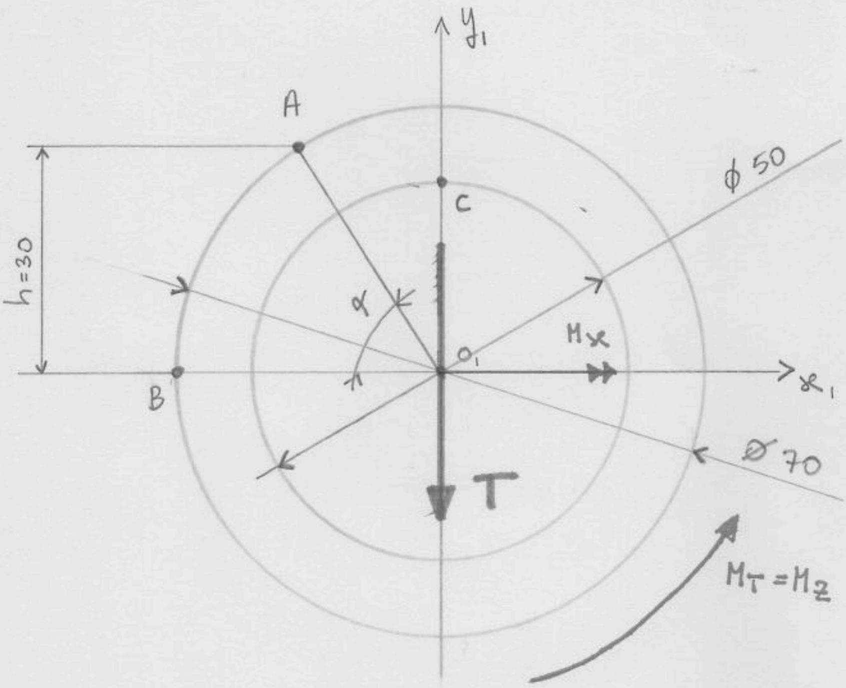
ESERCIZIO SFORZI E CERCHI DI MOHR



$$\begin{cases} M_x = 2.8e6 \text{ Nmm} \\ M_z = 5e6 \text{ Nmm} \\ T = 100e3 \text{ N} \end{cases}$$

1) Calcolo dello stato di sforzo nei punti A, B, C.

2) Disegno del cerchio di Mohr per i punti A, B, C

3) Sforzi principali (e dir. principali) punti A, B, C.

4) Calcolo τ_{MAX} e sua direzione punti A, B, C.

• CALCOLI PRELIMINARI

$$\begin{cases} D = 70 \text{ mm} \\ d = 50 \text{ mm} \\ h = 30 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{2 \cdot h}{D}\right) =$$

$$= \arcsin\left(\frac{60}{70}\right) = 58.9973^\circ$$

$$J_x = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi (70^4 - 50^4)}{64} = 871791.9614 \text{ mm}^4$$

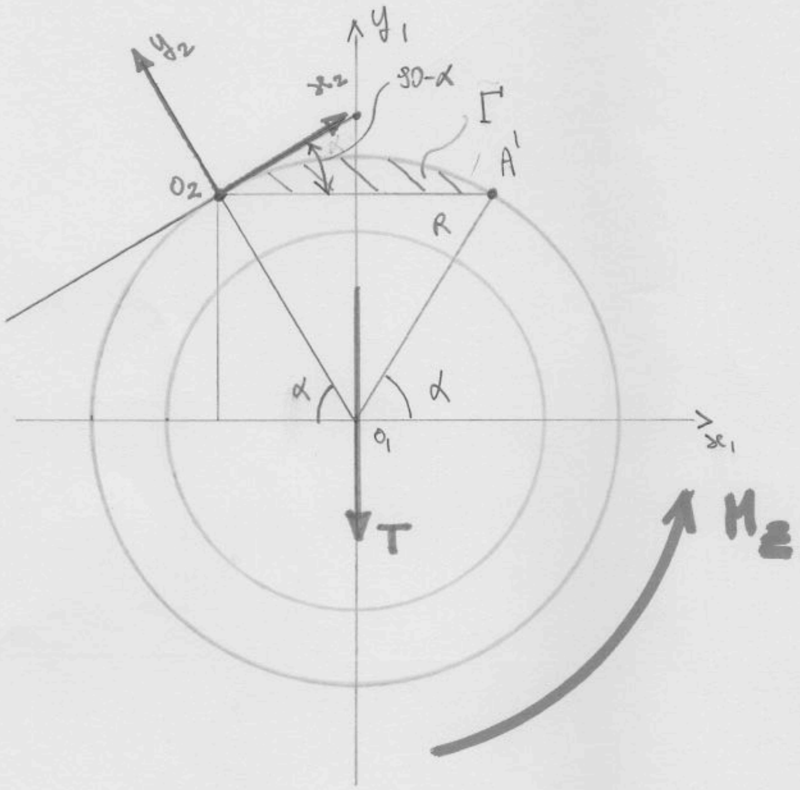
$$J_p = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi (70^4 - 50^4)}{32} = 1743583.9227 \text{ mm}^4$$

