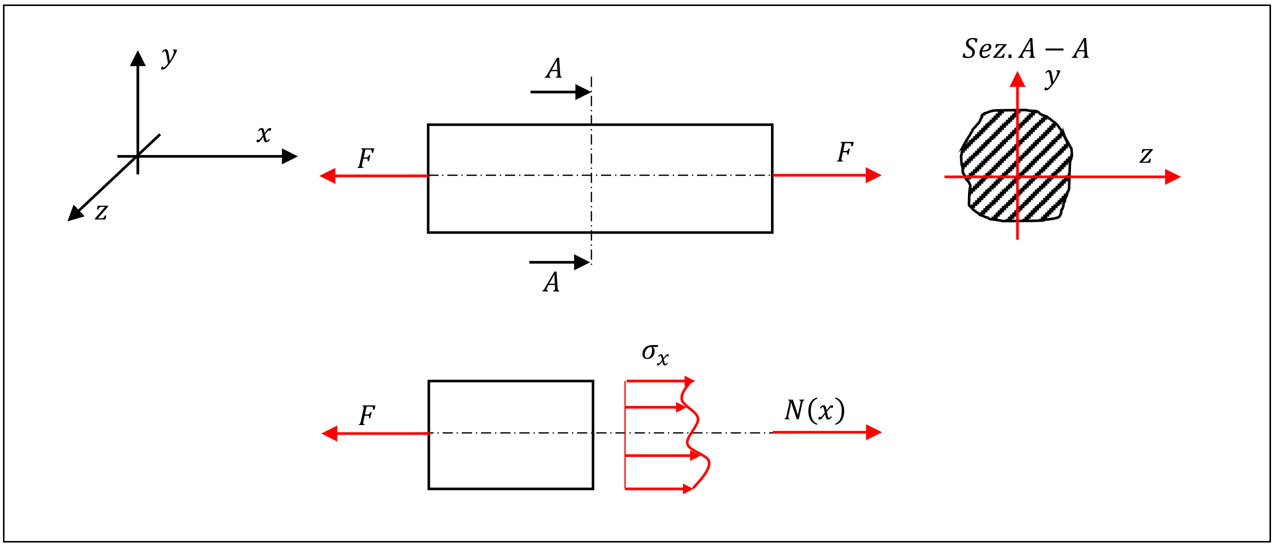
https://unica.adobeconnect.com/pu9cbuk3hon9/

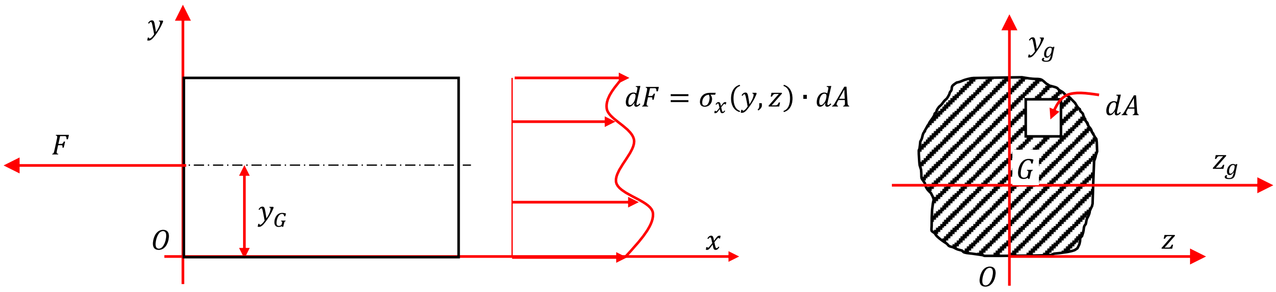
STATO DI SFORZO CAUSATO DALLE AZIONI NORMALI



Per l'equilibrio delle forze orizzontali:

$$\sum F_x = N(x) - F = 0 \quad \text{da cui} \quad N(x) = F$$

$$N(x) = \int_A \sigma_x \cdot dA$$



Per l'equilibrio alla rotazione:

$$\sum_o M_z = F \cdot y_G - \int_A y \cdot dF = F \cdot y_G - \int_A y \cdot \sigma_x(y,z) dA = 0$$

IL PROBLEMA E' STATICAMENTE INDETERMINATO

ovvero non disponiamo di un numero sufficiente di equazioni per poter determinare in modo univoco tutte le incognite.

