



CAP. 9 – LA FORMULAZIONE ISOPARAMETRICA

9.1 Introduzione

Questo capitolo introduce la famiglia degli elementi isoparametrici. Il nome deriva dal fatto che si utilizzano le stesse funzioni d'interpolazione sia per definire la forma dell'elemento che il suo campo di spostamento. Gli elementi isoparametrici sono usati nella soluzione di vari problemi che vanno dall'elasticità bi e tri-dimensionale, allo studio di piastre e gusci di forma qualsiasi. Parte del loro successo deriva dal fatto che, una volta compreso il comportamento di un elemento, è possibile estendere in modo molto semplice le stesse idee ad altri elementi isoparametrici. Mentre i lati degli elementi lineari sono rettilinei, quelli degli elementi quadratici o di ordine superiore possono essere sia rettilinei che curvi, il che li rende molto adatti a modellare strutture curve.

Le coordinate isoparametriche sono un particolare tipo di sistema di coordinate, dette naturali o intrinseche. Consideriamo per esempio una trave di lunghezza L che giaccia lungo l'asse x , in modo tale che il suo punto centrale coincida con l'origine degli assi. Il punto iniziale e finale della trave si trovano rispettivamente alle coordinate $x = -L/2$ ed $x = L/2$. Se definiamo un'altra coordinata longitudinale nel modo seguente $\xi = 2 \cdot x/L$, allora gli estremi dell'asta si trovano alle coordinate $\xi = -1$ e $\xi = 1$. Se decidiamo che l'asse ξ sia legato alla trave e rimanga longitudinale indipendentemente dall'orientazione della trave rispetto al sistema di riferimento globale, allora ξ può assumere il nome di coordinata naturale.

Gli elementi isoparametrici sono stati proposti per la prima volta nel 1966 da Irons: furono formulati usando un sistema di coordinate naturali ξ, η definito dalla geometria dell'elemento e non dalla sua orientazione nel sistema di coordinate globali. Esiste naturalmente, per ogni elemento di una struttura, una relazione tra i due sistemi di riferimento che deve essere usata nella formulazione dell'elemento. Le coordinate ξ, η (e ζ se l'elemento è tridimensionale) sono collegate all'elemento e sono scalate in modo che i lati di un quadrilatero siano definiti da $\xi = -1, \xi = 1, \eta = -1$ e $\eta = 1$.

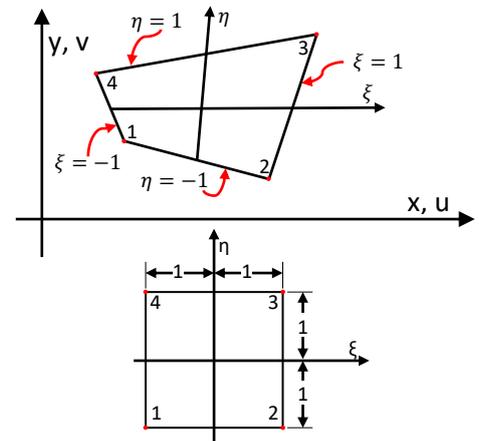
9.2 Un elemento isoparametrico piano

Consideriamo un quadrilatero avente otto gradi di libertà, cioè gli spostamenti u_i, v_i in ognuno dei suoi quattro nodi d'angolo. L'elemento ha i lati rettilinei, ma per il resto è di forma arbitraria e può essere immaginato come la distorsione di un elemento rettangolare di riferimento (vedi la figura). Si adotti la seguente relazione:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad [9.2.1]$$

in cui le funzioni di forma N_i valgono:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1-\xi) \cdot (1-\eta)}{4} & ; & & N_2 &= \frac{(1+\xi) \cdot (1-\eta)}{4} \\ N_3 &= \frac{(1+\xi) \cdot (1+\eta)}{4} & ; & & N_4 &= \frac{(1-\xi) \cdot (1+\eta)}{4} \end{aligned} \quad [9.2.2]$$



Questa proiezione (“mapping” nella letteratura anglosassone) mette in relazione un quadrato di lato pari a 2 nelle coordinate isoparametriche ξ, η , con un quadrilatero nelle coordinate x, y le cui dimensioni e la cui forma dipendono dalle otto coordinate nodali $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_4, y_4$. La proiezione è anche un metodo d'interpolazione che consente di conoscere le coordinate (x, y) di un qualsiasi punto interno all'elemento a partire dalle coordinate normalizzate (ξ, η) .