• PUNTO A { sistema di riferimento locale $\{O_2 x_2 y_2 z_2\}$

- Problema flessionale: nel punto A l'unico contributo agli sforzi assiali è dato dal momento flettente M_x, che genera uno sforzo di trazione orientato come l'asse z_2.

$$\sigma_{z_2} = \frac{M_x \cdot h}{J_x} = \frac{M_x \cdot 30}{J_x} = +96.3533 \text{ MPa}$$

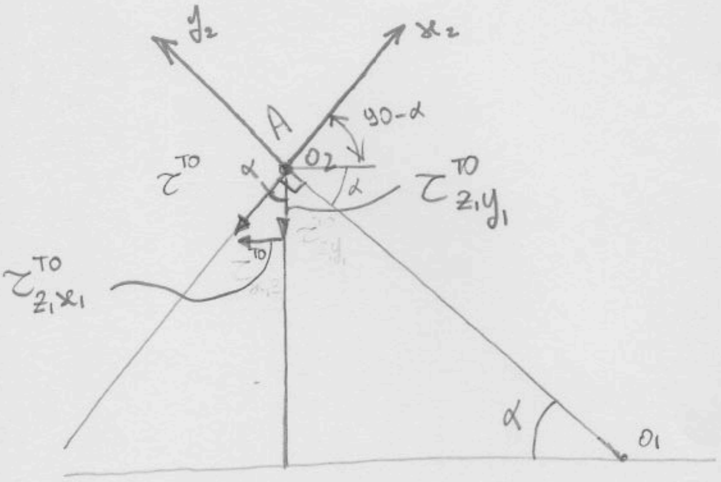
- Problema torsionale (taglio): nel punto A ci sono due fattori che contribuiscono agli sforzi tangenziali:
  - le τ derivanti dalla forza di taglio T.
  - le τ derivanti dal momento torcente M_z.



• Nel caso delle τ^{TO} derivanti dalla torsione possiamo utilizzare la ben nota formula

$$\tau^{TO} = \frac{M_T\, r}{J_P} = \frac{M_z \cdot D/2}{J_P} = 100.3680 \text{ MPa}$$

Nel sistema di riferimento locale $\{O_2 x_2 y_2\}$ queste sono parallele all'asse x_2 ma dirette in verso opposto. Il sistema di riferimento $\{O_2 x_2 y_2 z_2\}$ è montato nel punto A in modo che l'asse x_2 giaccia nella tangente alla circonferenza in A. Per calcolare le componenti di τ^{TO} secondo gli assi del riferimento $\{O_1 x_1 y_1 z_1\}$ è sufficiente proiettare e ragionare nelle componenti.



$$\tau^{TO}_{2,x_1} = \tau^{TO} \cdot \sin(\alpha) = 86.0297 \text{ MPa}$$

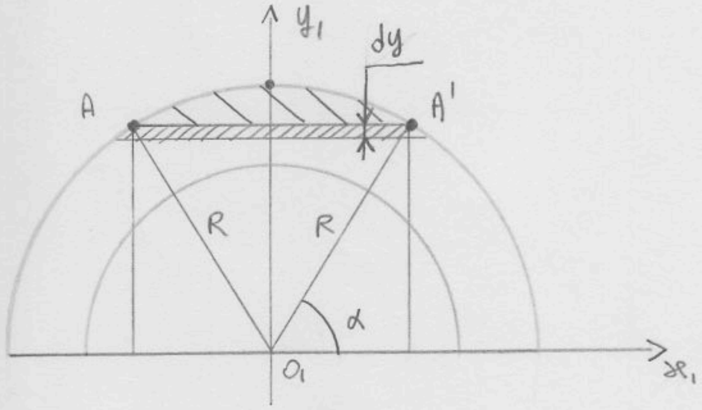
$$\tau^{TO}_{2,y_1} = \tau^{TO} \cdot \cos(\alpha) = 51.6974 \text{ MPa}$$

- Nel caso delle τ dovute al taglio ci si rifà alla formula del Jourowsky per le sezioni compatte simmetriche.

$$\tau = \frac{T\,S}{b\,J}.$$

Per prima cosa esprimiamo il momento statico dell'area Γ' in funzione di α.

