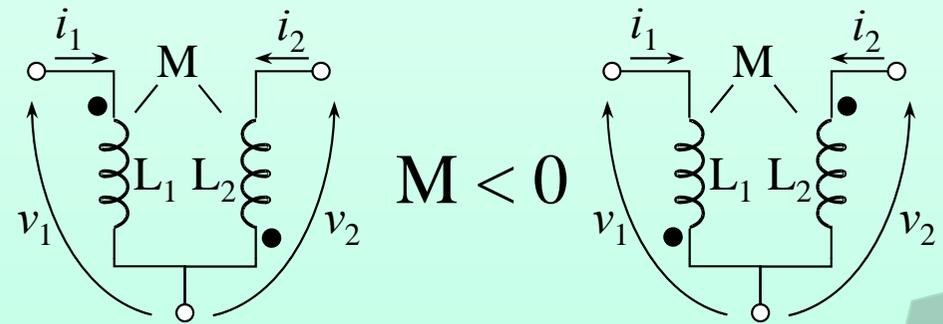
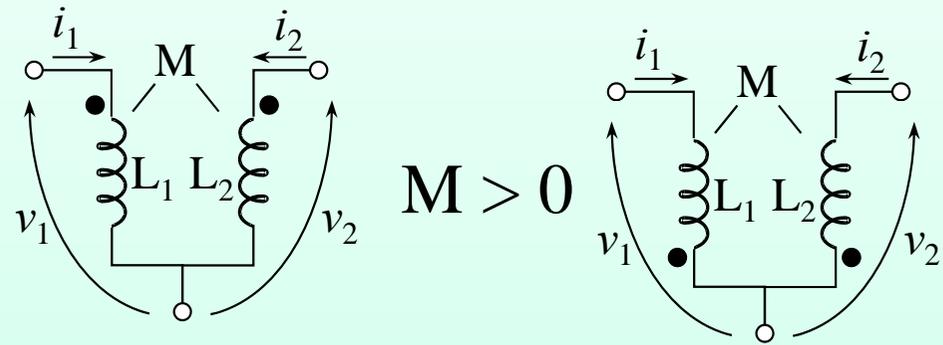


$$\begin{cases} \varphi_{C1} = L_1 \cdot i_1 + M_{12} \cdot i_2 \\ \varphi_{C2} = M_{21} \cdot i_1 + L_2 \cdot i_2 \end{cases}$$

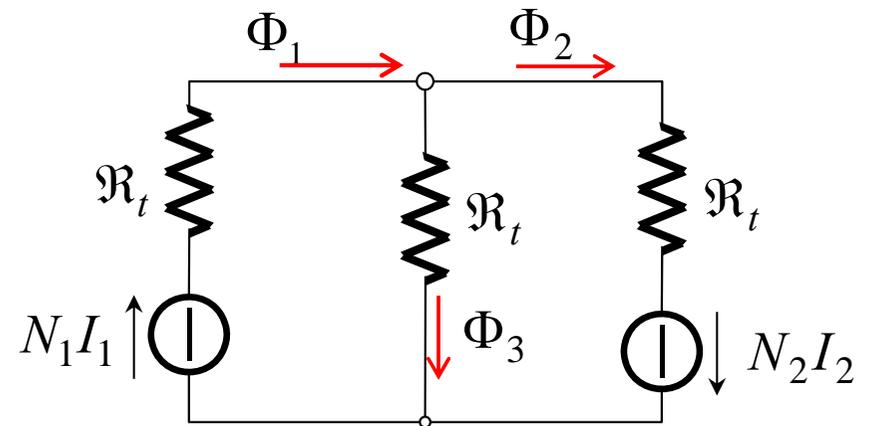
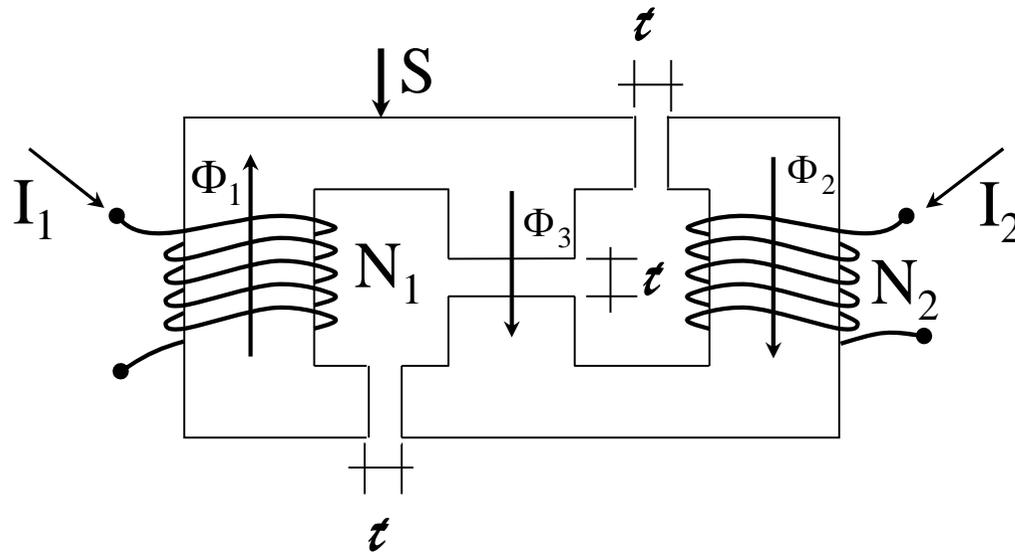
$$\xrightarrow{M_{12} = M_{21}}$$

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

Convenzione dei pallini:



# CIRCUITI MUTUAMENTE ACCOPPIATI



$$\mathfrak{R}_t = \frac{1}{\mu_0} \frac{t}{S}$$

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 \\ N_1 I_1 = \mathfrak{R}_t \Phi_1 + \mathfrak{R}_t \Phi_3 \\ N_2 I_2 = \mathfrak{R}_t \Phi_2 - \mathfrak{R}_t \Phi_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi_3 = \Phi_1 - \Phi_2 \\ N_1 I_1 = 2\mathfrak{R}_t \Phi_1 - \mathfrak{R}_t \Phi_2 \\ N_2 I_2 = -\mathfrak{R}_t \Phi_1 + 2\mathfrak{R}_t \Phi_2 \end{cases}$$

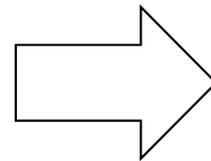
$$\Phi_1 = \frac{2}{3\mathfrak{R}_t} N_1 I_1 + \frac{1}{3\mathfrak{R}_t} N_2 I_2$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{3\mathfrak{R}_t} N_1 I_1 + \frac{2}{3\mathfrak{R}_t} N_2 I_2$$

$$\begin{cases} \Phi_{c1} = N_1 \Phi_1 & \Phi_{c1} \text{ Flusso Concatenato con l'avvolgimento Primario} \\ \Phi_{c2} = N_2 \Phi_2 & \Phi_{c2} \text{ Flusso Concatenato con l'avvolgimento Secondario} \end{cases}$$

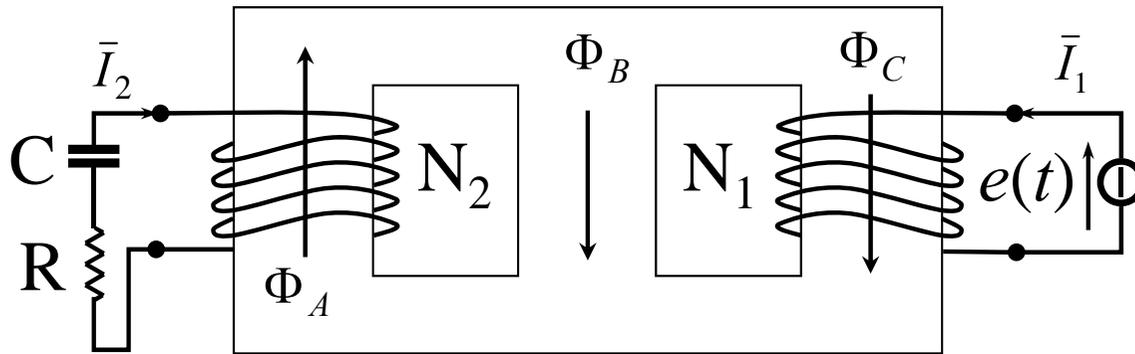
$$\Phi_{c1} = \frac{2}{3\mathfrak{R}_t} N_1^2 I_1 + \frac{1}{3\mathfrak{R}_t} N_1 N_2 I_2 \quad \Phi_{c2} = \frac{1}{3\mathfrak{R}_t} N_1 N_2 I_1 + \frac{2}{3\mathfrak{R}_t} N_2^2 I_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi_{c1} = L_1 \cdot I_1 + M \cdot I_2 \\ \Phi_{c2} = L_2 \cdot I_2 + M \cdot I_1 \end{cases}$$



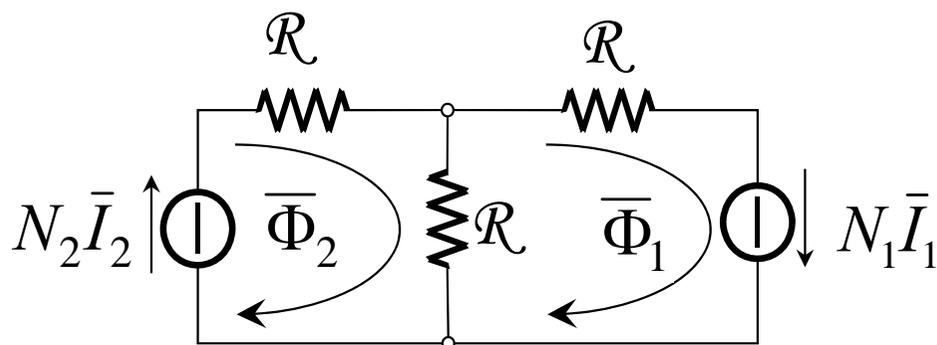
$$\begin{cases} L_1 = \frac{2N_1^2}{3\mathfrak{R}_t} \\ L_2 = \frac{2N_2^2}{3\mathfrak{R}_t} \\ M_{12} = M_{21} = \frac{N_1 N_2}{3\mathfrak{R}_t} \end{cases}$$

# ESEMPIO



$$\begin{aligned}
 N_1 &= 75 \text{ spire} \\
 N_2 &= 100 \text{ spire} \\
 \mathcal{R} &= 4 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1} \\
 R &= 50 \ \Omega \\
 C &= 150 \ \mu\text{F} \\
 E &= 10 \text{ V} \\
 f &= 50 \text{ Hz}
 \end{aligned}$$

Calcolare la potenza attiva e reattiva erogate dal generatore sinusoidale  $e(t)$ . Sia  $\mathcal{R}$  la riluttanza di ogni tronco. Hp: trascurare i flussi dispersi.



$$\begin{cases}
 N_2 \cdot I_2 = 2\mathcal{R} \cdot \Phi_2 - \mathcal{R} \cdot \Phi_1 \\
 N_1 \cdot I_1 = 2\mathcal{R} \cdot \Phi_1 - \mathcal{R} \cdot \Phi_2
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 \Phi_1 = 2\Phi_2 - \frac{N_2 \cdot I_2}{\mathcal{R}} \\
 N_1 \cdot I_1 = 2\mathcal{R} \cdot \left( 2\Phi_2 - \frac{N_2 \cdot I_2}{\mathcal{R}} \right) - \mathcal{R} \cdot \Phi_2
 \end{cases}$$

$$N_1 \cdot I_1 = -2N_2 \cdot I_2 + 4\mathcal{R} \cdot \Phi_2 - \mathcal{R} \cdot \Phi_2 = -2N_2 \cdot I_2 + 3\mathcal{R} \cdot \Phi_2$$

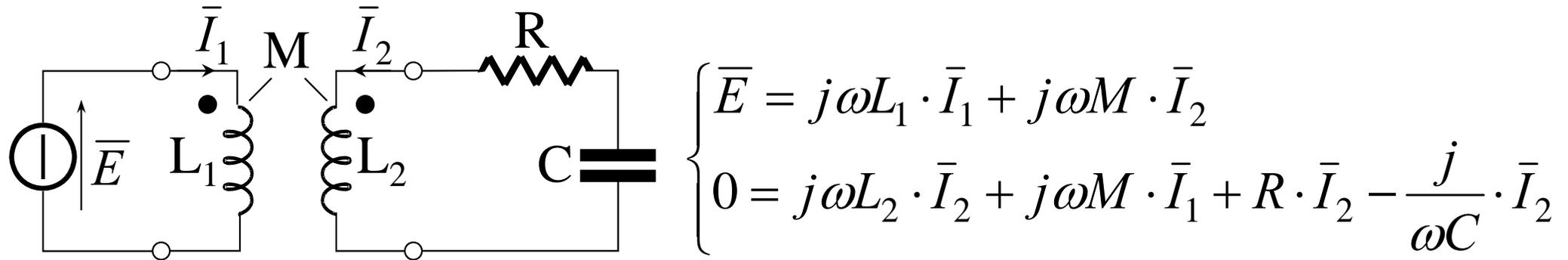
$$\begin{cases} \Phi_2 = \frac{N_1 \cdot I_1}{3\mathcal{R}} + \frac{2N_2 \cdot I_2}{3\mathcal{R}} \\ \Phi_1 = -\frac{2N_2 \cdot I_2}{\mathcal{R}} + \frac{2N_2 \cdot I_2}{3\mathcal{R}} + \frac{2N_1 \cdot I_1}{3\mathcal{R}} = \frac{N_2 \cdot I_2}{3\mathcal{R}} + \frac{2N_1 \cdot I_1}{3\mathcal{R}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_{c2} = N_2 \Phi_2 = \frac{N_1 N_2 \cdot I_1}{3\mathcal{R}} + \frac{2N_2^2 \cdot I_2}{3\mathcal{R}} \\ \Phi_{c1} = N_1 \Phi_1 = \frac{N_1 N_2 \cdot I_2}{3\mathcal{R}} + \frac{2N_1^2 \cdot I_1}{3\mathcal{R}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1 = \frac{2N_1^2}{3\mathcal{R}} = 0,0375 \text{ H} \\ L_2 = \frac{2N_2^2}{3\mathcal{R}} = 0,0667 \text{ H} \\ M = \frac{N_1 N_2}{3\mathcal{R}} = 0,025 \text{ H} \end{cases}$$

$$\omega L_1 = 2\pi f L_1 = 11,78 \, \Omega; \quad \omega L_2 = 20,94 \, \Omega; \quad \omega M = 7,85 \, \Omega$$

$$1 / \omega C = 21,22 \, \Omega$$



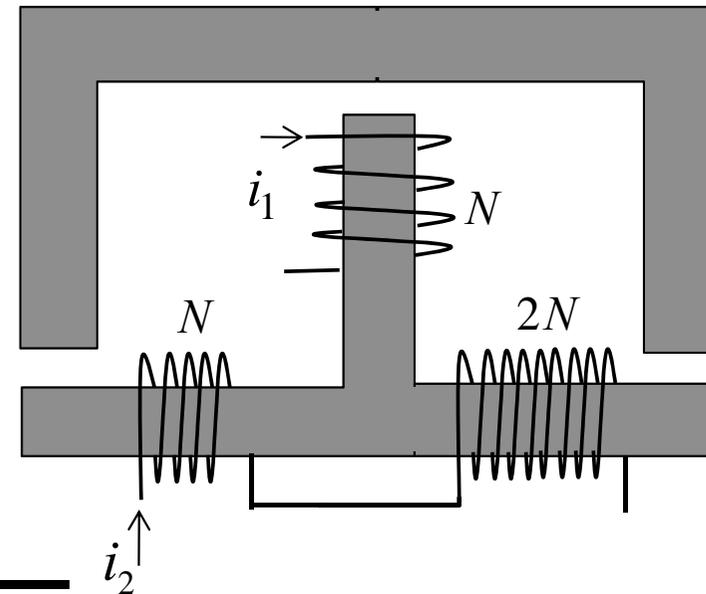
$$\begin{cases} 10 = j11,78 \cdot \bar{I}_1 + j7,85 \cdot \bar{I}_2 \\ 0 = j20,94 \cdot \bar{I}_1 + (50 - j0,28) \cdot \bar{I}_2 \end{cases} \quad \bar{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & j7,85 \\ 0 & 50 - j0,28 \end{vmatrix}}{\Delta} = 0,83 \angle -84,68^\circ$$

$$\dot{S} = \bar{E} \cdot \bar{I}_1^* = 10 \angle 0^\circ \cdot 0,83 \angle 84,68^\circ = 0,769 + j8,264$$

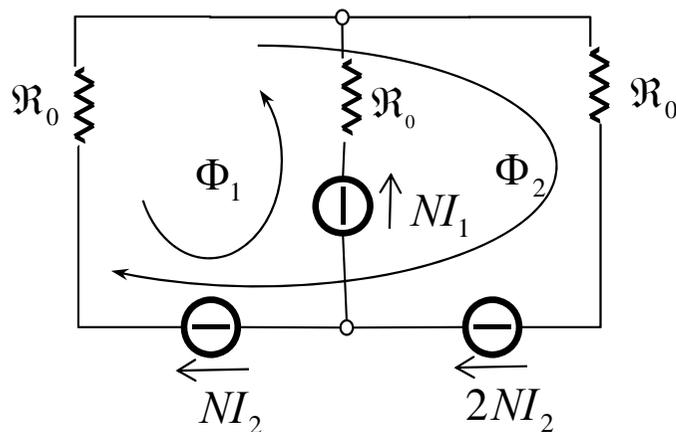
$$P = 0,769 \, \text{W} \quad Q = 8,264 \, \text{VAR}$$

# ESEMPIO

Assumendo che tutti i traferri abbiano riluttanza pari a  $\mathcal{R}_0$  e che la riluttanza dei tratti in ferro sia trascurabile, determinare i coefficienti di auto e mutua induzione dei due avvolgimenti.



Il circuito elettrico equivalente è il seguente:



$$\begin{cases} 2\mathcal{R}_0\Phi_1 - \mathcal{R}_0\Phi_2 = NI_1 - NI_2 \rightarrow \Phi_1 = \frac{\Phi_2}{2} + \frac{NI_1 - NI_2}{2\mathcal{R}_0} \\ 2\mathcal{R}_0\Phi_2 - \mathcal{R}_0\Phi_1 = 3NI_2 \xrightarrow{\times 2} 4\mathcal{R}_0\Phi_2 - 2\mathcal{R}_0\Phi_1 = 6NI_2 \end{cases}$$

Sommam. a m.

$$3\mathcal{R}_0\Phi_2 = NI_1 + 5NI_2$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{3} \frac{NI_1}{\mathcal{R}_0} + \frac{5}{3} \frac{NI_2}{\mathcal{R}_0}$$

$$\Phi_1 = \frac{2}{3} \frac{NI_1}{\mathcal{R}_0} + \frac{1}{3} \frac{NI_2}{\mathcal{R}_0}$$

$$\Phi_{c1} = N\Phi_1 = \frac{2N^2 I_1}{3\mathfrak{R}_0} + \frac{N^2 I_2}{3\mathfrak{R}_0}$$

$$\Phi_{c2} = 2N\Phi_2 + N(\Phi_2 - \Phi_1) = \frac{2N^2 I_1}{3\mathfrak{R}_0} + \frac{10N^2 I_2}{3\mathfrak{R}_0} + N(\Phi_2 - \Phi_1)$$

$$\Phi_2 - \Phi_1 = -\frac{NI_1}{3\mathfrak{R}_0} + \frac{4NI_2}{3\mathfrak{R}_0}$$

$$\Phi_{c2} = \frac{2N^2 I_1}{3\mathfrak{R}_0} + \frac{10N^2 I_2}{3\mathfrak{R}_0} - \frac{N^2 I_1}{3\mathfrak{R}_0} + \frac{4N^2 I_2}{3\mathfrak{R}_0} = \frac{N^2 I_1}{3\mathfrak{R}_0} + \frac{14N^2 I_2}{3\mathfrak{R}_0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{c1} = \frac{2N^2}{3\mathfrak{R}_0} I_1 + \frac{N^2}{3\mathfrak{R}_0} I_2 \\ \Phi_{c2} = \frac{N^2}{3\mathfrak{R}_0} I_1 + \frac{14N^2}{3\mathfrak{R}_0} I_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L_1 = \frac{2N^2}{3\mathfrak{R}_0} \\ L_2 = \frac{14N^2}{3\mathfrak{R}_0} \\ M = \frac{N^2}{3\mathfrak{R}_0} \end{array} \right.$$

# ESEMPIO

Determinare l'energia totale accumulata nel circuito, sapendo che il circuito elettrico è a regime e che:

$$E = 10 \text{ V}; A_1 = 5 \text{ A}; A_2 = 4 \text{ A}$$

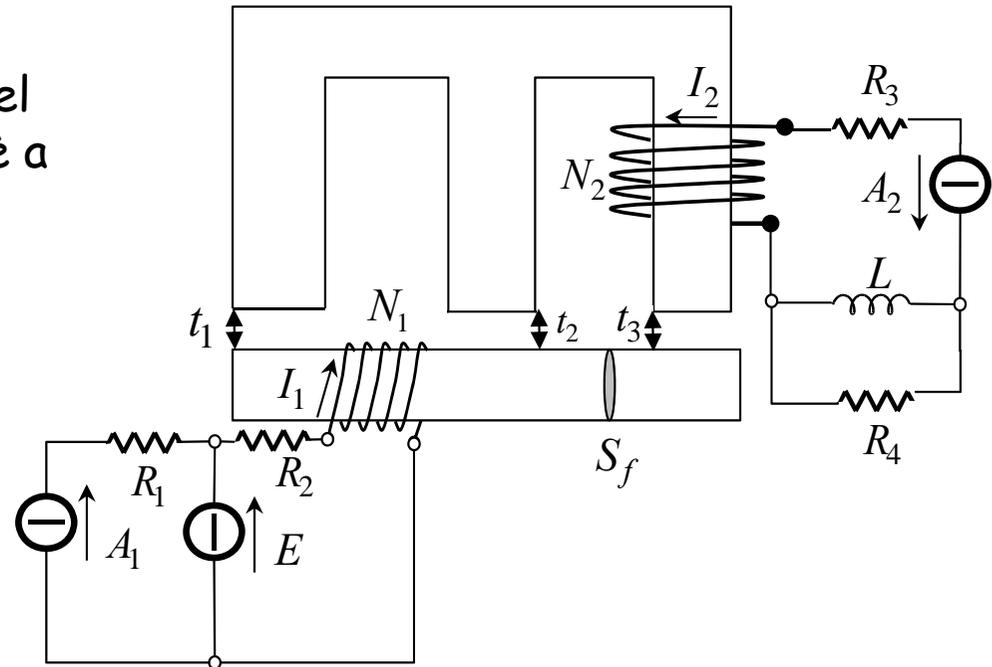
$$L = 12 \text{ mH}; R_1 = 2 \Omega; R_2 = 5 \Omega;$$

$$R_3 = 7 \Omega; R_4 = 15 \Omega$$

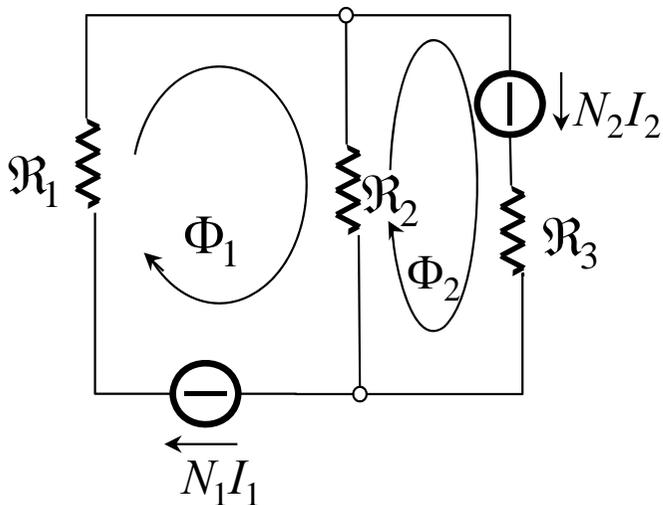
$$N_1 = 100; N_2 = 200$$

$$S_f = 60 \text{ cm}^2; t_1 = 2 \text{ mm}; t_2 = 4 \text{ mm}; t_3 = 6 \text{ mm}$$

$$\mu_{fe} = \infty$$



Il circuito elettrico equivalente è il seguente:



$$\mathfrak{R}_1 = \frac{1}{\mu_0} \frac{t_1}{S_f} = 2,65 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{1}{\mu_0} \frac{t_2}{S_f} = 5,305 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

