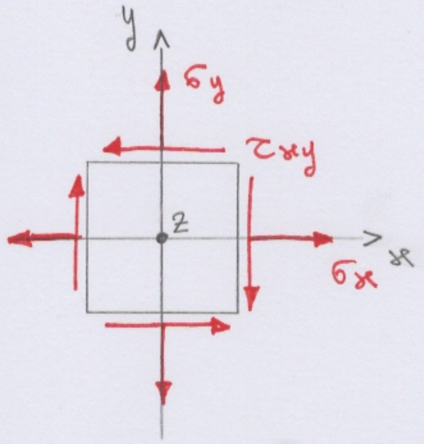
STATO DI SFORZO PIANO



TENSORE DEGLI SFORZI

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

PIANO CON NORMALE z PRINCIPALE

$$\begin{cases} \tau_{zy} = \tau_{yz} = \emptyset \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = \emptyset \end{cases} \rightarrow \text{per la simmetria del } \overline{\overline{\sigma}} \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}$$

RISCRIVO IL TENSORE CON QUESTA CONDIZIONE

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \emptyset \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Se la σ_z è nulla (capita spesso nelle sezioni con un piccolo spessore lungo l'asse z, in quanto la σ_z non si sviluppa), allora lo stato di sforzo è PIANO, quindi tutte le componenti di sforzo sono riferite ai piani di normale x e y.

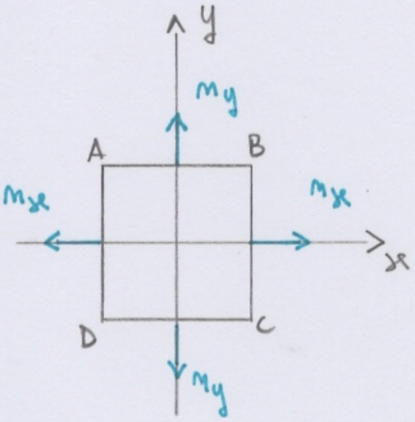
$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \emptyset \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \rightarrow$$

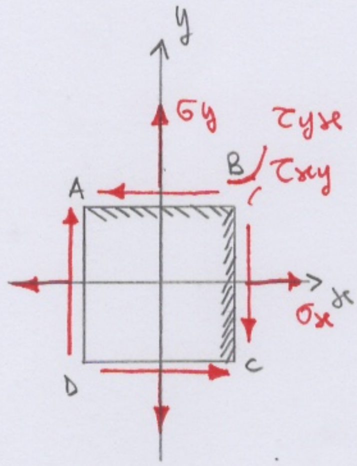
tensore degli sforzi per uno stato piano di tensione (tutte le componenti sono significative, anche se sono nulle!!!).

CONVENZIONE SUI SEGNI (G. BELLONI, F. BERNASCONI "SFORZI, DEFORMAZIONI E LORO LEGAMI" ED. SPIEGEL, PAG. 5)

Le componenti dello sforzo si definiscono positive ⊕ se agiscono nella direzione crescente degli assi coordinati quando la normale esterna ha lo stesso verso dell'asse a cui la faccia considerata è normale.
Quindi se la normale alla faccia è concorde con l'asse di riferimento la componente di sforzo è positiva ⊕ se anch'essa ha verso concorde all'asse cui è parallela.
Se la normale è discorde rispetto all'asse di riferimento, la componente di sforzo è positiva ⊕ se anch'essa è discorde rispetto all'asse cui è parallela.

Applichiamo questi concetti al caso in esame.





Facciamo riferimento alla faccia BC, che ha normale esterna n_x definita positiva, in quanto collineare rispetto all'asse normale alla faccia BC.

σ_x è <u>positivo</u> in quanto è allineato con l'asse a cui esso è parallelo.

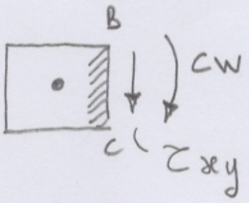
τ_{xy} è <u>negativo</u> in quanto è allineato ma discorde in verso rispetto all'asse cui è parallelo.