L'area individuata da una corda passante per il punto A e il punto A' suo analogo si può esprimere come:



$$dA = 2R \cdot \cos(\alpha)\, dy$$

$$y = R \cdot \sin(\alpha) \qquad dy = R\cos(\alpha)\, d\alpha$$

$$dA = 2R\cos(\alpha)\, R\cos(\alpha)\, d\alpha =$$

$$= 2R^2\cos^2(\alpha)\, d\alpha$$

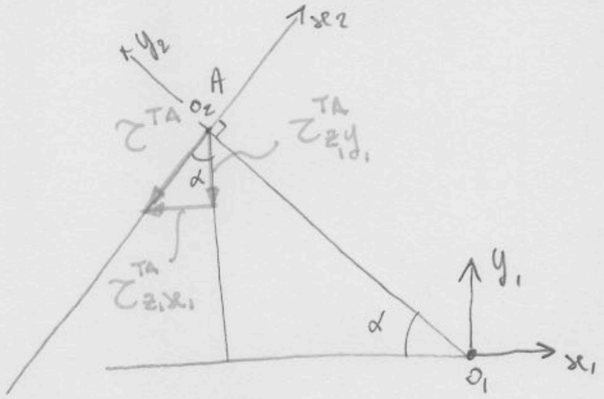
$$S_{x_1} = \int_A y\, dA = \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} 2R\sin(\alpha) R^2\cos^2(\alpha)\, d\alpha = \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} 2R^3 \underbrace{\sin(\alpha)}_{-g(x)'} \underbrace{\cos^2(\alpha)}_{f(g(x))}\, d\alpha =$$

$$= -2R^3 \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} -\sin(\alpha)\cdot\cos^2(\alpha)\, d\alpha = -\frac{2}{3}R^3\cos^3(\alpha)\Big|_\alpha^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}R^3\cos^3(\alpha)$$

La corda A-A' ha lunghezza $b = 2R\cos(\alpha)$.

$$\tau^{TA}_{z_1 y_1} = \frac{T \cdot \frac{2}{3} R^3 \cos^3(\alpha)}{2R\cos(\alpha)\, J_x} = 12.4265\ MPa$$

Sappiamo che le τ devono essere tangenti al contorno perché in caso contrario dovrebbe esistere una τ lungo la faccia laterale dell'albero, il che è impossibile perché le facce sono scariche. Di conseguenza deve esistere una componente $\tau_{z_1 x_1}$ che renda la risultante τ^{TA} tangente alla circonferenza in A.



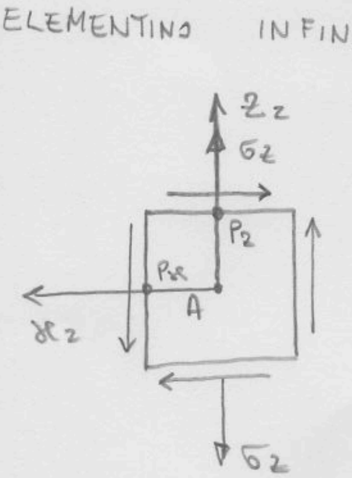
$$\tau^{TA}_{z_1 x_1} = \tau^{TA}_{z_1 y_1} \cdot \tan(\alpha) = 20.6790\ MPa$$

$$\tau^{TA} = \sqrt{\tau^{TA\,2}_{z_1 x_1} + \tau^{TA\,2}_{z_1 y_1}} = 24.1255\ MPa$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti possiamo esprimere la $\tau_{z_2 x_2}$ nel punto A come somma di un contributo torcente e di un contributo tagliante.