Le funzioni di forma $N_1(\xi, \eta), N_2(\xi, \eta), N_3(\xi, \eta)$ ed $N_4(\xi, \eta)$ si possono ricavare con il metodo spiegato nel capitolo precedente assegnando le opportune condizioni al contorno all'equazione:

$$x = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta \quad [9.2.3]$$



Gli spostamenti dei punti interni all'elemento possono essere espressi utilizzando le stesse funzioni di forma utilizzate per definire la geometria (si parla per questo motivo di "elementi isoparametrici"):

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{d\} \quad [9.2.4]$$

E' importante notare che gli spostamenti u e v sono diretti parallelamente agli assi x ed y e non in direzione ξ ed η . Inoltre se l'elemento è rettangolare, la deformazione ε_ξ parallela all'asse ξ varia in modo lineare con η , ma è indipendente da ξ ; in modo simile $\varepsilon_\eta = (\text{costante}) \cdot \xi$ e $\gamma_{\xi\eta} = c_1 + c_2 \cdot \xi + c_3 \cdot \eta$ in cui i coefficienti c_i sono delle costanti. Infatti:

$$\varepsilon_\xi = \frac{\partial u}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} u_i \quad ; \quad \varepsilon_\eta = \frac{\partial v}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} v_i \quad ; \quad \gamma_{\xi\eta} = \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} u_i + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} v_i$$

In forma matriciale abbiamo:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ \gamma_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(1-\eta)}{4} & 0 & \frac{(1-\eta)}{4} & 0 & \frac{(1+\eta)}{4} & 0 & \frac{-(1+\eta)}{4} & 0 \\ 0 & \frac{-(1-\xi)}{4} & 0 & \frac{-(1+\xi)}{4} & 0 & \frac{(1+\xi)}{4} & 0 & \frac{(1-\xi)}{4} \\ \frac{-(1-\xi)}{4} & \frac{-(1-\eta)}{4} & \frac{-(1+\xi)}{4} & \frac{(1-\eta)}{4} & \frac{(1+\xi)}{4} & \frac{(1+\eta)}{4} & \frac{(1-\xi)}{4} & \frac{-(1+\eta)}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$\text{da cui } \varepsilon_\xi = \frac{-(1-\eta)}{4} u_1 + \frac{(1-\eta)}{4} u_2 + \frac{(1+\eta)}{4} u_3 - \frac{(1+\eta)}{4} u_4 = \frac{1}{4} (u_2 - u_1 + u_3 - u_4) + \frac{\eta}{4} (u_1 - u_2 + u_3 - u_4)$$

E' ora necessario formulare le matrici elementari seguendo le indicazioni fornite del paragrafo 8.2. Ma, poiché scrivere le funzioni di forma in funzione di x ed y richiede parecchio tempo, lo faremo in funzione delle coordinate isoparametriche ξ ed η . A prima vista tutto ciò appare complicato, ma consentirà di scrivere in modo più semplice il programma per il calcolatore.

Riscriviamo le equazioni di questo paragrafo nel modo seguente:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot x_i & ; & \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot y_i \\ u &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot u_i & ; & \quad v = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot v_i \end{aligned} \quad [9.2.5]$$

Le relazioni tra le derivate nei due sistemi di riferimento sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned}$$

In forma matriciale possiamo scrivere:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad [9.2.6]$$

La matrice $[J]$ si chiama *Jacobiano*. Osservando l'eq.(9.2.5) vediamo che può essere calcolata nel modo seguente:



$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{(2 \times 4)} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}_{(4 \times 2)} \quad [9.2.7]$$

Usando l'inversa della relazione (9.2.6) abbiamo:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad [9.2.8]$$

Altrettanto possiamo scrivere per le derivate dello spostamento verticale v . Otteniamo quindi la relazione:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad [9.2.9]$$

dove

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad [9.2.10]$$

La relazione deformazione-spostamenti può essere scritta nel modo seguente:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad [9.2.11]$$

e dalle espressioni (9.2.5) abbiamo:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad [9.2.12]$$

La combinazione delle equazioni comprese tra la (9.2.8) e la (9.2.12) dà luogo alla relazione: $\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{d\}$.

La matrice $[B]$ è quindi la seguente:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

da cui



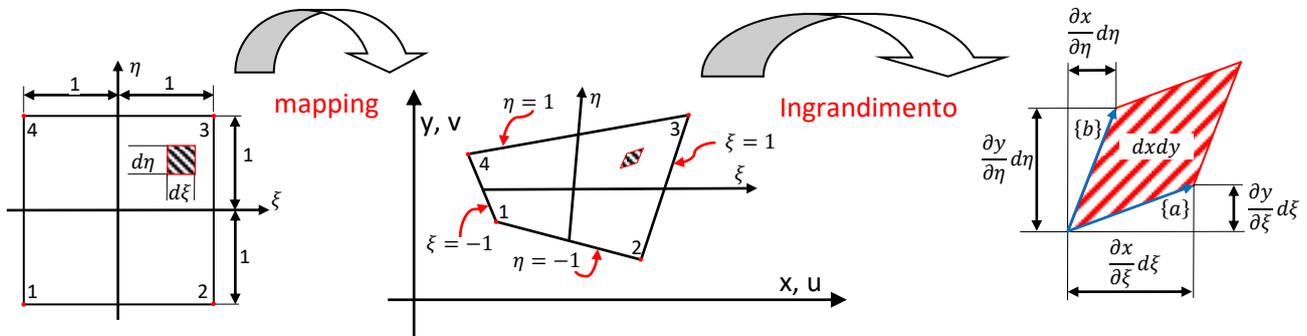
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = [B] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad [9.2.13]$$

dove, per esempio, abbiamo:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad [9.2.14]$$

Avendo calcolato le matrici $[N]$ e $[B]$ possiamo procedere all'integrazione dell'espressione $[B]^T[E][B]$. Per un tipico integrale il cambiamento delle coordinate implica la seguente relazione:

$$\iint (\dots) \cdot dx \cdot dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\dots) \cdot \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta \quad [9.2.15]$$