COSTRUZIONE DEL CERCHIO DI <u>MOHR</u>.

Convenzione sui segni per la costruzione del cerchio di Mohr.

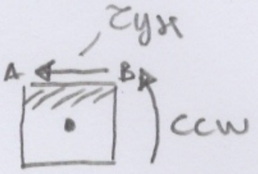
Per quanto riguarda la costruzione del cerchio di Mohr consideriamo positive le τ che fanno ruotare l'elemento in senso orario (CW, clockwise). Al contrario consideriamo negative le τ che fanno ruotare l'elemento in senso antiorario (CCW, counterclockwise). Nel nostro caso abbiamo:

- FACCIA BC



$\tau_{xy} > 0$

- FACCIA AB



$\tau_{yx} < 0$

quindi all'equilibrio per la costruzione del MOHR avremo

$$\boxed{\tau_{xy} = -\tau_{yx}}$$

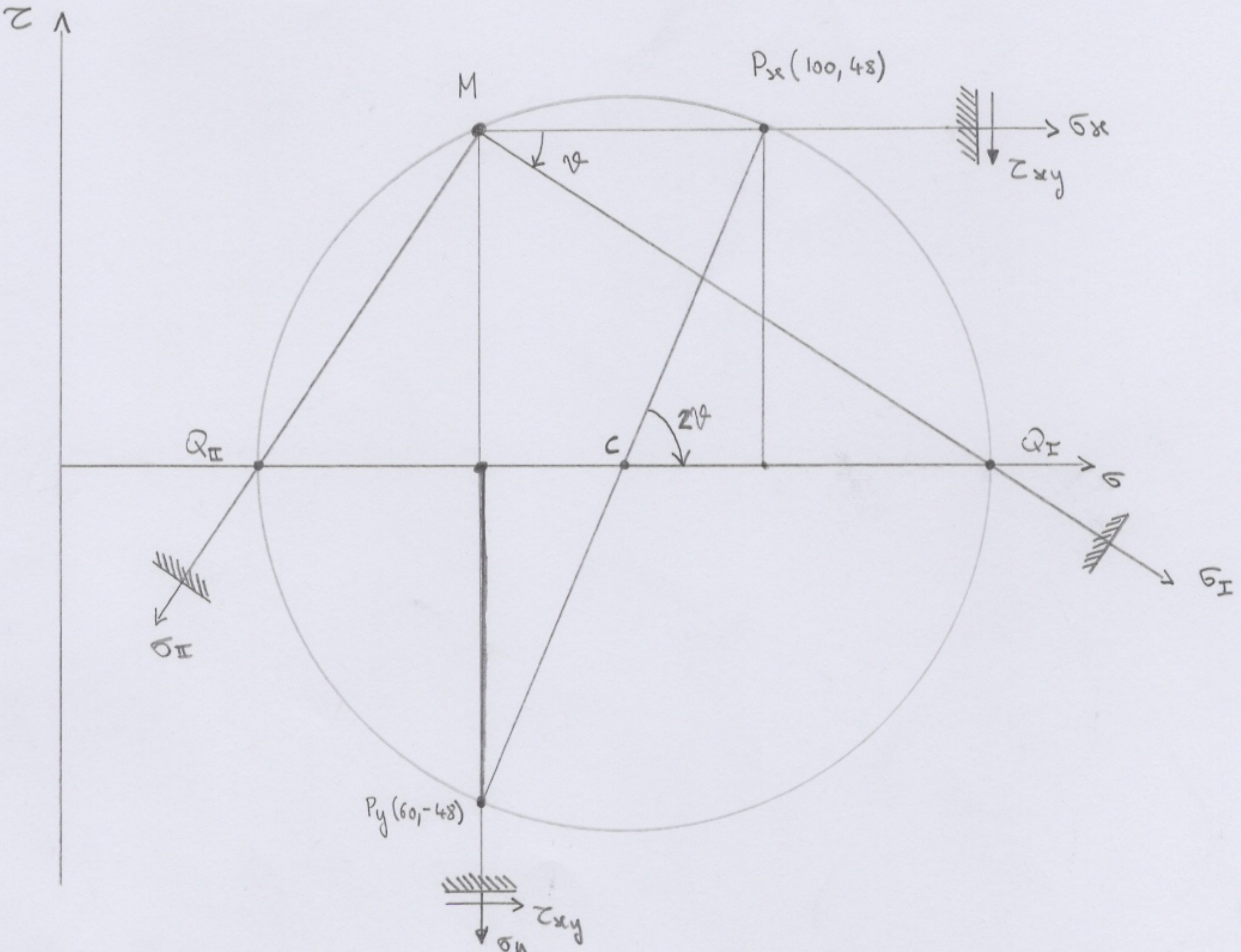
COSTRUZIONE DEL CERCHIO DI MOHR. CASO A

Sulla faccia BC di normale n_x avremo quindi lo stato di sforzo, rappresentato in un piano σ - τ, definito da un punto di coordinate $P_x(\sigma_x, \tau_{xy})$.

Sulla faccia AB di normale n_y avremo invece uno stato di sforzo identificato da un punto $P_y(\sigma_y, -\tau_{xy})$.

Diamo dei valori a σ_x, σ_y e τ_{xy}

$$\begin{cases} \sigma_x = 100\,MPa \\ \sigma_y = 60\,MPa \\ |\tau_{xy}| = 48\,MPa \end{cases}$$



Il cerchio costruito, che passa per i punti P_x e P_y rappresenta gli stati di sforzo nelle facce dell'elementino al variare dell'angolo ϑ tra la normale n_x e l'asse x.

- Definisco un centro C come: $C = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \dfrac{100+60}{2} = 80\,MPa$

- Definisco un raggio R come: $R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 52\,MPa$