$$\tau_{z_2 x_2} = \tau^{TO} + \tau^{TA} = 124.4934\ MPa$$

ELEMENTINO INFINITESIMO in A $\{O_2 x_2 y_2 z_2\}$

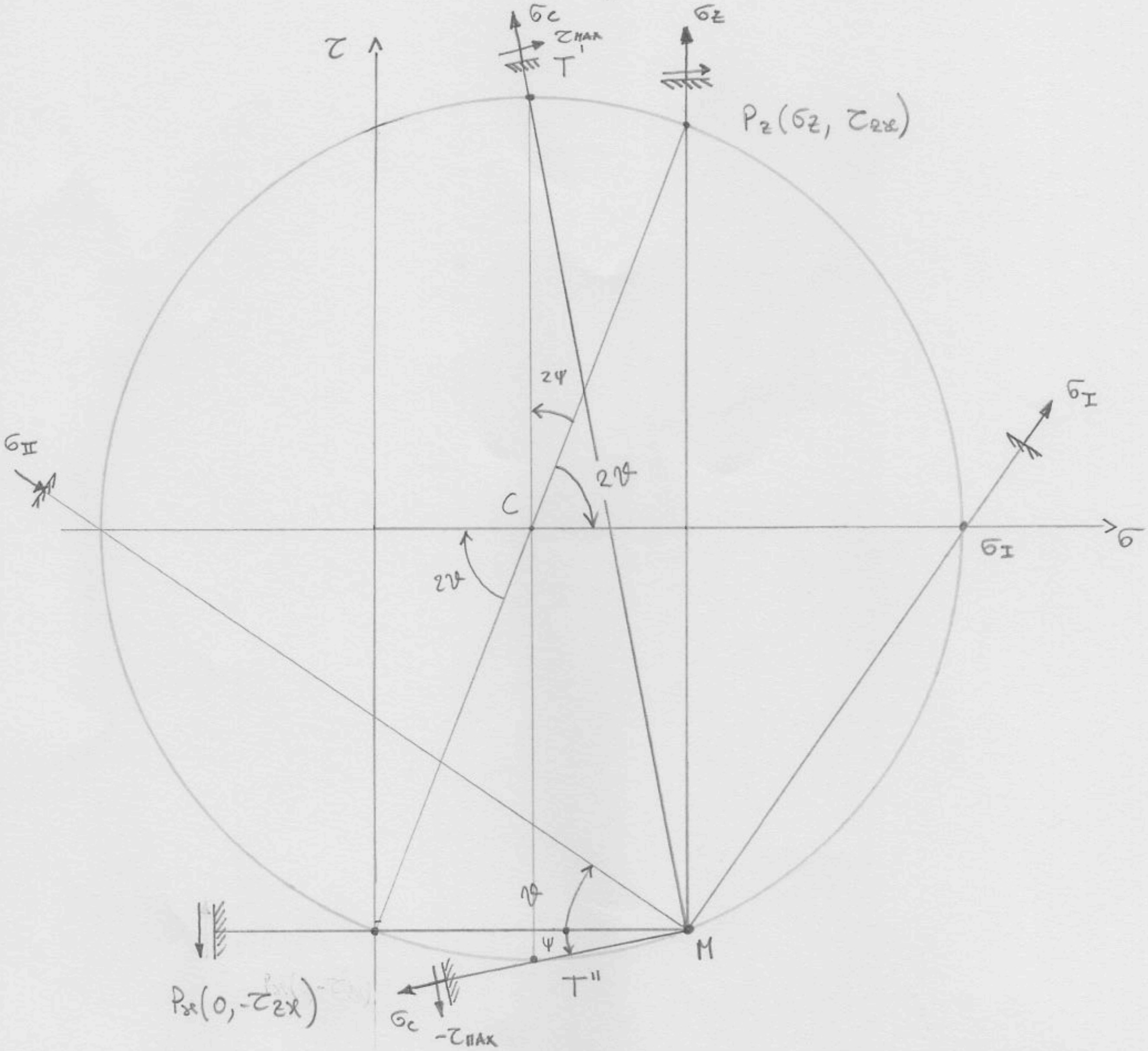


TENSORE DEGLI SFORZI in $\{O_2 x_2, y_2 z_2\}$

$$\overline{\overline{\sigma}}_2 = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & -124.4934 \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ -124.4934 & \emptyset & +96.3533 \end{bmatrix}$$

Il meno deriva dalle convenzioni nei segni del tensore degli sforzi.

CERCHIO DI MOHR PUNTO A $\{O_2 x_2 y_2 z_2\}$



$C = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = \frac{\sigma_z}{2} = 48.1766 MPa$ $\qquad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2} = 133.49 MPa$

$$\begin{cases} \sigma_I = C + R = 181.6667 MPa \\ \sigma_{II} = C - R = -85.3135 MPa \end{cases}$$

$\vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{atan}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_z}\right) = 34.4222^\circ$

$\tau^{MAX} = R = 133.49 MPa$

$90^\circ = 2\psi + 2\vartheta \qquad \psi = \frac{90 - 2\vartheta}{2} = 45 - \vartheta = 10.5778^\circ$

CONSIDERAZIONE SUL TENSORE DEGLI SFORZI.