Dati i due vettori:

$$\{a\} = d\xi \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{b\} = d\eta \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

che individuano i lati dell'elemento infinitesimo proiettato dal sistema di riferimento naturale a quello reale (come è mostrato del diagramma che precede), il loro prodotto vettoriale dà luogo ad un vettore normale al piano xy il cui modulo è pari all'area del parallelogramma di lati $\{a\}$ e $\{b\}$:

$$\{a\} \times \{b\} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \cdot d\xi \cdot d\eta \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta \end{bmatrix} \right\}$$

Il determinante di $[J]$ è un fattore d'ingrandimento che a partire dall'area $d\xi \cdot d\eta$ dà origine all'area $dx \cdot dy$ e che è funzione della posizione entro l'elemento.

Avendo espresso tutte le matrici in funzione delle coordinate naturali ξ ed η , siamo pronti ad integrare le funzioni nello stesso sistema di riferimento. Comunque, in generale, non possiamo calcolare esattamente l'integrale a causa della loro complessità: infatti nel denominatore di $[J]^{-1}$ compaiono dei polinomi in ξ ed η . Di conseguenza l'integrazione è fatta in modo approssimato per via numerica.

9.3 Integrazione con il metodo di Gauss

Esistono molti metodi per il calcolo numerico degli integrali, ma nel seguito descriveremo solo quello di Gauss che risulta il più utilizzato nei programmi agli elementi finiti. Per valutare l'integrale:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) \cdot dx \quad [9.3.1]$$



nel modo più semplice, possiamo campionare (cioè valutare) la variabile $f(x)$ nel punto centrale dell'intervallo (in questo caso in $x = 0$) e moltiplicarne il valore per la lunghezza dell'intervallo: otteniamo in questo caso $I = 2 \cdot f(0)$. Se la funzione $f(x)$ fosse una retta, l'integrale sarebbe esatto. Avremmo infatti:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) \cdot dx = \int_{-1}^1 (a + bx) \cdot dx = \left[ax + b \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \left(a + b \frac{1}{2} \right) - \left(-a + b \frac{1}{2} \right) = 2a$$

dove $f(x = 0) = a$.

La generalizzazione di questa semplice formula conduce alla seguente relazione:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) \cdot dx \cong \sum_i W_i \cdot f(x_i) \quad [9.3.2]$$

Cioè, per approssimare l'integrale è necessario valutare il valore della funzione in alcuni punti x_i , moltiplicarne il valore per un peso adeguato W_i e sommare i risultati parziali. Il metodo di Gauss sceglie i punti di campionamento x_i in modo tale che, fissato il loro numero, si ottenga la stima migliore dell'integrale.

I punti di campionamento sono disposti in posizione simmetrica rispetto al centro dell'intervallo d'integrazione; ai punti disposti in posizione simmetrica rispetto all'origine, si assegna lo stesso peso. La tabella qui a lato fornisce i punti di campionamento ed i relativi pesi per i primi tre ordini d'integrazione.

N.punti	Posizioni	Pesi
1	$x_1 = 0$	2
2	$x_1 = x_2 = \pm 1/\sqrt{3}$	1
3	$x_1 = x_3 = \pm \sqrt{3/5}$	5/9
	$x_2 = 0$	8/9

Così, per esempio, usando due punti, abbiamo semplicemente $I \cong f(x_1) + f(x_2)$, che risulta una stima esatta nel caso in cui la funzione fosse un polinomio di ordine massimo pari a 3. In generale, il metodo di Gauss integra esattamente una funzione polinomiale di grado $2 \cdot n - 1$ campionando la funzione in n punti.

In pratica, usando n punti sostituiamo la funzione data $y = f(x)$ con un polinomio di ordine $2 \cdot n - 1$: la precisione dell'integrale numerico dipende da quanto bene il polinomio approssima la funzione data.

Vediamo come sono stati scelti il peso ed i punti di campionamento nel caso in cui questi siano pari a due. Consideriamo la seguente funzione polinomiale che, come detto, può essere integrata esattamente con soli due punti d'integrazione:

$$y = f(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3$$

L'integrale esatto di questa funzione vale: $I = \left(c_0 \cdot x + \frac{c_1}{2} \cdot x^2 + \frac{c_2}{3} \cdot x^3 + \frac{c_3}{4} \cdot x^4 \right) \Big|_{-1}^1 = 2 \left(c_0 + \frac{1}{3} c_2 \right)$

Calcoliamo l'integrale usando due punti $x = \pm a$ disposti in posizione simmetrica rispetto al centro dell'intervallo d'integrazione:

$$\begin{aligned} I_{Gauss} &= W \cdot f(x = -a) + W \cdot f(x = a) = \\ &= W \cdot \{ [c_0 + c_1 \cdot (-a) + c_2 \cdot (-a)^2 + c_3 \cdot (-a)^3] + [c_0 + c_1 \cdot a + c_2 \cdot a^2 + c_3 \cdot a^3] \} \\ &= 2 \cdot W \cdot (c_0 + c_2 \cdot a^2) \end{aligned}$$