SONO NECESSARIE DELLE IPOTESI CINEMATICHE.

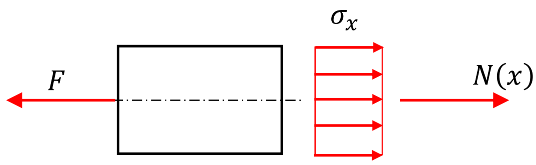
$$\begin{cases} \varepsilon_x(y,z) = cost \\ \sigma_x = E\varepsilon_x \end{cases}$$

1) $N(x) = F = \int_A \sigma_x \cdot dA = \sigma_x \int_A dA = \sigma_x A$ da cui: $\sigma_x = \frac{F}{A}$

2) $\sum_O M_z = 0$ da cui: $F \cdot y_G - \sigma_x \int_A y \cdot dA = 0$ da cui: $F \cdot y_G - \frac{F}{A} S_z = 0$

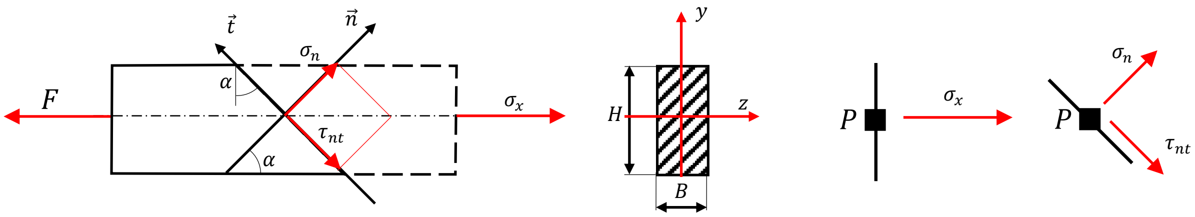
dove S_z indica il momento statico calcolato rispetto all'asse z. Da cui:

$$\begin{cases} y_G = \frac{S_z}{A} \\ z_G = \frac{S_y}{A} \end{cases} \quad \text{Coordinate del baricentro}$$



STATO DI SFORZO SU SUPERFICI INCLINATE

Ipotizziamo di sezionare la trave con un piano inclinato dell'angolo α rispetto alla verticale, come mostrato in figura.



Ipotizziamo che la sezione trasversale della trave sia rettangolare di area $A_0 = BH$;

l'area della sezione eseguita rispetto al piano inclinato vale: $A_n = B \frac{H}{cos(\alpha)} = \frac{A_0}{cos(\alpha)}$

cioè A_n indica l'area la cui superficie ha per normale il versore $\vec{n}$.

Si scrivono le equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} \sum F_x = \sigma_x A_0 - F = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

Si scompone la forza $\sigma_x A_0$ in direzione normale e tangente al piano di sezione: naturalmente la somma delle due componenti deve essere uguale $\sigma_x A_0$, mentre la loro differenza deve essere nulla:

$$\begin{cases} \sum F_x = \sigma_x A_0 - F = \sigma_n A_n cos(\alpha) + \tau_{nt} A_n sin(\alpha) - F = 0 \\ \sum F_y = \sigma_n A_n sin(\alpha) - \tau_{nt} A_n cos(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda si ottiene: $\tau_{nt} = \sigma_n tang(\alpha)$

Dalla prima si ottiene: $\sigma_n A_n cos(\alpha) + \tau_{nt} A_n sin(\alpha) = F$

Ricordando che: $A_n = \frac{A_0}{cos(\alpha)}$

abbiamo:

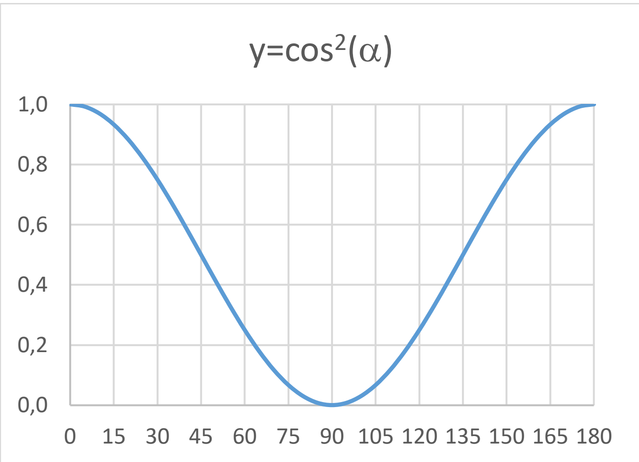
$$\sigma_n \frac{A_0}{cos(\alpha)} cos(\alpha) + \tau_{nt} \frac{A_0}{cos(\alpha)} sin(\alpha) = F$$

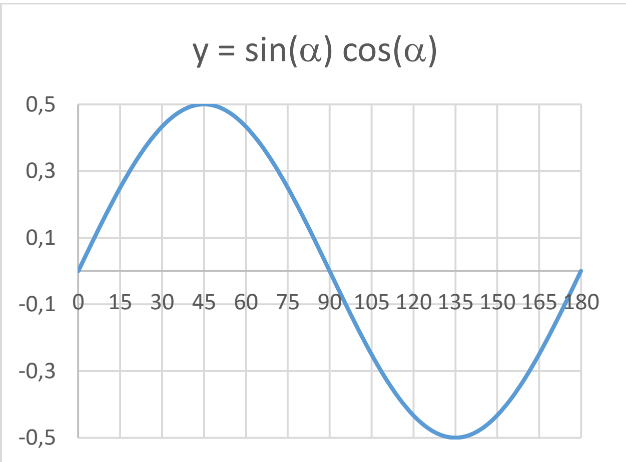
da cui: $\sigma_n = \frac{F}{A_0} - \tau_{nt} tang(\alpha) = \sigma_x - \sigma_n tang^2(\alpha)$

da cui: $\sigma_n + \sigma_n tang^2(\alpha) = \sigma_n[1 + tang^2(\alpha)] = \sigma_x$

e quindi:

$$\begin{cases} \sigma_n = \dfrac{\sigma_x}{1 + tang^2(\alpha)} = \dfrac{\sigma_x}{1 + \dfrac{sin^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)}} = \sigma_x cos^2(\alpha) \\ \tau_{nt} = \sigma_n tang(\alpha) = \sigma_x cos^2(\alpha) tang(\alpha) = \sigma_x cos(\alpha) sin(\alpha) \end{cases}$$





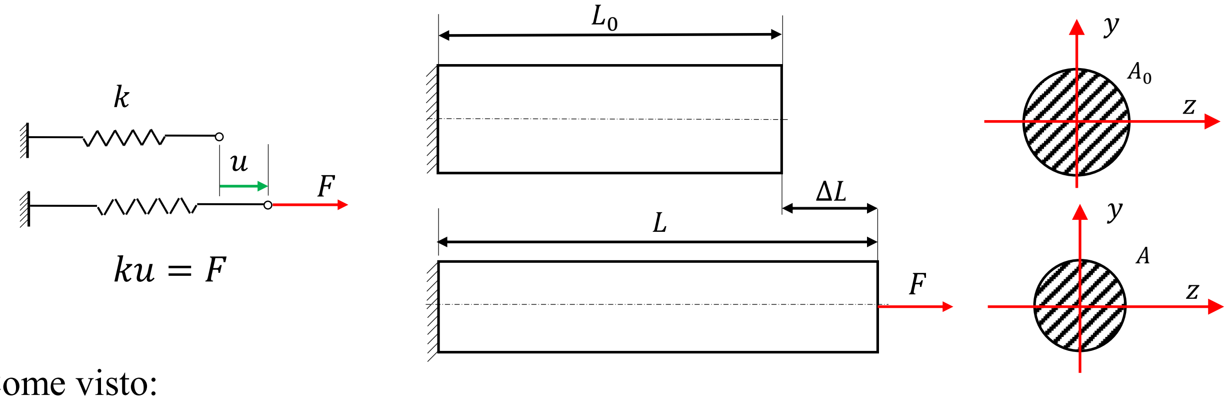
Lo sforzo normale σ_n è massimo per $\alpha = 0°$ ed è nullo per $\alpha = 90°$.