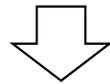
$$\mathfrak{R}_3 = \frac{1}{\mu_0} \frac{t_3}{S_f} = 7,9576 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

Applicando il metodo delle correnti cicliche:

$$\begin{bmatrix} (\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2) & -\mathfrak{R}_2 \\ -\mathfrak{R}_2 & (\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 I_1 \\ N_2 I_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = (\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2) \cdot (\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3) - \mathfrak{R}_2^2 = 77,36 \cdot 10^{10}$$

$$\Phi_1 = \frac{(\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3) \cdot N_1 I_1 + \mathfrak{R}_2 \cdot N_2 I_2}{\Delta} \quad \Phi_2 = \frac{(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2) \cdot N_2 I_2 + \mathfrak{R}_2 \cdot N_1 I_1}{\Delta}$$



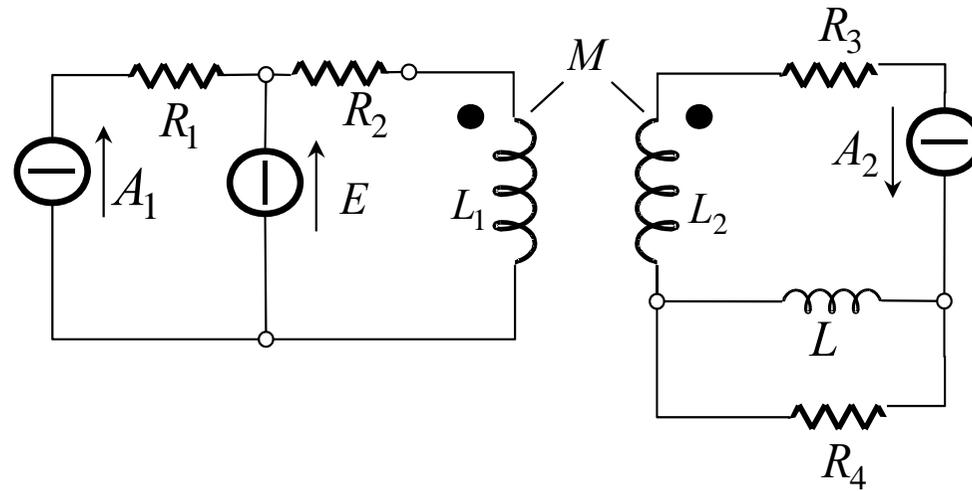
$$\Phi_{c1} = N_1 \Phi_1 = N_1^2 \frac{(\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3)}{\Delta} I_1 + N_1 N_2 \frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta} I_2$$

$$\Phi_{c2} = N_2 \Phi_2 = N_1 N_2 \frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta} I_1 + N_2^2 \frac{(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2)}{\Delta} I_2$$

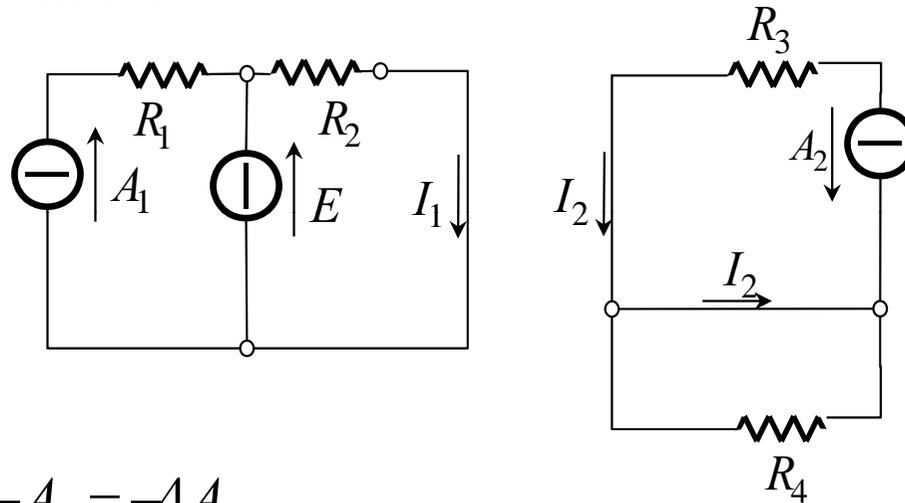
$$L_1 = N_1^2 \frac{(\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3)}{\Delta} = 17,1 \text{mH} \quad L_2 = N_2^2 \frac{(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2)}{\Delta} = 41,13 \text{mH}$$

$$M = N_1 N_2 \frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta} = 13,715 \text{mH}$$

Circuito elettrico



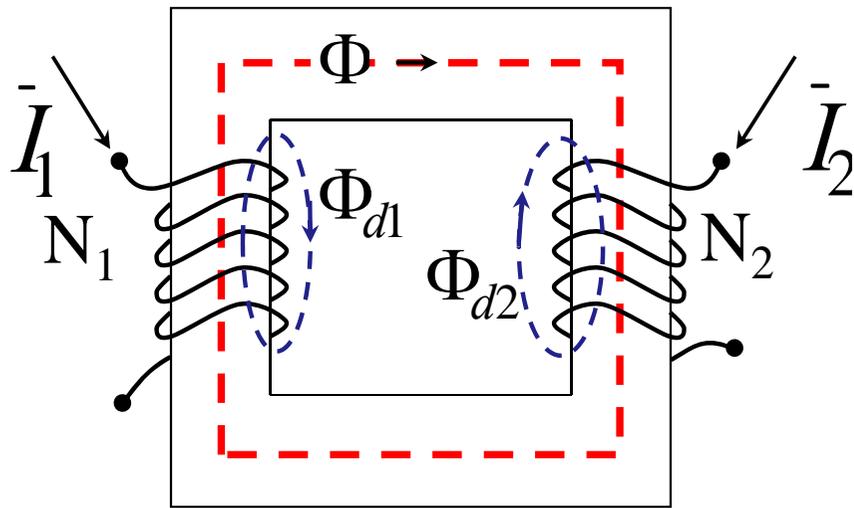
Il circuito è in regime stazionario



$$I_1 = \frac{E}{R_2} = 2A \quad I_2 = -A_2 = -4A$$

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L I_2^2 = 349,52mJ$$

# TRASFORMATORE INDUTTIVO



$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi + \Phi_{d1} \\ \Phi_2 = \Phi + \Phi_{d2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_{c1} = N_1\Phi + N_1\Phi_{d1} \\ \Phi_{c2} = N_2\Phi + N_2\Phi_{d2} \end{cases}$$

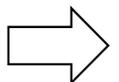
$\Phi$  Flusso Principale

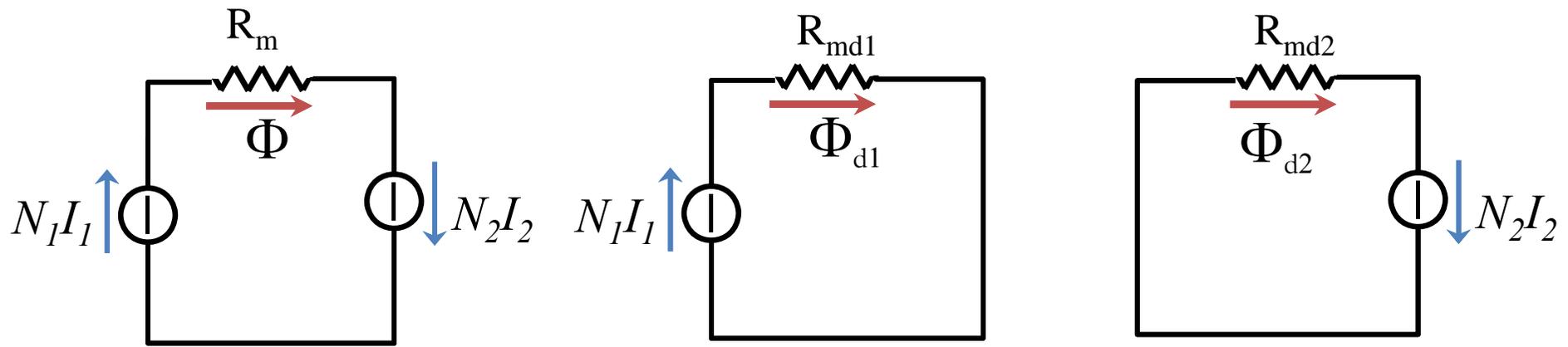
$\Phi_{d1}$  Flusso Disperso Primario

$\Phi_{d2}$  Flusso Disperso Secondario

$\Phi_1$  Flusso Concatenato con una Spira Primaria

$\Phi_2$  Flusso Concatenato con una Spira Secondaria





$$\begin{cases} \Phi = \mathcal{G}_m (N_1 I_1 + N_2 I_2) \\ \Phi_{d1} = \mathcal{G}_{d1} (N_1 I_1) \\ \Phi_{d2} = \mathcal{G}_{d2} (N_2 I_2) \end{cases}$$

$\mathcal{G}_m$  permeanza del circuito magnetico  
 $\mathcal{G}_{d1}$  permeanza costante (percorso in aria)  
 $\mathcal{G}_{d2}$  permeanza costante (percorso in aria)

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi_{cd1} = N_1 \mathcal{G}_{d1} (N_1 I_1) \\ \Phi_{cd2} = N_2 \mathcal{G}_{d2} (N_2 I_2) \end{cases} \quad \text{poniamo:}$$

$$\begin{cases} L_{d1} = N_1^2 \mathcal{G}_{d1} & \text{Induttanza di dispersione primaria} \\ L_{d2} = N_2^2 \mathcal{G}_{d2} & \text{Induttanza di dispersione secondaria} \\ L_m = N_1^2 \mathcal{G}_m & \text{Induttanza di magnetizzazione} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_{c1} = N_1\Phi + N_1\Phi_{d1} \\ \Phi_{c2} = N_2\Phi + N_2\Phi_{d2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi_{c1} = N_1\mathcal{G}_m(N_1I_1 + N_2I_2) + N_1\mathcal{G}_{d1}(N_1I_1) \\ \Phi_{c2} = N_2\mathcal{G}_m(N_1I_1 + N_2I_2) + N_2\mathcal{G}_{d2}(N_2I_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi_{c1} = N_1^2(\mathcal{G}_m + \mathcal{G}_{d1})I_1 + N_1N_2\mathcal{G}_mI_2 \\ \Phi_{c2} = N_1N_2\mathcal{G}_mI_1 + N_2^2(\mathcal{G}_m + \mathcal{G}_{d2})I_2 \end{cases} \quad \text{poniamo:}$$

$$\begin{cases} L_1 = N_1^2(\mathcal{G}_{d1} + \mathcal{G}_m) \Rightarrow \text{Induttanza propria dell'avvolgimento primario} \\ \text{(o autoinduttanza a vuoto del primario)} \\ L_2 = N_2^2(\mathcal{G}_{d2} + \mathcal{G}_m) \Rightarrow \text{Induttanza propria dell'avvolgimento secondario} \\ \text{(o autoinduttanza a vuoto del secondario)} \\ M = N_1N_2\mathcal{G}_m \Rightarrow \text{Induttanza mutua} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_{c1} = L_1 \cdot I_1 + M \cdot I_2 \\ \Phi_{c2} = L_2 \cdot I_2 + M \cdot I_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Equazione della mutua

# Circuito equivalente del trasformatore induttivo

$$\begin{aligned}\Phi_{c1} &= N_1^2 (\mathcal{G}_m + \mathcal{G}_{d1}) I_1 + N_1 N_2 \mathcal{G}_m I_2 = L_{d1} I_1 + L_m I_1 + N_1 N_2 \mathcal{G}_m I_2 = \\ &= L_{d1} I_1 + L_m I_1 + \frac{N_1}{N_1} N_1 N_2 \mathcal{G}_m I_2 = L_{d1} I_1 + L_m I_1 + \frac{N_2}{N_1} N_1^2 \mathcal{G}_m I_2 =\end{aligned}$$

$$= L_{d1} I_1 + L_m I_1 + L_m \frac{N_2}{N_1} I_2 = L_{d1} I_1 + L_m \left( I_1 + \frac{N_2}{N_1} I_2 \right) =$$

$$= L_{d1} I_1 + L_m \left( I_1 + \frac{1}{n} I_2 \right)$$

con  $n = \frac{N_1}{N_2}$  rapporto di trasformazione

$$\Phi_{c2} = N_1 N_2 \mathcal{G}_m I_1 + L_{d2} I_2 + N_2^2 \mathcal{G}_m I_2 \Rightarrow (\text{moltiplico per } n = \frac{N_1}{N_2})$$

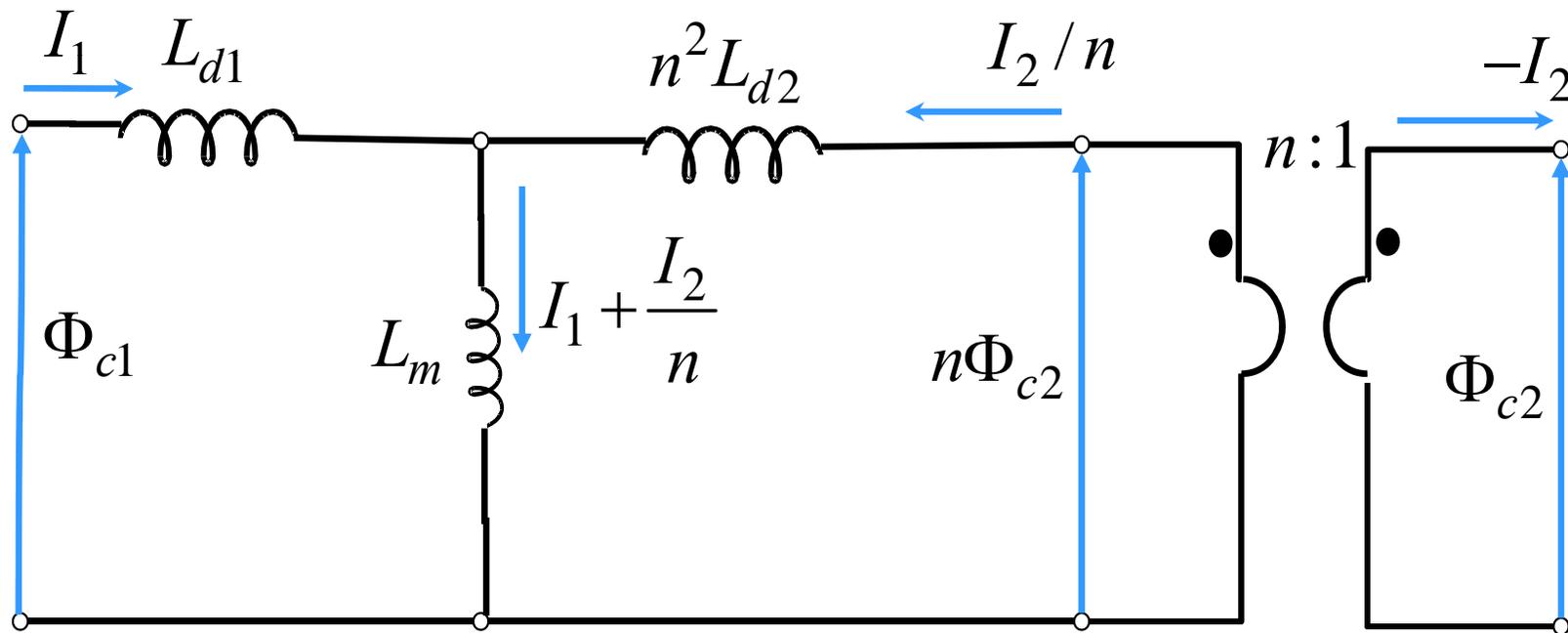
$$\begin{aligned}n\Phi_{c2} &= N_1^2 \mathcal{G}_m I_1 + nL_{d2} I_2 + N_1 N_2 \mathcal{G}_m I_2 = L_m I_1 + nL_{d2} I_2 + N_1 N_2 \mathcal{G}_m I_2 = \\ &= n^2 L_{d2} \frac{I_2}{n} + L_m \left( I_1 + \frac{1}{n} I_2 \right)\end{aligned}$$

# Circuito equivalente del trasformatore induttivo

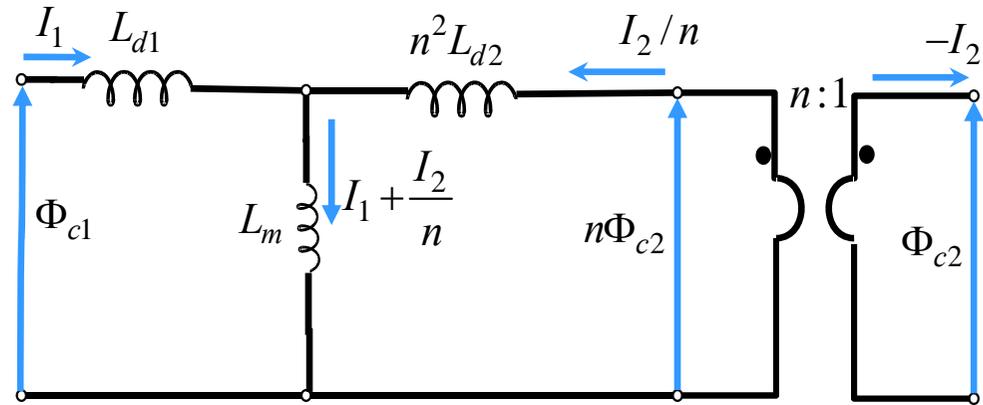
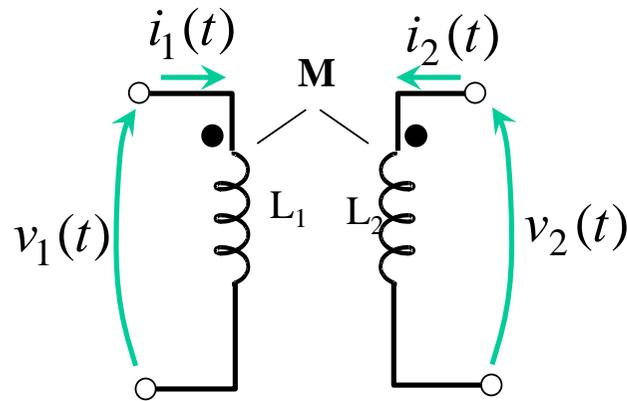
$$\begin{cases} \Phi_{c1} = L_{d1} I_1 + L_m \left( I_1 + \frac{1}{n} I_2 \right) \\ n\Phi_{c2} = n^2 L_{d2} \frac{I_2}{n} + L_m \left( I_1 + \frac{1}{n} I_2 \right) \end{cases}$$

Modo alternativo di descrivere una mutua induttanza

$$\begin{cases} \Phi_{c1} = n\Phi_{c2} \\ i_1 = -\frac{1}{n} i_2 \end{cases}$$



# Equivalenza di doppi bipoli

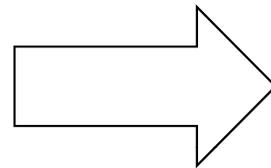


Applicando le regole per l'equivalenza di doppi bipoli si ottiene:

$$L_1 = \left. \frac{\Phi_{c1}}{I_1} \right|_{I_2=0} = L_{d1} + L_m$$

$$M = \left. \frac{\Phi_{c1}}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{1}{n} L_m$$