Perché l'errore:

$$err = I - I_{Gauss} = 2 \cdot c_0 + \frac{2}{3} c_2 - 2 \cdot W \cdot (c_0 + c_2 \cdot a^2) = 2 \cdot (1 - W) \cdot c_0 + \left(\frac{2}{3} - 2 \cdot W \cdot a^2 \right) \cdot c_2$$

si annulli per ogni valore dei coefficienti c_0 e c_2 dobbiamo avere:

$$\begin{cases} \frac{\partial err}{\partial c_0} = 2 \cdot (1 - W) = 0 \\ \frac{\partial err}{\partial c_2} = \frac{2}{3} - 2 \cdot W \cdot a^2 = 0 \end{cases}$$

da cui $W = 1$ e $a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

In due dimensioni otteniamo l'integrale prima integrando in una dimensione e quindi nell'altra:

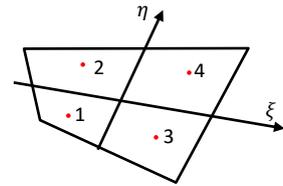


$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \cdot d\xi d\eta \cong \sum_i \sum_j W_i \cdot W_j \cdot f(\xi_i, \eta_j) \quad [9.3.3]$$

Così, per esempio, l'integrazione bidimensionale che utilizza 2 x 2 punti di Gauss è la seguente:

$$I = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 W_i \cdot W_j \cdot f(\xi_i, \eta_j) = f(\xi_1, \eta_1) + f(\xi_1, \eta_2) + f(\xi_2, \eta_1) + f(\xi_2, \eta_2)$$

dove i quattro punti di Gauss su cui campionare la funzione valgono $\xi_i, \eta_i = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.



L'estensione all'integrazione in tre dimensioni è immediata:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \cong \sum_i \sum_j \sum_k W_i \cdot W_j \cdot W_k \cdot f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad [9.3.5]$$

Anche se non è obbligatorio, normalmente in ogni direzione si utilizza lo stesso numero di punti d'integrazione.

9.4 Ulteriori elementi isoparametrici

L'elemento descritto nel paragrafo precedente è un elemento "lineare" perché i suoi lati rimangono dritti durante la deformazione. Un elemento quadratico è un elemento i cui lati possono deformarsi in modo lineare. Nella figura sono mostrati l'elemento quadratico ed il suo corrispondente in coordinate naturali.

Un vantaggio evidente dell'elemento quadratico è che esso può avere i lati curvi e perciò consente di modellare in modo più adeguato i lati non rettilinei di una struttura reale. E' naturalmente possibile modellare anche lati rettilinei: poiché la forma iniziale di un lato non ne determina il modo di deformarsi, un lato inizialmente rettilineo può subire spostamenti quadratici.

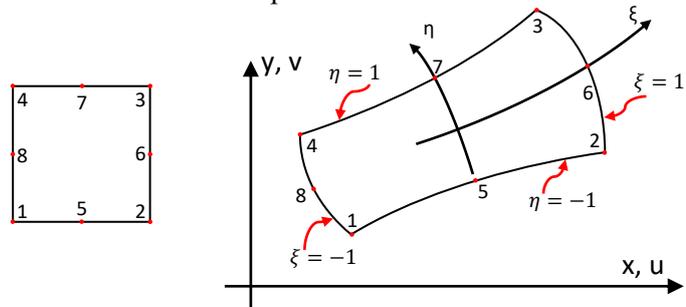


Fig.9.4.1 Elemento quadratico di riferimento ed elemento isoparametrico.

Le funzioni polinomiali utilizzate per descrivere la forma e lo spostamento hanno la forma:

$$a_1 + a_2 \cdot \xi + a_3 \cdot \eta + a_4 \cdot \xi^2 + a_5 \cdot \xi \cdot \eta + a_6 \cdot \eta^2 + a_7 \cdot \xi^2 \cdot \eta + a_8 \cdot \xi \cdot \eta^2 \quad [9.4.1]$$

Questa espressione può esprimersi in funzione delle quantità nodali sostituendo gli otto valori nodali che le coordinate x ed y e gli spostamenti u e v assumono nei punti di coordinate nodali normalizzate $\xi = \eta = -1$, $\xi = \eta = 1$, etc. ed invertendo la matrice 8 x 8 che ne deriva.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{Bmatrix} = [A] \cdot \{a\}$$

da cui:

$$\{a\} = [A]^{-1} \cdot \{x\}$$

La matrice $[A]^{-1}$ possiamo calcolarla con un programma come MATLAB:



$$[A]^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

da cui risulta:

$$x = \{1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2\} \cdot [A]^{-1} \cdot \{x\} = \{N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \quad N_7 \quad N_8\} \cdot \{x\}$$

dove:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} \cdot (-1 + \xi^2 + \xi\eta + \eta^2 - \xi^2\eta - \xi\eta^2); & N_2 &= \frac{1}{4} \cdot (-1 + \xi^2 - \xi\eta + \eta^2 - \xi^2\eta + \xi\eta^2); \\ N_3 &= \frac{1}{4} \cdot (-1 + \xi^2 + \xi\eta + \eta^2 + \xi^2\eta + \xi\eta^2); & N_4 &= \frac{1}{4} \cdot (-1 + \xi^2 - \xi\eta + \eta^2 + \xi^2\eta - \xi\eta^2); \\ N_5 &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \eta - \xi^2 + \xi^2\eta); & N_6 &= \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi - \eta^2 - \xi\eta^2); \\ N_7 &= \frac{1}{2} \cdot (1 + \eta - \xi^2 - \xi^2\eta); & N_8 &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi - \eta^2 + \xi\eta^2); \end{aligned}$$