Per il punto A abbiamo finora lavorato nel sistema di riferimento $\{O_2\, x_2\, y_2\, z_2\}$, conveniente perché in tale sistema lo stato di sforzo è piano. Vediamo come si presenta il tensore nel sistema di riferimento $\{O_1\, x_1\, y_1\, z_1\}$.

$$\overline{\overline{\sigma}}_{II} = [R]^T\, \overline{\overline{\sigma}}_I\, [R]$$ secondo la legge di trasposizione per tensori doppi.

R è la matrice di rotazione intorno a z : $R = \begin{bmatrix} C_{90-\alpha} & -S_{90-\alpha} & 0 \\ S_{90-\alpha} & C_{90-\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Per ottenere $\overline{\overline{\sigma}}_{II}$ premoltiplichiamo per $[R]$ e post moltiplichiamo per $[R]^T$ entrambi i membri.

$$[R]\, \overline{\overline{\sigma}}_{II}\, [R]^T = \underbrace{[R][R]^T}_{I_{3\times3}}\, \sigma_I\, \underbrace{[R][R]^T}_{I_{3\times3}}$$

$$\overline{\overline{\sigma}}_I = [R]\, \overline{\overline{\sigma}}_{II}\, [R]^T = \begin{bmatrix} \sigma_x = \emptyset & \tau_{yx} = \emptyset & \tau_{zx} = -106.7087 \\ \tau_{xy} = \emptyset & \sigma_y = \emptyset & \tau_{zy} = -64.1233 \\ \tau_{xz} = -106.7087 & \tau_{yz} = -64.1233 & \sigma_z = +96.3533 \end{bmatrix} [MPa]$$

controlliamo se effettivamente i termini $\tau_{x_1 z_1}$ e $\tau_{y_1 z_1}$ sono corretti

$$|\tau_{x_1 z_1}| = |\tau^{TO}_{x_1 z_1}| + |\tau^{TA}_{x_1 z_1}| = 86.0297 + 20.6790\ MPa = 106.7087\ MPa$$

$$|\tau_{y_1 z_1}| = |\tau^{TO}_{y_1 z_1}| + |\tau^{TA}_{y_1 z_1}| = 51.6974 + 12.4265\ MPa = 64.1239\ MPa$$

<u>I risultati sono coerenti.</u> Nel sist. di rif. 1 lo stato di sforzo NON è piano.

• PUNTO B   Sist. di rif. $\{O, x_1, y_1, z_1\}$

• Non ci sono sforzi assiali dovuti alla flessione poiché siamo in corrispondenza dell'asse neutro (baricentrico)

SFORZI τ di TORSIONE

$$\tau^{TO} = \frac{M_Z \, D/2}{J_P} = 100.3680 \text{ MPa}$$

SFORZI τ^{TA}

Momento statico semicerchio

Deriva dall'integrale:

$$S_{x_1} = \int_A y \, dA \quad \text{passo alle coord. polari} = \int_{\emptyset}^{\pi} \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} R \sin(\vartheta) \, R \, dR \, d\vartheta =$$

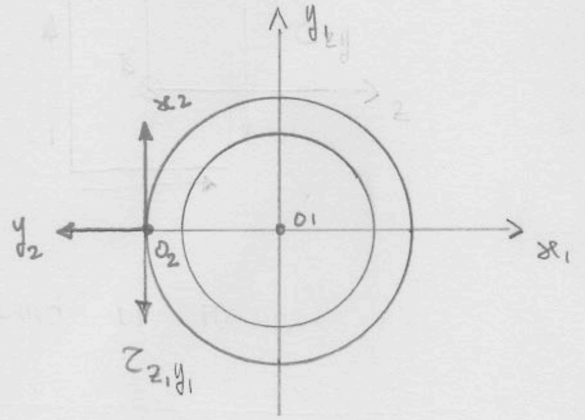
$$= \int_{\emptyset}^{\pi} \sin(\vartheta) d\vartheta \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} R^2 \, dR = -\frac{R^3}{3}\Bigg|_{d/2}^{D/2} \cos(\vartheta)\Bigg|_{\emptyset}^{\pi} = -\frac{R^3}{3}\Bigg|_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \left(\cos(\pi) - \cos(\emptyset)\right) =$$

