

**CAP. 9a – PROBLEMI LEGATI ALL'INTEGRAZIONE NUMERICA****1. Ordine d'integrazione**

Per gli elementi integrati numericamente, definiamo “*integrazione completa*” una procedura sufficiente ad ottenere gli integrali esatti di tutti i coefficienti k_{ij} della matrice di rigidezza elementare se l'elemento non è distorto (per esempio se un elemento quadratico ha lati rettilinei e nodi disposti a metà di ogni lato). Se i lati sono curvi o se i nodi disposti sui lati non si trovano nel loro punto centrale (nel qual caso lo Jacobiano J non è costante all'interno dell'elemento), la stessa “*integrazione completa*” non integra in modo esatto tutti i coefficienti k_{ij} .

Esaminiamo per esempio un elemento isoparametrico a tre nodi per l'analisi di travi del tipo “tirante/puntone”. Usando i polinomi di Lagrange per esprimere le funzioni di forma, abbiamo:

$$x = \{N_1 \quad N_2 \quad N_3\} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad u = \{N_1 \quad N_2 \quad N_3\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

dove:
$$N_1 = \frac{\xi^2 - \xi}{2} \quad ; \quad N_2 = \frac{\xi^2 + \xi}{2} \quad ; \quad N_3 = 1 - \xi^2$$

La deformazione assiale vale:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \{N_1 \quad N_2 \quad N_3\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Poiché le funzioni di forma N_i sono funzioni della coordinata x attraverso la variabile ξ , abbiamo:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi}$$

Per iniziare dobbiamo calcolare lo Jacobiano:

$$J = \frac{d}{d\xi} \{N_1 \quad N_2 \quad N_3\} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \left\{ \frac{2\xi - 1}{2} \quad \frac{2\xi + 1}{2} \quad -2\xi \right\} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \frac{dx}{d\xi} = \frac{x_2 - x_1}{2} + (x_1 + x_2 - 2x_3)\xi$$

La matrice di rigidezza elementare risulta quindi:

$$[k] = \int_0^L [\mathbf{B}]^T EA [\mathbf{B}] \cdot dx = \int_{-1}^1 [\mathbf{B}]^T EA [\mathbf{B}] \cdot J \cdot d\xi$$

dove:
$$[\mathbf{B}] = \frac{d}{dx} \{N_1 \quad N_2 \quad N_3\} = \frac{1}{J} \frac{d}{d\xi} \{N_1 \quad N_2 \quad N_3\} = \frac{1}{J} \left\{ \frac{2\xi - 1}{2} \quad \frac{2\xi + 1}{2} \quad -2\xi \right\}$$

Sviluppando abbiamo:

$$[\mathbf{k}] = \int_{-1}^1 \frac{EA}{4J} \begin{bmatrix} (2\xi - 1)^2 & 4\xi^2 - 1 & 4(\xi - 2\xi^2) \\ 4\xi^2 - 1 & (2\xi + 1)^2 & -4(\xi + 2\xi^2) \\ 4(\xi - 2\xi^2) & -4(\xi + 2\xi^2) & 16\xi^2 \end{bmatrix} \cdot d\xi$$

Come si può osservare i coefficienti di $[\mathbf{B}]$ si ottengono dal rapporto di due polinomi di primo grado in ξ dove al denominatore compare lo Jacobiano. L'integrazione in forma chiusa dei coefficienti della matrice di rigidezza può risultare complicata e si ricorre quindi all'integrazione numerica.

Solo quando $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ ovvero quando $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ e quindi il terzo nodo si trova a metà del lato, lo Jacobiano non dipende da ξ , ma è costante e vale $\frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{L}{2}$ dove L indica la lunghezza della trave. In questo caso (e se lungo la trave EA è costante) la matrice di rigidezza esatta risulta:

$$[\mathbf{k}] = \frac{EA}{2L} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (2\xi - 1)^2 & 4\xi^2 - 1 & 4(\xi - 2\xi^2) \\ 4\xi^2 - 1 & (2\xi + 1)^2 & -4(\xi + 2\xi^2) \\ 4(\xi - 2\xi^2) & -4(\xi + 2\xi^2) & 16\xi^2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{3L} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix}$$

Quando il terzo nodo si trova a metà del lato i coefficienti della matrice $[\mathbf{B}]^T EA [\mathbf{B}] \cdot J$ contengono dei termini in ξ^2 che si possono integrare esattamente con due punti di Gauss. Di conseguenza “l'integrazione completa” richiede due punti d'integrazione anche se il terzo nodo non è centrato.



Osserviamo inoltre che:

$$a) \text{ quando } x_3 = x_1 + \frac{L}{4} \quad J = \frac{x_2 - x_1}{2} + (x_1 + x_2 - 2x_3)\xi = \frac{L}{2}(1 + \xi) \quad \text{e in } \xi = -1 \quad J = 0$$

$$b) \text{ quando } x_3 = x_1 + \frac{3L}{4} \quad J = \frac{x_2 - x_1}{2} + (x_1 + x_2 - 2x_3)\xi = \frac{L}{2}(1 - \xi) \quad \text{e in } \xi = 1 \quad J = 0$$

Ciò indica che se il punto centrale si trova fuori dall'intervallo $x_1 + \frac{L}{4} \leq x_3 \leq x_1 + \frac{3L}{4}$ allora ci sono dei punti lungo la trave dove lo Jacobiano è negativo o nullo. Ciò può impedire l'integrazione della matrice di rigidità.

L'uso dell'integrazione completa è l'unica strada sicura per evitare degli errori come le instabilità della mesh che verranno di seguito discusse.

Comunque, per almeno due motivi, può essere utile eseguire l'integrazione con un numero ridotto di punti, con una procedura che prende il nome di "*integrazione ridotta*". Il primo è che poiché il costo per generare una matrice di rigidità $[k]$ con l'integrazione numerica è proporzionale al numero di punti di campionamento, ridurre il numero riduce i tempi di calcolo. Il secondo è che la riduzione dei punti di campionamento rende più deformabile l'elemento e riduce l'eccesso di rigidità causato dalla formulazione che si basa su un campo di spostamenti imposto. La riduzione di rigidità deriva dal fatto che talvolta i coefficienti di alcuni polinomi di ordine superiore si annullano nei punti di Gauss scelti per l'integrazione ridotta e quindi non contribuiscono al calcolo dell'energia elastica. In altre parole, con pochi punti di campionamento, alcuni modi di spostamento (in genere quelli più complicati o a energia elastica più elevata) offrono minore resistenza alla deformazione. Per concludere, l'integrazione ridotta può ridurre il costo computazionale e la precisione nella valutazione degli integrali e aumentare la precisione dell'analisi agli elementi finiti. Se fosse usata solo per ridurre il costo computazionale, l'integrazione ridotta non dovrebbe essere utilizzata.

Il numero di punti di Gauss ha un limite inferiore perché il volume dell'elemento deve essere integrato esattamente. Infittendo la mesh, il numero di elementi aumenta e la loro dimensione diminuisce: al limite, all'interno di ogni elemento, si giunge ad uno stato di deformazione costante purché l'elemento sia valido nel senso che sia in grado di superare il "*patch test*". Così all'interno di ogni elemento la densità dell'energia elastica U_0 diventa costante. L'energia elastica in un elemento adatto all'analisi di problemi piani e di volume sono rispettivamente:

$$U_e = \iint U_0 t J d\xi d\eta \quad \text{e} \quad U_e = \iiint U_0 J d\xi d\eta d\zeta \quad (9a.1.1)$$

Se U_0 è costante, allora U_e sarà corretta se il volume $dVol = t J d\xi d\eta$ (o, $dVol = J d\xi d\eta d\zeta$) è integrato correttamente. In pratica si preferisce usare l'integrazione esatta del volume per qualsiasi forma e dimensione dell'elemento. Dall'eq.

$$U_e = \int_{V_e} (\text{Densità dell'energia elastica}) dVol = \frac{1}{2} \{\mathbf{d}\}^T [\mathbf{k}] \{\mathbf{d}\}$$

si vede che gli integrali nelle eq.(9a.1.1) producono i coefficienti della matrice di rigidità $[k]$. Di conseguenza se $[k]$ si ottiene con una procedura d'integrazione capace di calcolare esattamente il volume dell'elemento, allora l'elemento sarà in grado di fornire l'energia elastica corretta in un modo di spostamento a deformazione costante.