Nel nodo i -esimo la funzione di forma $N_i = 1$ mentre le altre sono nulle. Abbiamo inoltre che in ogni punto vale la relazione: $\sum_1^8 N_i(\xi, \eta) = 1$

In alternativa è possibile usare un modo diretto più intuitivo, combinando vari modi elementari di deformazione. Se consideriamo un elemento monodimensionale a tre nodi, le sue funzioni di forma sono:

$$N_1(\xi) = -\xi \cdot \frac{1-\xi}{2} \quad ; \quad N_2(\xi) = \xi \cdot \frac{1+\xi}{2} \quad ; \quad N_3(\xi) = 1 - \xi^2$$

Nel nodo n.5 ($\xi = 0$; $\eta = -1$) possiamo combinare le seguenti equazioni:

$$N_5(\xi, \eta) = N_3(\xi) \cdot \frac{1-\eta}{2} = \frac{1}{2} (1 - \eta - \xi^2 + \xi^2\eta)$$

Nel nodo n.6 ($\xi = 1$; $\eta = 0$) possiamo combinare le seguenti equazioni:

$$N_6(\xi, \eta) = N_3(\eta) \cdot \frac{1+\xi}{2} = \frac{1}{2} (1 + \xi - \eta^2 - \xi\eta^2)$$

Nel nodo n.7 ($\xi = 0$; $\eta = 1$) possiamo combinare le seguenti equazioni:

$$N_7(\xi, \eta) = N_3(\xi) \cdot \frac{1+\eta}{2} = \frac{1}{2} (1 + \eta - \xi^2 - \xi^2\eta)$$

Nel nodo n.8 ($\xi = -1$; $\eta = 0$) possiamo combinare le seguenti equazioni:

$$N_8(\xi, \eta) = N_3(\eta) \cdot \frac{1-\xi}{2} = \frac{1}{2} (1 - \xi - \eta^2 + \xi\eta^2)$$

Per ricavare le funzioni di forma dei nodi d'angolo N_1, N_2, N_3 ed N_4 la prima idea intuitiva consiste nel combinare le funzioni di forma monodimensionali $N_1(\xi), N_2(\xi)$ con le $N_1(\eta), N_2(\eta)$ dell'elemento a tre nodi, ma ciò conduce a polinomi di ordine 4 ($\xi^2\eta^2$) e non viene rispettata la regola $\sum_1^8 N_i(\xi, \eta) = 1$. Allora si possono ottenere combinando le funzioni di forma monodimensionali $N_1(\xi), N_2(\xi)$ con le $N_1(\eta), N_2(\eta)$ dell'elemento a due nodi, ma sottraendo metà delle funzioni di forma dell'elemento a 8 nodi relative ai lati incidenti sul nodo in esame; per esempio per il nodo n.1 abbiamo:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1-\xi}{2} \cdot \frac{1-\eta}{2} - \frac{N_5(\xi, \eta)}{2} - \frac{N_8(\xi, \eta)}{2} \\ &= \frac{1}{4} (1 - \xi - \eta + \xi\eta) - \frac{1}{4} \cdot (1 - \eta - \xi^2 + \xi^2\eta) - \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi - \eta^2 + \xi\eta^2) \\ &= \frac{1}{4} (-1 + \xi^2 + \xi\eta + \eta^2 - \xi^2\eta - \xi\eta^2) \end{aligned}$$

che coincide con il valore trovato precedentemente per altra via. Come si può vedere il metodo intuitivo può portare ad errori assai gravi e deve essere usato con cautela.



9.5 Validità degli elementi isoparametrici

La validità della formulazione dei diversi tipi di elementi può essere misurata con i criteri indicati nel paragrafo 8.4. Gli elementi isoparametrici soddisfano il criterio dell'invarianza e della continuità degli spostamenti interni agli elementi. Mostriamo adesso che sono soddisfatti anche gli altri criteri, quello sui moti rigidi, quello della deformazione costante e quello sulla continuità degli spostamenti tra gli elementi.

Per mostrare la possibilità di moti rigidi ed il comportamento a deformazione costante, iniziamo considerando uno spostamento orizzontale in direzione x dato da:

$$u = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z \quad [9.5.1]$$

in cui i coefficienti a_i sono costanti. Se definiamo in modo analogo, con delle relazioni lineari, gli spostamenti v e w nelle direzioni y e z , vediamo che scegliendo in modo opportuno il valore dei coefficienti, possiamo avere traslazioni o rotazioni rigide oppure uno stato di deformazione costante ϵ_x, γ_{xy} , etc., etc. Perciò, poiché per esprimere gli spostamenti u, v, w all'interno dell'elemento utilizziamo le stesse funzioni polinomiali, è sufficiente mostrare che, una volta assegnati i valori nodali di spostamento in accordo con il campo di spostamento scelto, questo polinomio permette l'esistenza dello spostamento (9.5.1) all'interno dell'elemento. Quindi imponiamo lo spostamento del nodo i -esimo in accordo alla relazione (9.5.1):

$$u_i = a_0 + a_1x_i + a_2y_i + a_3z_i \quad [9.5.2]$$

Per definizione:

$$u = \sum N_i \cdot u_i$$

da cui:

$$u = \sum N_i \cdot (a_0 + a_1x_i + a_2y_i + a_3z_i) = a_0 \sum N_i + a_1 \sum N_i x_i + a_2 \sum N_i y_i + a_3 \sum N_i z_i \quad [9.5.3]$$