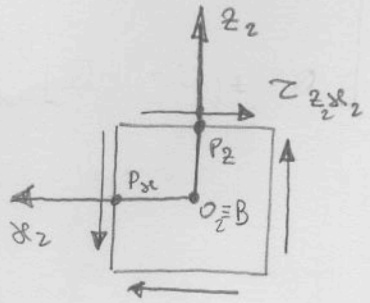
$$= \frac{R^3}{3}\Bigg|_{d/2}^{D/2} \left[\cos(\emptyset) - \cos(\pi)\right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{D^3}{8} - \frac{d^3}{8} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}\left(D^3 - d^3\right) = \frac{D^3 - d^3}{12}$$

$$\tau^{TA} = \frac{T \cdot \frac{D^3 - d^3}{12}}{(D-d) \cdot J_{x_1}} = 104.1915 \text{ MPa}$$

$$\tau_{z_2 x_2} = \tau^{TO} + \tau^{TA} = 204.5595 \text{ MPa}$$

Utilizziamo un sistema di rif. $\{O_2\, x_2\, y_2\, z_2\}$





$$\overline{\overline{\sigma}}_2 = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & -204.5595 \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ -204.5595 & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}$$

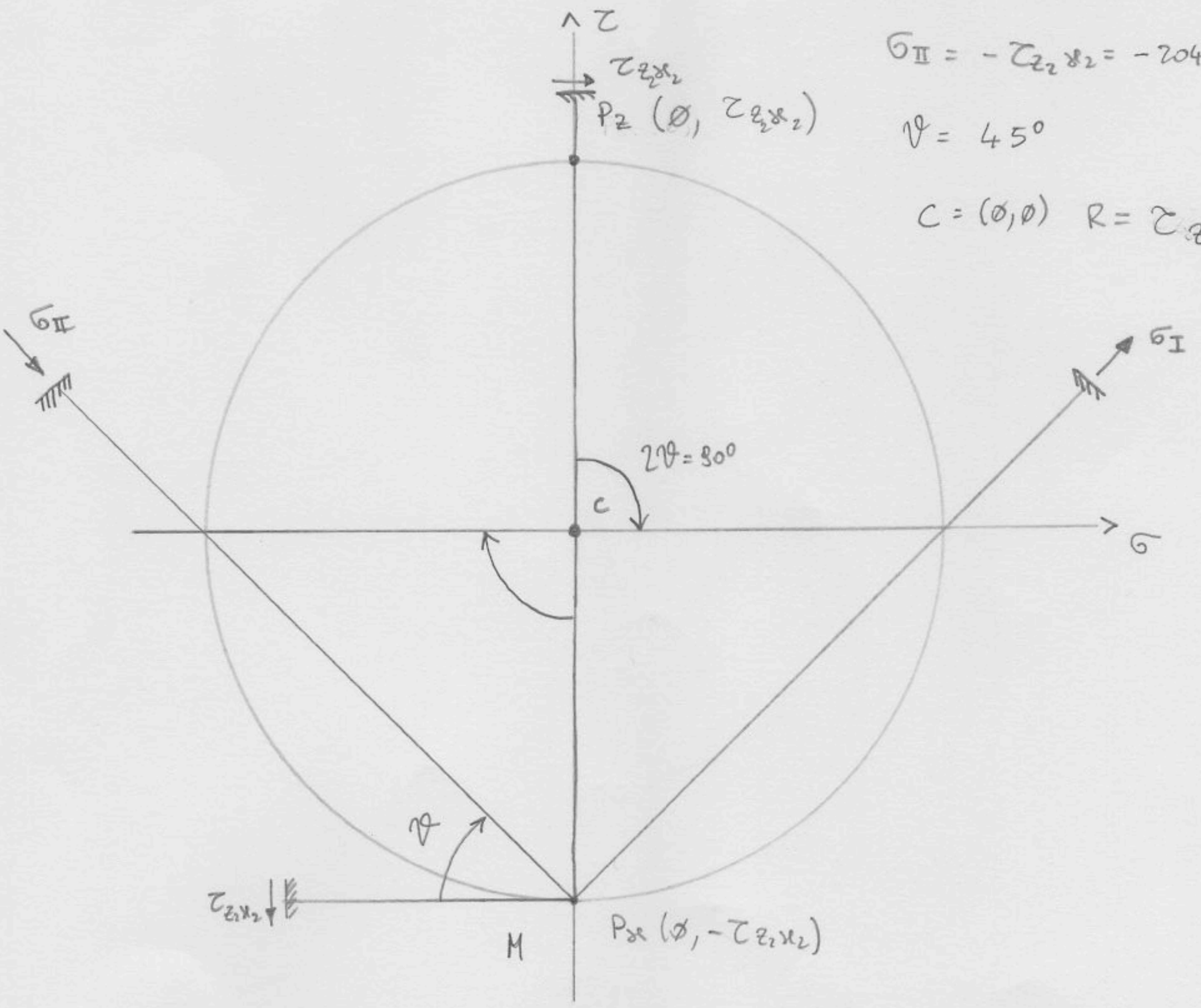
CERCHIO DI MOHR

$\sigma_I = +\tau_{z_2 x_2} = 204.5595$ MPa

$\sigma_{II} = -\tau_{z_2 x_2} = -204.5595$ MPa

$\vartheta = 45°$

$C = (\emptyset, \emptyset)$ $R = \tau_{z_2 x_2}$



Verifica dello stato tensionale con il tensore degli sforzi.