Lo sforzo tangenziale è nullo per $\alpha = 0°$ e per $\alpha = 90°$, mentre raggiunge il massimo per $\alpha = \pm 45°$: in tal caso, vale:

$$\tau_{max} = \sigma_x cos(45) sin(45) = \frac{\sigma_x}{2}$$

RIGIDEZZA A TRAZIONE

E' possibile confrontare la deformazione subita da una molla di caratteristica k e sottoposta a trazione con quella subita da una trave rettilinea a sezione costante.



Come visto:

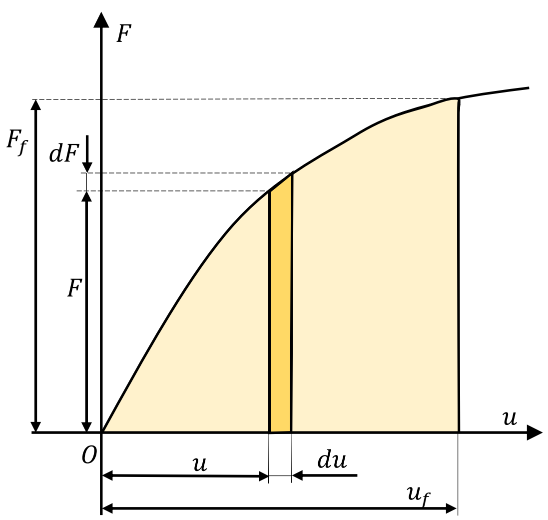
$$\sigma_x = \frac{F}{A_0} \qquad \varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{u}{L_0} \qquad \sigma_x = E\varepsilon_x$$

da cui, per confronto con quanto accade con la molla, è possibile definire la rigidezza all'azione normale:

$$\sigma_x = \frac{F}{A_0} = E\varepsilon_x = E\,\frac{u}{L_0} \qquad F = \left(\frac{EA_0}{L_0}\right)u = k_N u$$

