CAP.8a – Formulazione dell'elemento LINK (tirante/puntone)

1) L'elemento LINK a 2 nodi

Per dare alla formulazione precedente una giustificazione fisica e controllare la sua validità, consideriamo una trave tipo tirante/puntone con due nodi terminali, sezione trasversale A costante e modulo elastico E. Per semplicità consideriamo che l'asta sia orientata come l'asse orizzontale x. Lo spostamento u in direzione x è l'unica componente di spostamento che deve essere presa in considerazione. Ipotizziamo che u vari linearmente con x:

$$\{s\} = u(x) = a_0 + a_1 \cdot x = \{1 \quad x\} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} \qquad [8a.1]$$

Come fatto nel paragrafo 7.9, sostituiamo i parametri a_0 e a_1 con i gradi di libertà nodali u_1 e u_2. L'uso dell'eq.(8a.1) valutata nei due nodi terminali, conduce alla seguente espressione:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = [A] \cdot \{a\} \qquad [8a.2]$$

da cui:

$$\{s\} = \{1 \quad x\} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \{1 \quad x\} \cdot [A]^{-1} \cdot \{d\} = \{1 \quad x\} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \{d\} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \cdot \{d\} = [N] \cdot \{d\} \qquad [8a.3]$$

L'eq.(8.2.3) diventa:

$$\{\varepsilon\} = \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \{0 \quad 1\} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \{d\} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \{d\} = [B] \cdot \{d\} \qquad [8a.4]$$

L'eq.(8.2.9) può essere adattata al caso in esame modificando la matrice $[E]$ in modo da esaminare uno stato di sforzo monoassiale. Per questo caso particolarmente semplice è facile notare che:

1. L'energia specifica di deformazione elastica per uno stato di sforzo monoassiale vale: $U_0 = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon_x^2$;
2. In generale, l'energia di deformazione dell'elemento vale: $U = \frac{1}{2} \cdot \{d\}^T \cdot [k] \cdot \{d\}$.

Di conseguenza, possiamo esprimere l'energia di deformazione elastica e la matrice di rigidezza elementare nel modo seguente:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} E \varepsilon_x^2 A dx = \frac{1}{2} \int_0^L \varepsilon_x^T E \varepsilon_x A dx = \frac{1}{2} \cdot \{d\}^T \cdot \int_0^L [B]^T \cdot E \cdot [B] \cdot A \cdot dx \cdot \{d\} = \frac{1}{2} \cdot \{d\}^T \cdot [k] \cdot \{d\} \qquad [8a.5]$$

dove

$$[k] = \int_0^L [B]^T \cdot E \cdot [B] \cdot A \cdot dx = \int_0^L \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} \cdot E \cdot \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{Bmatrix} \cdot A \cdot dx = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per costruire il vettore $\{f\}$, supponiamo che la trave sia inizialmente troppo lunga di una quantità pari a ΔL, per cui sarà sottoposta ad una deformazione iniziale pari a $\varepsilon_0 = \Delta L / L$, e che subisca un riscaldamento pari a T gradi Celsius così che lo sforzo termico iniziale è pari a $\sigma_0 = -E \cdot \alpha \cdot T$, dove α indica il coefficiente di dilatazione termica lineare. Supponiamo inoltre che sia presente una forza di massa diretta in direzione x negativa, pari a γ per unità di volume ed una forza concentrata f_c in direzione x positiva applicata nel punto di coordinata $x = 2L/3$. Così le eq. (8.2.10) e (8.2.11) danno:

$$\{f\} = \int_0^L \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} \cdot E \cdot \frac{\Delta L}{L} \cdot (A \cdot dx) - \int_0^L \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} \cdot (-E \cdot \alpha \cdot T) \cdot (A \cdot dx) +$$

$$+ \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} \cdot (-\gamma) \cdot (A \cdot dx) + \begin{Bmatrix} 1 - \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{Bmatrix} \cdot f_c \qquad [8a.6]$$

$$\{f\} = E \cdot A \cdot \frac{\Delta L}{L} \cdot \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + E \cdot A \cdot \alpha \cdot T \cdot \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\gamma \cdot A \cdot L}{2} \cdot \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{Bmatrix} \cdot f_c \qquad [8a.7]$$

Chiaramente $\{f\}$ è un vettore di carichi applicati dagli elementi sui nodi.