Il sistema $\{O_2\, x_2\, y_2\, z_2\}$ è ruotato di 30° rispetto al sistema $\{O_1\, x_1\, y_1\, z_1\}$. La rotazione avviene lungo l'asse z_1.

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) & 0 \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) & 0 \\ \emptyset & \emptyset & 1 \end{bmatrix} \qquad \overline{\overline{\sigma}}_2 = \begin{bmatrix} \overset{\sigma_x}{\emptyset} & \overset{\tau_{yx}}{\emptyset} & \overset{\tau_{zx}}{-204.5595} \\ \overset{\tau_{xy}}{\emptyset} & \overset{\sigma_y}{\emptyset} & \overset{\tau_{zy}}{\emptyset} \\ \overset{\tau_{xz}}{-204.5595} & \overset{\tau_{yz}}{\emptyset} & \overset{\sigma_z}{\emptyset} \end{bmatrix} [MPa]$$

$$\overline{\overline{\sigma}}_2 = [R]^T \, [\overline{\overline{\sigma}}_1] \, [R] \qquad \overline{\overline{\sigma}}_1 = [R]\,[\overline{\overline{\sigma}}_2]\,[R]^T = \begin{bmatrix} \overset{\sigma_x}{\emptyset} & \overset{\tau_{yx}}{\emptyset} & \overset{\tau_{zx}}{\emptyset} \\ \overset{\tau_{xy}}{\emptyset} & \overset{\sigma_y}{\emptyset} & \overset{\tau_{zy}}{-204,5595} \\ \overset{\tau_{xz}}{0} & \overset{\tau_{yz}}{-204,5595} & \overset{\sigma_z}{\emptyset} \end{bmatrix} [MPa]$$

come si nota nel sistema 1 siamo al cospetto di una τ_{zy_1}, come si poteva dedurre dal disegno di pagina ⑧.

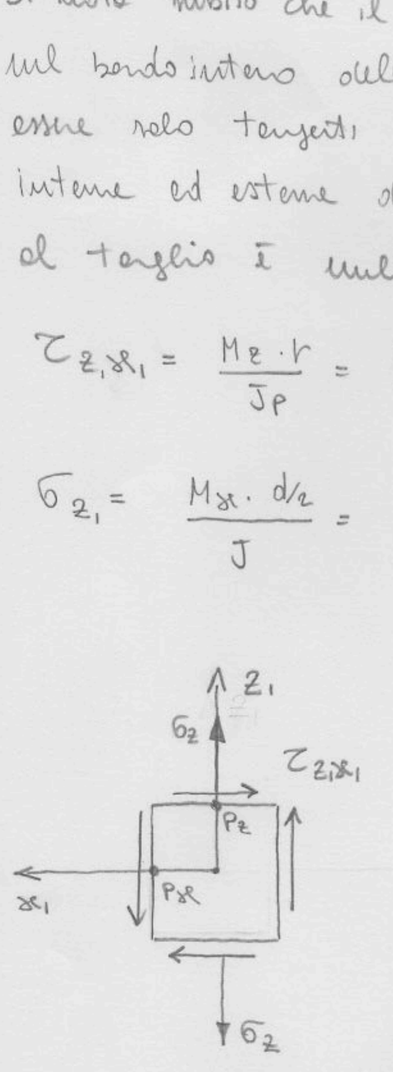
- PUNTO C

Si nota subito che il punto C si trova nel diametro verticale e più precisamente nel bordo interno della sezione tubolare. Come già ricordato le τ possono essere solo tangenti alla circonferenza, poiché per definizione le superfici interne ed esterne del cilindro sono scariche. Di conseguenza la τ dovuta al taglio è nulla. È presente solo la τ dovuta alla torsione.

$$\tau_{z,x_1} = \frac{M_z \cdot r}{J_p} = \frac{M_z \cdot 25}{J_p} = 71.6914\ MPa$$

$$\sigma_{z_1} = \frac{M_x \cdot d/2}{J} = 80.2844\ MPa$$

Stavolta uso il sist. di riferimento $\{O_1\, x_1\, y_1\, z_1\}$ in quanto è comodo.