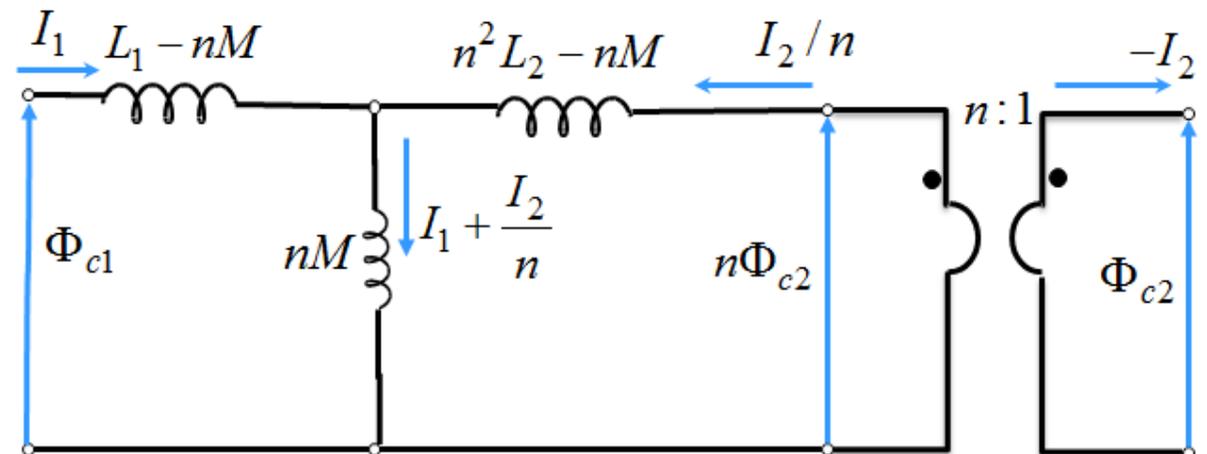
$$L_2 = \left. \frac{\Phi_{c2}}{I_2} \right|_{I_1=0} = L_{d2} + \frac{1}{n^2} L_m$$



$$L_{d1} = L_1 - nM$$

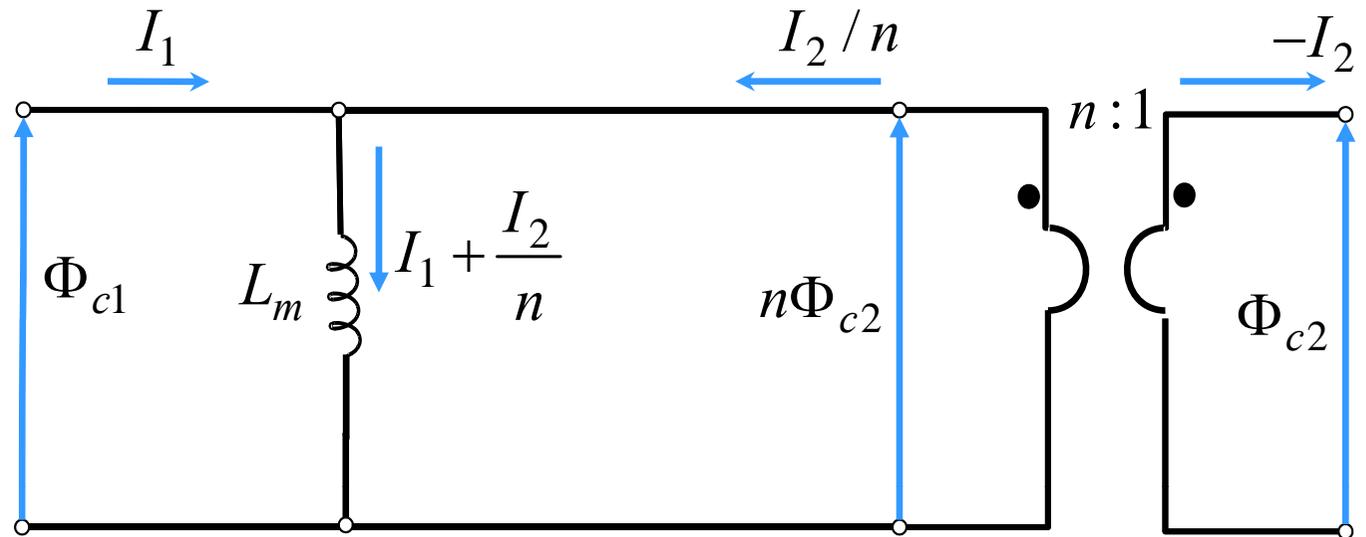
$$L_m = nM$$

$$n^2 L_{d2} = n^2 L_2 - nM$$



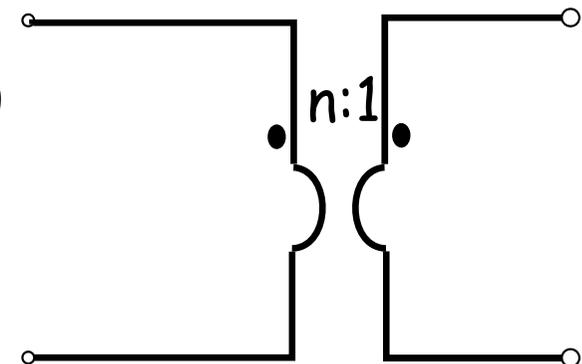
# Trasformatore perfetto

- flussi dispersi = 0
- riluttanza del nucleo magnetico  $\neq 0$
- accoppiamento perfetto ( $k = 1$ )



# Trasformatore ideale

- flussi dispersi = 0
- riluttanza del nucleo magnetico = 0 ( $\mu_r = \infty$ )



# ENERGIA ASSOCIATA A DUE CIRCUITI ACCOPPIATI

$$\text{Hp:} \begin{cases} \text{non dissipativo} \\ \text{passivo} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} M_{12} = M_{21} = M \\ L_1 L_2 - M^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$M_{12} = \left. \frac{\Phi_{c1}}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

$$M_{21} = \left. \frac{\Phi_{c2}}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

Supponiamo per assurdo che:

$$M_{12} \neq M_{21} \Rightarrow M_{21} = M_{12} + g$$

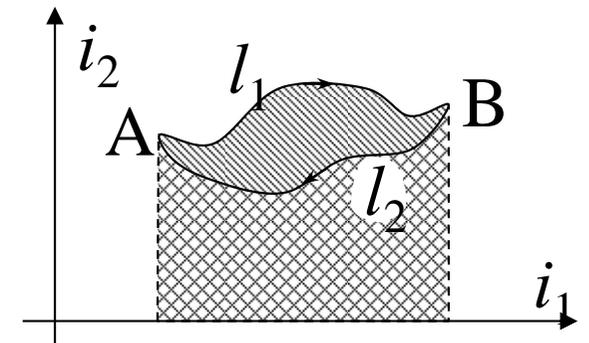
$$p(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_{12} i_1 i_2 \right) + g \cdot i_2 \frac{di_1}{dt}$$

Per la condizione di NON DISSIPATIVITA':

$$\Delta w_1 + \Delta w_2 = 0 \Rightarrow \oint p(t) \cdot dt = 0$$

$\Delta w_1$  e  $\Delta w_2$  devono dipendere solo dagli estremi  
 $\rightarrow p(t)$  deve essere un differenziale esatto

$$\rightarrow g = 0 \rightarrow M_{12} = M_{21} = M$$



# ENERGIA ASSOCIATA A DUE CIRCUITI ACCOPPIATI

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)$$

Per la condizione di passività:

$$W_m = \int_{-\infty}^t p(t) dt \geq 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \geq 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i_1 & i_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

FORMA QUADRATICA SEMIDEFINITA POSITIVA  $\rightarrow$  MINORI  $\geq 0$

$$L_1 \geq 0 \quad L_2 \geq 0 \quad L_1 L_2 - M^2 \geq 0$$

# ENERGIA ASSOCIATA A DUE CIRCUITI ACCOPPIATI

Dalla:

$$L_1 L_2 - M^2 \geq 0 \Rightarrow K = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \Rightarrow 0 \leq K \leq 1$$

$K$  = coefficiente di accoppiamento

↑  
Condizione  
passività

Se  $M = 0 \Rightarrow K = 0$

accade se  $G_m = 0$  cioè se i due induttori sono a grande distanza e se gli assi sono disposti perpendicolarmente

Se  $L_{d1} = L_{d2} = 0 \Rightarrow K = 1$

accade quando **l'accoppiamento è perfetto**: cioè tutto il flusso concatenato con uno dei due circuiti si concatena anche con l'altro

# LEGGE DELL'INDUZIONE MAGNETICA

Consideriamo una spira che delimita una superficie  $S$  che concatena un

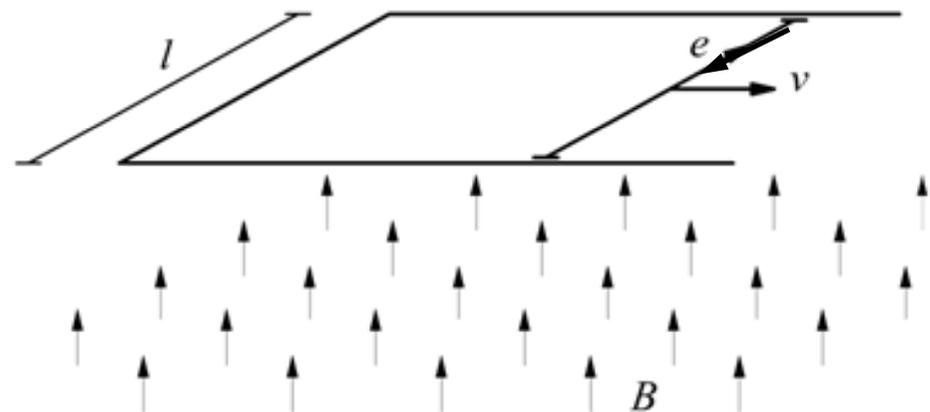
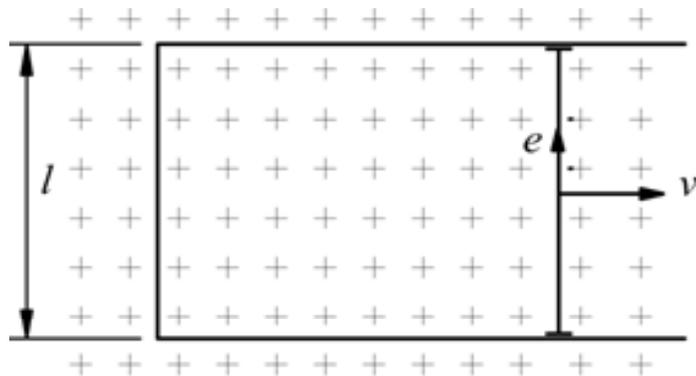
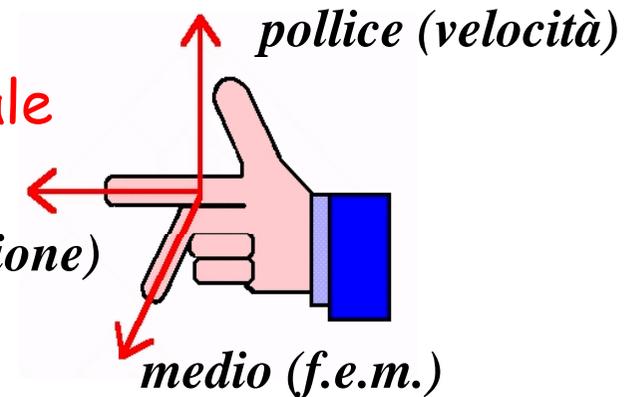
flusso  $\varphi = \varphi(t) \rightarrow e = -\frac{d\varphi}{dt}$  forza elettromotrice indotta (f.e.m.)

$$e = \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S}$$

Forza Elettromotrice Variazionale

$$e = \oint_l \bar{v} \times \bar{B} \cdot d\bar{l}$$

Forza Elettromotrice Mozionale



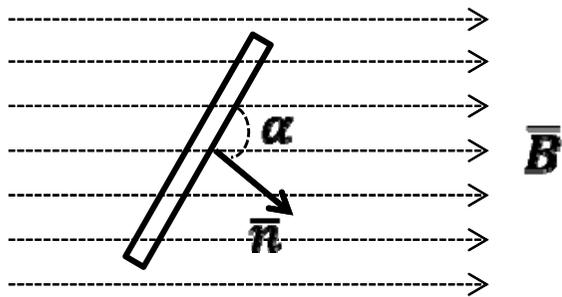
# LEGGE DELL'INDUZIONE MAGNETICA

- Spira si deforma/cambia posizione
- Immersa in un campo di induzione variabile

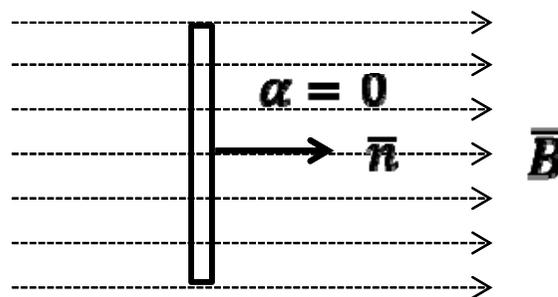


Forza Elettromotrice Variazionale + Forza Elettromotrice Mozionale

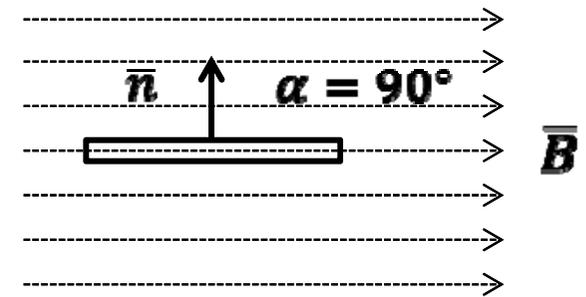
$$e = \oint_l \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$



$$\varphi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \alpha$$

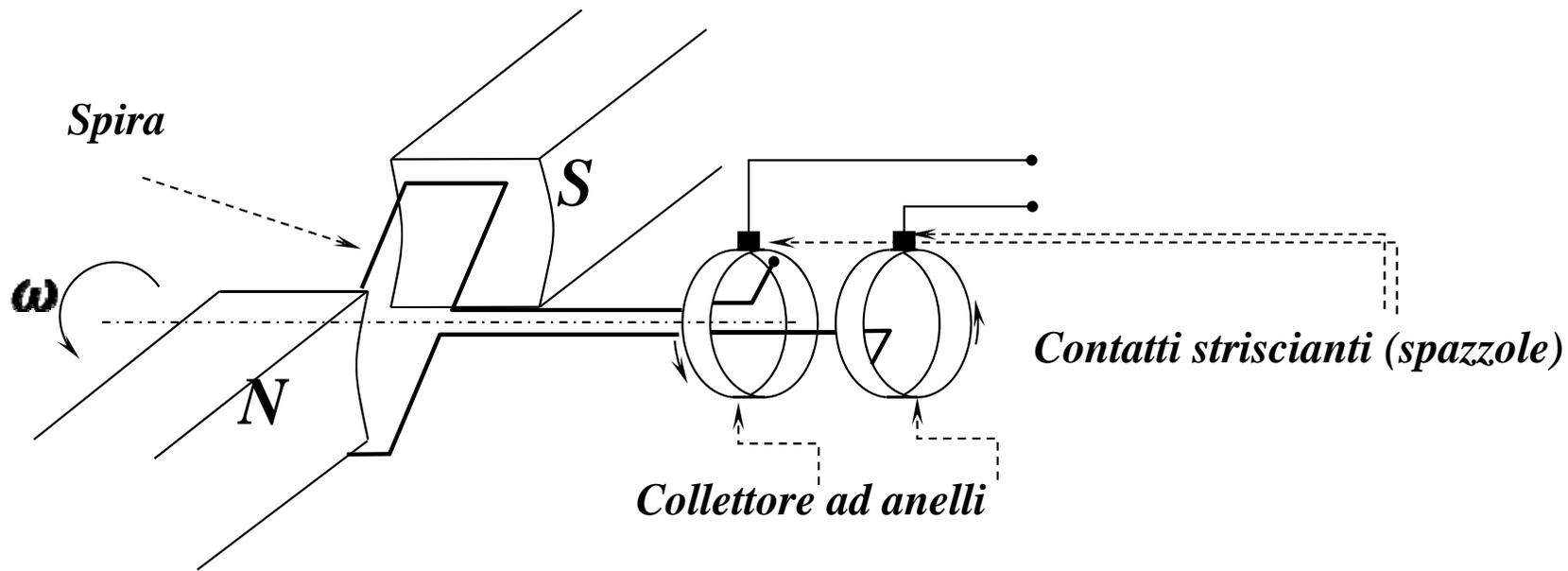


$$\varphi = BS$$



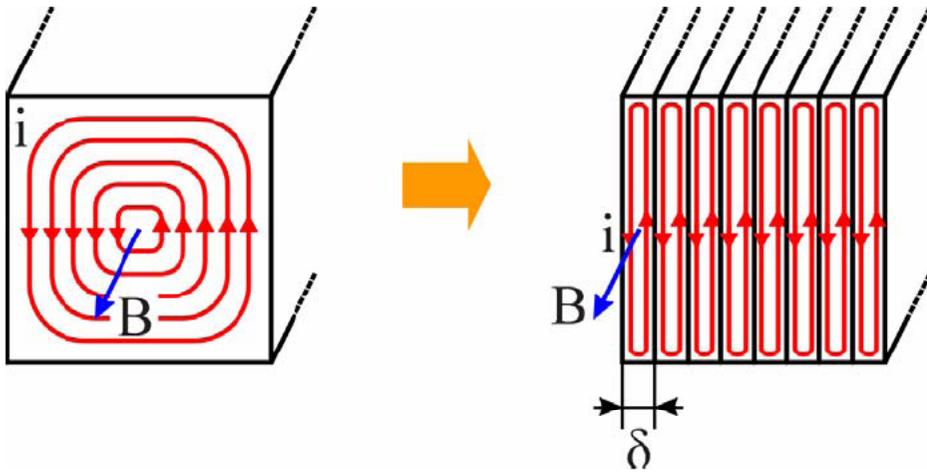
$$\varphi = 0$$

# GENERATORE DI TENSIONE SINUSOIDALE

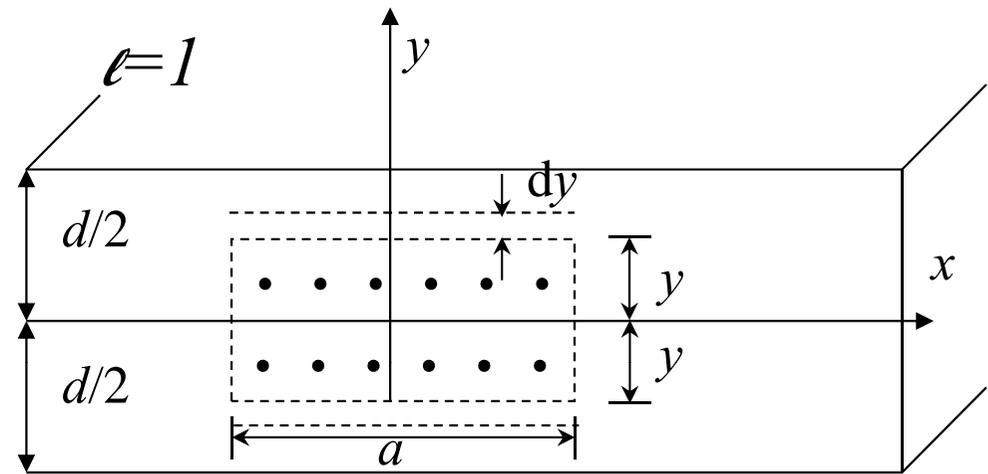


$$\varphi = \overline{B} \cdot \overline{S} = BS \cos \omega t \Rightarrow e = -N \frac{d\varphi}{dt} = \omega NBS \sin \omega t = E \sin \omega t$$

# CORRENTI PARASSITE



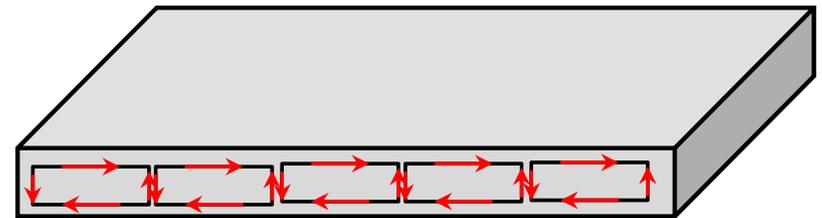
Lastra soggetta ad un campo magnetico variabile sinusoidalmente



Induzione magnetica  $b(t) = B_{MAX} \sin \omega t$

$$\varphi(t) = B_{MAX} a \cdot 2y \sin \omega t$$

$$\Rightarrow e(t) = -\frac{d\varphi}{dt} = -\omega B_{MAX} a \cdot 2y \cos \omega t$$



# CORRENTI PARASSITE

Valore efficace della f.e.m. nel lato della spira parallelo all'asse x

$$E = \frac{\omega B_{MAX} a y}{\sqrt{2}}$$

Conduttanza  $dG = \frac{1}{\rho} \frac{dy \cdot l}{a}$

$$\text{Se } l = 1 \Rightarrow dP = E^2 dG = \frac{\omega^2 B_{MAX}^2 a^2 y^2}{2\rho} \frac{dy}{a} = \frac{\omega^2 B_{MAX}^2 a}{2\rho} y^2 dy$$

La potenza dissipata sulla lastra per unità di lunghezza e per una larghezza  $a$  è:

$$P = 2 \frac{\omega^2 B_{MAX}^2 a}{2\rho} \int_0^{d/2} y^2 dy = \frac{\omega^2 B_{MAX}^2 a d^3}{24\rho}$$

$$p_V = \frac{\omega^2 B_{MAX}^2 d^2}{24\rho} = \frac{\pi^2 f^2 B_{MAX}^2 d^2}{6\rho} \quad \text{potenza volumica}$$

# CIFRA DI PERDITA

- Perdite del ferro (isteresi + correnti parassite)
- Perdite del rame (effetto Joule)
- Perdite meccaniche (attrito e ventilazione nelle macchine elettriche)

Potenza volumica persa per isteresi:  $p_{ist} = k_{ist} f B_{MAX}^n$

Potenza volumica dissipata per correnti parassite:  $p_{cp} = k_{cp} f^2 B_{MAX}^2 d^2$

Potenza volumica dissipata nel ferro:  $p = k_{ist} f B_{MAX}^n + k_{cp} f^2 B_{MAX}^2 d^2$

**Cifra di Perdita:** potenza volumica totale (dissipata per isteresi e correnti parassite) per unità di volume di materiale considerato, quando l'induzione ha un valore massimo pari ad 1 Tesla e con frequenza pari a 50Hz.