Così, per un elemento di geometria arbitraria, **il numero minimo di punti d'integrazione** è quello che integra esattamente tJ (nel caso piano) o J (nel caso solido). In un elemento piano bilineare di spessore costante, tJ è lineare in ξ e in η , quindi è necessario un solo punto di Gauss. In un elemento piano quadratico di spessore costante, tJ contiene ξ^3 e η^3 quindi sono necessari 2×2 punti di Gauss. Un elemento solido a 8 nodi richiede $2 \times 2 \times 2$ di Gauss per un totale di 8 punti di campionamento.

Comunque, con rare eccezioni, la suddivisione di una mesh ripetuta indefinitamente dà luogo a elementi di spessore costante che diventano parallelogrammi con i lati rettilinei. Così t e J cessano di essere funzioni delle coordinate e, al limite, un solo punto di Gauss fornisce il volume corretto dell'elemento.

Per un elemento isoparametrico la cui formulazione si basa su un campo di spostamento imposto, la migliore regola d'integrazione è normalmente quella di ordine inferiore che calcola correttamente il volume e non produce instabilità. Prima di adottare una certa procedura è fondamentale eseguire numerosi test numerici



in quanto la precisione della soluzione può dipendere dalla mesh in esame o dal tipo di problema, ma normalmente una regola d'integrazione è sempre migliore delle altre. Per gli elementi piani bilineari e a otto nodi e per gli elementi solidi lineari a otto nodi si adotta la regola di 2 punti di Gauss per dimensione (4 punti per gli elementi piani e 8 per quelli di volume). Il solido quadratico serendipity, con 8 nodi ai vertici e 12 sui lati può essere integrato con 3 punti di Gauss per direzione, per un totale di 27 punti, ma se l'elemento è molto sottile in una direzione si può utilizzare una procedura a 14 punti.

2. Modi a energia nulla (meccanismi) del singolo elemento e della mesh

Nella meccanica strutturale una instabilità può essere indicata con diversi termini: un *meccanismo*, un *modo cinematico*, un *modo "clessidra"* oppure un *modo a energia nulla*. Il termine "*modo a energia nulla*" si riferisce ad un vettore di spostamento $\{\mathbf{D}\}$ che non corrisponde ad un movimento rigido ma che, ciò nonostante, produce un'energia elastica $\frac{1}{2}\{\mathbf{D}\}^T[\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\}$ nulla. In questo caso l'instabilità è conseguenza di un difetto nel processo di formazione dell'elemento, come, per esempio, un numero insufficiente di punti nel processo d'integrazione numerica. In questo contesto, il termine "instabilità" non ha niente a che fare con l'instabilità strutturale a compressione (*buckling*).

Una struttura che sembra sufficientemente vincolata può risultare instabile a causa della singolarità della matrice di rigidezza $[\mathbf{K}]$. Oppure, elementi instabili possono unirsi a formare una struttura stabile, ma che sotto certe distribuzioni di carichi possono subire spostamenti eccessivi.

Per spiegare il significato del termine "*modo a energia nulla*" sostituiamo la relazione $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{d}\}$ nell'espressione dell'energia elastica U_e di un elemento:

$$U_e = \frac{1}{2}\{\mathbf{d}\}^T[\mathbf{k}]\{\mathbf{d}\} = \frac{1}{2}\{\mathbf{d}\}^T \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T[\mathbf{E}][\mathbf{B}] dVol \{\mathbf{d}\} = \frac{1}{2} \int_{V_e} [\boldsymbol{\varepsilon}]^T[\mathbf{E}][\boldsymbol{\varepsilon}] dVol$$

Quando la matrice di rigidezza $[\mathbf{k}]$ viene valutata per mezzo dell'integrazione numerica, può contenere solo le informazioni che si possono estrarre dai punti di campionamento utilizzati nel processo d'integrazione. Se capita che le deformazioni $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{d}\}$ nei punti di campionamento siano nulle, allora l'energia elastica U_e per tale spostamento $\{\mathbf{d}\}$ risulta assente e di conseguenza la matrice $[\mathbf{k}]$ risulta priva di rigidezza, nel senso che l'energia elastica $U_e = \frac{1}{2}\{\mathbf{d}\}^T[\mathbf{k}]\{\mathbf{d}\}$ è nulla per questo particolare spostamento $\{\mathbf{d}\}$. Quando $\{\mathbf{d}\}$ corrisponde ad un moto rigido è giusto attendersi che l'energia elastica sia nulla, ma se ciò capita quando $\{\mathbf{d}\}$ non è un moto rigido, allora siamo in presenza di una instabilità.

Un elemento che manifesta un meccanismo è detto "*rank deficient*", cioè possiede un rango insufficiente; in altri termini il rango di $[\mathbf{k}]$ è inferiore al numero di gradi di libertà dell'elemento meno il numero di moti rigidi (per esempio nel caso di elementi quadrangolari a 4 nodi per stati di sforzo piano che possiedono 8 gradi di libertà e per i quali sono possibili 3 moti rigidi, il rango non deve essere inferiore a 5).

L'instabilità di una matrice $[\mathbf{k}]$ può essere individuata analizzandone gli autovalori e gli autovettori. Ipotizziamo che la forza $\{\mathbf{f}\}$ applicata sui nodi di un elemento sia proporzionale agli spostamenti nodali $\{\mathbf{d}\}$ attraverso un fattore di proporzionalità che chiameremo λ :

$$[\mathbf{k}]\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{f}\} = \lambda\{\mathbf{d}\}$$

Si tratta di un problema agli autovalori che si può esprimere nel modo seguente:

$$([\mathbf{k}] - \lambda[\mathbf{I}])\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{0}\}$$

dove $[\mathbf{I}]$ rappresenta la matrice identità o unitaria. Gli autovalori λ_i della matrice $[\mathbf{k}]$ sono tanti quanti sono i gradi di libertà del vettore $\{\mathbf{d}\}$. Ad ogni autovalore λ_i corrisponde un autovettore $\{\mathbf{d}\}_i$; non è detto che tutti gli autovalori posseggano valori distinti. Se gli autovettori sono normalizzati in modo che $\{\mathbf{d}\}_i^T\{\mathbf{d}\}_i = 1$, allora premoltiplicando l'ultima equazione per $\{\mathbf{d}\}_i^T$ si ottiene:

$$\{\mathbf{d}\}_i^T([\mathbf{k}] - \lambda[\mathbf{I}])\{\mathbf{d}\} = 0 \quad \text{da cui} \quad \{\mathbf{d}\}_i^T[\mathbf{k}]\{\mathbf{d}\}_i = \lambda_i$$

Poiché: $U_e = \frac{1}{2}\{\mathbf{d}\}^T[\mathbf{k}]\{\mathbf{d}\}$ allora: $2(U_e)_i = \lambda_i$

$(U_e)_i$ è l'energia elastica contenuta nell'elemento quando i suoi spostamenti nodali sono pari a $\{\mathbf{d}\}_i$. Normalmente per l'analisi agli autovalori non è necessario che la matrice $[\mathbf{k}]$ sia vincolata. L'ultima equazione

mostra che quando il vettore $\{\mathbf{d}\}_i$ rappresenta uno spostamento rigido, il corrispondente autovalore λ_i è nullo. Nel piano sono possibili tre moti rigidi linearmente indipendenti, per cui in un elemento per l'analisi degli stati di spostamento piano ci dovrebbero essere tre autovalori nulli. Per un elemento solido nello spazio o per un elemento di tipo guscio ci dovrebbero essere 6 autovalori nulli, mentre per gli elementi assialsimmetrici che possono subire solo stati di spostamento assialsimmetrico dovrebbe esserci un solo autovalore nullo.

I modi a energia zero (meccanismi) danno luogo ad autovalori nulli anche se il vettore spostamento non corrisponde ad un moto rigido. Quando si analizza la qualità di un elemento, per prima cosa si controlla che il numero di autovalori nulli sia pari al numero atteso. Se il numero risulta inferiore, è possibile che l'elemento non possa subire tutti gli spostamenti rigidi attesi. Se il numero è superiore, è possibile la presenza di uno o più meccanismi.