RIGIDEZZA ALL'AZIONE NORMALE: $\quad k_N = \dfrac{EA_0}{L_0}$

IL LAVORO DI DEFORMAZIONE



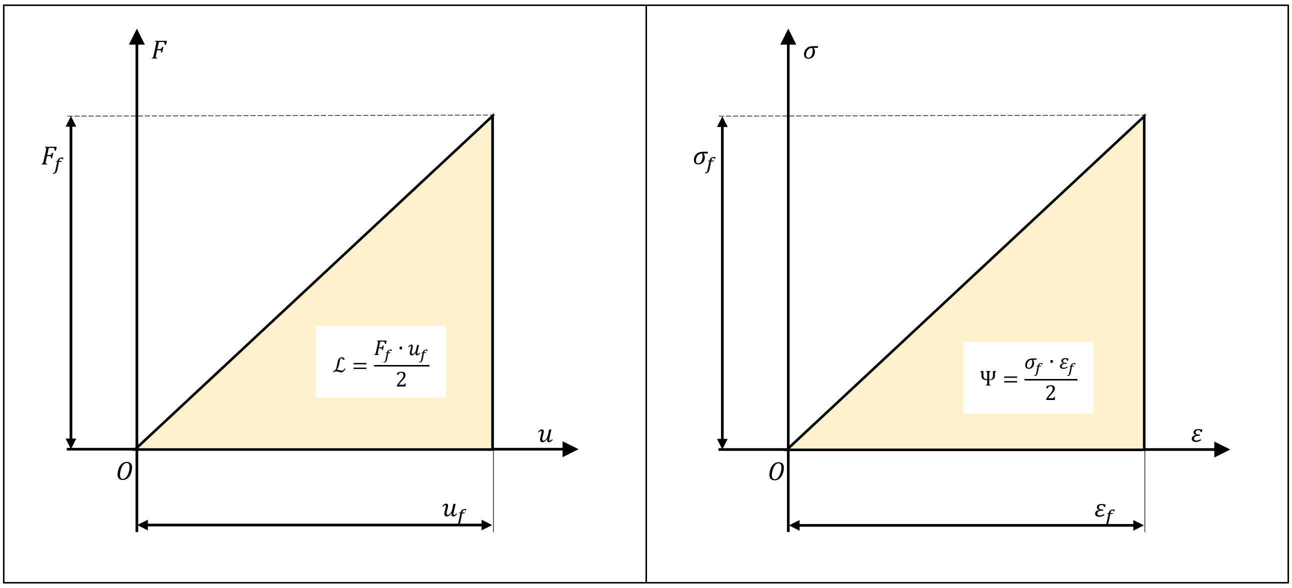
Nel caso della trazione, ipotizzando che il carico F cresca lentamente da zero al valore finale, cioè in maniera quasi statica, attraverso una successione di stati di equilibrio, gli estremi della trave si allontanano della quantità u. Un aumento infinitesimo del carico dF rispetto al valore di partenza F, provoca un allungamento du. In questo intervallo il lavoro di F vale $F \cdot du$.

La somma di tutti questi lavori elementari fino all'allungamento finale u_f vale:

$$\mathcal{L} = \int_0^{u_f} d\mathcal{L} = \int_0^{u_f} F \cdot du$$

Questo lavoro rappresenta **l'energia di deformazione** accumulata dal solido a seguito della deformazione provocata dal carico F. Se la legge di variazione di u in funzione della forza F è lineare, l'espressione dell'energia di deformazione diventa:

$$\mathcal{L} = \frac{F_f \cdot u_f}{2} \quad [N \cdot m]$$ **Teorema di Clapeyron**



Sempre nel caso di un materiale elastico lineare, è possibile definire l'energia accumulata da un volume unitario, detta anche **DENSITA' DI ENERGIA DI DEFORMAZIONE**:

$$\Psi = \frac{\mathcal{L}}{V} = \frac{\frac{F_f \cdot u_f}{2}}{A_0 L_0} = \frac{1}{2}\frac{F_f}{A_0}\frac{u_f}{L_0} = \frac{\sigma_f \cdot \varepsilon_f}{2}$$

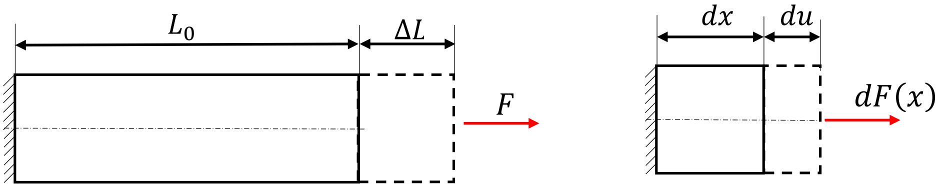
Poiché:

$$\sigma_f = E\varepsilon_f \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E}$$

si può anche scrivere:

$$\Psi = \frac{\sigma_f \cdot \varepsilon_f}{2} = \frac{\sigma_f^2}{2E}$$

Calcolo degli spostamenti per mezzo dell'integrazione della deformazione assiale



Abbiamo definito la deformazione con la seguente formula:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0} = \varepsilon_x^{media}$$

In realtà, la formula fornisce la deformazione media su tutta la lunghezza della trave. In pratica può capitare che alcune zone, lungo l'asse, si deformino più di altre, per esempio a causa della variazione della geometria della sezione trasversale.