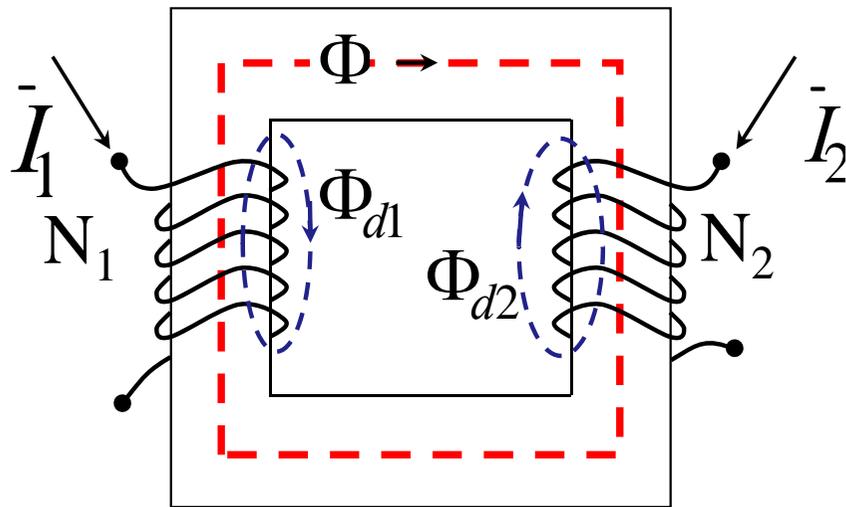
Nota la cifra di perdita è possibile risalire alla potenza dissipata nel ferro :

$$\Rightarrow P = \text{Cifra di Perdita} \cdot B_{MAX}^2 \cdot m^3 \text{ di materiale [W]}$$

# Forze nei circuiti magnetici

# Trasformatore Reale

# Trasformatore



accoppiamento perfetto

$$\mu \rightarrow \infty$$

$$P_{fe} = 0$$

- Ferro ideale
- Rame ideale

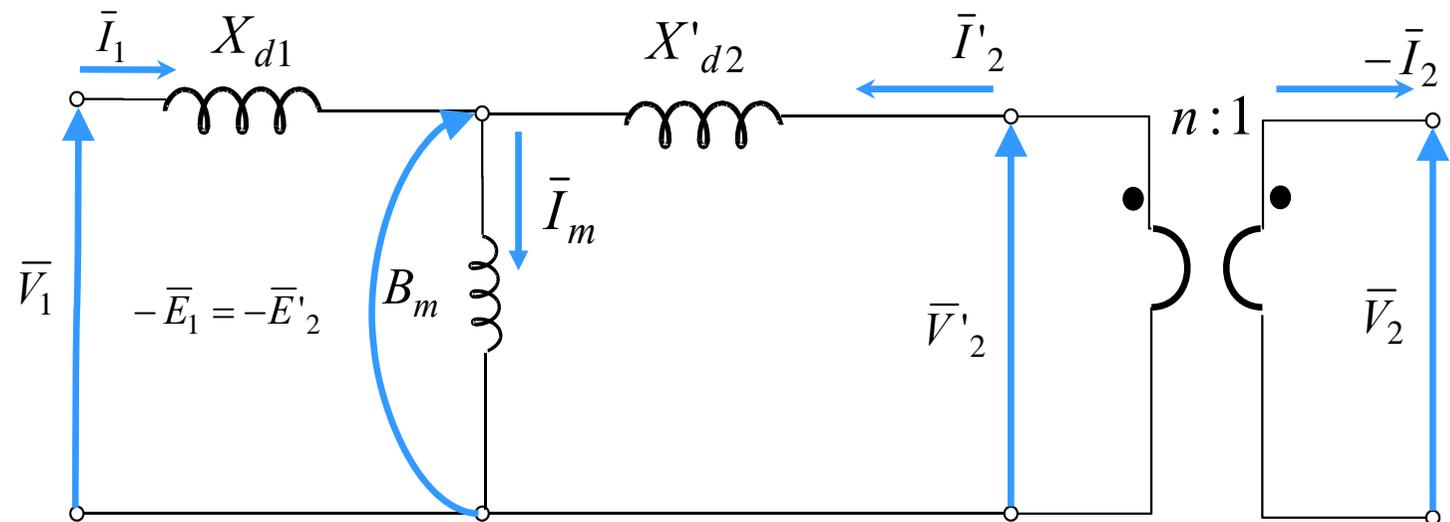
Trasformatore ideale

$$P_{cu} = 0$$

- Il circuito equivalente del trasformatore reale si ottiene rimuovendo le ipotesi di ferro ideale e di rame ideale.
- Circuito equivalente del trasformatore induttivo nel dominio della frequenza:

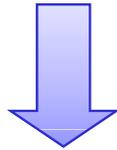
$$\bar{E}_1 = j\omega N_1 \bar{\Phi}$$

$$\bar{E}_2 = j\omega N_2 \bar{\Phi}$$



## FERRO NON IDEALE

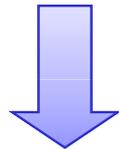
- Riluttanza del circuito magnetico non nulla (permeanza finita)
- Legame flusso-amperspire non lineare (isteresi)
- Perdite per isteresi e correnti parassite non nulle



- Corrente magnetizzante non nulla
- Corrente magnetizzante non sinusoidale (deformata)
- Potenza dissipata nel nucleo sotto forma di calore
- Presenza di flussi dispersi che si chiudono prevalentemente in aria

## RAME NON IDEALE

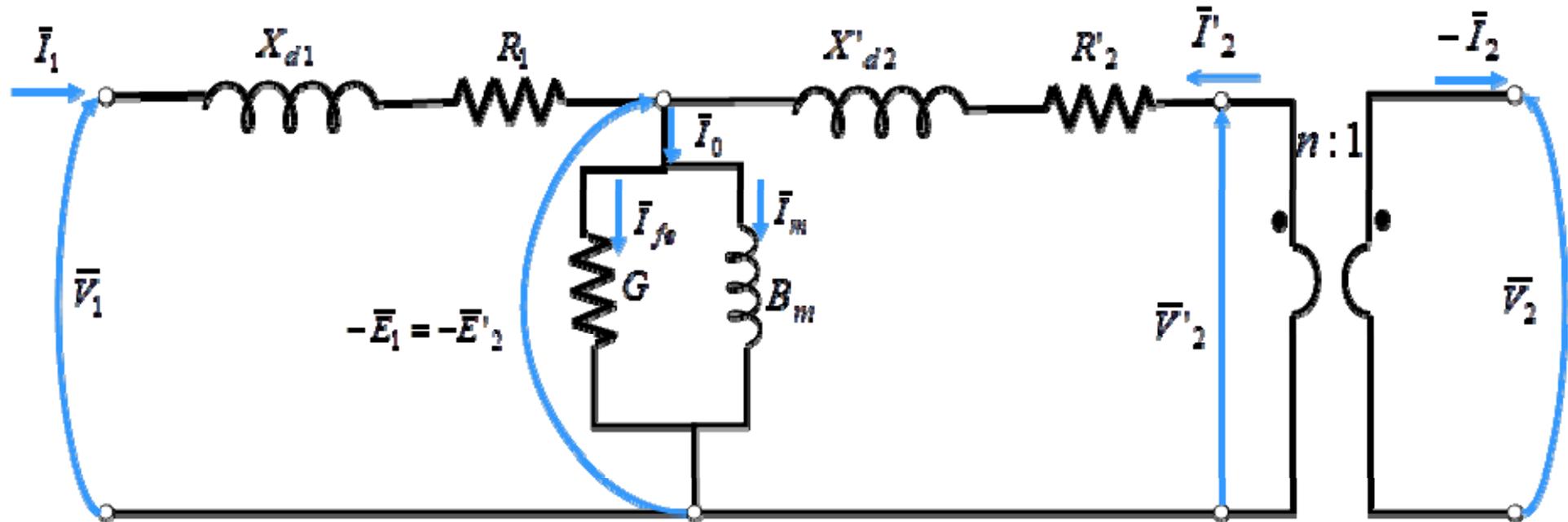
- Resistività del rame diversa da zero



- Potenza attiva dissipata negli avvolgimenti sotto forma di calore

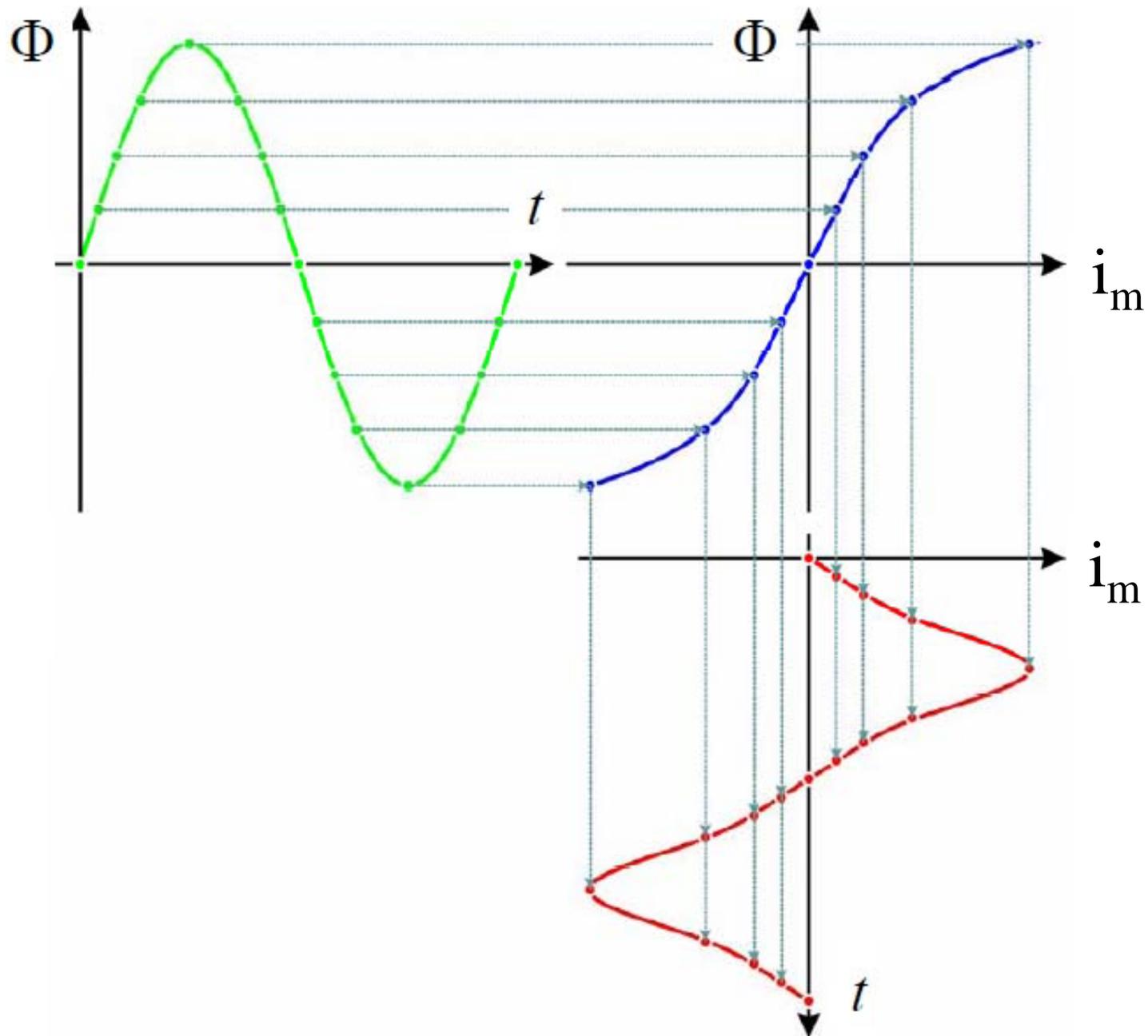
$$P_{cu} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2$$

# CIRCUITO EQUIVALENTE DEL TRASFORMATORE REALE

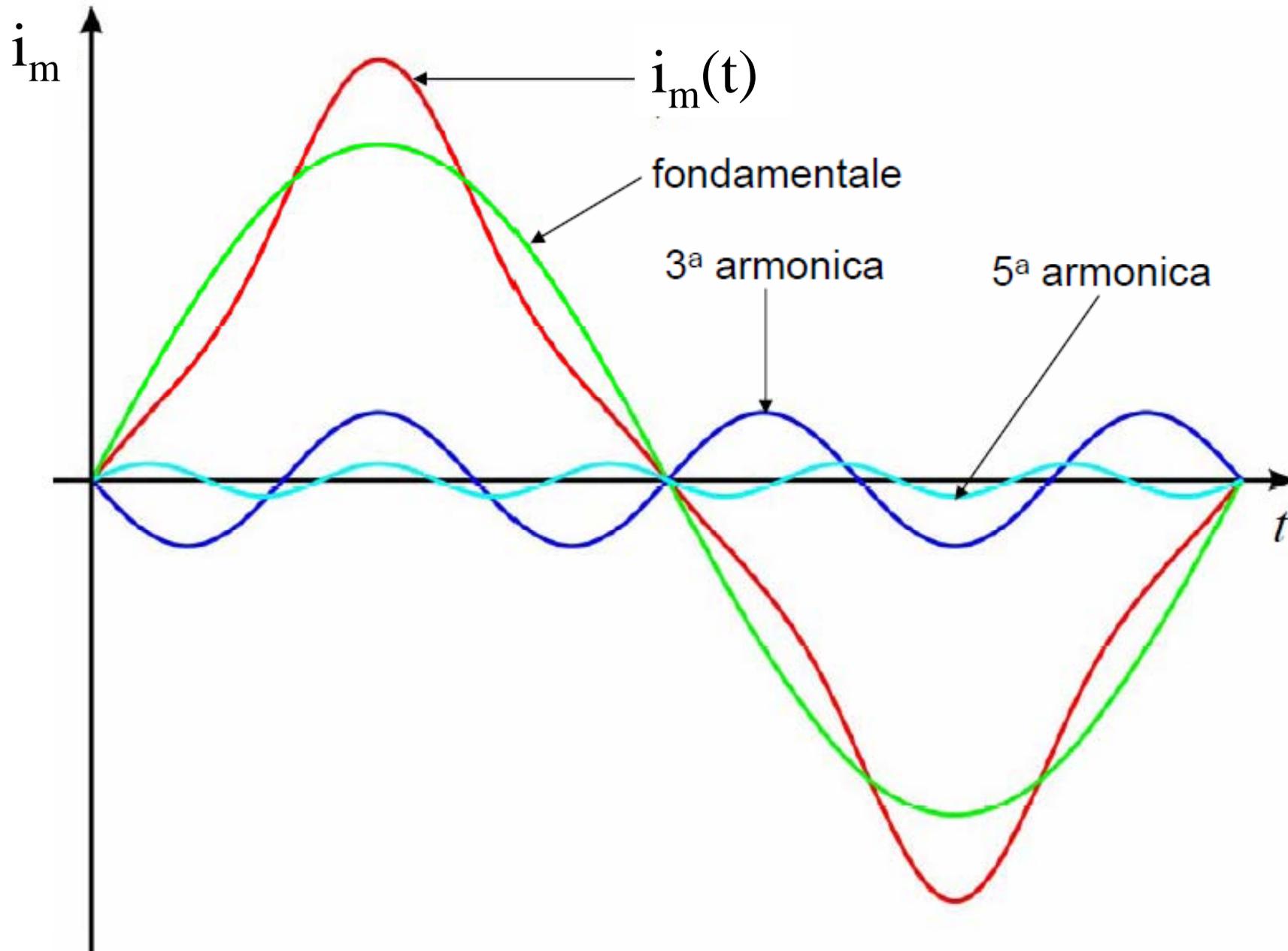


- $R_1$ : resistenza equivalente dell'avvolgimento primario
- $R'_2 = n^2 R_2$  con  $R_2$  resistenza dell'avvolgimento secondario
- $X_{d1} = \omega L_{d1}$  con  $L_{d1}$  induttanza di dispersione primaria
- $X'_{d2} = n^2 X_{d2}$ ;  $X_{d2} = \omega L_{d2}$  con  $L_{d2}$  induttanza di dispersione secondaria
- $G$ : conduttanza trasversale (mette in conto le perdite nel ferro)
- $B_m = 1/X_m$ ;  $X_m = j\omega L_m$  con  $L_m$  induttanza di magnetizzazione
- $I_0$ : corrente a vuoto
- $I_m$ : corrente magnetizzante
- $E'_2 = nE_2$

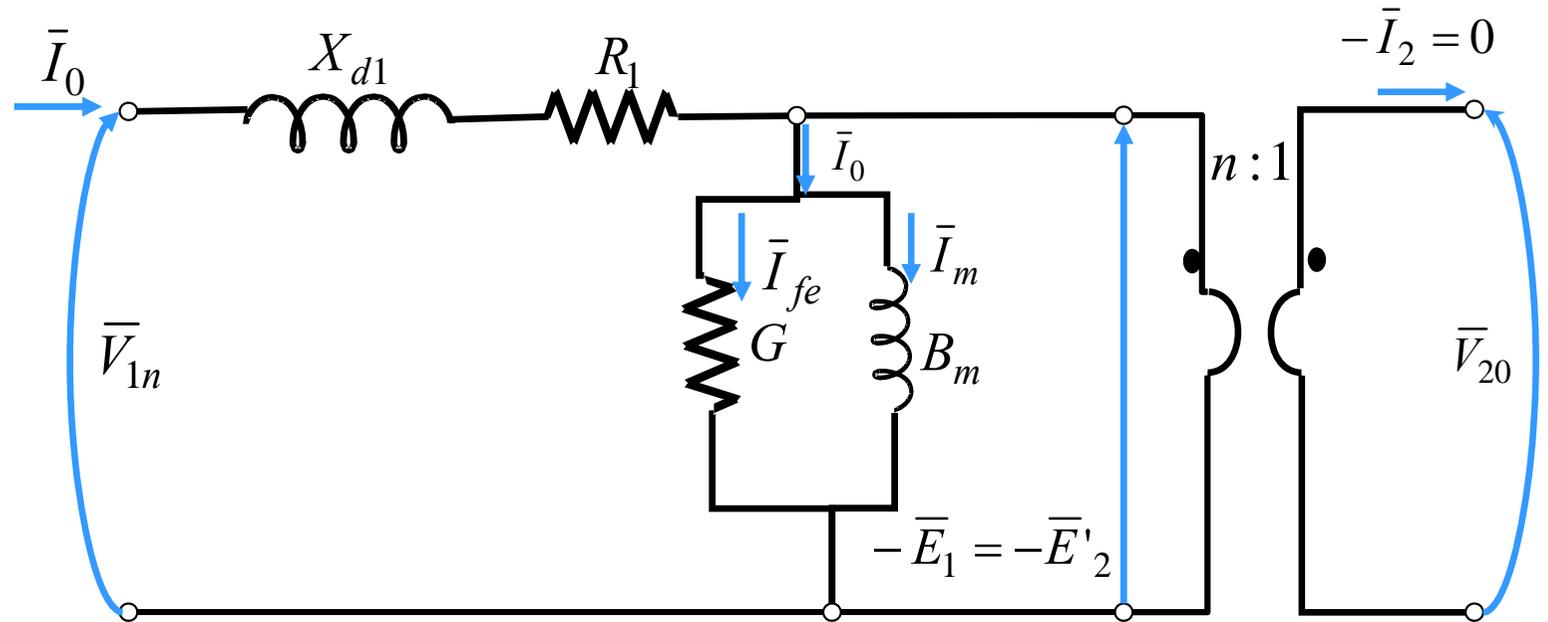
# DISTORSIONE DELLA CORRENTE MAGNETIZZANTE



# DISTORSIONE DELLA CORRENTE MAGNETIZZANTE



# FUNZIONAMENTO A VUOTO



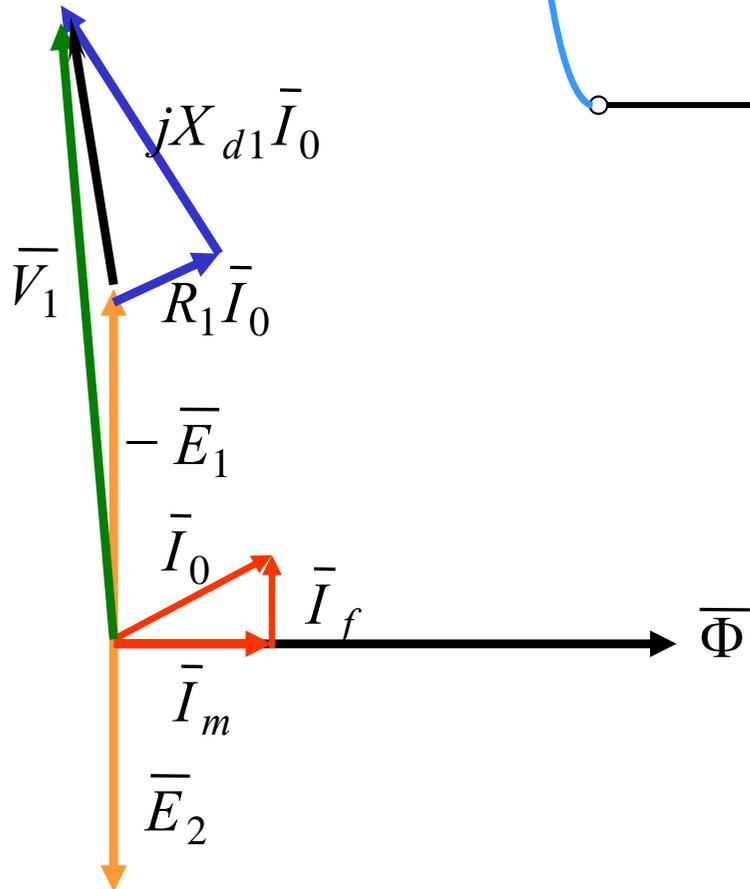
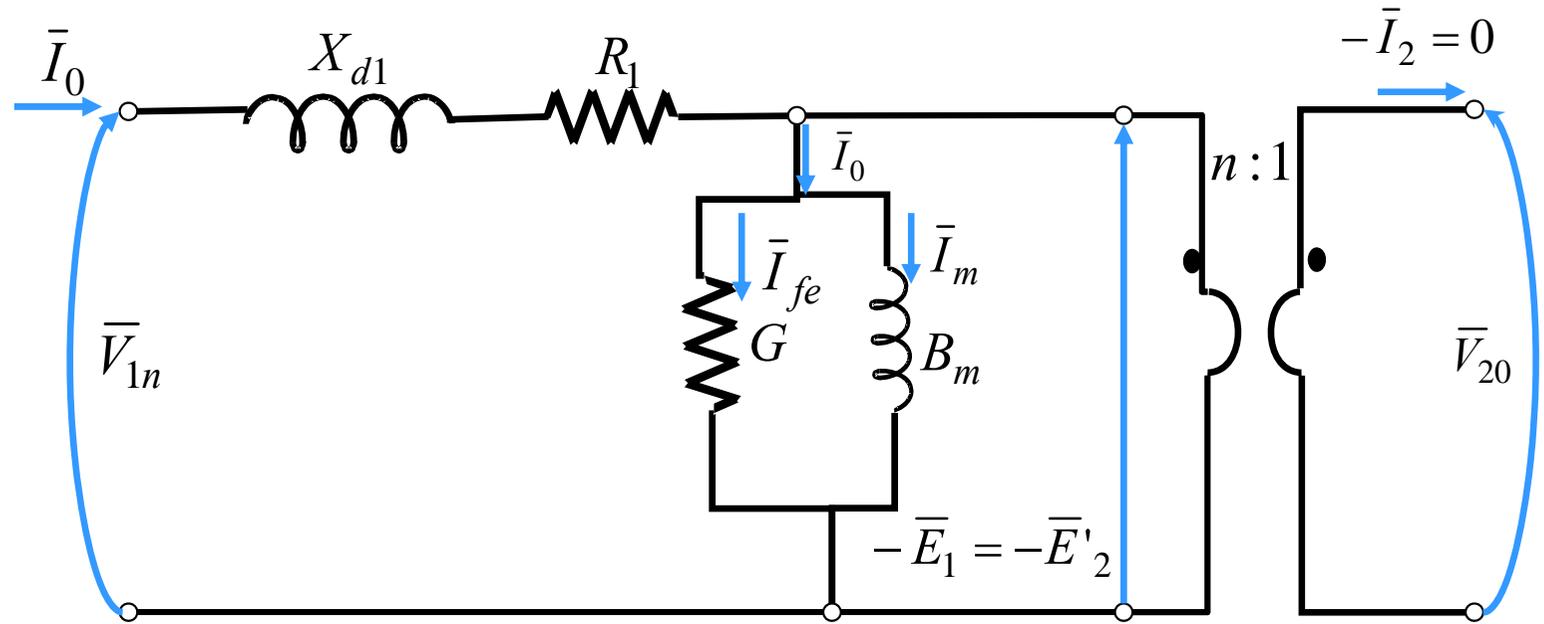
➤ Caduta di tensione nell'impedenza primaria  $\dot{Z}_1 = R_1 + jX_{d1}$  è molto piccola

$$\bar{V}_1 \approx -\bar{E}_1 = j\omega N_1 \Phi \quad E_1 = 4,44 N_1 f \cdot \Phi_{MAX}$$

$$V_{20} = -\bar{E}_2 = j\omega N_2 \Phi \quad E_2 = 4,44 N_2 f \cdot \Phi_{MAX}$$

$$\frac{V_1}{V_{20}} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2} = n \quad \rightarrow \quad \text{rapporto di trasformazione del trasformatore ideale}$$