Una volta determinati gli spostamenti nodali, gli sforzi a cui sono sottoposti gli elementi seguono la legge di Hooke:

$$\sigma = E \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0 = E \cdot [B] \cdot \{d\} - E \cdot \frac{\Delta L}{L} - E \cdot \alpha \cdot T \qquad [8a.8]$$

Ancora una volta non abbiamo fatto alcuna distinzione tra σ_0 e ε_0; essi possono essere usati in modo intercambiabile o contemporaneamente, come risulta più conveniente.

Consideriamo la deformazione assiale ε_x in un tirante sottoposto ad un carico assiale distribuito. Immaginiamo di dividere il tirante in elementi di lunghezza Δx. Come Δx tende a zero, ogni variazione di ε_x entro l'elemento diventa insignificante rispetto al valore della deformazione ε_x. Di conseguenza, se in ogni punto x della trave desideriamo calcolare il valore dello spostamento e della deformazione con una precisione sempre maggiore man mano che la mesh diventa sempre più fitta, <u>ogni elemento deve essere capace di rappresentare una deformazione costante</u> quando le condizioni lo richiedono.

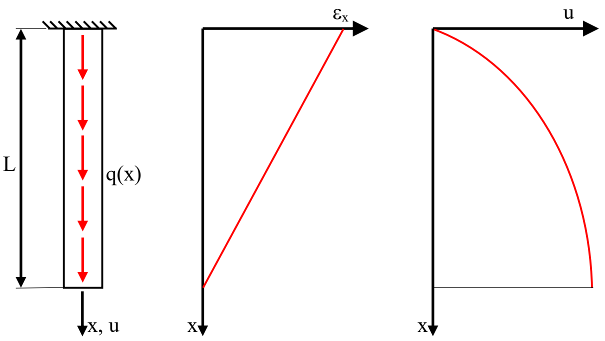
Risultati teorici di riferimento

$N_x = q(L - x)$

$\sigma_x = \frac{N_x}{A}; \quad \varepsilon_x = \frac{N_x}{EA} = \frac{q}{EA}(L - x)$

$u = \dfrac{q}{EA}\displaystyle\int_0^L (L - x)dx = \dfrac{q}{EA}\left(Lx - \dfrac{x^2}{2} + C_1\right)$

Poiché $u(x = 0) = 0$ allora $C_1 = 0$



Sintetizzando qui di seguito i risultati dell'analisi precedente relativa all'elemento LINK a due nodi abbiamo:

$$\{s\} = u(x) = a_0 + a_1 \cdot x = \{1 \quad x\} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} \qquad [8a.1]$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = [A] \cdot \{a\} \qquad [8a.2]$$

$$\{s\} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \cdot \{d\} = [N] \cdot \{d\} \qquad [8a.3]$$

$$\varepsilon_x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [B] \cdot \{d\} \qquad [8a.4]$$

$$[k] = \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \{f\} = \frac{qL}{2} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad [8a.7]$$

dove nei carichi nodali equivalenti $\{f\}$ della formula (8a.7) si è posto $q(x) = \gamma A$ diretto verso le x positive.

Modellando la trave con un solo elemento abbiamo:

$$\frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{qL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Dopo avere inserito le condizioni al contorno ($u = 0$ in $x = 0$) risulta:

$$\frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{qL}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

da cui:

$$u_2 = \frac{qL^2}{2EA} \qquad u(x) = \begin{bmatrix} 1-\frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{qL}{2EA} x \qquad \varepsilon_x(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{qL}{2EA}$$

Modellando la trave con due elementi abbiamo:

$$\frac{EA}{\Delta L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{q\Delta L}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

dove $\Delta L = L/2$.