Per trovare gli sforzi principali σ_I e σ_{II}, con $\sigma_I \geqslant \sigma_{II}$, è sufficiente guardare il cerchio di Mohr. Per definizione un piano e il suo sforzo normale sono principali quando le τ che insistono sullo stesso piano sono nulle. Questa condizione si verifica nei punti di intersezione del cerchio di Mohr con l'asse σ, nei punti Q_I e Q_{II}. Le coordinate di questi punti rappresentano le σ principali.

$$\begin{cases} \sigma_I = C + R = 132 \text{ MPa} \\ \sigma_{II} = C - R = 28 \text{ MPa} \end{cases}$$

Per trovare l'angolo di cui è necessario ruotare il sistema di riferimento xy ci si rifà sempre al cerchio.

L'angolo è quello disegnato (2ϑ) e si ottiene facendo ruotare il diametro $\overline{P_x P_y}$, intorno al centro C, fino a farlo coincidere con il diametro $\overline{Q_I Q_{II}}$. La rotazione nell'elemento conserverà lo stesso verso, ma sarà la metà di quello ricavato dalla costruzione del Mohr.

$$\vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{atan}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) = 33.6901°$$

Nel cerchio è riportato anche il polo per le normali M ottenuto dall'intersezione della parallela all'asse x condotta per il punto P_x e la parallela all'asse y condotta per il punto P_y. È da notare che l'angolo $Q_I \hat{M} P_x = \vartheta$ in quanto è angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco $\widehat{P_x Q_I}$ su cui insiste anche l'angolo al centro $Q_I \hat{C} P_x$.

Per verificare i risultati ottenuti calcoliamo con Matlab gli autovalori (che rappresentano gli sforzi principali) e gli autovettori associati (che rappresentano le direzioni principali) del tensore degli sforzi. Dato che ci riferiamo alla notazione tensoriale le τ sono sotto l'egida delle convenzioni per il segno sviluppate per la forma tensoriale.