E' allora conveniente definire la deformazione puntuale, come la variazione di lunghezza du di un elementino di lunghezza infinitesima dx :

$$\varepsilon_x(x) = \frac{\mathrm{du}}{dx}$$

Per calcolare lo spostamento orizzontale subito da un punto P della trave disposto a distanza x_p dall'incastro, è necessario sommare tutte le variazioni infinitesime di lunghezza du subite dagli elementi compresi tra l'incastro e il punto; ciò si ottiene integrando l'ultima equazione:

$$\int_0^{x_p} \mathrm{du} = \int_0^{x_p} \varepsilon_x(x) \cdot dx$$

Ricordando la Legge di Hooke: $\sigma_x = E\varepsilon_x$ si può ricavare: $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N(x)}{EA}$ e quindi:

$$\mathrm{u}(x_p) - \mathrm{u}(0) = \int_0^{x_p} \varepsilon_x(x) \cdot dx = \int_0^{x_p} \frac{N(x)}{EA} \cdot dx$$

Se il materiale è omogeneo e la sezione trasversale è costante (cioè se EA non cambia con x), si può scrivere:

$$\mathrm{u}(x_p) = \frac{1}{EA}\int_0^{x_p} N(x)\cdot dx + \mathrm{u}(0)$$

Quindi per la stima dello spostamento è necessario integrare l'equazione dell'azione interna $N(x)$ ed è necessario conoscere lo spostamento $\mathrm{u}(0)$ del punto alla coordinata $x = 0$ (condizione al contorno).

Per esempio, se $N(x) = F = cost$ e se in $x = 0$ c'è un incastro che impedisce gli spostamenti (quindi $\mathrm{u}(0) = 0$), allora:

$$\mathrm{u}(x_p) = \frac{Fx_p}{EA}$$

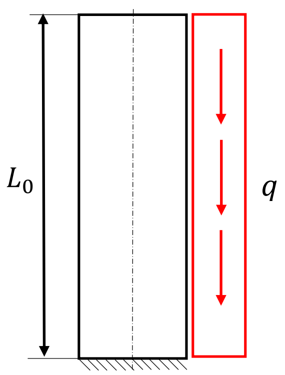
Il punto alla coordinata $x_p = L_0$ subisce quindi uno spostamento pari a:

$$\mathrm{u}_{max} = \frac{FL_0}{EA}$$

ESEMPIO N.1

Calcolare l'abbassamento della sommità della trave verticale a sezione costante A rappresentata in figura causato dal peso proprio. Il materiale abbia densità ρ e la trave sia lunga L_0.

Soluzione



Il peso complessivo della trave vale:

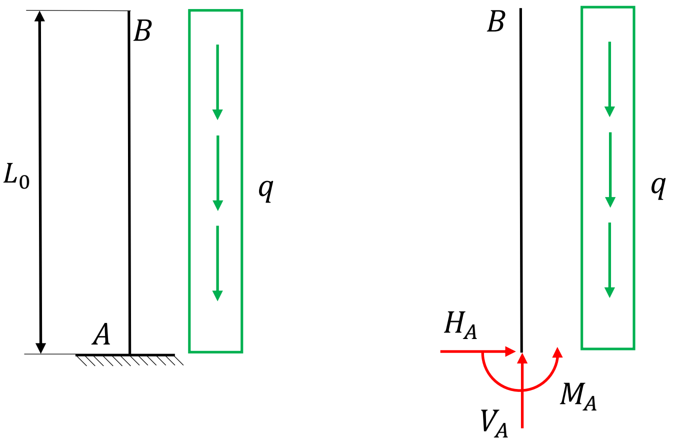
$$P = g\rho \cdot vol = g\rho \cdot AL_0$$

Dividendo il peso per la lunghezza della trave otteniamo il carico per unità di lunghezza:

$$q = \frac{P}{L_0} = g\rho A$$

Si procede con il calcolo delle reazioni vincolari e delle azioni interne.