Dopo avere inserito le condizioni al contorno risulta:

$$\frac{EA}{\Delta L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{q\Delta L}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

da cui:

$$u_3 = \frac{2q(\Delta L)^2}{EA} \qquad u_2 = \frac{3q(\Delta L)^2}{2EA}$$

Rappresentando lo spostamento di ogni elemento in funzione della coordinata locale normalizzata ξ, con $0 \le \xi \le 1$, lo spostamento nei due tratti della trave vale rispettivamente:

$$u = \begin{bmatrix} 1-\xi & \xi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{3q(\Delta L)^2}{2EA} \xi \qquad u = \begin{bmatrix} 1-\xi & \xi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{q(\Delta L)^2}{2EA} (3+\xi)$$

e quindi la deformazione nei due tratti della trave vale rispettivamente:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\Delta L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{3q\Delta L}{2EA} \qquad \varepsilon_x = \frac{1}{\Delta L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{q\Delta L}{2EA}$$

Modellando la trave con tre elementi abbiamo:

$$\frac{EA}{\Delta L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{q\Delta L}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

dove $\Delta L = L/3$.

Dopo avere inserito le condizioni al contorno abbiamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{q(\Delta L)^2}{2EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Con la fattorizzazione di Gauss si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{q(\Delta L)^2}{2EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 9 \end{Bmatrix}$$

da cui: $$u_4 = \frac{9q(\Delta L)^2}{2EA} \qquad u_3 = \frac{4q(\Delta L)^2}{EA} \qquad u_2 = \frac{5q(\Delta L)^2}{2EA}$$

In questo caso lo spostamento nei tre tratti della trave vale rispettivamente:

$$u = \begin{bmatrix} 1-\xi & \xi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{5q(\Delta L)^2}{2EA} \xi$$

$$u = \begin{bmatrix} 1-\xi & \xi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{5q(\Delta L)^2}{2EA} + \frac{3q(\Delta L)^2}{2EA} \xi = \frac{q(\Delta L)^2}{2EA} (5+3\xi)$$

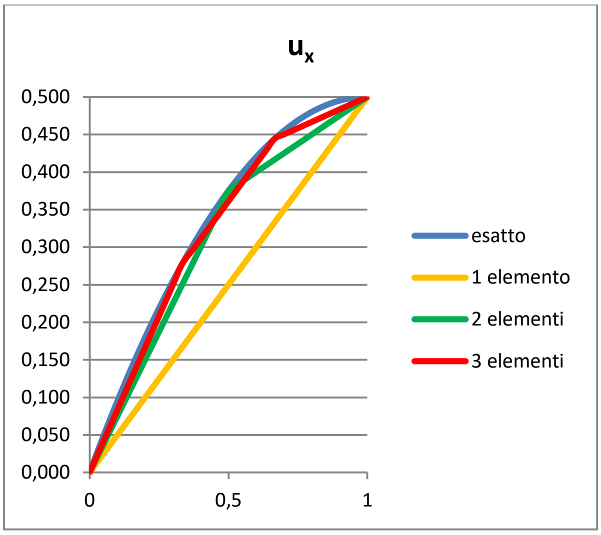
$$u = \begin{bmatrix} 1-\xi & \xi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{4q(\Delta L)^2}{EA} + \frac{q(\Delta L)^2}{2EA} \xi = \frac{q(\Delta L)^2}{2EA} (8+\xi)$$

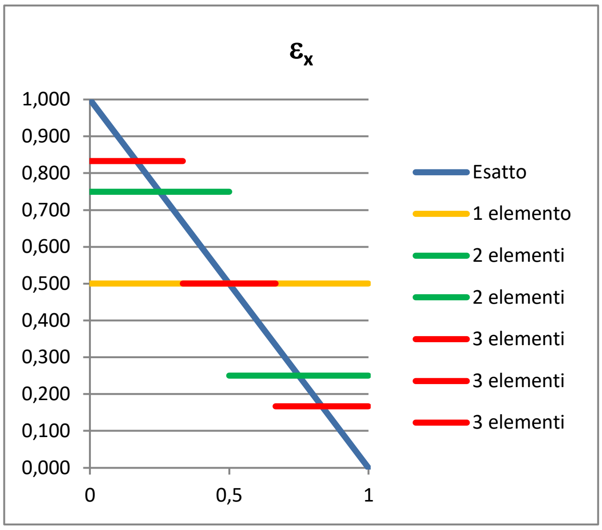
mentre la deformazione nei tre tratti della trave vale rispettivamente:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\Delta L}[-1 \quad 1]\cdot\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{5q\Delta L}{2EA}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\Delta L}[-1 \quad 1]\cdot\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{3q\Delta L}{2EA}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\Delta L}[-1 \quad 1]\cdot\begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{q\Delta L}{2EA}$$





All'aumentare degli elementi, la soluzione converge verso quella teorica: è inoltre possibile osservare l'andamento a gradino delle deformazioni calcolate.