# DIAGRAMMA FASORIALE



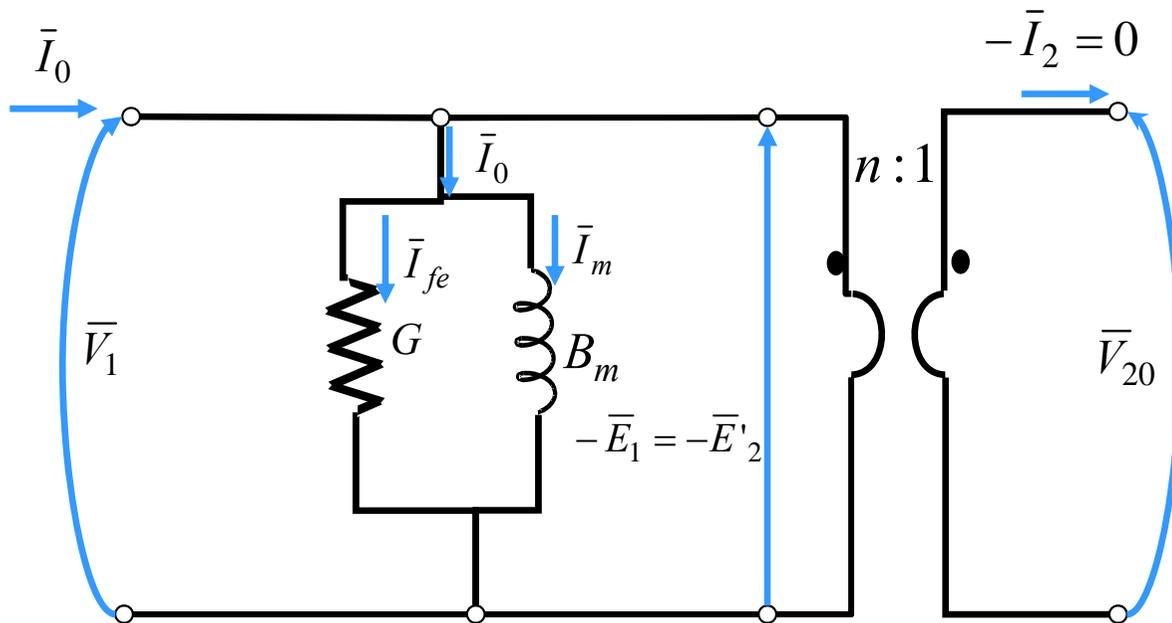
➤ La caduta di tensione al primario e' piccolissima e può, in certi casi, essere trascurata

➤  $I_m$  e' prevalente rispetto a  $I_{fe}$

# PROVA A VUOTO

- o Trascurando le perdite di eccitazione  $R_1 I_0^2$  rispetto a quelle nel ferro  $G E_1^2$  (rapporto di poche unità per mille)
- o Trascurando la potenza reattiva richiesta per l'eccitazione del flusso disperso rispetto a quelle necessarie a sostenere il flusso principale

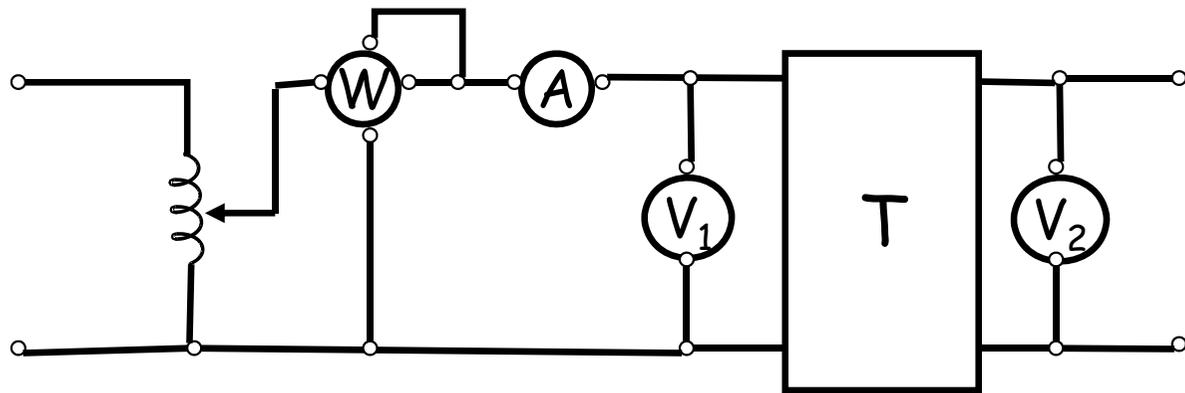
Il circuito equivalente del trasformatore nel funzionamento a vuoto e' il seguente:



Ammettenza a vuoto primaria

$$\dot{Y} = G + jB_m$$

# PROVA A VUOTO



wattmetro  $\longrightarrow P_0$   
 amperometro  $\longrightarrow I_0$   
 voltmetro  $\longrightarrow V_{1n}$

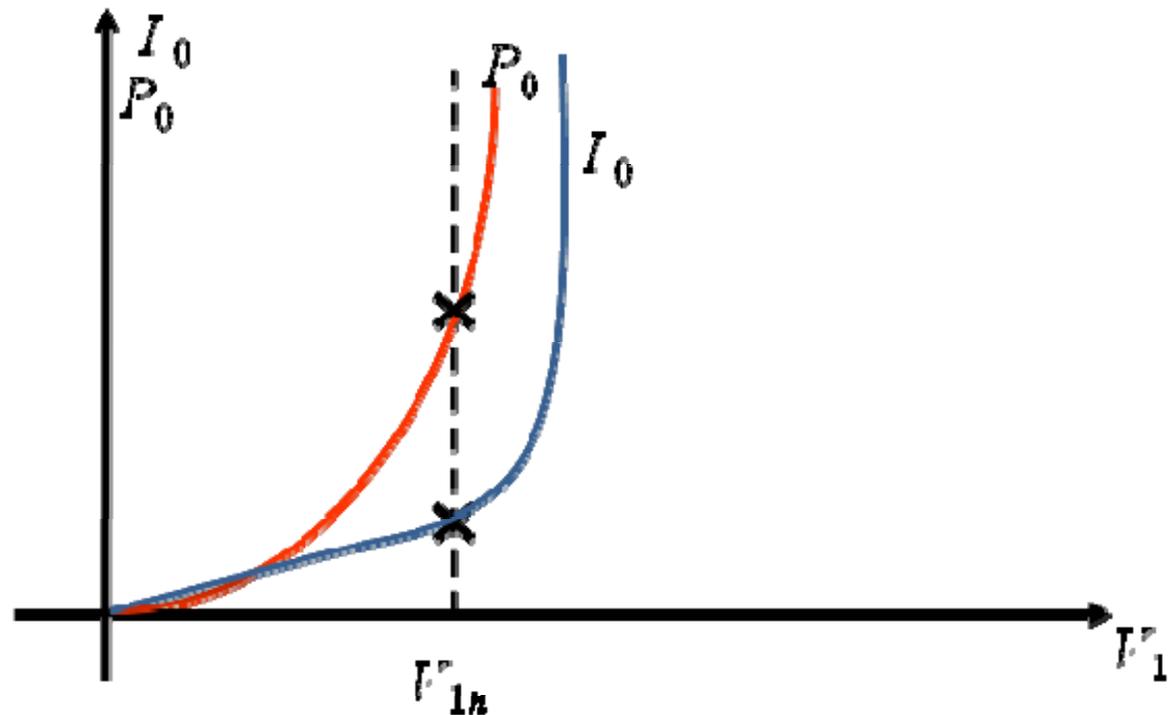
$$P_0 = f(V_1) \text{ parabola}$$

$$V_1 = f(I_0) \equiv \text{Curva normale di magnetizzazione}$$

$$P_{fe} \equiv B_M^2 \Rightarrow V_1^2$$

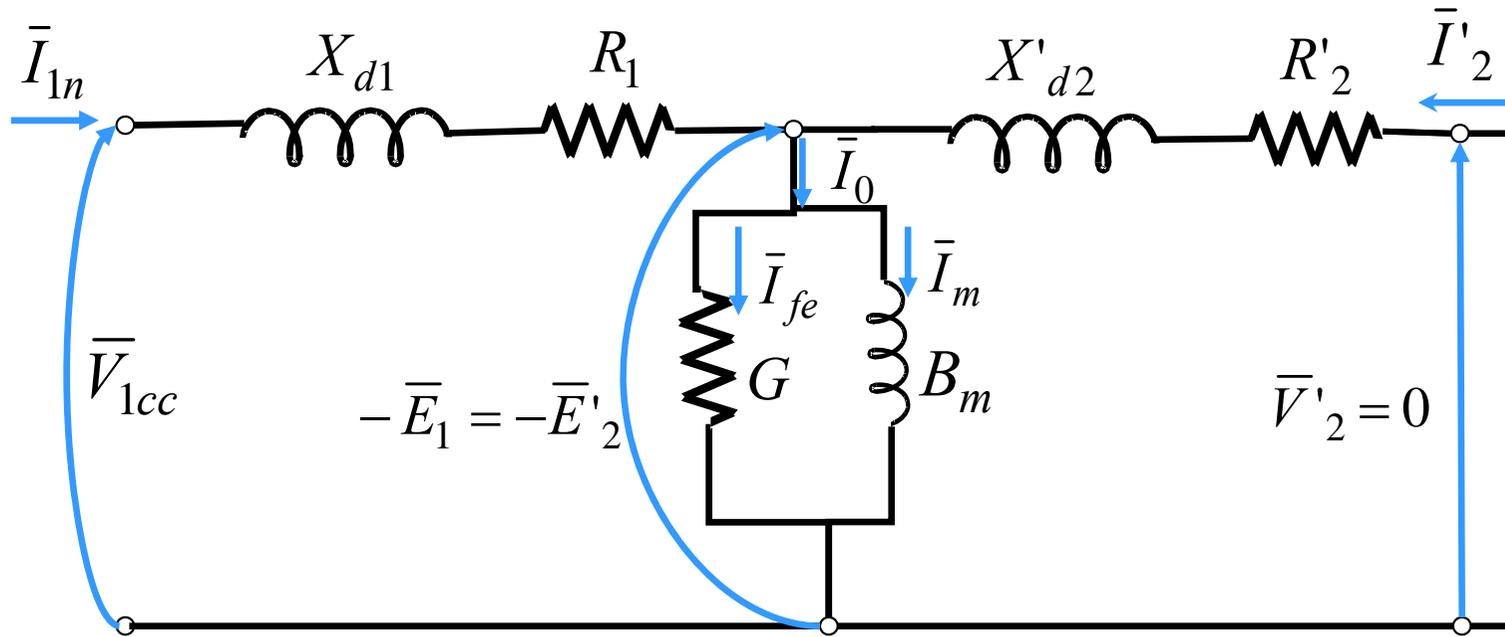
$$V_1 \equiv B \quad I_0 \equiv f.m.m.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y = \frac{I_0}{V_1} \\ G = \frac{P_0}{V_1^2} \\ B_m = \sqrt{Y^2 - G^2} \end{array} \right.$$



In corrispondenza alla tensione nominale, le letture degli strumenti forniscono i dati sufficienti a ricavare i parametri trasversali del circuito equivalente del trasformatore

# FUNZIONAMENTO IN CORTO CIRCUITO



Se applicassimo  $V_{1n} \Rightarrow I_{1cc}$  e  $I_{2cc}$  da 7 a 30 volte  $I_{1n}$  e  $I_{2n}$

Si deve applicare una tensione  $V_{1cc}$  tale che  $I_1 = I_{1n}$  e  $I_2 = I_{2n}$

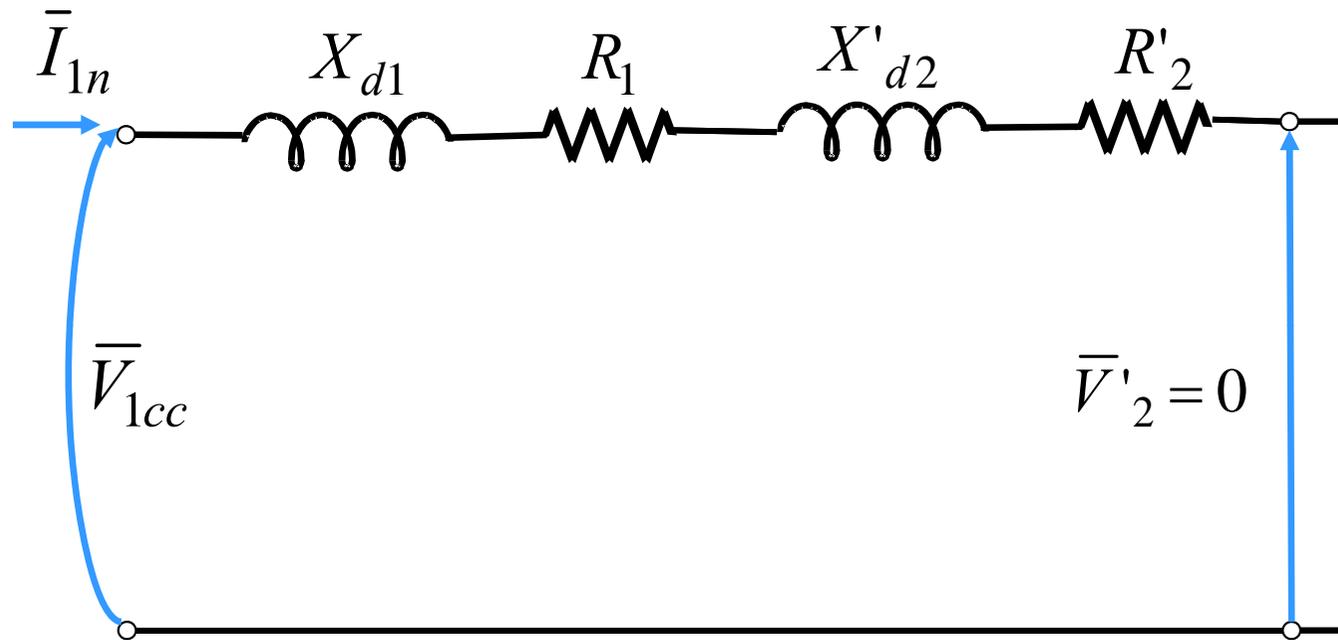
$V_{1cc}$  : Tensione di corto circuito

$V_{1cc} = 3 \div 5\% V_{1n}$  decresce al crescere della potenza

$$\text{Se } V_1 = V_{1n} \Rightarrow I_0 = 4 - 12\% I_{1n}$$

$$\text{Se } V_1 = V_{1cc} \Rightarrow I_{0cc} = 1.2 - 18 \text{ ‰ } I_{1n}$$

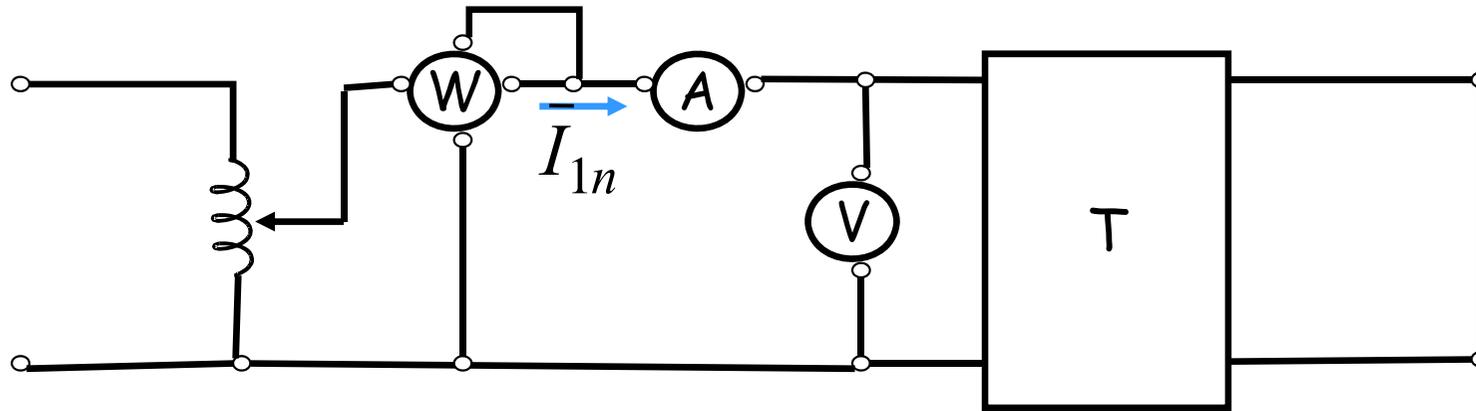
$I_0$  può essere trascurata rispetto ad  $I_1$  e  $I_2$  cioè: si trascurano le perdite nel ferro rispetto a quelle nel rame



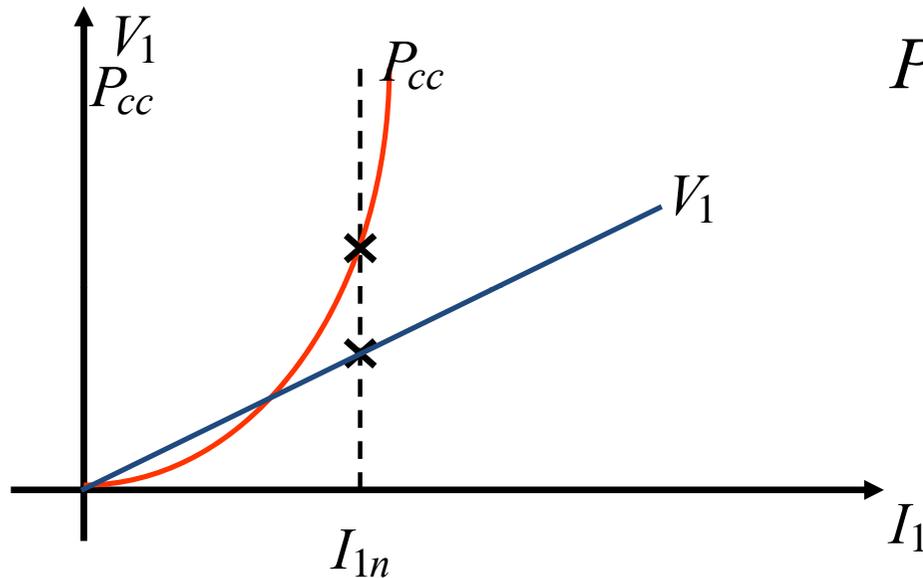
Impedenza di corto circuito primaria

$$\dot{Z}'_{cc} = (R_1 + R'_2) + j(X_{d1} + X'_{d2}) = R'_{cc} + jX'_{cc}$$

# PROVA IN CORTO CIRCUITO



$$V_{1cc} \Rightarrow I_{1n}$$



$$P_{cc} = f(I_1) \text{ parabola: } P_{cu} = P_{cc} \equiv I^2$$

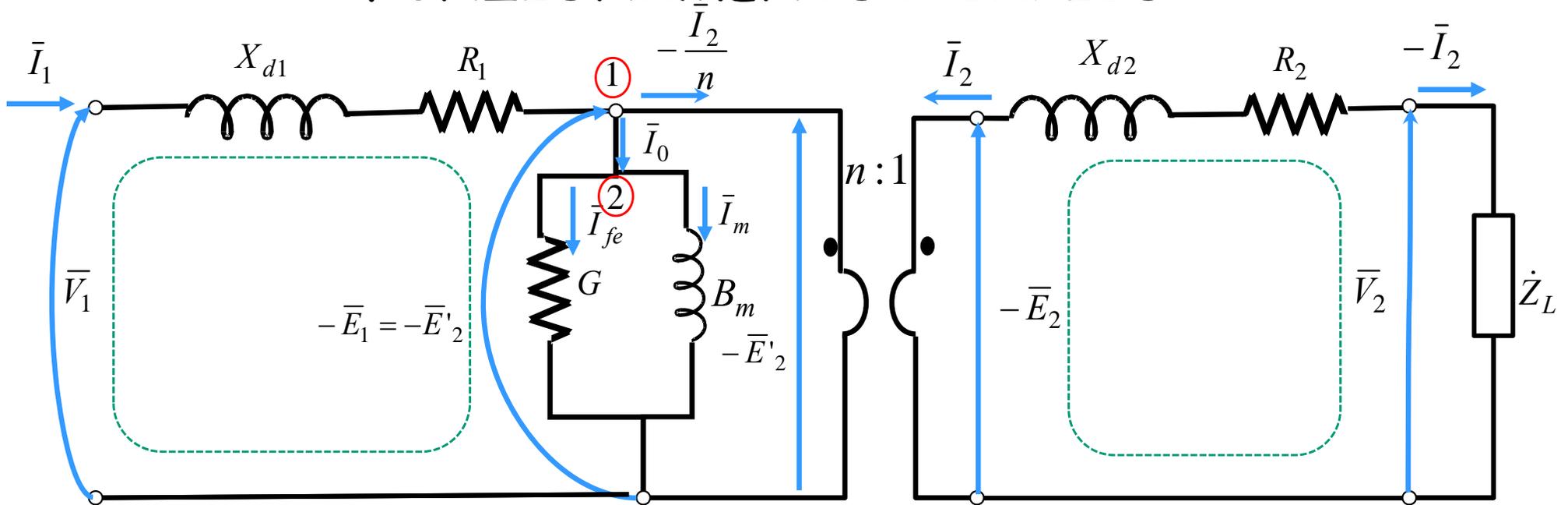
$$V_1 = f(I_1) \text{ retta passante per l'origine}$$

$$\dot{Z}'_{cc} \cong X'_{cc} \left( \frac{R'_{cc}}{X'_{cc}} \text{ piccolo} \right)$$