Se la matrice di rigidezza $[\mathbf{k}]$ è simmetrica e semidefinita positiva, allora gli autovalori diversi da zero sono reali e positivi. Se ruotando l'elemento nel sistema di coordinate globali gli autovalori cambiano, significa che l'elemento non è geometricamente isotropo. Se il materiale è isotropo, i modi simili (come quelli flessionali oppure quelli assiali) dovrebbero essere associati ad autovalori identici.

Esempio

Consideriamo l'elemento piano bilineare a 4 nodi la cui matrice di rigidezza ha dimensione 8×8 . È possibile identificare 8 modi di spostamento $\{\mathbf{d}\}$ indipendenti. I primi tre modi sono moti rigidi per i quali $U_e = 0$ come

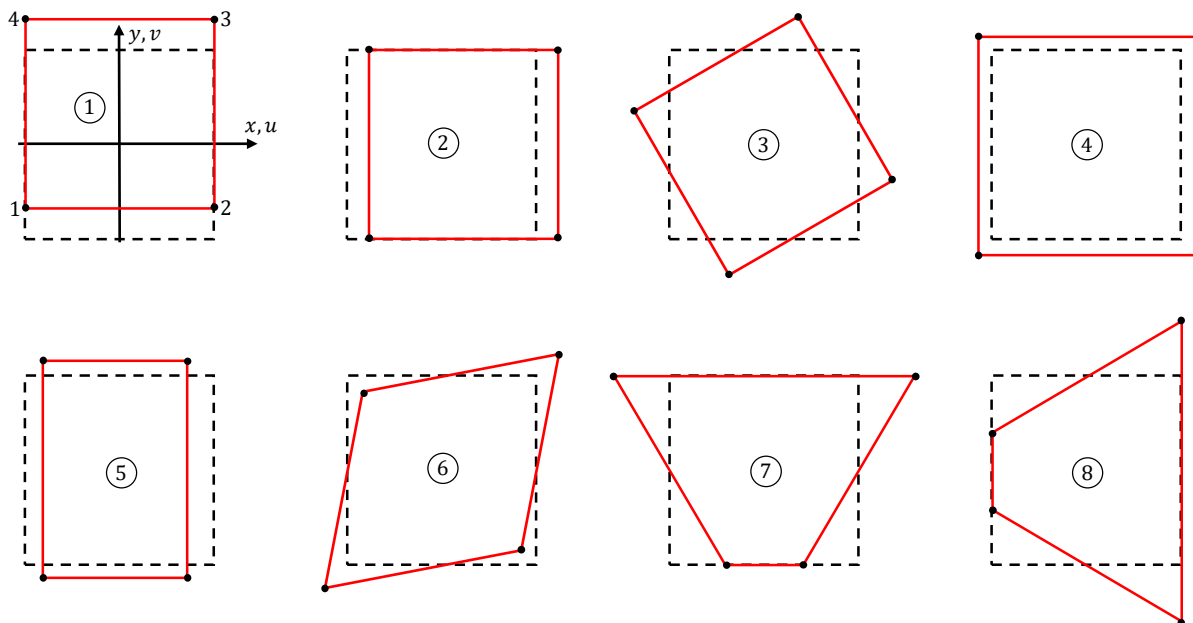


Fig.9a.1 – Modi di spostamento indipendenti di un elemento bilineare.

è corretto che sia, indipendentemente dal metodo d'integrazione utilizzato. I successivi tre modi, i numeri 4, 5 e 6, sono modi a deformazione costante per i quali $U_e > 0$, indipendentemente dal metodo d'integrazione utilizzato. I modi 7 ed 8 sono modi flessionali. Se per l'integrazione della matrice di rigidezza si utilizzasse un solo punto di Gauss disposto nel punto centrale dell'elemento, questi due modi non verrebbero intercettati in quanto in tale punto $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$. Di conseguenza per i modi 7 e 8 risulterebbe $U_e = 0$ e l'elemento mostrerebbe due meccanismi. Questi due modi spuri scompaiono se per l'integrazione si utilizzano 2×2 punti di Gauss o un numero superiore.

I meccanismi appena citati possono apparire sia in un unico elemento che in una mesh di elementi. Nella Fig.9a.2d, i modi 7 e 8 della fig.9a.1 sono combinati con la rotazione rigida di ogni elemento. A causa della loro forma, questi meccanismi si chiamano modi "clessidra" (*hourglass mode*). Ognuna di queste distorsioni, così come quelle viste precedentemente nella Fig.9a.1, devono essere considerate identiche a quelle che si otterrebbero invertendo il segno del movimento, cioè sostituendo $\{\mathbf{d}\}$ con $-\{\mathbf{d}\}$.

Consideriamo adesso un elemento piano quadratico avente 8 oppure 9 nodi ed integrato con 2×2 punti di Gauss. Le funzioni di forma dell'elemento isoparametrico a 9 nodi si ottengono moltiplicando i polinomi di Lagrange monodimensionali di secondo grado:

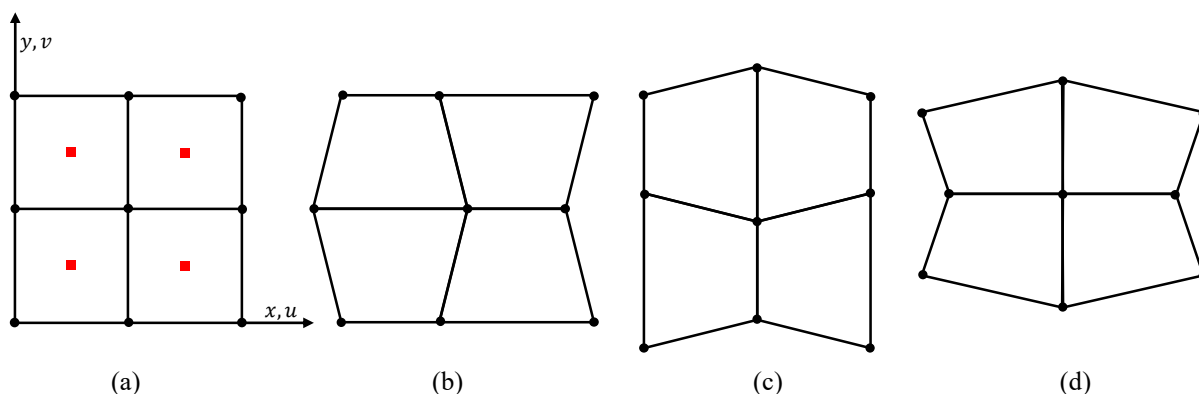


Fig.9a.2 (a) Mesh formata da 4 elementi bilineari sui quali sono indicati i punti di Gauss per l'integrazione della matrice di rigidità (uno per elemento in posizione centrale); (b,c,d) Possibili meccanismi (modi "clessidra").

$$L_i(\xi) = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^3 (\xi - \xi_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^3 (\xi_i - \xi_j)}$$

Posto $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$ e $\xi_3 = 1$ si ottiene:

$$\left\{ \begin{aligned} L_1(\xi) &= \frac{\prod_{j=1, j \neq 1}^3 (\xi - \xi_j)}{\prod_{j=1, j \neq 1}^3 (\xi_1 - \xi_j)} = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(-1 - \xi_2)(-1 - \xi_3)} = \frac{\xi(\xi - 1)}{(-1)(-1 - 1)} = \frac{\xi(\xi - 1)}{2} \\ L_2(\xi) &= \frac{\prod_{j=1, j \neq 2}^3 (\xi - \xi_j)}{\prod_{j=1, j \neq 2}^3 (\xi_2 - \xi_j)} = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(-\xi_1)(-\xi_3)} = \frac{(\xi + 1)(\xi - 1)}{(1)(-1)} = 1 - \xi^2 \\ L_3(\xi) &= \frac{\prod_{j=1, j \neq 3}^3 (\xi - \xi_j)}{\prod_{j=1, j \neq 3}^3 (\xi_3 - \xi_j)} = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)} = \frac{(\xi + 1)(\xi)}{(2)(1)} = \frac{\xi(\xi + 1)}{2} \end{aligned} \right.$$