2) L'elemento LINK a 3 nodi

Le coordinate x dell'elemento a tre nodi e i suoi spostamenti u si possono esprimere in funzione delle coordinate naturali ξ nel modo seguente:

$$x = \{N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \quad N_3(\xi)\}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \qquad \text{e} \qquad u = \{N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \quad N_3(\xi)\}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Per esprimere le funzioni di forma $[N]$ usiamo i polinomi di Lagrange definiti nel dominio $-1 \le \xi \le 1$:

$$N_1(\xi) = \frac{\xi^2-\xi}{2} \quad ; \qquad N_2(\xi) = \frac{\xi^2+\xi}{2} \quad ; \qquad N_3(\xi) = 1-\xi^2$$

La deformazione assiale vale:

$$\varepsilon_x(x) = \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\{N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x)\}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Poiché le funzioni di forma N_i non sono funzioni dirette della coordinata x ma della variabile ξ, abbiamo:

$$\frac{dN(\xi)}{d\xi} = \frac{dN(x)}{dx}\frac{dx}{d\xi} \qquad \text{e quindi} \qquad \frac{dN(x)}{dx} = \frac{dN(\xi)}{d\xi}\Big/\frac{dx}{d\xi}$$

Per iniziare dobbiamo calcolare lo Jacobiano:

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\{N_1 \quad N_2 \quad N_3\}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \left\{\frac{2\xi-1}{2} \quad \frac{2\xi+1}{2} \quad -2\xi\right\}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \frac{dx}{d\xi} = \frac{x_2-x_1}{2} + (x_1+x_2-2x_3)\xi$$

La matrice di rigidezza elementare risulta quindi:

$$[k] = \int_{vol} [\boldsymbol{B}]^T E [\boldsymbol{B}] \cdot dVol = \int_0^L [\boldsymbol{B}]^T EA [\boldsymbol{B}] \cdot dx = \int_{-1}^{1} [\boldsymbol{B}]^T EA [\boldsymbol{B}] \cdot J \cdot d\xi$$

dove: $[\boldsymbol{B}] = \frac{d}{dx}\{N_1 \quad N_2 \quad N_3\} = \frac{1}{J}\frac{d}{d\xi}\{N_1 \quad N_2 \quad N_3\} = \frac{1}{J}\left\{\frac{2\xi-1}{2} \quad \frac{2\xi+1}{2} \quad -2\xi\right\}$

Come si può osservare i coefficienti della matrice $[\boldsymbol{B}]$ si ottengono dal rapporto di due polinomi di primo grado in ξ dove al denominatore compare lo Jacobiano. Sviluppando abbiamo:

$$[\boldsymbol{k}] = \int_{-1}^{1} \frac{EA}{4J} \begin{bmatrix} (2\xi-1)^2 & 4\xi^2-1 & 4(\xi-2\xi^2) \\ 4\xi^2-1 & (2\xi+1)^2 & -4(\xi+2\xi^2) \\ 4(\xi-2\xi^2) & -4(\xi+2\xi^2) & 16\xi^2 \end{bmatrix} \cdot d\xi$$

L'integrazione in forma chiusa dei coefficienti della matrice di rigidezza può risultare complicata e si ricorre quindi all'integrazione numerica. Osserviamo inoltre che:

a) quando $x_3 = x_1 + \frac{L}{4}$ $\quad J = \frac{x_2-x_1}{2} + (x_1+x_2-2x_3)\xi = \frac{L}{2}(1+\xi)$ e in $\xi = -1$ risulta $J = 0$

b) quando $x_3 = x_1 + \frac{3L}{4}$ $\quad J = \frac{x_2-x_1}{2} + (x_1+x_2-2x_3)\xi = \frac{L}{2}(1-\xi)$ e in $\xi = 1$ risulta $J = 0$

Ciò indica che se il terzo punto si trova fuori dall'intervallo $x_1 + \frac{L}{4} \le x_3 \le x_1 + \frac{3L}{4}$ allora ci sono dei punti lungo la trave dove lo Jacobiano è negativo o nullo. Ciò può impedire l'integrazione della matrice di rigidezza.