Ma per definizione abbiamo:

$$x = \sum N_i x_i; \quad y = \sum N_i y_i; \quad z = \sum N_i z_i \quad [9.5.4]$$

così che l'eq. [9.5.3] è identica all'eq. [9.5.1] purché $\sum N_i = 1$. Per mostrare che $\sum N_i = 1$, consideriamo un elemento individuato da due diversi sistemi di riferimento globali (vedi la figura).

Abbiamo:

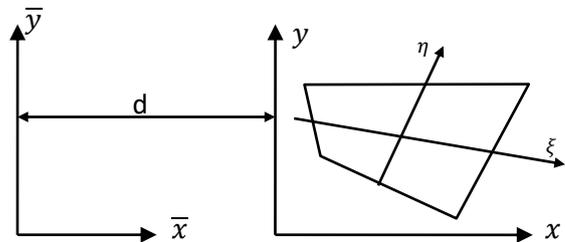
$$x = \sum N_i x_i \quad ; \quad \bar{x} = \sum N_i \bar{x}_i \quad [9.5.4]$$

Ma $\bar{x} = d + x$, così che abbiamo:

$$d + x = \sum N_i (d + x_i) = d \sum N_i + \sum N_i x_i$$

$$d = d \sum N_i + \sum N_i x_i - x = d \sum N_i \quad [9.5.4]$$

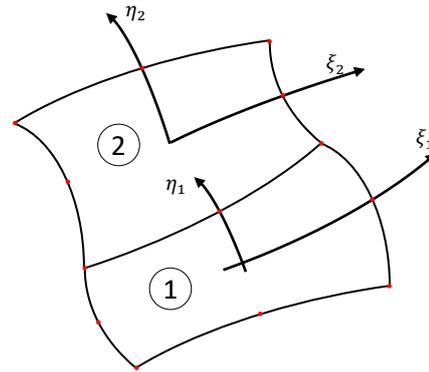
da cui concludiamo che $\sum N_i = 1$.



Per mostrare che durante la deformazione tra gli elementi è garantita la continuità degli spostamenti, notiamo che gli spostamenti lungo ogni lato sono determinati unicamente dagli spostamenti dei nodi appartenenti allo stesso lato e non dagli spostamenti degli altri nodi. Ciò si può osservare assegnando alla variabile ξ oppure η presenti nelle funzioni di forma il valore -1 oppure 1.



Inoltre, lungo un lato comune ($\eta_1 = +1$ e $\eta_2 = -1$ nella figura a lato) le funzioni di forma dei due elementi sono identiche. Poiché lungo tale lato $\xi_1 = \xi_2$, ne deriva che è garantita la compatibilità. Lo stesso argomento mostra che le funzioni isoparametriche definiscono delle forme tali che prima della deformazione gli elementi lungo i confini comuni coincidono esattamente.



Elemento N.1 ($\eta_1 = +1$)

$$N_1 = \frac{1}{4} \cdot (-1 + \xi^2 + \xi + 1 - \xi^2 - \xi) = 0;$$

$$N_2 = \frac{1}{4} \cdot (-1 + \xi^2 - \xi + 1 - \xi^2 + \xi) = 0;$$

$$N_3 = \frac{1}{4} \cdot (-1 + \xi^2 + \xi + 1 + \xi^2 + \xi) = \frac{1}{2} \cdot (\xi^2 + \xi);$$

$$N_4 = \frac{1}{4} \cdot (-1 + \xi^2 - \xi + 1 + \xi^2 - \xi) = \frac{1}{2} \cdot (\xi^2 - \xi);$$

$$N_5 = \frac{1}{2} \cdot (1 - 1 - \xi^2 + \xi^2) = 0;$$

$$N_6 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi - 1 - \xi) = 0;$$

$$N_7 = \frac{1}{2} \cdot (1 + 1 - \xi^2 - \xi^2) = (1 - \xi^2);$$

$$N_8 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi - 1 + \xi) = 0;$$

Elemento N.2 ($\eta_1 = -1$)

$$N_1 = \frac{1}{4} \cdot (-1 + \xi^2 - \xi + 1 + \xi^2 - \xi) = \frac{1}{2} \cdot (\xi^2 - \xi);$$

$$N_2 = \frac{1}{4} \cdot (-1 + \xi^2 + \xi + 1 + \xi^2 + \xi) = \frac{1}{2} \cdot (\xi^2 + \xi);$$