Usando gli stessi polinomi nelle due direzioni ξ ed η ed eseguendo il loro prodotto otteniamo:

$$\left\{ \begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= L_1(\xi)L_1(\eta) = \frac{\xi(\xi - 1)}{2} \times \frac{\eta(\eta - 1)}{2} \\ N_2(\xi, \eta) &= L_3(\xi)L_1(\eta) = \frac{\xi(\xi + 1)}{2} \times \frac{\eta(\eta - 1)}{2} \\ N_3(\xi, \eta) &= L_3(\xi)L_3(\eta) = \frac{\xi(\xi + 1)}{2} \times \frac{\eta(\eta + 1)}{2} \\ N_4(\xi, \eta) &= L_1(\xi)L_3(\eta) = \frac{\xi(\xi - 1)}{2} \times \frac{\eta(\eta + 1)}{2} \\ N_5(\xi, \eta) &= L_2(\xi)L_1(\eta) = (1 - \xi^2) \times \frac{\eta(\eta - 1)}{2} \\ N_6(\xi, \eta) &= L_3(\xi)L_2(\eta) = \frac{\xi(\xi + 1)}{2} \times (1 - \eta^2) \\ N_7(\xi, \eta) &= L_2(\xi)L_3(\eta) = (1 - \xi^2) \times \frac{\eta(\eta + 1)}{2} \\ N_8(\xi, \eta) &= L_1(\xi)L_2(\eta) = \frac{\xi(\xi - 1)}{2} \times (1 - \eta^2) \\ N_9(\xi, \eta) &= L_2(\xi)L_2(\eta) = (1 - \xi^2) \times (1 - \eta^2) \end{aligned} \right.$$

Eseguendo un'analisi agli autovalori, osserviamo che uno dei 18 modi è proporzionale al seguente vettore (vedi Fig.9a.3(b)):

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_n = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Lo spostamento di un punto interno all'elemento risulta quindi:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{cases} \sum_{i=1}^9 N_i u_i \\ \sum_{i=1}^9 N_i v_i \end{cases}$$

Sostituendo le espressioni delle funzioni di forma ed i valori nodali di spostamento otteniamo:

$$\begin{cases} u = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 - (N_5 + N_6 + N_7 + N_8) \\ v = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che:

$$\begin{cases} N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = \xi^2 \eta^2 \\ N_5 + N_6 + N_7 + N_8 = \xi^2 + \eta^2 - 2\xi^2 \eta^2 \end{cases}$$

Di conseguenza gli spostamenti nell'elemento a 9 nodi indicato nella Fig. 9a.2(b) valgono:

$$\begin{cases} u = 3\xi^2 \eta^2 - \xi^2 - \eta^2 \\ v = 0 \end{cases}$$

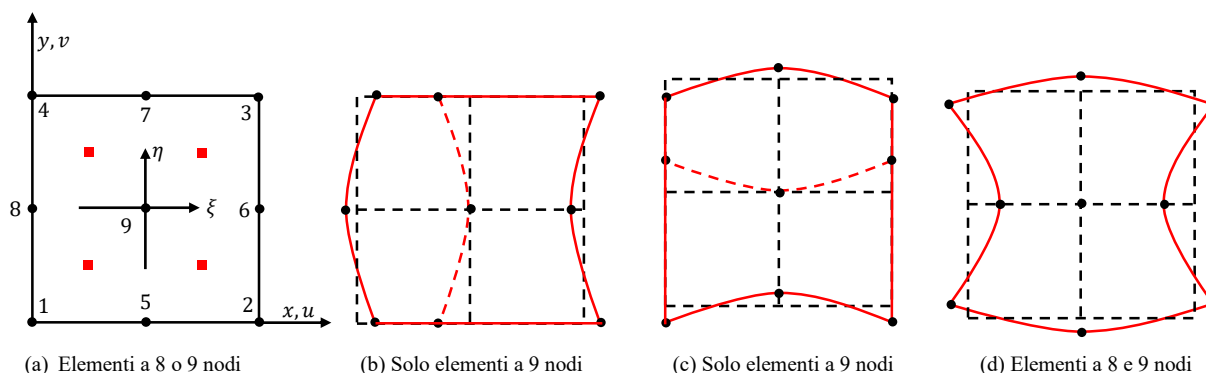


Fig.9a.3 – Possibili meccanismi (modi “clessidra”) negli elementi quadratici integrati in 2×2 punti di Gauss. I 4 punti di Gauss sono indicati con dei quadratini rossi.

Nei 2×2 punti di Gauss utilizzati per l'integrazione della matrice di rigidezza, cioè dove le coordinate ξ ed η assumono i valori $\pm 1/\sqrt{3}$, le derivate degli spostamenti valgono:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 6\xi\eta^2 - 2\xi = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \eta} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 6\xi^2\eta - 2\eta = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 6\xi\eta^2 - 2\xi = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 6\xi^2\eta - 2\eta = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0 \end{cases}$$

Perciò in questi punti, per qualsiasi forma dell'elemento indeformato, le deformazioni saranno nulle. Oltre a questo modo esiste un secondo campo di spostamenti (vedi Fig.9a.3c) v tale che nei 4 punti di Gauss si manifesti lo stesso fenomeno. Abbiamo quindi identificato due meccanismi.

I due meccanismi precedenti non sono possibili nell'elemento a 8 nodi perché in tale elemento è assente il termine $\xi^2 \eta^2$. Comunque è possibile un altro meccanismo sia nell'elemento a 8 nodi che in quello a 9 nodi. Il suo campo di spostamento è semplice da definire per un elemento quadrato:

$$\begin{cases} u = \xi(3\eta^2 - 1) \\ v = \eta(1 - 3\xi^2) \end{cases}$$

Anche in questo caso nei 2×2 punti di Gauss le deformazioni sono nulle. Normalmente questo meccanismo non è di grande importanza perché due elementi adiacenti non possono avere questo modo, come

si può osservare cercando di unire due elementi deformati. Quindi una instabilità presente in elementi isolati non è presente nella mesh.

In conclusione, la Fig.9a.3 identifica tre instabilità elementari presenti negli elementi quadratici causati dall'integrazione di Gauss in soli 2×2 punti. La matrice di rigidezza elementare ha rango 12 sia per l'elemento a 8 nodi che per quello a 9 (il rango è pari ai gradi di libertà dell'elemento meno il numero di moti rigidi e i modi d'instabilità). Se l'integrazione di Gauss si esegue in 3×3 punti non esiste alcuna instabilità.

Quando i vincoli interni che dovrebbero impedire i modi ad energia nulla non sono adeguati, il modello FEM può deformarsi in modo scorretto. Consideriamo la Fig.9a.4(a). Gli elementi potrebbero essere sia quelli quadrangolari a 4 nodi integrati in un solo punto centrale sia quelli a 9 nodi integrati in 2×2 punti di Gauss. Ipotizziamo che la forza applicata sia concentrata in un nodo. In questa situazione i meccanismi sono impediti perché tutti i nodi a sinistra del modello sono vincolati in un incastro. Comunque il vincolo diventa sempre più debole man mano che ci si allontana dall'incastro. Vicino al carico le distorsioni del tipo mostrato nelle figure 9a.2(b) e 9a.3(b) diventano evidenti. In effetti per una mesh formata da 2×24 elementi lo spostamento può superare di 500 volte quello stimato dalla formula PL/EA .

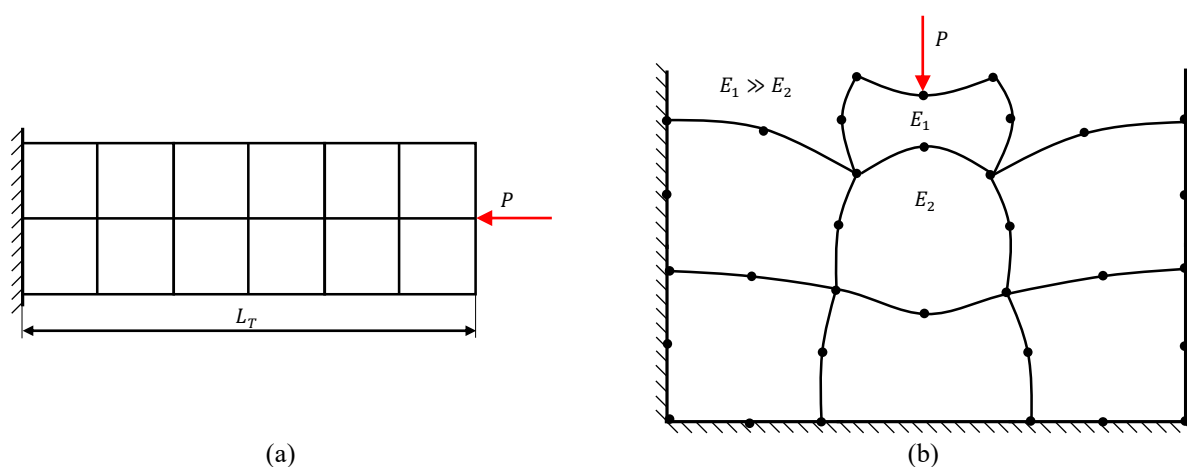


Fig.9a.4 – Problemi che coinvolgono dei “quasi meccanismi”, se si usa l'integrazione ridotta. In (b) gli elementi che appaiono deformati erano in origine rettangolari.