Lo Jacobiano non dipende da ξ solo quando $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ ovvero quando $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$ e quindi il terzo nodo si trova a metà del lato: in tal caso $J = \frac{x_2-x_1}{2} = \frac{L}{2}$. Se inoltre lungo la trave EA è costante, la matrice di rigidezza esatta risulta:

$$[\boldsymbol{k}] = \frac{EA}{2L}\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} (2\xi-1)^2 & 4\xi^2-1 & 4(\xi-2\xi^2) \\ 4\xi^2-1 & (2\xi+1)^2 & -4(\xi+2\xi^2) \\ 4(\xi-2\xi^2) & -4(\xi+2\xi^2) & 16\xi^2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{3L}\begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix}$$

Il vettore dei carichi nodali equivalenti nel caso di carico uniformemente distribuito q vale:

$$\{f\} = \int_{-1}^{1} \begin{Bmatrix} N_1(\xi) \\ N_2(\xi) \\ N_3(\xi) \end{Bmatrix} \cdot q \cdot J \cdot d\xi = \int_{-1}^{1} \begin{Bmatrix} \frac{\xi^2-\xi}{2} \\ \frac{\xi^2+\xi}{2} \\ 1-\xi^2 \end{Bmatrix} \cdot q \cdot \frac{L}{2} \cdot d\xi = \frac{qL}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Se discretizziamo la trave con un solo elemento di tipo LINK a tre nodi abbiamo:

$$\frac{EA}{3L}\begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{qL}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Dopo avere inserito le condizioni al contorno ($u_1 = 0$) abbiamo:

$$\frac{EA}{3L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -8 \\ 0 & -8 & 16 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{qL}{6}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Con la fattorizzazione di Gauss si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{qL^2}{2EA}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 9/2 \end{Bmatrix} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{qL^2}{2EA}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{4} \end{Bmatrix}$$

La coordinata x in funzione della coordinata naturale ξ vale:

$$x = \{N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \quad N_3(\xi)\} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \left\{ \frac{\xi^2 - \xi}{2} \quad \frac{\xi^2 + \xi}{2} \quad 1 - \xi^2 \right\} \begin{Bmatrix} 0 \\ L \\ L/2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{2}(1 + \xi)$$

da cui: $\xi = \frac{2}{L}x - 1$

Il campo di spostamento risulta:

$$u(\xi) = \{N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \quad N_3(\xi)\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \left\{ \frac{\xi^2 - \xi}{2} \quad \frac{\xi^2 + \xi}{2} \quad 1 - \xi^2 \right\} \frac{qL^2}{2EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3/4 \end{Bmatrix} = \frac{qL^2}{8EA}[-\xi^2 + 2\xi + 3]$$

mentre la deformata vale:

$$\varepsilon_x(\xi) = [\boldsymbol{B}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{2}{L} \left\{ \frac{2\xi - 1}{2} \quad \frac{2\xi + 1}{2} \quad -2\xi \right\} \frac{qL^2}{2EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3/4 \end{Bmatrix} = \frac{qL}{2EA}(1 - \xi)$$

Esprimendo la coordinata naturale ξ in funzione di quella reale x si ottiene:

$$u(x) = \frac{q}{EA}\left[Lx - \frac{x^2}{2}\right] \qquad ; \qquad \varepsilon_x(x) = \frac{q}{EA}(L - x)$$

Questi risultati coincidono con quelli teorici di riferimento e confermano che per modellare la trave sottoposta ad un carico uniformemente distribuito di trazione è sufficiente un solo elemento di tipo quadratico.