$$N_3 = \frac{1}{4} \cdot (-1 + \xi^2 - \xi + 1 - \xi^2 + \xi) = 0;$$

$$N_4 = \frac{1}{4} \cdot (-1 + \xi^2 + \xi + 1 - \xi^2 - \xi) = 0;$$

$$N_5 = \frac{1}{2} \cdot (1 + 1 - \xi^2 - \xi^2) = (1 - \xi^2);$$

$$N_6 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi - 1 - \xi) = 0;$$

$$N_7 = \frac{1}{2} \cdot (1 - 1 - \xi^2 + \xi^2) = 0;$$

$$N_8 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi - 1 + \xi) = 0;$$

9.6 Ordine necessario per l'integrazione

Se sono rispettati i requisiti elencati nel paragrafo 8.4 e se l'integrazione numerica è adeguata a valutare correttamente il volume dell'elemento, allora utilizzando mesh sempre più fitte i risultati ottenuti con l'integrazione numerica delle matrici di rigidezza convergono verso i risultati corretti. Questa affermazione si può giustificare notando che, come indicato precedentemente, la formazione di una matrice di rigidezza è essenzialmente analoga all'integrazione dell'energia elastica. Infittendo la mesh, in ogni elemento la condizione di deformazione costante diventa prevalente e l'espressione dell'energia elastica assume la forma:

$$\frac{1}{2} \int_{vol} [\{\epsilon\}^T \cdot [E] \cdot \{\epsilon\}] \cdot dx dy dz = \frac{1}{2} \int_{vol} [Costante] \cdot det[J] \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad [9.6.1]$$

Quindi se si è capaci di calcolare correttamente il volume di ogni elemento (al limite infinitesimo), l'energia elastica della struttura sarà calcolata correttamente.

L'esame del determinante dello Jacobiano fornisce il numero di punti di Gauss necessari per ottenere il volume di elementi particolari. Per un elemento piano lineare di spessore costante, il determinante dello Jacobiano è lineare in ξ e η , quindi è necessario un solo punto di Gauss. Per un elemento quadratico piano di spessore costante, il determinante dello Jacobiano contiene dei coefficienti in ξ^3 e η^3 , quindi il numero minimo di punti di Gauss per l'integrazione è 2×2 . L'elemento lineare di volume a 8 nodi richiede $2 \times 2 \times 2$ punti di Gauss e l'elemento solido quadratico a 20 nodi ne richiede $3 \times 3 \times 3$. E' possibile che un elemento quadratico abbia i lati rettilinei e i nodi a metà dei lati, nel qual caso le coordinate x, y e z (ma non gli spostamenti u, v e w) diventano funzioni lineari di ξ, η e ζ ed allora l'ordine minimo d'integrazione si riduce. Per gli elementi bi-dimensionali il cui spessore t è variabile, per stabilire il minimo ordine d'integrazione è necessario esaminare il prodotto $t \cdot det[J]$.

Con la maggior parte degli elementi, l'uso di un basso ordine d'integrazione riduce la rigidezza dell'elemento perché si trascura l'energia elastica legata ai modi di deformazione di ordine più elevato.



Questo effetto può essere positivo perché tende a compensare l'eccessiva rigidità associata all'uso di un campo di spostamento imposto. Comunque, in questo modo la struttura agli elementi finiti può essere di volta in volta troppo rigida o troppo flessibile, per cui non è garantito che la convergenza sia monotona. La migliore regola d'integrazione per un elemento si decide usualmente dopo una serie di prove numeriche o in base all'esperienza.

Un rischio legato all'uso di un basso ordine d'integrazione è la comparsa di *modi di deformazione a energia nulla*. Consideriamo per esempio l'integrazione con 2×2 punti di Gauss dell'elemento quadratico piano. Esaminiamo un elemento quadrato ed assegniamo ai gradi di libertà nodali i seguenti valori:

$$\begin{cases} u_1 = -1 \\ v_1 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} u_2 = 1 \\ v_2 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} u_3 = 1 \\ v_3 = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} u_4 = -1 \\ v_4 = -1 \end{cases}; \\ \begin{cases} u_5 = 0 \\ v_5 = -1/2 \end{cases}; \quad \begin{cases} u_6 = -1/2 \\ v_6 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} u_7 = 0 \\ v_7 = 1/2 \end{cases}; \quad \begin{cases} u_8 = 1/2 \\ v_8 = 0 \end{cases}$$

Nei quattro punti di Gauss $\xi, \eta = \pm 1/\sqrt{3}$ troviamo che tutte le deformazioni sono nulle (vedi appendice a questo capitolo). Di conseguenza, poiché la matrice di rigidità viene campionata nei punti di Gauss, l'elemento non offre alcuna resistenza a questo particolare modo di deformazione. Quanto detto per l'elemento quadrato descritto nell'esempio si può estendere ad un altro elemento di forma qualsiasi.

Questo problema può essere risolto portando l'ordine d'integrazione a 3×3 punti, naturalmente con un maggiore costo computazionale. Comunque, fortunatamente, questo particolare modo di deformazione a energia nulla è incompatibile con lo stesso modo agente in un elemento adiacente. Un insieme di elementi perciò non può avere un modo di deformazione a energia nulla (a parte i moti rigidi), quindi la matrice di rigidità della struttura non sarà singolare.