Una situazione simile è indicata nella Fig.9a.4(b) nella quale le matrici di rigidezza degli elementi sono state calcolate utilizzando 2×2 punti di Gauss. L'elemento più rigido (quello caricato dalla forza P) è poco vincolato dagli elementi più deformabili collegati al mondo esterno: il risultato è che il modo indicato nella Fig.9a.3(d) (con il segno di $\{d\}$ negativo) diventa pronunciato anche se non illimitato.

Anche gli elementi di volume e le piastre sottoposte a flessione possono manifestare fenomeni d'instabilità. I metodi utilizzati per individuare e controllare questi modi sono simili a quelli utilizzati con gli elementi piani.

Controllo dell'instabilità

Sono stati proposti diversi metodi di controllo il cui obiettivo è eliminare l'instabilità fornendo dei vincoli, ma senza irrigidire la risposta dell'elemento ai modi legittimi che hanno un comportamento corretto. Il metodo che verrà qui presentato si riferisce ad un elemento rettangolare bilineare integrato in un solo punto centrale e al quale si aggiungerà una “rigidezza di tipo clessidra”. **L'elemento si calcola molto rapidamente e funziona molto bene.**

Per semplicità consideriamo solo lo spostamento nodale orizzontale $\{d_x\}$ degli otto modi mostrati nella Fig.9a.1. Per i modi 1 e 8 $\{d_x\} = \{0\}$. Un'arbitraria combinazione dei modi che vanno dal 2 al 6 è la seguente:

$$\{d_x\} = a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_6 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dove i coefficienti a_i sono costanti. Il modo n.7 è:



$$\{\mathbf{d}_x\}_7 = a_7 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Per fornire al modo n.7 la rigidezza che perde utilizzando un solo punto d'integrazione, creiamo una "matrice di stabilizzazione":

$$[\mathbf{k}]_7 = \{\mathbf{d}_x\}_7 \{\mathbf{d}_x\}_7^T = a_7^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \{1 \quad -1 \quad 1 \quad -1\} = a_7^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per vincolare il modo n.8 è necessaria una matrice $[\mathbf{k}]_8$ simile alla precedente, contenente la costante a_8 . Se la matrice di rigidezza $[\mathbf{k}]$ dell'elemento è stata ottenuta usando un solo punto d'integrazione, è necessario sommarvi le matrici $[\mathbf{k}]_7$ e $[\mathbf{k}]_8$. Perché l'elemento rettangolare sottoposto ad uno stato di deformazione di pura flessione mostri l'energia elastica esatta è necessario scegliere i valori corretti da assegnare ai coefficienti a_7 e a_8 . E' bene osservare che il modo n.7 è ortogonale agli altro modi, cioè è valida la seguente relazione:

$$\{\mathbf{d}_x\}_7^T \{\mathbf{d}_x\}_i = 0 \quad \text{per } i \neq 7$$

L'ortogonalità consente di evitare che $[\mathbf{k}]_7$ irrigidisca i modi diversi dal settimo: questo fatto lo si può verificare calcolando le forze nodali $\{\mathbf{r}\}_i$ associate alla matrice $[\mathbf{k}]_7$:

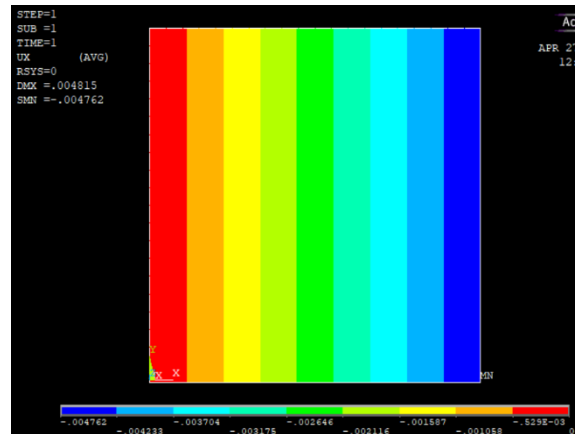
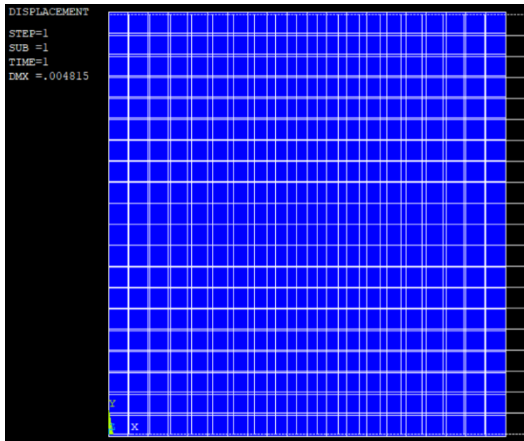
$$\{\mathbf{r}\}_i = [\mathbf{k}]_7 \{\mathbf{d}_x\}_i = \{\mathbf{d}_x\}_7 \{\mathbf{d}_x\}_7^T \{\mathbf{d}_x\}_i = \{\mathbf{d}_x\}_7 \{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\} \quad \text{per } i \neq 7$$

Il metodo di controllo analizzato può essere esteso agli elementi aventi più di quattro nodi e agli elementi di forma arbitraria.

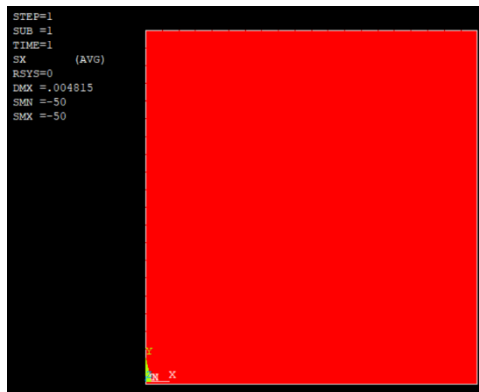
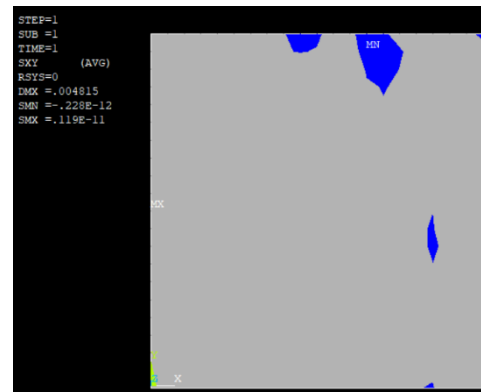


Esempi con ANSYS

Carico distribuito su un modello quadrato di spessore unitario in stato di sforzo piano Integrazione: Reduced Integration



Spostamento orizzontale

Sforzo σ_x Sforzo τ_{xy}

Sulla destra è stata applicata una pressione pari a 50 [MPa] la cui risultante vale 1000 [N]. Lo spostamento massimo teorico vale:

$$u = \frac{FL}{EA} = \frac{1000 \times 20}{210000 \times (20 \times 1)} = 4.762 \times 10^{-3} [mm]$$