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -48 \\ -48 & 60 \end{bmatrix}$$

Si ha quindi il classico problema agli autovalori

$A\,v = \lambda\,v$ dove λ è uno scalare (autovalore), $v \in \mathbb{R}^{2\times1}$ e $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$

I valori di λ che soddisfano l'equazione sono gli AUTOVALORI e i vettori v che la soddisfano sono gli AUTOVETTORI.

$$\bar{\bar{\sigma}}_p = \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{DIR II} & \text{DIR I} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 28 & 0 \\ 0 & 132 \end{bmatrix} \end{array}}_{\lambda} \qquad V = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -0.5547 & -0.8321 \\ -0.8321 & 0.5547 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{COMPONENTI ASSE II} & \text{COMPONENTI ASSE I} \end{array} \end{array}$$

Per trovare l'angolo tra l'asse x e l'asse I è sufficiente calcolare l'inclinazione del vettore contenuto nella seconda colonna della matrice V.

$$\vartheta_I = \operatorname{atan}\left(\frac{0.5547}{-0.8321}\right) = -33.6901°$$

Per trovare l'inclinazione rispetto all'orizzontale dell'asse II basta applicare lo stesso procedimento alla prima colonna della matrice V.

$$\vartheta_{II} = \operatorname{atan}\left(\frac{-0.8321}{-0.5547}\right) = 56.3099°$$

Si noti che $\vartheta_{II} = \vartheta_I + 90 = 56.3099°$, quindi gli assi I e II sono effettivamente $\perp$ tra loro. Questo calcolo era a dimostrazione dell'algebra che sostiene il problema del sist. di rif. principale e di quanto il cerchio di Mohr sia effettivamente utile.