In corrispondenza della corrente nominale:

$$\left| \dot{Z}'_{cc} \right| = \frac{V_{1cc}}{I_{1n}}; R'_{cc} = \frac{P_{cc}}{I_{1n}^2} \Rightarrow X'_{cc} = \sqrt{\dot{Z}'_{cc}{}^2 - R'_{cc}{}^2}$$

# FUNZIONAMENTO A CARICO



$$\bar{V}_2 = -\dot{Z}_L \bar{I}_2 \quad \text{eq. carico} \quad -\bar{E}_2 = \bar{V}_2 + (R_2 + jX_{d2})(-\bar{I}_2) \quad \text{maglia sec.}$$

$$\begin{cases} -\bar{E}_1 = -\bar{E}'_2 = -n\bar{E}_2 \\ \bar{I}'_2 = -\frac{\bar{I}_2}{n} \end{cases} \quad \text{trasformatore} \quad \begin{cases} \bar{E}_1 = -j\omega N_1 \bar{\Phi} \\ \bar{E}_2 = -j\omega N_2 \bar{\Phi} \end{cases} \quad \text{f.e.m. indotte}$$

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_0 - \frac{\bar{I}_2}{n} = \bar{I}_0 + \bar{I}'_2 \quad \text{nodo 1} \quad \bar{I}_0 = \bar{I}_m + \bar{I}_{fe} \quad \text{nodo 2}$$

$$\bar{I}_0 = -(G + jB_m)\bar{E}_1 \quad \text{eq. ramo trasv.}$$

$$\bar{V}_1 = -\bar{E}_1 + (R_1 + jX_{d1})\bar{I}_1 \quad \text{maglia prim.}$$

# DIAGRAMMA FASORIALE FUNZIONAMENTO A CARICO

$$\bar{V}_2 = -\dot{Z}_L \bar{I}_2 \quad \text{eq. carico}$$

$$-\bar{E}_2 = \bar{V}_2 + (R_2 + jX_{d2})(-\bar{I}_2) \quad \text{maglia sec.}$$

$$\begin{cases} -\bar{E}_1 = -\bar{E}'_2 = -n\bar{E}_2 \\ \bar{I}'_2 = -\frac{\bar{I}_2}{n} \end{cases} \quad \text{trasformatore}$$

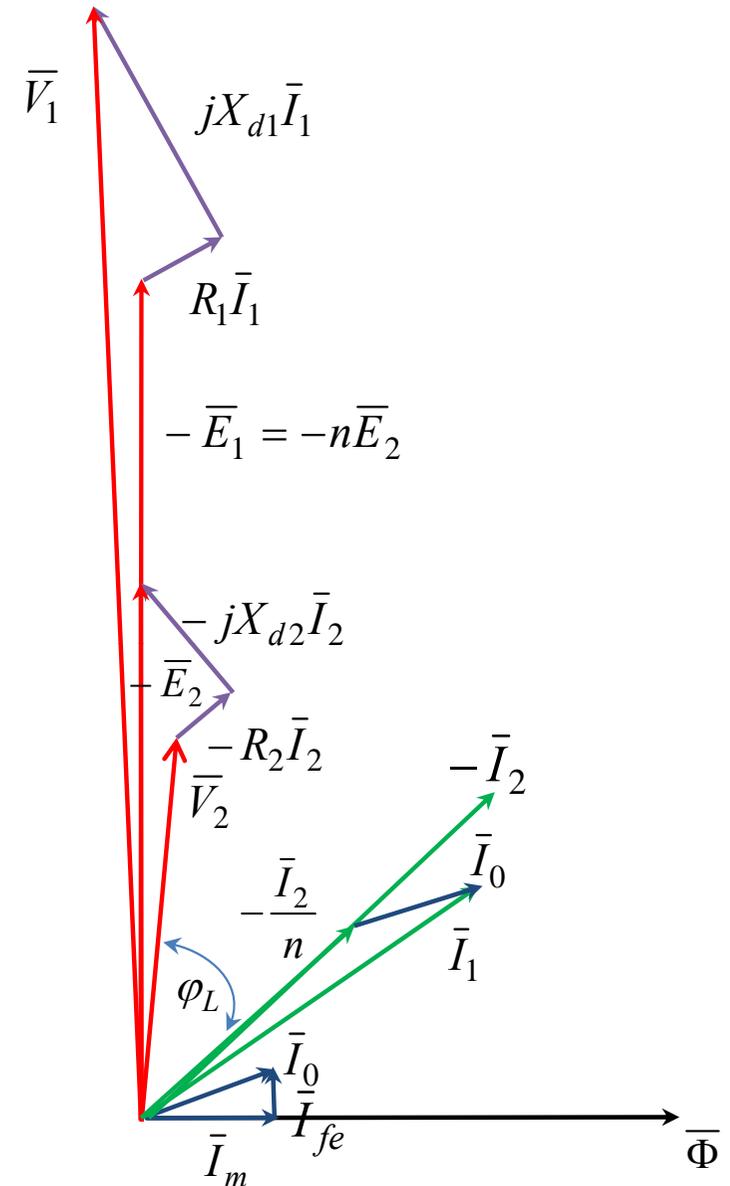
$$\begin{cases} \bar{E}_1 = -j\omega N_1 \bar{\Phi} \\ \bar{E}_2 = -j\omega N_2 \bar{\Phi} \end{cases} \quad \text{f.e.m. indotte}$$

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_0 - \frac{\bar{I}_2}{n} = \bar{I}_0 + \bar{I}'_2 \quad \text{nodo 1}$$

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_m + \bar{I}_{fe} \quad \text{nodo 2}$$

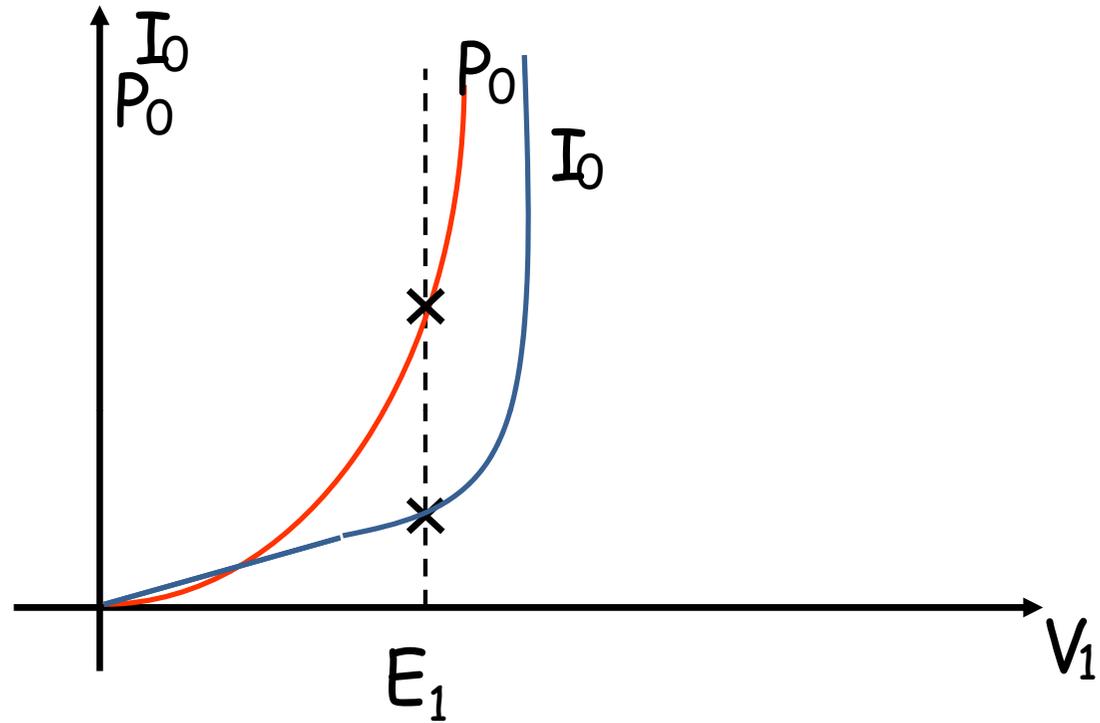
$$\bar{I}_0 = -(G + jB_m)\bar{E}_1 \quad \text{eq. ramo trasv.}$$

$$\bar{V}_1 = -\bar{E}_1 + (R_1 + jX_{d1})\bar{I}_1 \quad \text{maglia prim.}$$



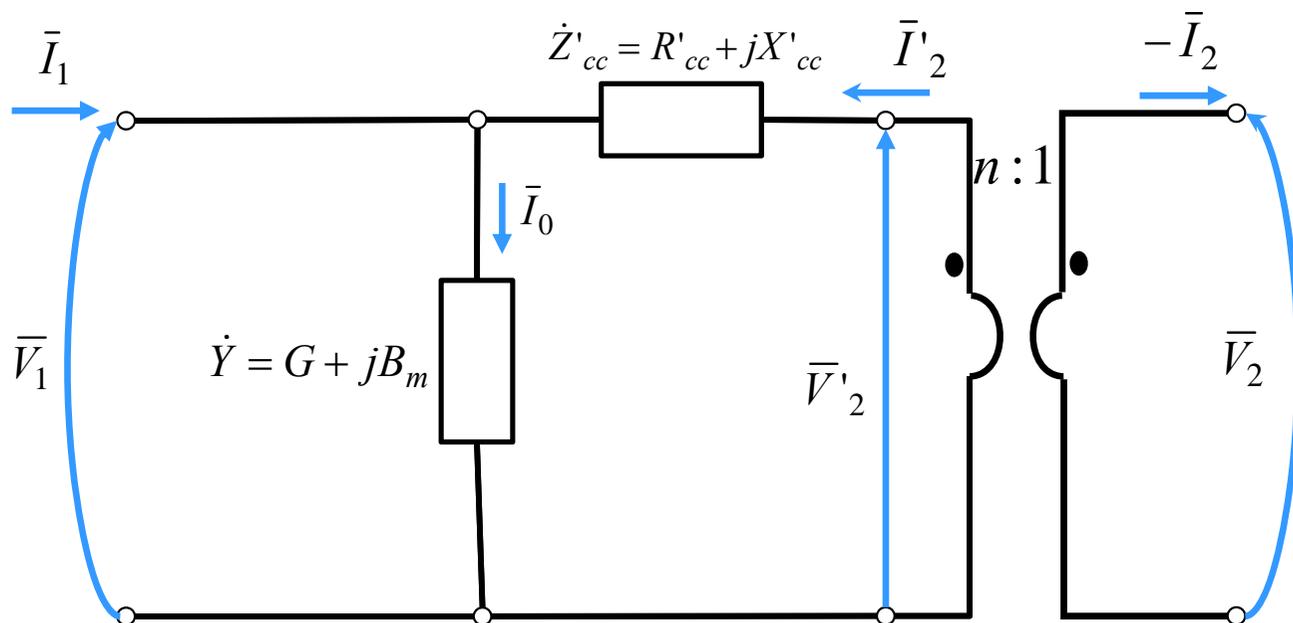
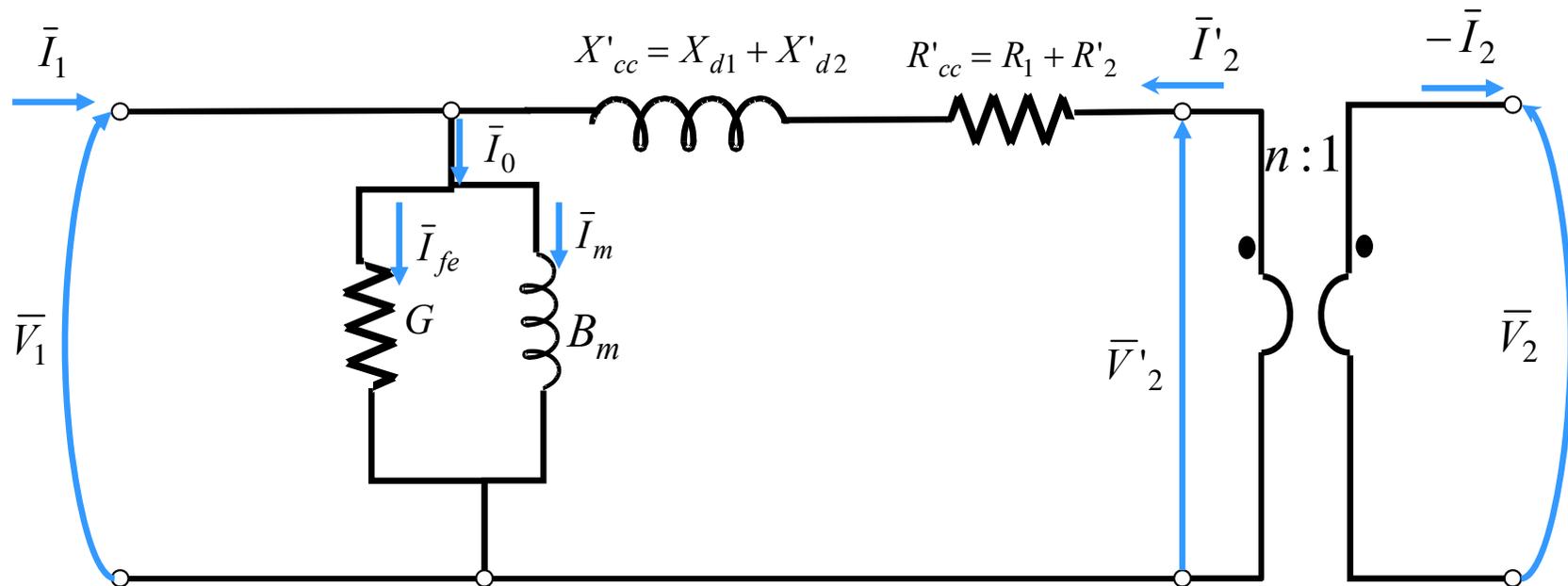
# FUNZIONAMENTO A CARICO (cnt.)

$$\left\{ \begin{array}{l} Y = \frac{I_0}{E_1} \\ G = \frac{P_0}{E_1^2} \\ B_m = \sqrt{Y^2 - G^2} \end{array} \right.$$

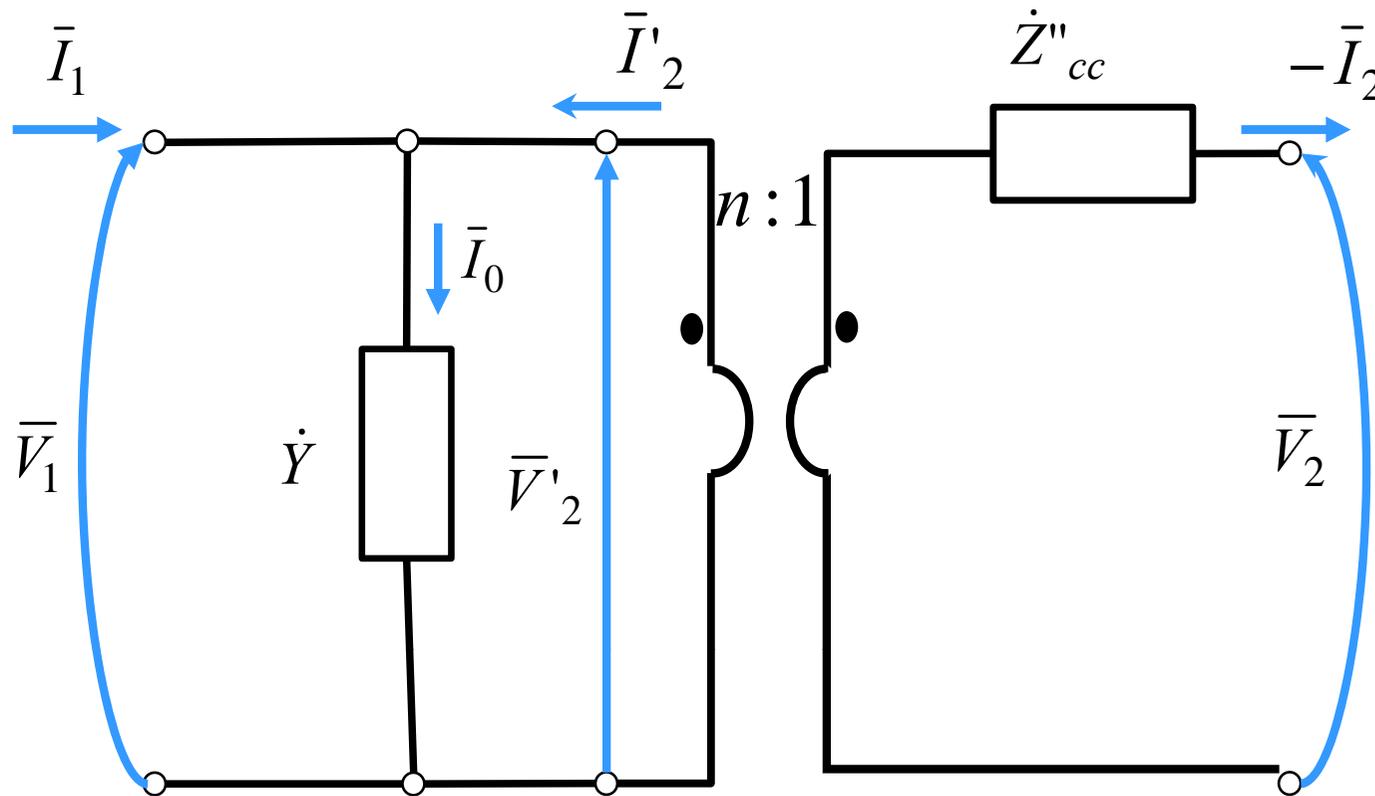


(curve ricavate nella prova a vuoto)

# CIRCUITI EQUIVALENTI SEMPLIFICATI



# CIRCUITI EQUIVALENTI SEMPLIFICATI (cnt.)



$$\dot{Z}''_{cc} = \left( \frac{R_1}{n^2} + R_2 \right) + j \left( \frac{X_{d1}}{n^2} + X_{d2} \right)$$

# DATI DI TARGA

I principali dati di targa sono:

- Frequenza nominale:  $f$  [Hz];
- Tensione nominale primaria (valore efficace):  $V_{1n}$  [V];
- Tensione nominale secondaria a vuoto (valore efficace):  $V_{20}$  [V];
- Rapporto di trasformazione a vuoto:  $n = V_{1n}/V_{20}$ ;
- Potenza apparente nominale:  $S_n = V_{1n}I_{1n} = V_{20}I_{2n}$  [VA];

Inoltre, nella targa, vengono generalmente forniti i dati delle prove a vuoto ed in cortocircuito in percento rispetto ai valori nominali. Ad esempio:

- Potenza a vuoto (pari alle perdite nel ferro):  $P_0\%$ ;
- Corrente a vuoto:  $I_0\%$ ;
- Potenza in corto circuito (pari alle perdite nel rame):  $P_{cc}\%$ ;
- Tensione di corto circuito:  $V_{cc}\%$ .

$$Z'_{cc} = \frac{V_{cc}\%}{100} \cdot \frac{V_{1n}^2}{S_n} \quad ; \quad R'_{cc} = \frac{P_{cc}\%}{100} \cdot \frac{V_{1n}^2}{S_n} \Rightarrow X'_{cc} = \sqrt{Z_{cc}'^2 - R_{cc}'^2}$$

$$Y = \frac{I_0\%}{100} \cdot \frac{S_n}{V_{1n}^2} \quad ; \quad G = \frac{P_0\%}{100} \cdot \frac{S_n}{V_{1n}^2} \Rightarrow B_m = \sqrt{Y^2 - G^2}$$

# ESEMPIO

I dati di targa di un trasformatore monofase sono:

$$n = \frac{12kV}{260V} ; S_n = 40 kVA ; f = 50 Hz ; V_{cc} \% = 4\% ; P_{cc} \% = 1.8\% ; P_0 \% = 0.4\% ; \cos \varphi_0 = 0.2$$

Determinare il circuito equivalente

$$P_{cc} = \frac{P_{cc} \%}{100} \cdot S_n = \frac{1,8}{100} \cdot 40000 = 720W ; I_{2n} = \frac{S_n}{V_{20}} = \frac{40000}{260} = 153,85A$$

$$Z''_{cc} = \frac{V_{cc} \%}{100} \cdot \frac{V_{20}}{I_{2n}} = \frac{4}{100} \cdot \frac{160}{153,85} = 0,0676\Omega ; R''_{cc} = \frac{P_{cc}}{I_{2n}^2} = \frac{720}{153,85^2} = 0,0304\Omega$$

$$X''_{cc} = \sqrt{Z_{cc}''^2 - R_{cc}''^2} = 0,0604\Omega$$

$$P_0 = \frac{P_0 \%}{100} \cdot S_n = \frac{0,4}{100} \cdot 40000 = 160W ; G = \frac{P_0}{V_{1n}^2} = 1,11 \cdot 10^{-6} S ; \frac{B_m}{G} = \tan \varphi_0 \Rightarrow$$

$$B_m = G \cdot \tan \varphi_0 = 5,44 \cdot 10^{-6} S \Rightarrow Y = \sqrt{G^2 + B_m^2} = 5,55 \cdot 10^{-6} S$$

oppure

$$P_0 = V_{1n} I_0 \cos \varphi_0 \Rightarrow I_0 = \frac{P_0}{V_{1n} \cos \varphi_0} = \frac{160}{12000 \cdot 0,2} = 0,0667 A$$

$$Y = \frac{I_0}{V_{1n}} = 5,55 \cdot 10^{-6} S \Rightarrow B_m = \sqrt{Y^2 - G^2} = 5,44 \cdot 10^{-6} S$$

# Rendimento

$$\eta = \frac{\text{potenza attiva assorbita dal carico}}{\text{potenza attiva erogata al primario}} = \frac{P_u}{P_e}$$