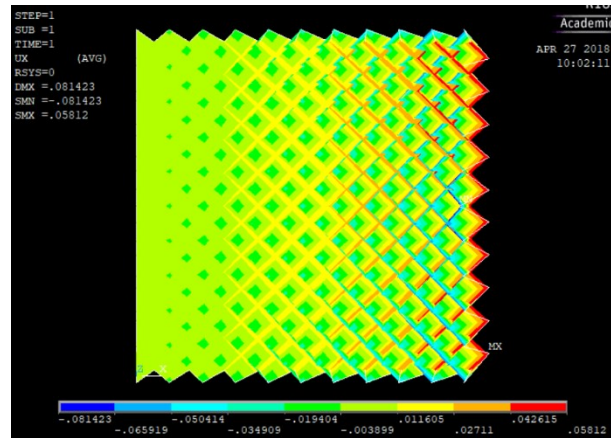
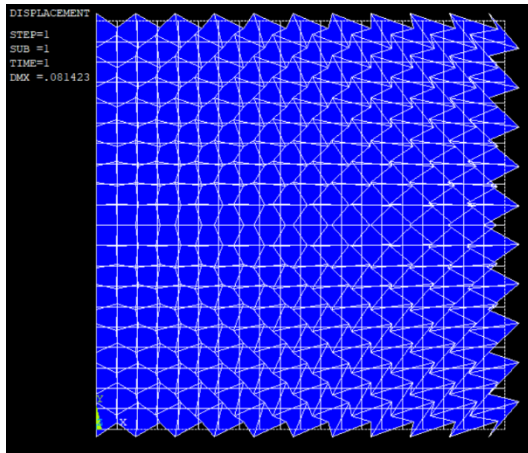
La soluzione numerica ha fornito $u = 4.815 \times 10^{-3} [mm]$, la stessa che si ottiene usando l'integrazione di tipo **Simple Enhanced Strain** che però usa 2×2 punti di Gauss. L'errore percentuale vale:

$$Err = \frac{U_{FEM} - U_{teoria}}{U_{teoria}} \times 100 = 1.1 \%$$

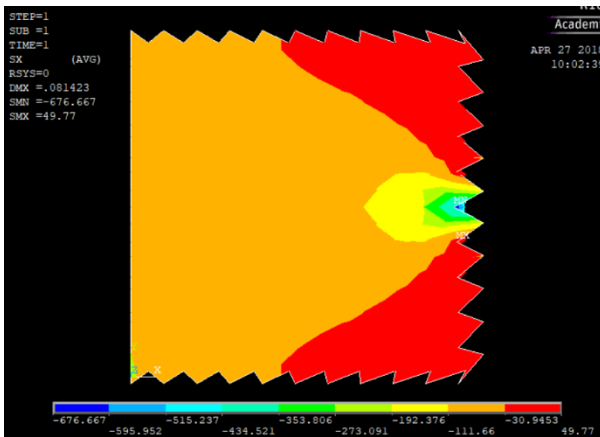


Analizziamo adesso la stessa struttura sottoposta ad un carico concentrato.

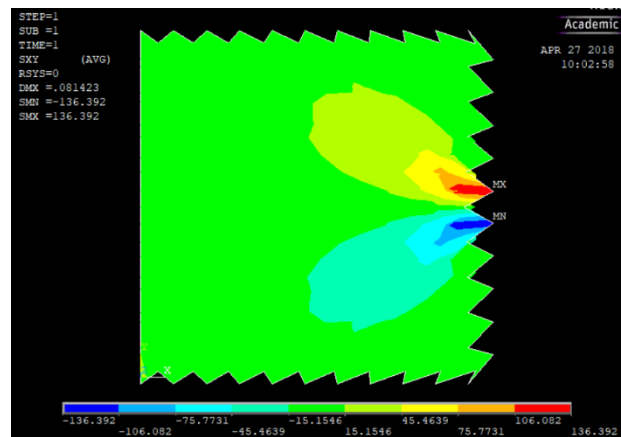
Integrazione: Reduced Integration



Spostamento orizzontale (è evidente il fenomeno “clessidra”)



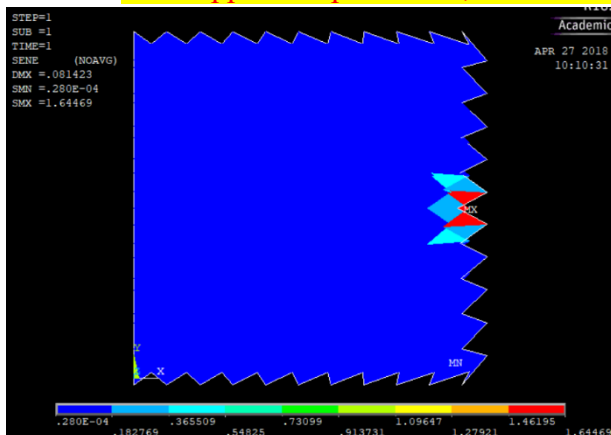
Sforzo σ_x



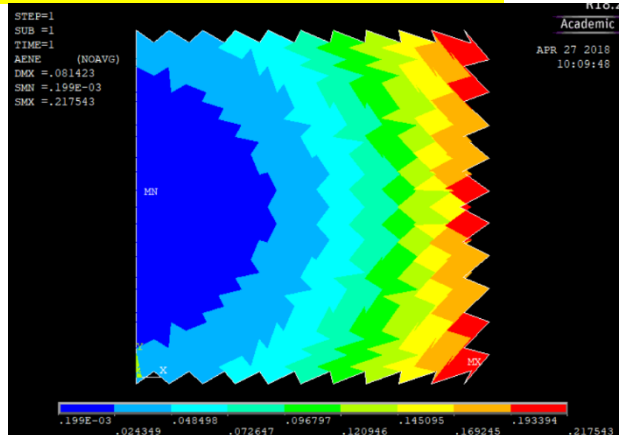
Sforzo τ_{xy}

E' possibile verificare la precisione della soluzione confrontando l'energia totale (vedi il parametro SENE nel comando [ETABLE](#)) con l'energia introdotta artificialmente con il controllo clessidra (vedi il parametro AENE sempre su [ETABLE](#)). Se il rapporto tra l'energia artificiale sull'energia totale è inferiore al 5%, allora generalmente la soluzione è accettabile.

Se il rapporto supera il 5%, allora è necessario aumentare la densità della mesh.



Energia elastica



Energia artificiale



Nella zona prossima al vincolo il rapporto tra le due energie vale circa:

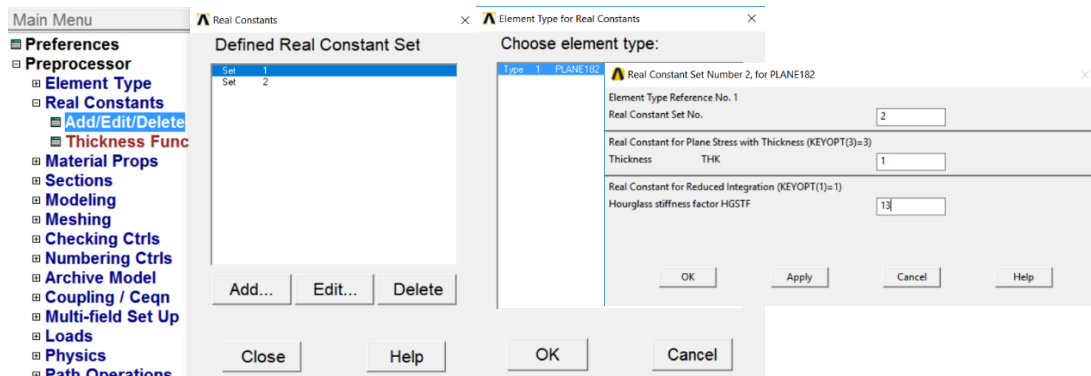
$$\frac{\text{Energia artificiale}}{\text{Energia totale}} = \frac{0.199 \times 10^{-3}}{0.280 \times 10^{-4}} \cong 7.1 \%$$

Nella zona prossima al carico il rapporto vale circa:

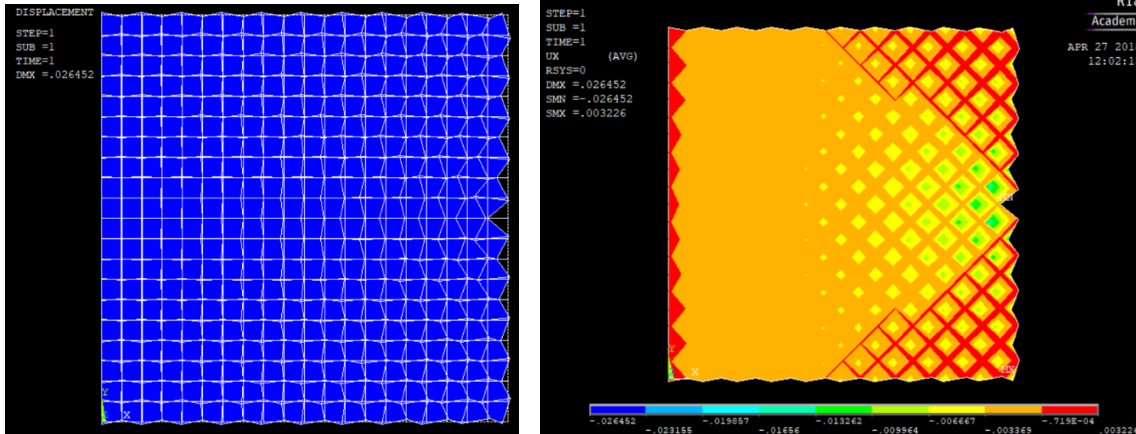
$$\frac{\text{Energia artificiale}}{\text{Energia totale}} = \frac{0.217543}{1.64469} \cong 13.2 \%$$