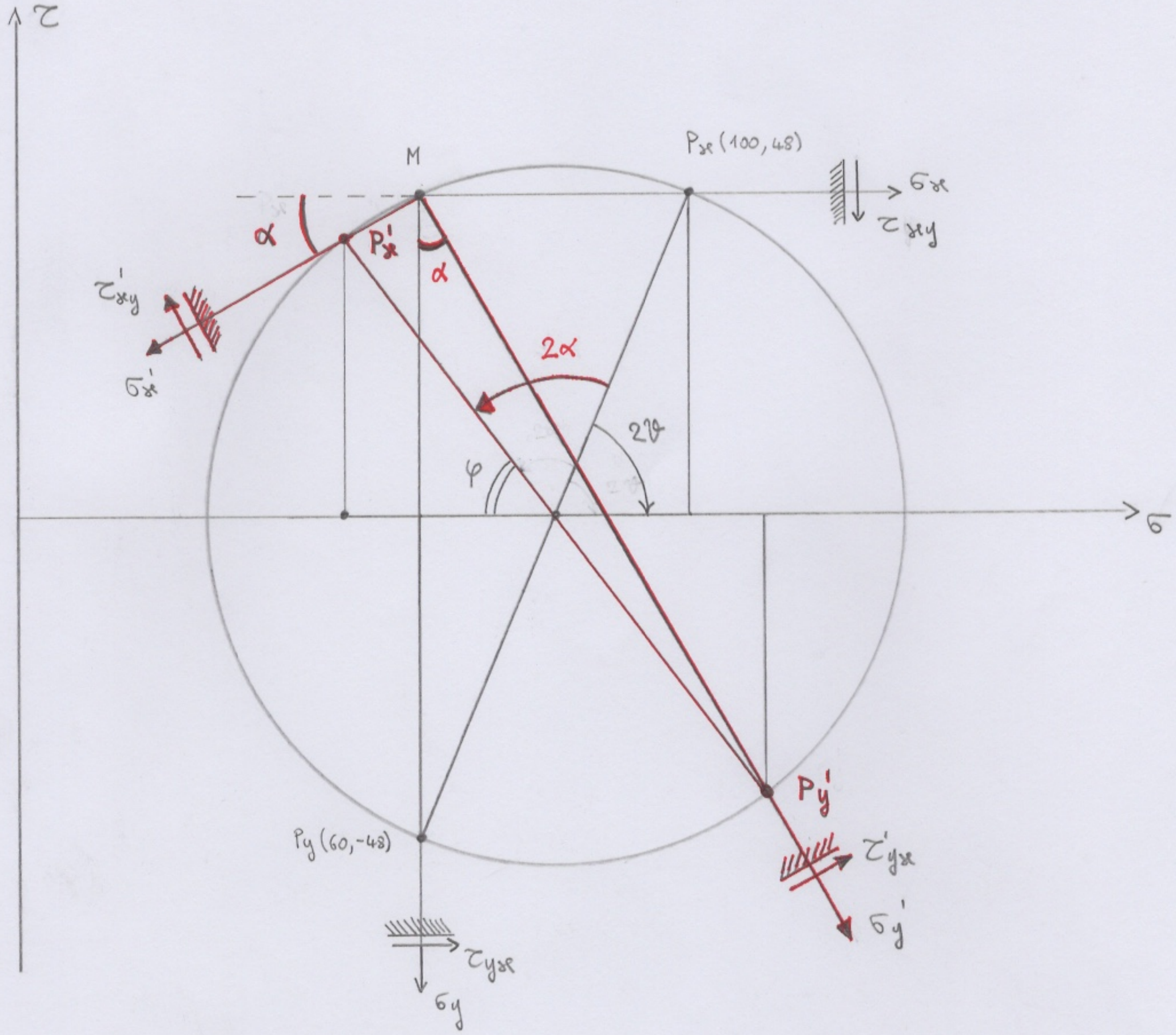
CASO Ⓑ

SFORZI σ'_x, σ'_y, τ'_{xy} quando ruoto il sistema di riferimento di un angolo $\alpha = +30°$.

RIPORTO LA COSTRUZIONE DEL MOHR. $\alpha = +30°$ $2\alpha = +60°$ $\varphi = 180 - 2\vartheta - 2\alpha =$

$= 180 - 2\cdot(33.6301) - 2(30) =$

$= 52.6199°$



$\sigma'_x = C - R\cdot\cos(\varphi) = +48.4308$ MPa

$\sigma'_y = C + R\cos(\varphi) = +111.5692$ MPa

$\tau'_{xy} = R\cdot\sin(\varphi) = 41.3205$ MPa

$$\begin{cases} P'_x = (48.4308,\ 41.3205) \\ P'_y = (111.5692,\ -41.3205) \end{cases}$$

ROTAZIONE IN NOTAZIONE TENSORIALE

Dato $\bar{\bar{\sigma}}$ il tensore degli sforzi $\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} 100 & -48 \\ -48 & 60 \end{bmatrix}$ e la matrice di rotazione R_z del sistema intorno all'asse z:

$$R_z = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha \\ s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

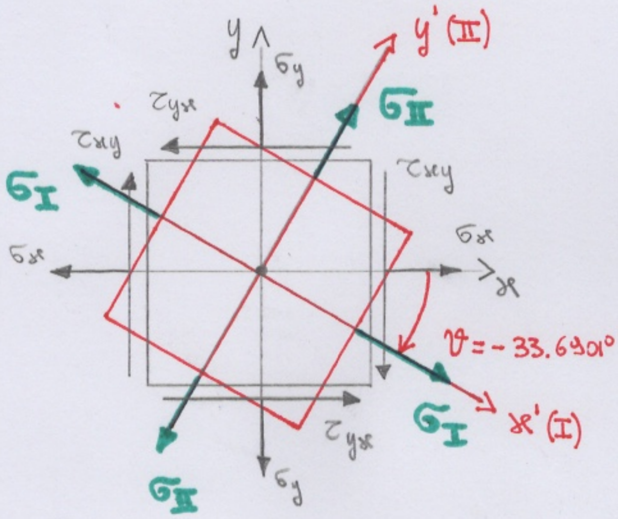
Per la legge di rotazione dei tensori doppi otteniamo:

$$\bar{\bar{\sigma}}' = R_z^T \, \bar{\bar{\sigma}} \cdot R_z = \begin{bmatrix} 48.4308 & -41.3205 \\ -41.3205 & 111.5692 \end{bmatrix}$$

Si nota che i risultati sono i medesimi, solo che le operazioni tensoriali sono state effettuate con un calcolatore e con Matlab, mentre i risultati del cerchio di Mohr sono stati conseguiti grazie a un righello e una calcolatrice!

RIASSUNTO DEGLI STATI TENSIONALI

CASO (A)



CASO (B)