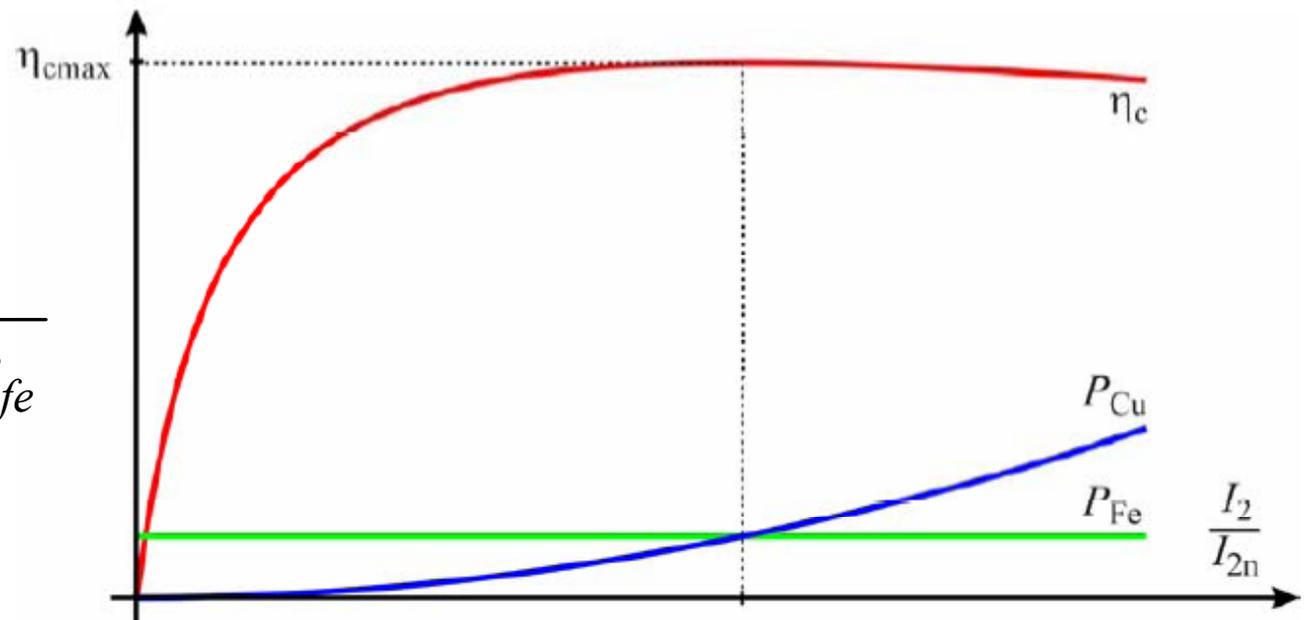
$$P_p = \text{perdite complessive nella macchina} = P_{fe} + P_{cu}$$

$$\eta = \frac{P_u}{P_u + P_p} = 1 - \frac{P_p}{P_u + P_p} = 1 - \frac{P_{fe} + P_{cu}}{P_u + P_{fe} + P_{cu}}$$

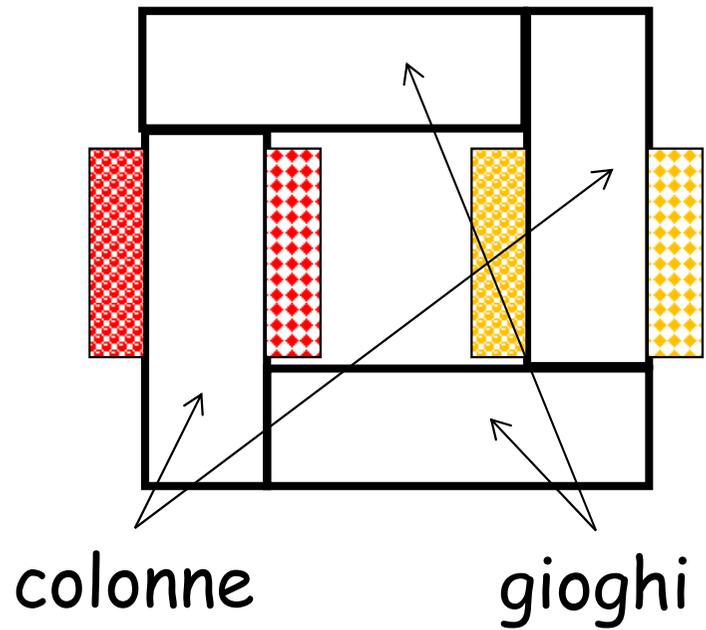
Rendimento convenzionale  
del trasformatore in  
funzione del carico:

$$\eta_c = \frac{V_2 I_2 \cos \varphi_2}{V_2 I_2 \cos \varphi_2 + R_{cc}'' I_2^2 + P_{fe}}$$

$$\text{Fattore di carico} = \frac{I_2}{I_{2n}}$$



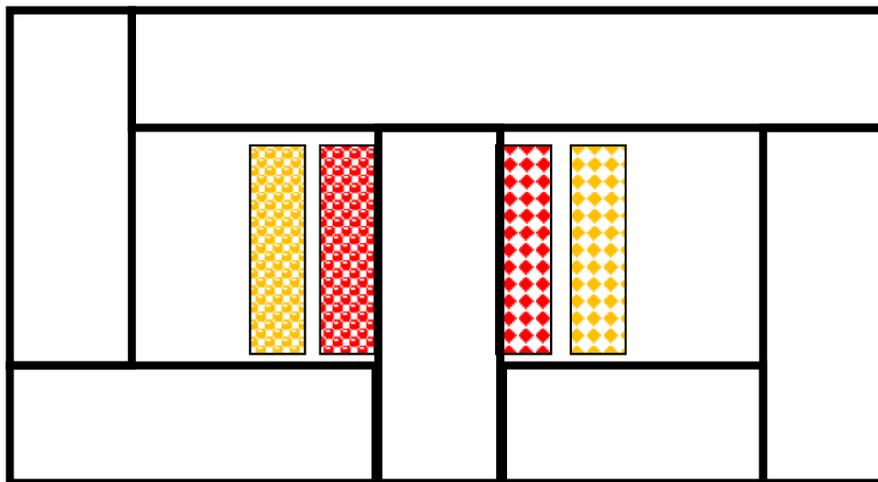
# Particolarità costruttive



Nucleo a colonne

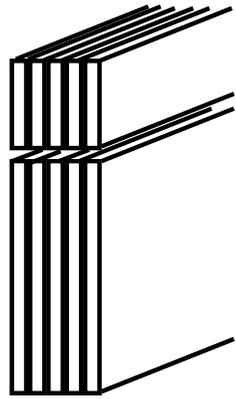


Nucleo a mantello

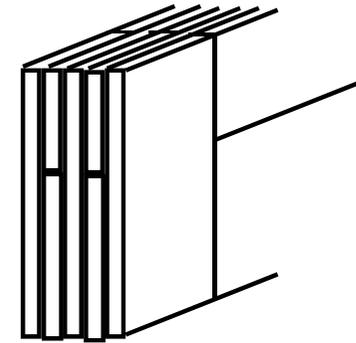


# Particolarità costruttive (cnt.)

Giunto  
piallato

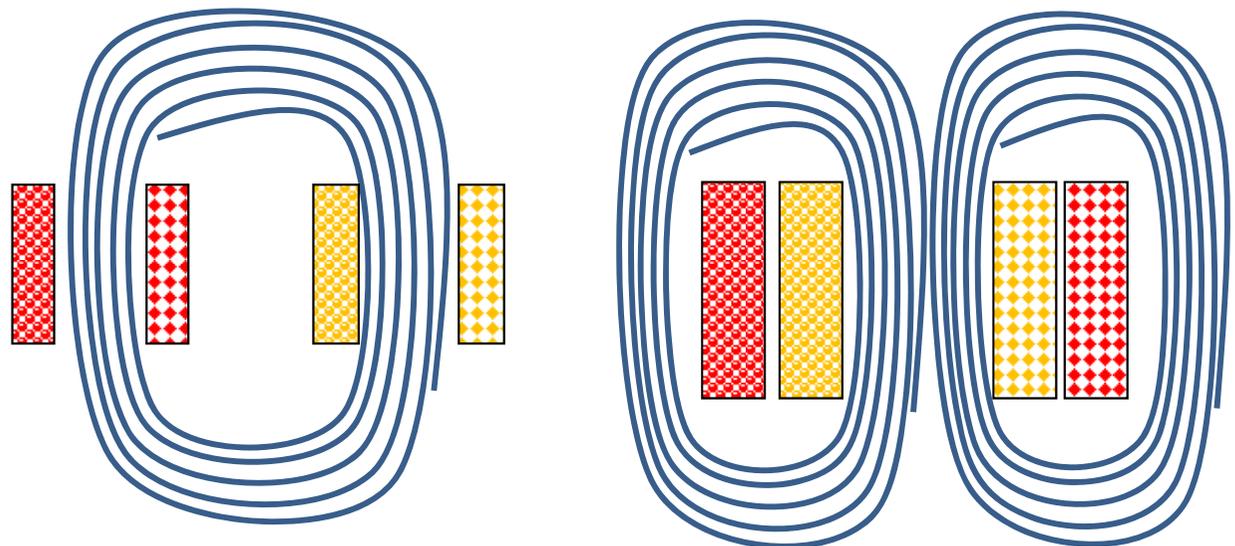


Giunto  
intercalato



- lamierini in acciaio speciale da pochi mm a 0.35-0.5 mm isolati tra loro mediante carta (0.03 mm) o vernici
- materiale drogato con silicio (qualche percentuale) e cifra di perdita di pochi W/kg

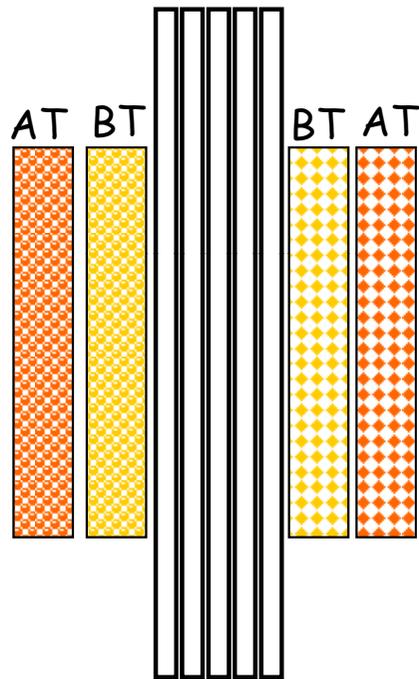
Trasformatori di  
piccola potenza  
(<1kVA):



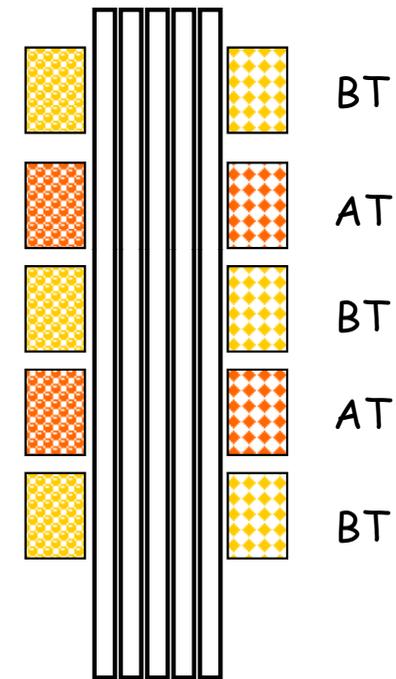
Lamierino ferromagnetico  
avvolto a spirale in più strati

# Particolarità costruttive (cnt.)

- Avvolgimenti sono realizzati in rame o in alluminio
- Sezione dei conduttori circolare o rettangolare
- Avvolgimenti possono avere una configurazione concentrica (con l'avvolgimento a più bassa tensione all'interno) o alternata



Avvolgimento concentrico



Avvolgimento alternato

# Raffreddamento

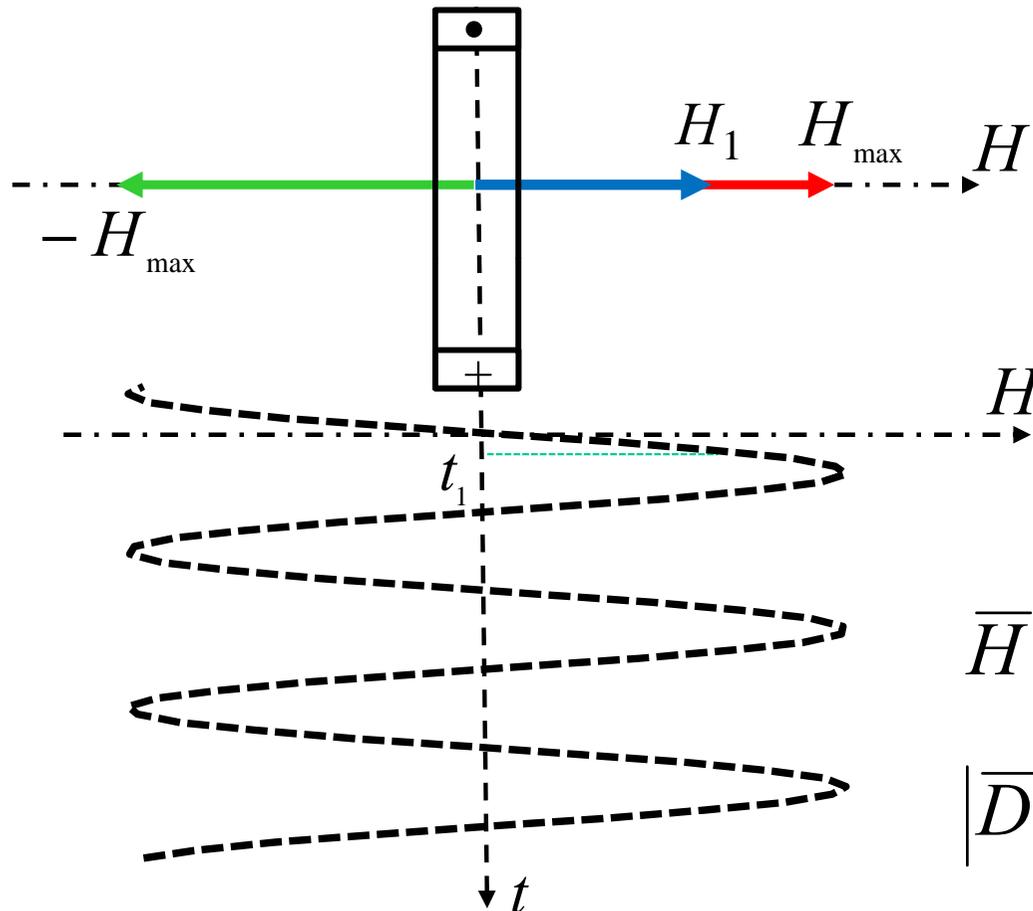
- Il trasformatore, come le altre macchine elettriche ad induzione, è sede di perdite di energia che si trasformano in calore sia nel rame che nel ferro.
- Sistemi di raffreddamento:
  1. raffreddamento in aria o in olio
  2. raffreddamento naturale o il raffreddamento forzato (o artificiale)

<b>Fluido intermedio</b>	<b>Aria</b>	<b>Olio</b>
<b>Mezzo di attivazione</b>		
<b>Naturale</b>	Piccole potenze e tensioni modeste: $S < 150-200$ kVA; $V < 10$ kV	Potenze da 5 a 6000 kVA; Tensioni fino a 70 kV
<b>Forzato</b>	Presenza di ventilatori. Medie potenze	Potenze da 10 a 400 MVA e oltre; Tensioni maggiori di 70 kV

# Campo magnetico rotante

## ▪ Teorema di Galileo Ferraris

Un sistema polifase di correnti che scorre in un opportuno sistema di conduttori genera un campo magnetico di intensità costante la cui direzione ruota in un piano con moto uniforme cioè un **CAMPO MAGNETICO ROTANTE** del tutto simile a quello ottenuto con la rotazione di un magnete



$$i(t) = I_{MAX} \sin \omega t$$

$\bar{D}$  ruota in senso orario

$\bar{S}$  ruota in senso antiorario

(velocità angolare  $\omega$ )

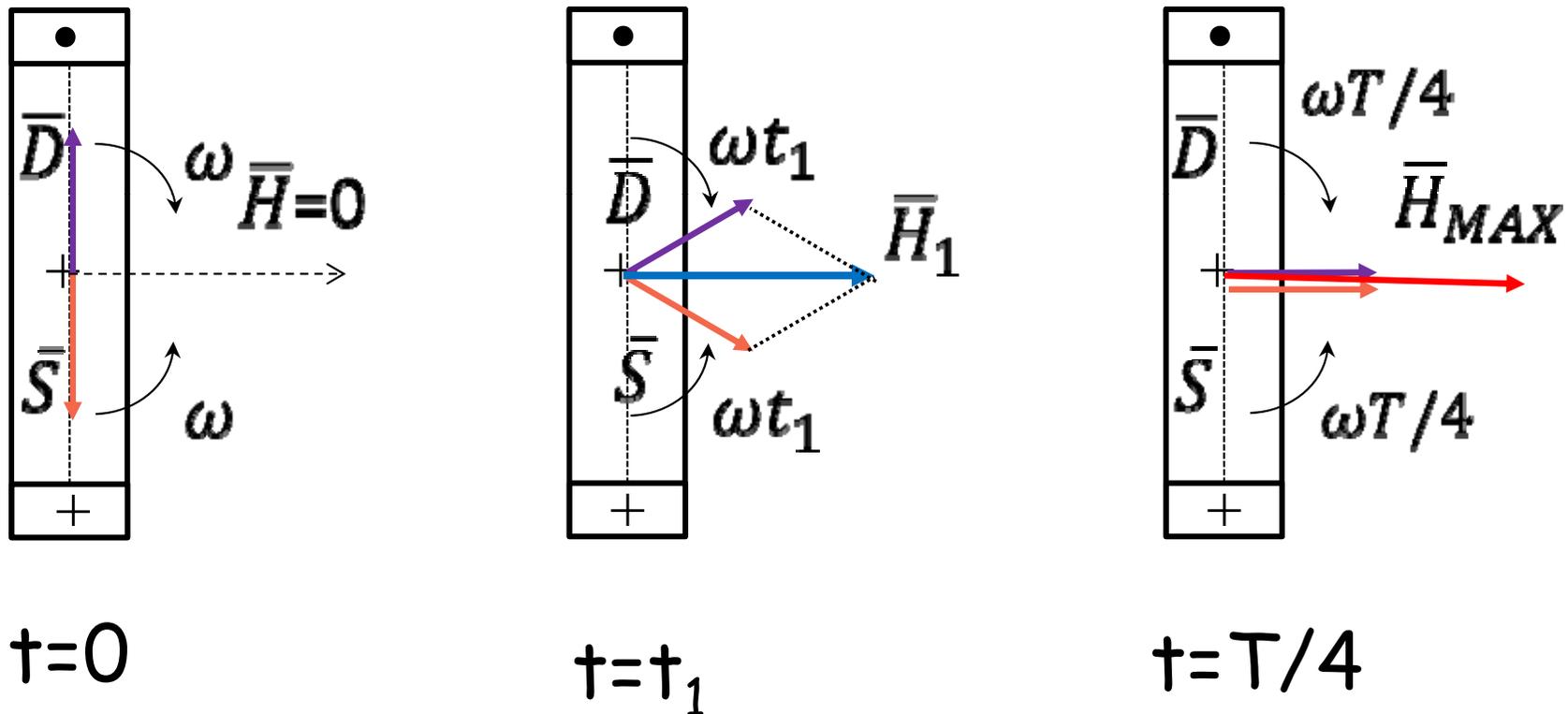
$$\bar{H} = D \sin \omega t + S \sin \omega t = 2D \sin \omega t$$

$$|\bar{D}| = |\bar{S}| = \frac{H_{max}}{2}$$

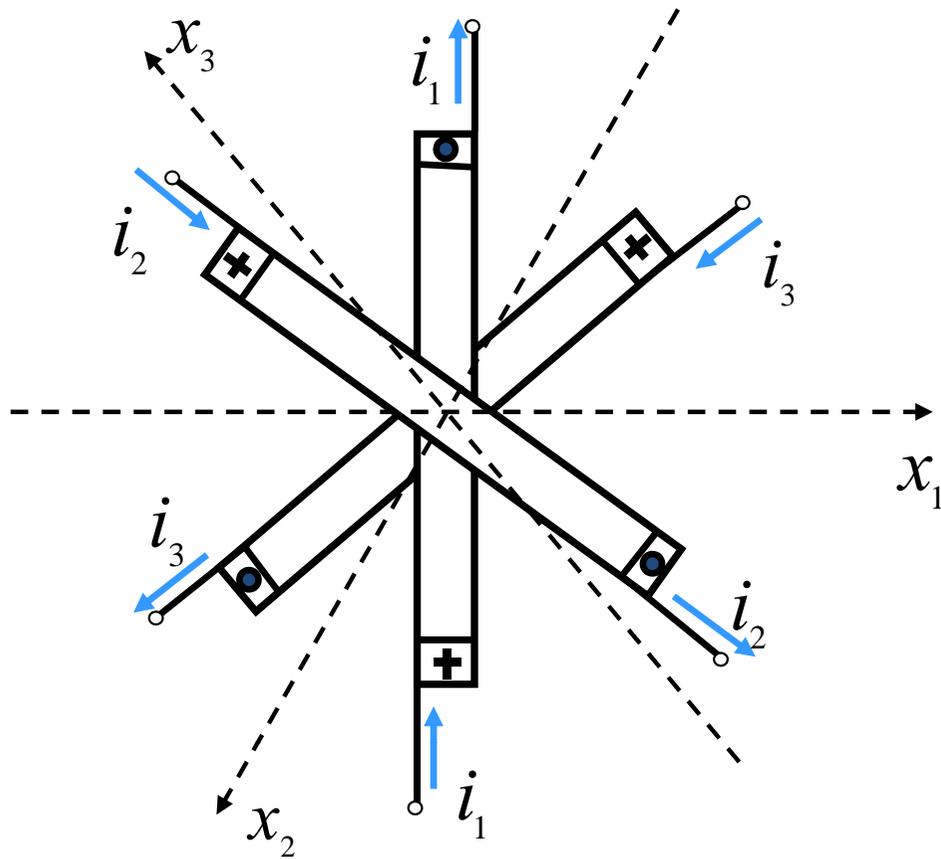
# Campo magnetico rotante

## ▪ Teorema di Galileo Ferraris

Un sistema polifase di correnti che scorre in un opportuno sistema di conduttori genera un campo magnetico di intensità costante la cui direzione ruota in un piano con moto uniforme cioè un CAMPO MAGNETICO ROTANTE del tutto simile a quello ottenuto con la rotazione di un magnete