Come si può osservare il rapporto tra l'energia artificiale sull'energia totale è superiore al 5%, per cui la soluzione non è accettabile. Possiamo tentare di agire sul parametro **Hourglass stiffness factor (HGSTF)** e ripetere il calcolo, ma la sua scelta (da inserire tra le costanti dell'elemento) non è semplice anche perché dipende dallo stato di deformazione che subirà l'elemento. Il suo valore di default è HSTF =1

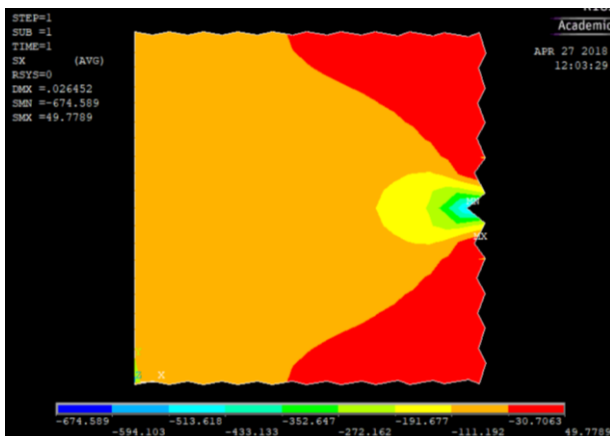
Tentiamo di ripetere il calcolo dividendo gli elementi in due insiemi, quelli prossimi al vincolo (per i quali poniamo HSTF =1) e quelli prossimi al carico (per i quali poniamo HSTF =13).



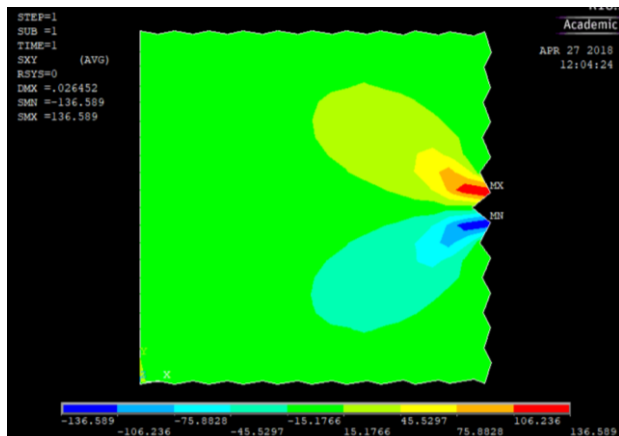
Con questa modifica i risultati sono i seguenti:



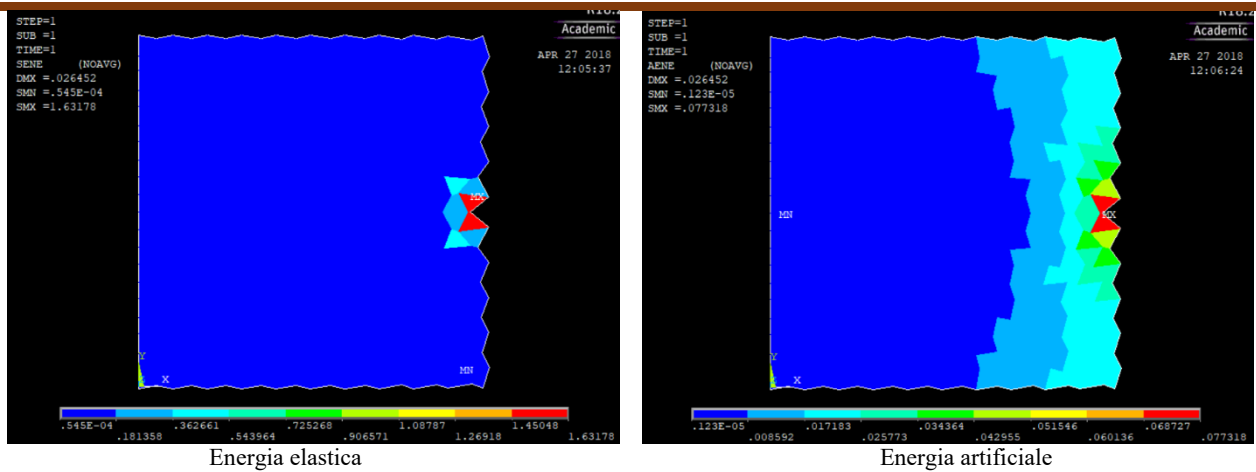
Spostamento orizzontale (il fenomeno "clessidra" si è ridotto ma non è scomparso)



Sforzo σ_x



Sforzo τ_{xy}



Nella metà sinistra del modello il rapporto tra le due energie vale circa:

$$\frac{\text{Energia artificiale}}{\text{Energia totale}} = \frac{0.123 \times 10^{-5}}{0.545 \times 10^{-4}} \cong 2.26 \%$$

Nella zona prossima al carico il rapporto vale circa:

$$\frac{\text{Energia artificiale}}{\text{Energia totale}} = \frac{0.077318}{1.63178} \cong 4.74 \%$$

Il manuale ANSYS afferma che quando il rapporto tra l'energia artificiale sull'energia totale è inferiore al 5%, allora **generalmente la soluzione è accettabile**. Osserviamo però che in questo caso la soluzione non è precisa. Ciò è dovuto al fatto che con un solo punto d'integrazione i modi flessionali di deformazione sono poco rigidi. Se il carico non dovesse attivare questi modi, allora la sotto integrazione potrebbe fornire ottimi risultati, come dimostrato dal primo esempio.

**Ulteriori considerazioni sulla stima dei parametri a_7 e a_8 .**

Per calcolare i coefficienti della matrice di rigidezza $[k]$ è prima necessario calcolare la matrice $[B]$:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

dove

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

Esprimiamo le coordinate x in funzione delle coordinate generalizzate a_1, a_2, a_3, a_4 e le coordinate y in funzione delle coordinate generalizzate b_1, b_2, b_3, b_4 :

$$\begin{cases} x = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta \\ y = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta \end{cases}$$

Osserviamo che quando l'elemento è un parallelogramma i coefficienti a_4 e b_4 si annullano.

Dimostrazione:

Scriviamo l'equazione parametrica della retta che unisce il nodo n.1 al nodo n.2 (ponendo $\eta = -1$) e vediamo quali sono le condizioni perché risulti parallela alla retta che unisce in nodo n.4 al nodo n.3 (ottenuta ponendo $\eta = 1$):

- 1) Equazione parametrica della retta 1-2: $\begin{cases} x = a_1 + a_2\xi - a_3 - a_4\xi = a_1 - a_3 + (a_2 - a_4)\xi \\ y = b_1 + b_2\xi - b_3 - b_4\xi = b_1 - b_3 + (b_2 - b_4)\xi \end{cases}$
- 2) Equazione parametrica della retta 4-3: $\begin{cases} x = a_1 + a_2\xi + a_3 + a_4\xi = a_1 + a_3 + (a_2 + a_4)\xi \\ y = b_1 + b_2\xi + b_3 + b_4\xi = b_1 + b_3 + (b_2 + b_4)\xi \end{cases}$

Perché le due rette risultino parallele è necessario che i due coefficienti angolari coincidano:

$$m_{12} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(b_2 - b_4)}{(a_2 - a_4)} = m_{43} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(b_2 + b_4)}{(a_2 + a_4)}$$

Lo stesso ragionamento vale per le rette che uniscono rispettivamente il nodo n.1 al n.4 (che si ottiene ponendo $\xi = -1$) e il nodo n.2 al n.3 (che si ottiene ponendo $\xi = 1$):

- 1) Equazione parametrica della retta 1-4: $\begin{cases} x = a_1 - a_2 + a_3\eta - a_4\eta = a_1 - a_2 + (a_3 - a_4)\xi \\ y = b_1 - b_2 + b_3\eta - b_4\eta = b_1 - b_2 + (b_3 - b_4)\xi \end{cases}$
- 2) Equazione parametrica della retta 2-3: $\begin{cases} x = a_1 + a_2 + a_3\eta + a_4\eta = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4)\xi \\ y = b_1 + b_2 + b_3\eta + b_4\eta = b_1 + b_2 + (b_3 + b_4)\xi \end{cases}$

Perché le due rette risultino parallele è necessario che i due coefficienti angolari coincidano:

$$m_{14} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(b_3 - b_4)}{(a_3 - a_4)} = m_{23} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(b_3 + b_4)}{(a_3 + a_4)}$$

Si osserva che le due relazioni sono verificate quando $a_4 = b_4 = 0$: in tal caso quindi l'elemento risulta un parallelogramma, che in generale non è retto.