$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & -71.6914 \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ -71.6914 & \emptyset & 80.2844 \end{bmatrix} [MPa]$$

CERCHIO DI MOHR

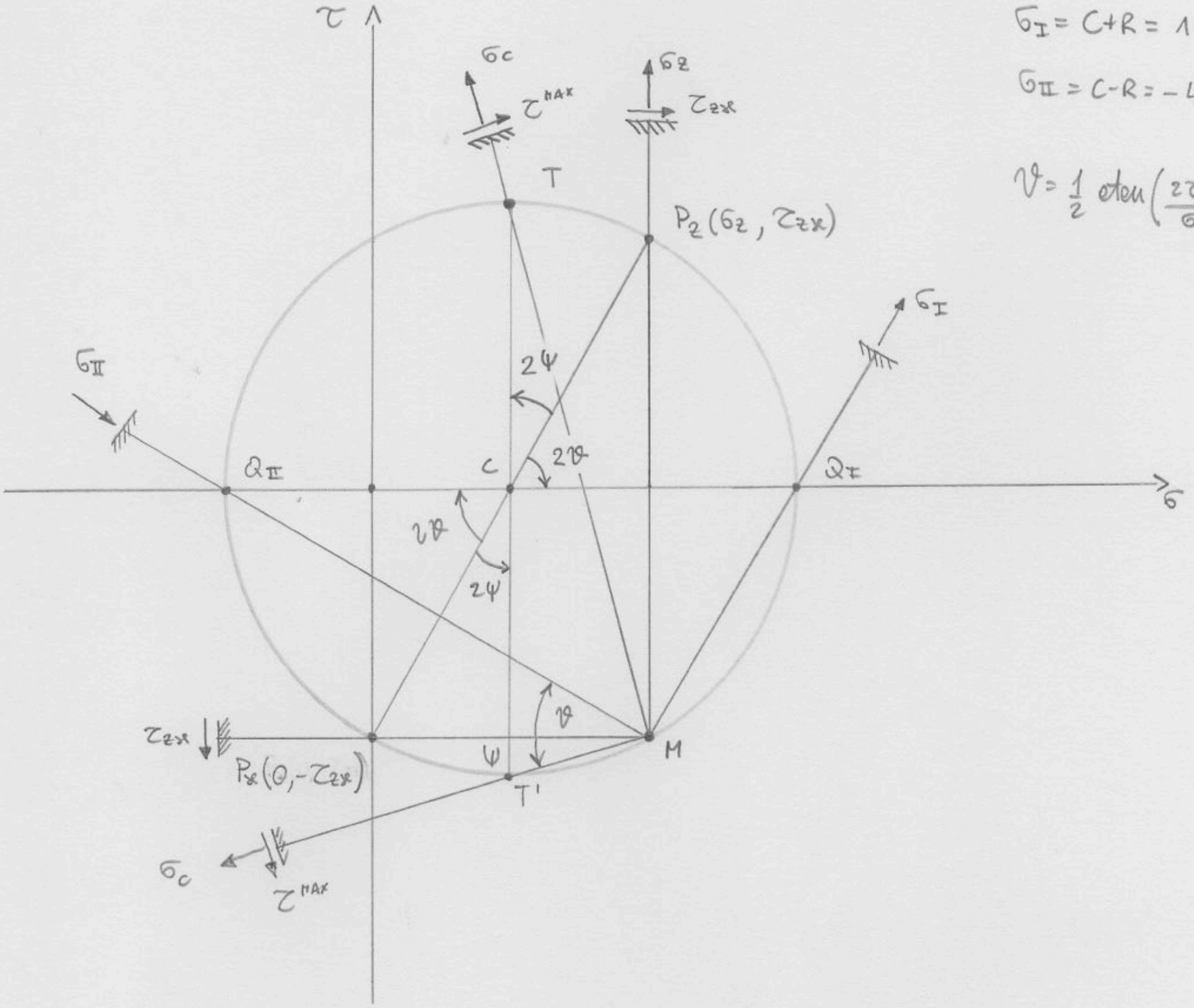
$$C = \frac{\sigma_z}{2} = 40.1472\ MPa$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2} = 82.1672\ MPa$$

$$\sigma_I = C + R = 122.3144\ MPa$$

$$\sigma_{II} = C - R = -42.0201\ MPa$$

$$\vartheta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_z}\right) = 30.3756°$$



$$\tau^{MAX} = R = 82.1672\ MPa$$

$$2\psi = 90 - 2\vartheta \rightarrow \psi = 45 - \vartheta = 14.6244°$$