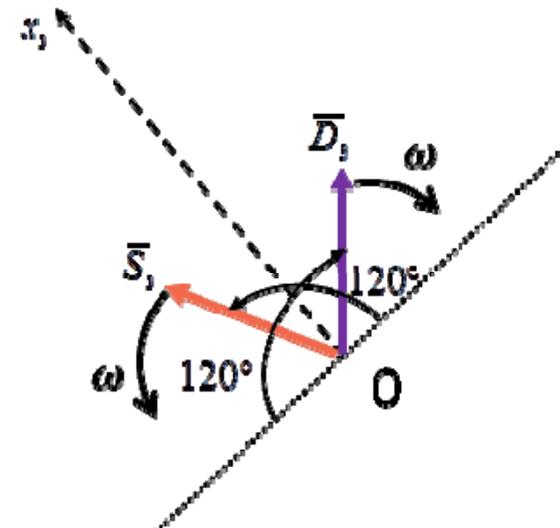
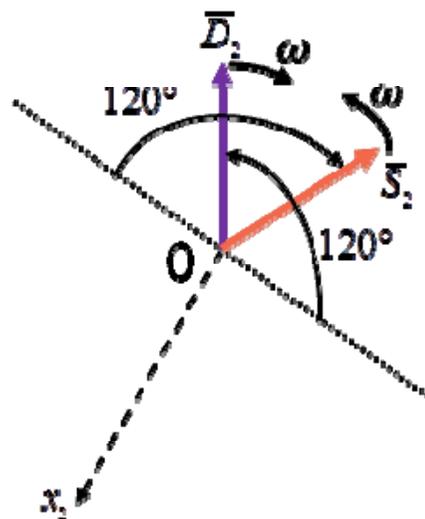
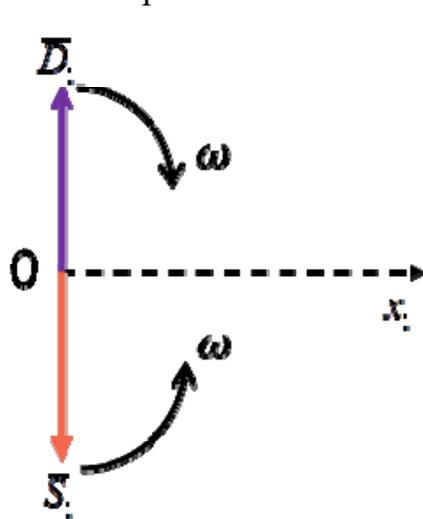


# Campo magnetico rotante



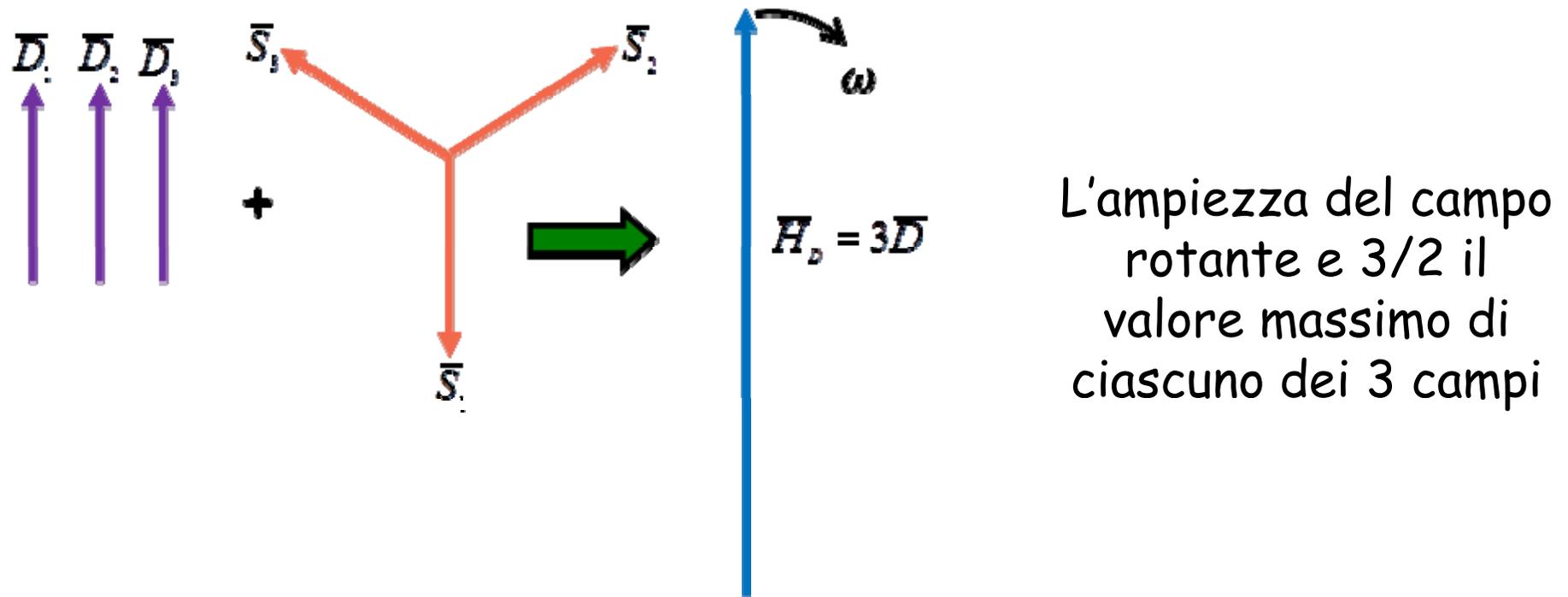
$$\begin{cases} i_1 = I_{MAX} \cos \omega t \\ i_2 = I_{MAX} \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ i_3 = I_{MAX} \cos \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \end{cases}$$

$t = 0$



Componenti destrorsa e sinistrorsa dei campi prodotti dalle tre bobine

# Campo magnetico rotante

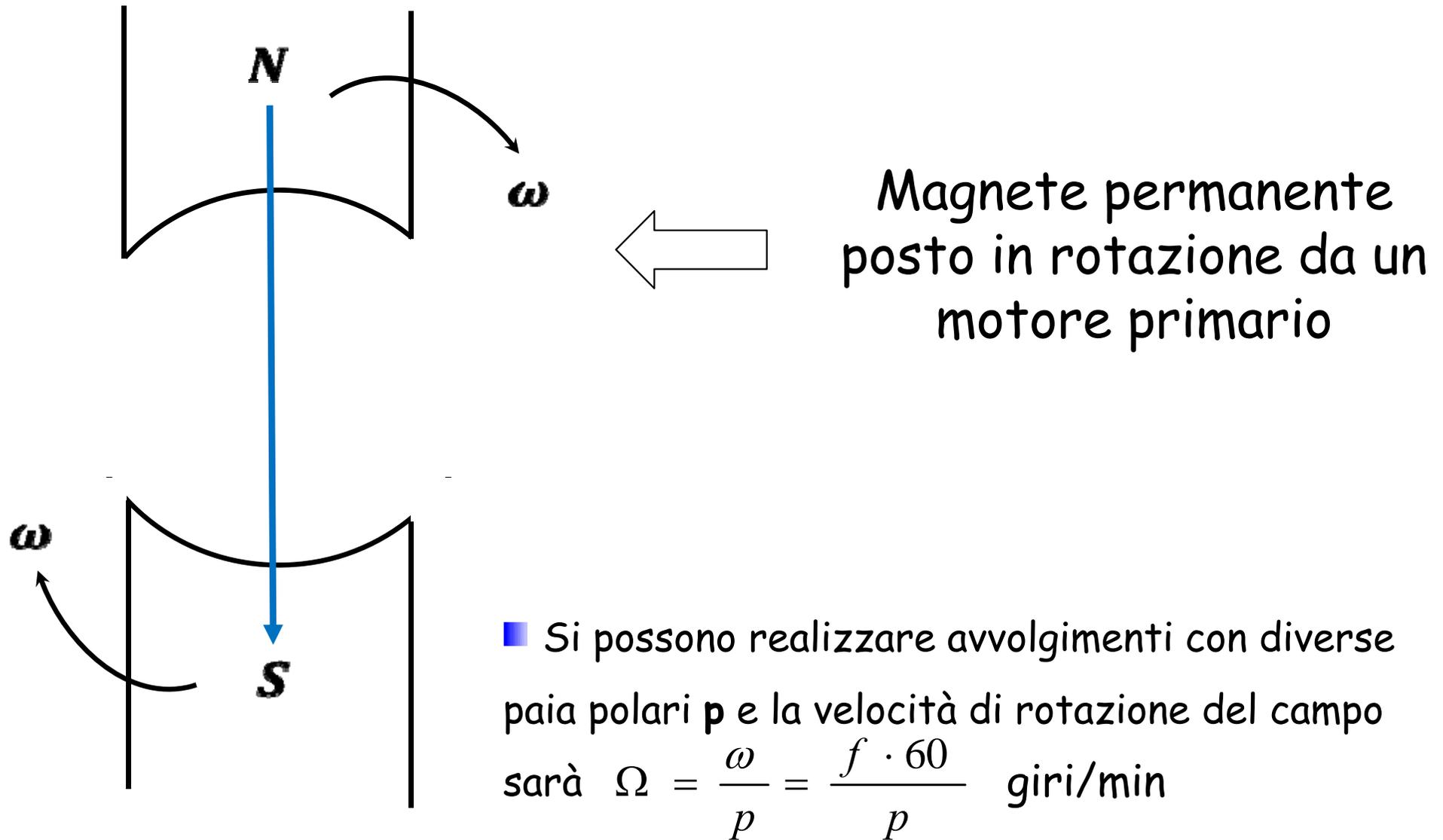


L'ampiezza del campo rotante è  $3/2$  il valore massimo di ciascuno dei 3 campi

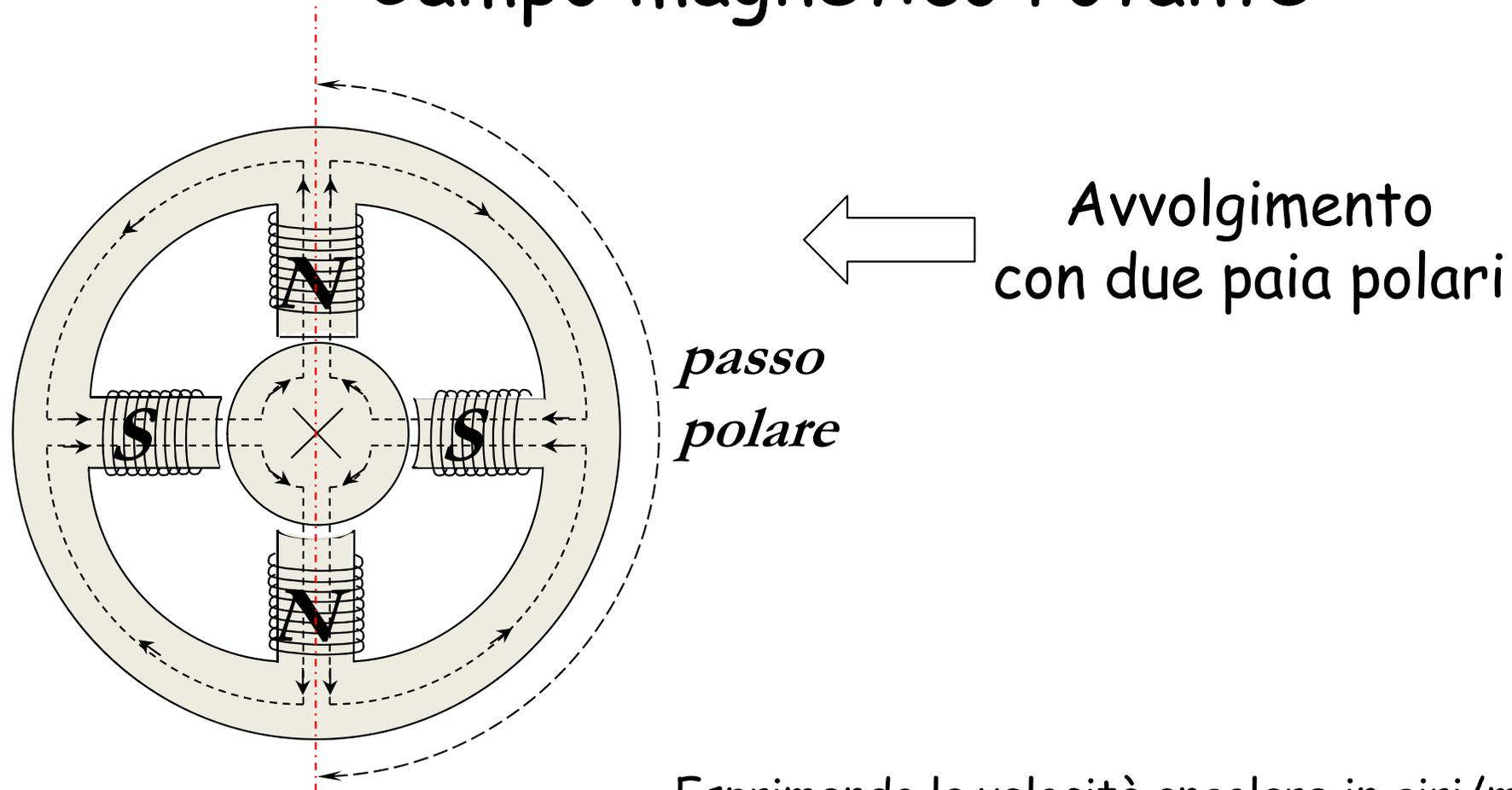
Il sistema produce un campo magnetico di ampiezza costante che ruota con velocità angolare pari alla pulsazione delle correnti (c.v.d.)

$$\text{Se } f = 50\text{Hz} \Rightarrow \omega = 2\pi f [\text{rad} / \text{s}] = 3000 \text{ giri/minuto}$$

# Campo magnetico rotante



# Campo magnetico rotante



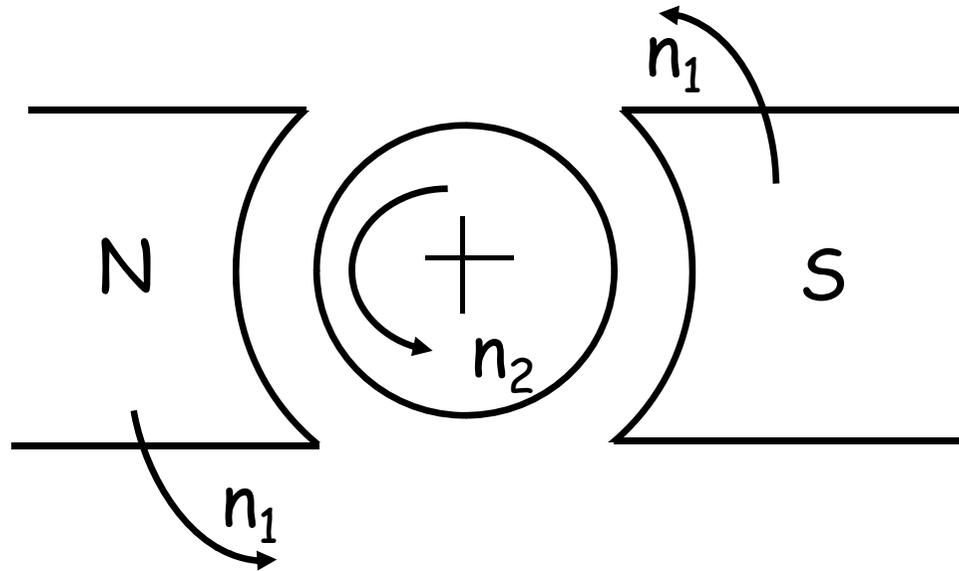
Esprimendo la velocità angolare in giri/minuti, alla frequenza di 50 Hz si avrà:

$p$	1	2	3	4	5	6
$\Omega = \frac{50 \cdot 60}{p}$	3000	1500	1000	750	600	500

Si possono realizzare differenti velocità del campo magnetico

# Applicazioni dei campi magnetici rotanti

## MACCHINA ASINCRONA

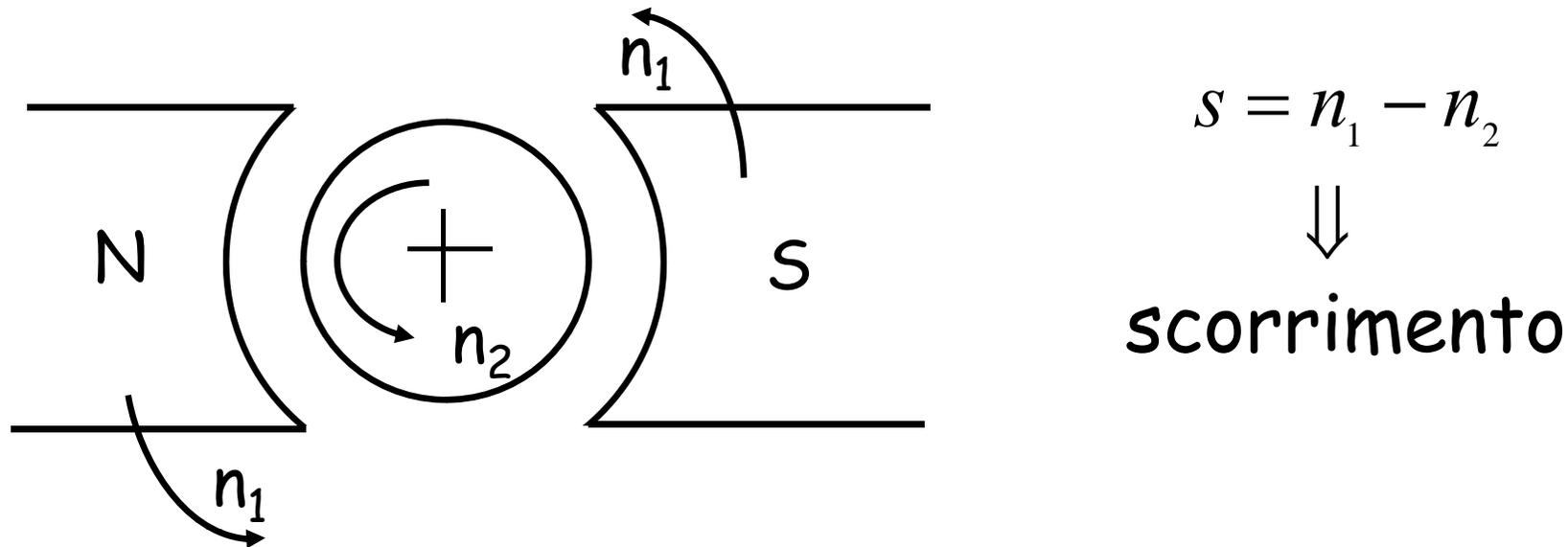


$$n_2 < n_1$$

- Facendo ruotare il magnete si generano nel cilindro delle correnti indotte che obbligano il cilindro a seguire la rotazione del magnete
- Le correnti indotte tendono ad opporsi alla causa che le ha generate, quindi l'indotto ruota seguendo il campo induttore

# Applicazioni dei campi magnetici rotanti

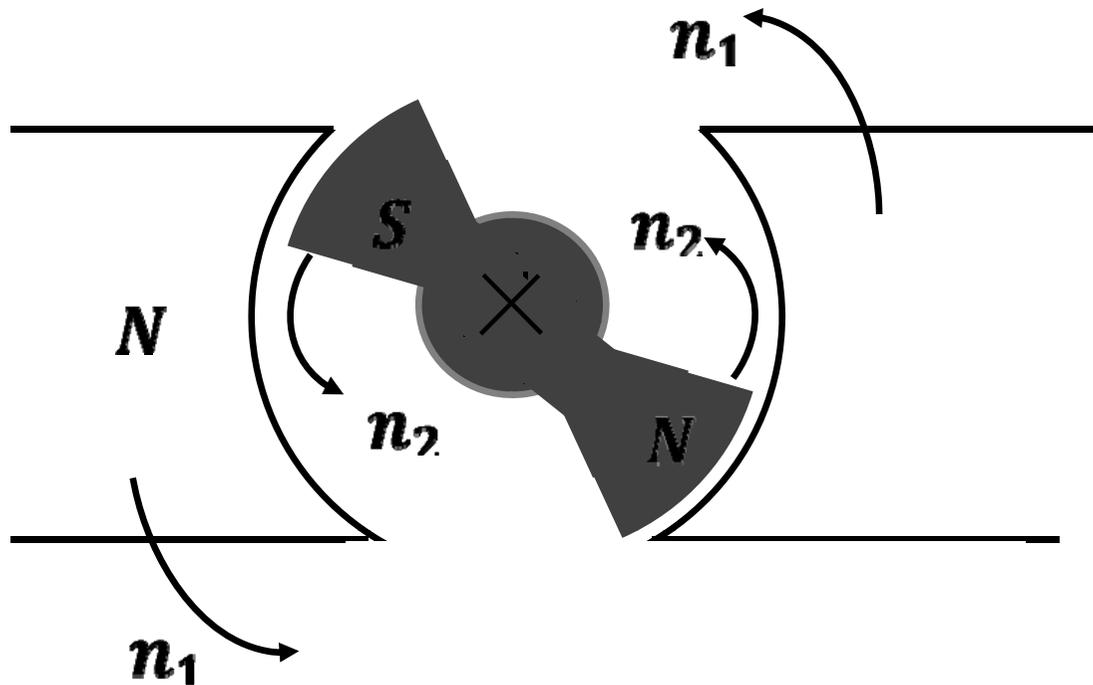
## MACCHINA ASINCRONA



- L'indotto non può raggiungere la velocità del campo induttore perché cesserebbe il moto relativo e si avrebbe l'estinzione delle correnti indotte e conseguentemente la forza motrice necessaria a mantenere la rotazione ( $n_2 < n_1$ ).
- Se al posto del magnete posto in rotazione, si utilizza un sistema opportuno di avvolgimenti fissi, si ha lo stesso comportamento
- La velocità dell'indotto (rotore) è tanto più piccola quanto maggiore è la coppia resistente applicata all'asse

# Applicazioni dei campi magnetici rotanti

## MACCHINA SINCRONA



$$n_2 = n_1$$

$$\Omega = \frac{\omega}{p}$$



velocità di sincronismo

- Per l'attrazione costante che si esercita fra i poli opposti dei due magneti, il secondo viene trascinato in rotazione alla medesima velocità
- Se il campo rotante è prodotto da una serie di avvolgimenti fissi e il magnete rotante è sostituito da un elettromagnete eccitato in corrente continua, si realizza il motore sincro