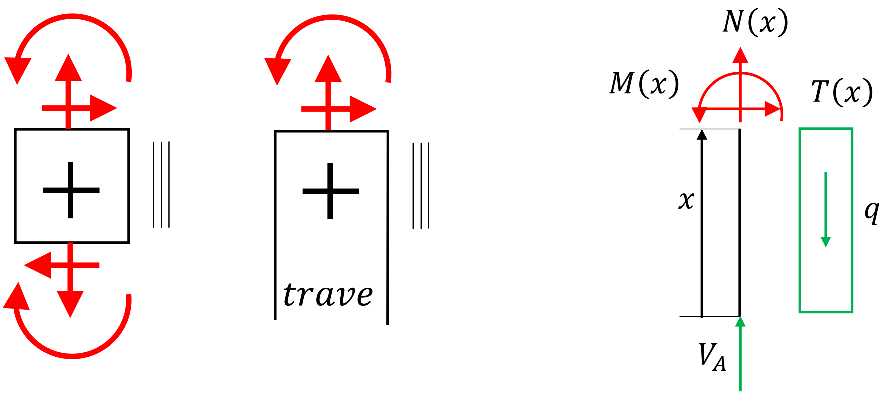
Lo schema statico è il seguente:



Si scrivono le equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} \sum F_{\parallel} = V_A - qL_0 = 0 \\ \sum F_{\perp} = H_A = 0 \\ \sum_A M = M_A = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui risulta:} \quad \begin{cases} V_A = qL_0 \\ H_A = 0 \\ M_A = 0 \end{cases}$$

Scegliamo una convenzione dei segni e disponiamo il sistema di riferimento verso l'alto con origine nel punto A.



Si scrivono le equazioni cardinali della statica per la parte inferiore della trave:

$$\begin{cases} \sum F_{\parallel} = N(x) + V_A - qx = 0 \\ \sum F_{\perp} = T(x) = 0 \\ \sum_A M = M(x) = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui risulta:} \quad \begin{cases} N(x) = qx - V_A \\ T(x) = 0 \\ M(x) = 0 \end{cases}$$

Sostituendo il valore della reazione vincolare si ottiene:

$$N(x) = q(x - L_0)$$

Siamo adesso pronti per il calcolo dello spostamento verticale del punto B.

$$\mathrm{u}(x_p) = \frac{1}{EA}\int_0^{x_p} N(x)\cdot dx + \mathrm{u}(0) = \frac{q}{EA}\int_0^{x_p} (x - L_0)\cdot dx + \mathrm{u}(0)$$

Integrando:

$$\mathrm{u}(x_p) = \frac{q}{EA}\left[\frac{x^2}{2} - L_0 x\right]_0^{x_p} + \mathrm{u}(0)$$

Quando $x_p = 0$ lo spostamento è nullo perché in A c'è un incastro. L'andamento dello spostamento è parabolico e la sua equazione è la seguente:

$$\mathrm{u}(x_p) = \frac{q}{EA}\left(\frac{x_p^2}{2} - L_0 x_p\right)$$

Il punto B (dove $x_p = L_0$) subisce quindi il seguente spostamento:

$$\mathrm{u}_B = -\frac{qL_0^2}{2EA}$$

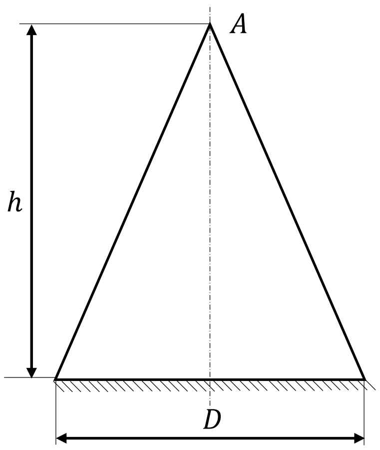
diretto verso il basso. Sostituendo il valore del carico distribuito si ottiene:

$$\mathrm{u}_B = -\frac{g\rho L_0^2}{2E}$$

Ipotizziamo che la trave sia realizzata con un profilato in acciaio del tipo normalizzato HEA 100 ad ali uguali : dalle tabelle si trova che il peso per unità di lunghezza della trave vale $q = 167[N/m]$, e che l'area della sua sezione trasversale vale $A = 2124\ [mm^2]$. Ipotizzando che il modulo di Young valga $E = 210000\ [MPa]$ e che la trave si alta $L_0 = 3\ [m]$ si ottiene:

$$\mathrm{u}_B = -\frac{qL_0^2}{2EA} = -\frac{0.167\cdot 3000^2}{2\cdot 210000\cdot 2124} \cong 0.002\ [mm] = 2\ [\mu m]$$

ESEMPIO N.2



Determinare lo spostamento del vertice A di un cono circolare omogeneo di altezza h, diametro massimo D, densità ρ e modulo di elasticità E, dovuto al suo peso proprio.

Soluzione

Disponiamo l'origine dell'asse di riferimento nel punto A e rivolto verso il basso.

L'azione interna $N(x)$ di compressione vale:

$$N(x) = -\int_0^x dF_x = -\int_0^x \rho \cdot g \cdot dvol = -\int_0^x \rho \cdot g \cdot A(x) \cdot dx$$

La sezione trasversale del cono è funzione del raggio che varia linearmente con la coordinata verticale x:

$$r(x) = \frac{x}{h} \cdot R \qquad A(x) = \pi \cdot r^2(x) = \pi \cdot \left(\frac{R}{h}x\right)^2 = A_0 \cdot \left(\frac{x}{h}\right)^2$$

in cui R ed A_0 indicano rispettivamente il raggio massimo e l'area massima alla base del cono, quando $x = h$. Da cui:

$$N(x) = -\int_0^x \rho \cdot g \cdot A(x) \cdot dx = -\frac{\rho \cdot g \cdot A_0}{h^2} \cdot \int_0^x x^2 \cdot dx = -\frac{\rho \cdot g \cdot A_0}{3 \cdot h^2} \cdot x^3$$

Secondo la legge di Hooke monoassiale:

$$\sigma = \frac{N(x)}{A(x)} = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{du}{dx} \qquad \text{da cui} \qquad du = \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} \cdot dx$$

Integrando abbiamo:

$$u(x) = \int_0^x \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} \cdot dx = \int_0^x \frac{-\frac{\rho \cdot g \cdot A_0}{3 \cdot h^2} \cdot x^3}{E \cdot A_0 \cdot \left(\frac{x}{h}\right)^2} \cdot dx = -\frac{\rho \cdot g}{3 \cdot E} \int_0^x x \cdot dx$$

Sviluppando si ottiene:

$$u(x) = -\frac{\rho \cdot g \cdot x^2}{6 \cdot E} + c$$

Condizione al contorno: quando $x = h$ lo spostamento verticale $u(h) = 0$, quindi:

$$-\frac{\rho \cdot g \cdot h^2}{6 \cdot E} + c = 0 \qquad \text{da cui} \qquad c = \frac{\rho \cdot g \cdot h^2}{6 \cdot E}$$

Quindi la funzione “**spostamento verticale**” è la seguente:

$$u(x) = \frac{\rho \cdot g}{6 \cdot E} \cdot (h^2 - x^2)$$

Quando $x = 0$ (cioè nel punto A) lo spostamento vale:

$$u(x = 0) = \frac{\rho \cdot g}{6 \cdot E} \cdot h^2$$