In tale circostanza i coefficienti dello Jacobiano valgono:

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} = a_2 & ; & & J_{12} &= \frac{\partial y}{\partial \xi} = b_2 \\ J_{21} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} = a_3 & ; & & J_{22} &= \frac{\partial y}{\partial \eta} = b_3 \end{aligned}$$

e la sua inversa vale:



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \|J\|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_2 b_3 - a_3 b_2} \begin{bmatrix} b_3 & -b_2 \\ -a_3 & a_2 \end{bmatrix}$$

In questo caso quindi lo jacobiano è costante (il suo valore non è funzione di ξ ed η)

Il valore delle coordinate generalizzate si trova utilizzando le condizioni al contorno nella seguente equazione:

$$\begin{cases} x = a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta \\ y = b_1 + b_2 \xi + b_3 \eta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = a_1 - a_2 - a_3 \\ y_1 = b_1 - b_2 - b_3 \end{cases} ; \begin{cases} x_2 = a_1 + a_2 - a_3 \\ y_2 = b_1 + b_2 - b_3 \end{cases} ; \begin{cases} x_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ y_3 = b_1 + b_2 + b_3 \end{cases} ; \begin{cases} x_4 = a_1 - a_2 + a_3 \\ y_4 = b_1 - b_2 + b_3 \end{cases}$$

da cui risulta:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{x_1 + x_3}{2} ; & a_2 &= \frac{x_2 - x_1}{2} ; & a_3 &= \frac{x_4 - x_1}{2} \\ b_1 &= \frac{y_1 + y_3}{2} ; & b_2 &= \frac{y_2 - y_1}{2} ; & b_3 &= \frac{y_4 - y_1}{2} \end{aligned}$$

Le funzioni di forma e le relative derivate rispetto alle coordinate naturali ξ e η valgono:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} ; & N_2 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} ; & N_3 &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} ; & N_4 &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \xi} &= -\frac{(1-\eta)}{4} ; & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} &= \frac{(1-\eta)}{4} ; & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} &= \frac{(1+\eta)}{4} ; & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} &= -\frac{(1+\eta)}{4} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} &= -\frac{(1-\xi)}{4} ; & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} &= -\frac{(1+\xi)}{4} ; & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} &= \frac{(1+\xi)}{4} ; & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} &= \frac{(1-\xi)}{4} \end{aligned}$$

Le derivate delle funzioni di forma rispetto alle coordinate x e y valgono quindi:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\det \|J\|} \begin{bmatrix} b_3 & -b_2 \\ -a_3 & a_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{(1-\eta)}{4} \\ -\frac{(1-\xi)}{4} \end{Bmatrix} ; & \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\det \|J\|} \begin{bmatrix} b_3 & -b_2 \\ -a_3 & a_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{(1-\eta)}{4} \\ -\frac{(1+\xi)}{4} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\det \|J\|} \begin{bmatrix} b_3 & -b_2 \\ -a_3 & a_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{(1+\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)}{4} \end{Bmatrix} ; & \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\det \|J\|} \begin{bmatrix} b_3 & -b_2 \\ -a_3 & a_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{(1+\eta)}{4} \\ \frac{(1-\xi)}{4} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice $[B]$ risulta:

$$[B] = [[B]_1 \quad [B]_2 \quad [B]_3 \quad [B]_4]$$

dove

$$\begin{aligned} [B]_1 &= \frac{1}{4 \det \|J\|} \begin{bmatrix} -b_3(1-\eta) + b_2(1-\xi) & 0 \\ 0 & a_3(1-\eta) - a_2(1-\xi) \\ a_3(1-\eta) - a_2(1-\xi) & -b_3(1-\eta) + b_2(1-\xi) \end{bmatrix} \\ [B]_2 &= \frac{1}{4 \det \|J\|} \begin{bmatrix} b_3(1-\eta) + b_2(1+\xi) & 0 \\ 0 & -a_3(1-\eta) - a_2(1+\xi) \\ -a_3(1-\eta) - a_2(1+\xi) & b_3(1-\eta) + b_2(1+\xi) \end{bmatrix} \\ [B]_3 &= \frac{1}{4 \det \|J\|} \begin{bmatrix} b_3(1+\eta) - b_2(1+\xi) & 0 \\ 0 & -a_3(1+\eta) + a_2(1+\xi) \\ -a_3(1+\eta) + a_2(1+\xi) & b_3(1+\eta) - b_2(1+\xi) \end{bmatrix} \\ [B]_4 &= \frac{1}{4 \det \|J\|} \begin{bmatrix} -b_3(1+\eta) - b_2(1-\xi) & 0 \\ 0 & a_3(1+\eta) + a_2(1-\xi) \\ a_3(1+\eta) + a_2(1-\xi) & -b_3(1+\eta) - b_2(1-\xi) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

o, i altri termini:

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & B_{15} & 0 & B_{17} & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 & B_{24} & 0 & B_{26} & 0 & B_{28} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{35} & B_{36} & B_{37} & B_{38} \end{bmatrix}$$

Osserviamo che in $\xi = \eta = 0$ la matrice $[B]$ vale:



$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{4\det\|J\|} \begin{bmatrix} b_2 - b_3 & 0 & b_3 + b_2 & 0 & b_3 - b_2 & 0 & -b_3 - b_2 & 0 \\ 0 & a_3 - a_2 & 0 & -a_3 - a_2 & 0 & a_2 - a_3 & 0 & a_3 + a_2 \\ a_3 - a_2 & b_2 - b_3 & -a_3 - a_2 & b_3 + b_2 & a_2 - a_3 & b_3 - b_2 & a_3 + a_2 & -b_3 - b_2 \end{bmatrix}$$

Se moltiplichiamo la matrice $[\mathbf{B}]$ per i seguenti autovettori della matrice $[\mathbf{k}]$ (tranne i primi tre che corrispondono a moti rigidi):

$$\begin{aligned} \{\mathbf{d}\}_{modo\ n.4} &= \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} ; & \{\mathbf{d}\}_{modo\ n.5} &= \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} ; & \{\mathbf{d}\}_{modo\ n.6} &= \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \\ \{\mathbf{d}\}_{modo\ n.7} &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} ; & \{\mathbf{d}\}_{modo\ n.8} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

otteniamo (vedi Fig.9a.2):

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= [\mathbf{B}] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_{modo\ n.4} = \frac{1}{\det\|J\|} \begin{Bmatrix} b_3 \\ a_2 \\ -a_3 - b_2 \end{Bmatrix} ; & \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= [\mathbf{B}] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_{modo\ n.5} = \frac{1}{\det\|J\|} \begin{Bmatrix} -b_3 \\ a_2 \\ a_3 - b_2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= [\mathbf{B}] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_{modo\ n.6} = \frac{1}{\det\|J\|} \begin{Bmatrix} -b_2 \\ -a_3 \\ a_2 + b_3 \end{Bmatrix} ; & \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= [\mathbf{B}] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_{modo\ n.7} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= [\mathbf{B}] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_{modo\ n.8} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Come si può osservare, i modi flessionali 7 e 8 non producono deformazioni nel punto centrale, di conseguenza quando si utilizza la sotto integrazione compaiono due modi a "energia nulla".