In generale, calcolando gli autovalori della matrice di rigidità elementare si può verificare se un dato tipo di elemento presenta il rischio di avere dei modi di deformazione a energia nulla; in particolare se nell'espressione:

$$\pi_e = \frac{1}{2} \cdot \{d\}^T \cdot [K_e] \cdot \{d\}$$

che indica l'energia elastica accumulata in un elemento di rigidità $[k_e]$ in seguito al campo di spostamento $\{d\}$, inseriamo al posto dello spostamento l'autovettore corrispondente ad un autovalore nullo otterremo $\pi_e = 0$, cioè energia elastica nulla. Se l'autovettore indica uno spostamento rigido, è corretto che l'energia elastica si annulli; ma se ciò capita per altri campi di spostamento, significa che la matrice di rigidità non è stata adeguatamente calcolata, magari a causa di un numero insufficiente di punti d'integrazione.

Nel caso di un elemento di volume a 20 nodi è necessario usare l'ordine d'integrazione $3 \times 3 \times 3$. Comunque, è stato dimostrato che si può utilizzare un metodo a 14 punti che richiede la metà del tempo di calcolo e fornisce risultati della stessa precisione. La regola è la seguente:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = B_6 [f(-b, 0, 0) + f(b, 0, 0) + f(0, -b, 0) + f(0, b, 0) + f(0, 0, -b) + f(0, 0, b)] + \\ + C_8 [f(-c, -c, -c) + f(c, -c, -c) + f(-c, c, -c) + f(c, c, -c) + f(-c, -c, c) + f(c, -c, c) + f(-c, c, c) + f(c, c, c)]$$

dove i coefficienti valgono:

$$\begin{aligned} B_6 &= 0.8864265927977839 & b &= 0.7958224257542215 \\ C_8 &= 0.3351800554016621 & c &= 0.7587869106393281 \end{aligned}$$

9.7 Note conclusive

Arrivati a questo punto sono evidenti la versatilità e la convenienza degli elementi isoparametrici integrati numericamente:

- I lati possono essere curvi e sono permesse diverse forme;
- Le proprietà del materiale, come le costanti elastiche o la densità, possono variare all'interno dell'elemento ed il loro valore è campionato nei punti di Gauss a partire dai valori che assumono nei nodi dell'elemento.
- Analogamente è possibile assegnare lo spessore dell'elemento piano nei suoi nodi e valutarlo nei punti di Gauss.



Se è disponibile un programma di calcolo per elementi lineari piani, come bisogna modificarlo per usare gli elementi piani quadratici? Le variazioni sono minime (vedi appendice al capitolo): è necessario utilizzare delle funzioni di forma differenti, lo jacobiano è ancora 2×2 ma il suo calcolo coinvolge 8 nodi invece che 4; alcuni cicli `for` del programma MATLAB si allungano perché alcune matrici sono più grandi.

La forma degli elementi non è di varietà illimitata. Le forme regolari normalmente garantiscono risultati più precisi. Quindi in una buona mesh bidimensionale la maggior parte degli elementi dovrebbe essere di forma approssimativamente quadrata. Gli elementi molto allungati o distorti possono fornire buoni risultati se giacciono nei punti della struttura dove sono presenti delle deformazioni che possono rappresentare in modo esatto, per esempio un elemento lineare può essere usato per modellare un tirante/puntone. Forti distorsioni possono causare la non unicità nel processo di proiezione (mapping) dall'elemento di riferimento in coordinate naturali a quello reale: due punti diversi appartenenti al piano ξ, η possono essere proiettati sullo stesso punto nel piano x, y , oppure le coordinate x, y , dei punti interpolati possono giacere fuori dai confini dell'elemento. In parole semplici, gli elementi accettabili devono avere modeste curvature, nei vertici gli angoli devono essere molto inferiori a 180° e i nodi sui lati devono essere posizionati circa in mezzeria rispetto ai nodi d'angolo. La probabilità che si manifestino degli errori, aumenta con il numero di nodi per lato di ogni elemento. Zienkiewicz raccomanda che durante il calcolo si controlli il segno dello Jacobiano: se in un punto diventa negativo, ciò indica l'assenza di biunivocità nel processo di proiezione (mapping).

Durante l'integrazione lo Jacobiano è sempre calcolato nei punti di Gauss: comunque un valore negativo del suo determinante è più probabile nei nodi d'angolo, dove normalmente si calcolano gli sforzi.

Se non è possibile evitare l'uso di elementi fortemente distorti, è allora necessario calcolare la loro matrice di rigidità elementare usando ordini d'integrazione più elevati rispetto a quelli strettamente necessari per gli elementi rettangolari.

Sebbene gli sforzi si possano calcolare dovunque, il loro calcolo nei nodi d'angolo è meno preciso che nei nodi disposti sui lati o nei punti di Gauss. E' allora possibile calcolare gli sforzi nei punti di Gauss e poi estrapolare i risultati sui nodi degli elementi usando le funzioni di forma.

Per concludere, è bene notare che gli elementi solidi isoparametrici sono preferibili agli elementi esaedrici costruiti assemblando elementi tetraedrici (solidi analoghi ai triangoli piani): questa conclusione deriva da uno studio comparato degli elementi lineari e quadratici, considerando la precisione ed il costo computazionale.