



CAP. 8 – USO DI UN CAMPO DI SPOSTAMENTO IMPOSTO

8.1 Introduzione

Abbiamo fin qui visto il metodo degli elementi finiti come una forma del metodo di Ritz-Rayleigh. Un punto di vista alternativo e storicamente precedente è quello di tipo fisico. Immaginiamo di volere interpolare una curva continua: una scelta possibile consiste nel dividere la curva in una serie di tratti ed interpolare ognuno di essi con un segmento di retta. Man mano che la suddivisione procede e i segmenti diventano sempre più piccoli, la distanza tra la curva e l'interpolante si riduce. Seguendo la stessa idea, possiamo immaginare di dividere il corpo in esame sottoposto ad una serie di carichi esterni, in tanti piccoli elementi ognuno dei quali si può immaginare che subisca una deformazione costante, purché la dimensione degli elementi tenda a zero. O, se si desidera analizzare l'oggetto dividendolo in parti più grandi, è possibile ipotizzare uno stato di deformazione variabile linearmente. Se le parti interpolate (gli elementi) sono legate tra di loro in modo adeguato, è ragionevole aspettarsi un'approssimazione soddisfacente della realtà fisica.

Sia che si utilizzi un punto di vista matematico o uno fisico, il passo importante e necessario consiste nello scegliere per ogni elemento le funzioni interpolanti adeguate. Ci sono diverse procedure agli elementi finiti, alcune che come funzioni impongono il campo di spostamento, altre che usano il campo di sforzo ed alcune che usano una combinazione di entrambe. Gli elementi la cui formulazione si basa su un campo di spostamenti imposto sono risultati i più riusciti e versatili e di conseguenza nel seguito esamineremo solo questo tipo. Di conseguenza questo capitolo presenta la formulazione generale per gli elementi finiti che si basano su un campo di spostamento imposto ed espone alcuni commenti di carattere generale sul comportamento che ci si deve aspettare da questi elementi.

Ogni procedura agli elementi finiti è in grado di produrre molti tipi di elementi applicabili ad una data classe di problemi. Non è facile decidere quali elementi preferire e per il momento non risponderemo a questa domanda.

8.2 Formulazione basata su un campo di spostamento imposto

La procedura generale è semplice. Poiché gli spostamenti sono le incognite indipendenti, il funzionale più adeguato è quello della energia potenziale totale π_{pt} . Per iniziare, esprimiamo π_{pt} in funzione dei gradi di libertà nodali. Quindi, come richiesto dal principio della stazionarietà della energia potenziale, i gradi di libertà nodali devono assumere dei valori tali da rendere stazionaria π_{pt} , formando in questo modo un sistema di equazioni algebriche nelle variabili nodali. Si può notare che fin qui non è stato menzionato il problema della compatibilità o congruenza degli spostamenti. Tale problema è molto importante perché, come è stato detto nel settimo capitolo, se il campo di spostamento ipotizzato non soddisfa la congruenza, la soluzione non soddisferà l'equilibrio. L'argomento richiede alcune osservazioni che verranno espone nel paragrafo 8.4.

Lo spostamento di un punto qualsiasi appartenente ad un elemento sia espresso nel modo seguente:

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{d\} \quad [8.2.1]$$

in cui $\{d\}$ è il vettore degli spostamenti nodali generalizzati dell'elemento. Alcuni di questi gradi di libertà possono essere spostamenti, altri possono essere le derivate degli spostamenti, come le deformazioni o le rotazioni. La matrice $[N]$ definisce la natura del campo di spostamento imposto, ma per il momento non è necessario mostrare come è stata costruita.

Le deformazioni si esprimono in funzione degli spostamenti nodali $\{d\}$ applicando allo spostamento $\{s\}$ le usuali relazioni deformazioni-spostamenti:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad [8.2.2a]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad [8.2.2b]$$

Le deformazioni sono espresse in forma matriciale nel modo seguente:



$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{d\} \quad [8.2.3]$$

In generale $\{\varepsilon\}$ contiene 6 deformazioni: in casi particolari il numero può essere inferiore, per esempio quando gli sforzi sono piani ne sono sufficienti tre. La sostituzione dell'eq.(8.2.1) e dell'eq.(8.2.3) nell'espressione dell'energia potenziale totale:

$$\pi_{pt} = \int_{vol} \left[\frac{1}{2} \cdot \{\varepsilon\}^T \cdot [E] \cdot \{\varepsilon\} + \{\varepsilon\}^T \cdot \{\sigma_0\} \right] \cdot dvol - \int_{vol} \{s\}^T \cdot \{F_v\} \cdot dvol - \int_{sup} \{s\}^T \cdot \{\Phi\} \cdot dsup$$

fornisce il potenziale totale di un elemento:

$$\pi_{pe} = \frac{1}{2} \{d\}^T \left[\int_{vol} [B]^T [E] [B] \cdot dvol \right] \{d\} + \{d\}^T \left[\int_{vol} [B]^T \{\sigma_0\} dvol \right] - \{d\}^T \int_{vol} [N]^T \{F_v\} dvol - \{d\}^T \int_{sup} [N]^T \{\Phi\} dsup \quad [8.2.4]$$

Il potenziale totale dell'intera struttura è la somma dei potenziali dei singoli elementi. A questo punto aggiungiamo in modo esplicito il potenziale dei carichi concentrati $\{F_c\}$, applicati ai nodi della struttura da un qualche agente esterno. Una componente di $\{F_c\}$ è assunta positiva quando agisce nella stessa direzione dei corrispondenti gradi di libertà nodali. Così per una struttura composta da m elementi abbiamo:

$$\pi_{pt} = \sum_{i=1}^m (\pi_{pe})_i - \{D\}^T \cdot \{F_c\} \quad [8.2.5]$$

Come descritto nel secondo capitolo, ogni componente di ogni vettore elementare $\{d\}$ compare nel vettore dell'intera struttura $\{D\}$. Di conseguenza, il vettore $\{d\}$ di ogni elemento può essere sostituito da $\{D\}$ se le matrici degli elementi presenti nell'espressione di π_{pe} sono espanse; inoltre, se necessario, i loro termini sono riordinati. In altre parole, la sommatoria (8.2.4) implica l'espansione delle matrici elementari al livello delle "dimensioni della struttura", seguita dalla somma dei termini che si sovrappongono. Così le equazioni (8.2.4) e (8.2.5) danno luogo alla seguente espressione:

$$\pi_{pt} = \frac{1}{2} \{D\}^T \sum_{i=1}^m \left[\int_{vol} [B]^T [E] [B] dvol \right]_i \{D\} + \{D\}^T \sum_{i=1}^m \left[\int_{vol} [B]^T \{\sigma_0\} dvol - \int_{vol} [N]^T \{F_v\} dvol - \int_{sup} [N]^T \{\Phi\} dsup \right]_i - \{D\}^T \{F_c\} \quad [8.2.6]$$

La struttura reale è stata sostituita da un modello agli elementi finiti il cui potenziale totale è funzione del valore assunto dai gradi di libertà $\{D\}$. La configurazione di equilibrio statico è perciò quell'insieme di valori di $\{D\}$ che soddisfa le seguenti equazioni:

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial D_1} = \frac{\partial \pi_p}{\partial D_2} = \dots = \frac{\partial \pi_p}{\partial D_n} = 0 \quad \text{o in altra forma:} \quad \left\{ \frac{\partial \pi_p}{\partial D} \right\} = \{0\} \quad [8.2.7]$$

Così dall'eq.(8.2.6) è possibile ottenere le seguenti equazioni di equilibrio:

$$\sum_{i=1}^m \left[\int_{vol} [B]^T [E] [B] dvol \right]_i \{D\} = \sum_{i=1}^m \left[- \int_{vol} [B]^T \{\sigma_0\} dvol + \int_{vol} [N]^T \{F_v\} dvol + \int_{sup} [N]^T \{\Phi\} dsup \right]_i + \{F_c\} \quad [8.2.8]$$

Identifichiamo ognuno degli m integrali sul lato sinistro dell'eq.(8.2.8) come matrice di rigidità di un elemento $[k]_i$:

$$[k]_i = \int_{vol} [B]^T [E] [B] \cdot dvol \quad [8.2.9]$$

Analogamente, il gruppo costituito dai tre integrali sul lato destro dell'eq.(8.2.8) è il vettore delle forze nodali $\{f\}_i$ sull'elemento prodotto dagli sforzi iniziali, dalle forze di massa e dalle forze superficiali sull'elemento

$$\{f\}_i = - \int_{vol} [B]^T \{\sigma_0\} dvol + \int_{vol} [N]^T \{F_v\} dvol + \int_{sup} [N]^T \{\Phi\} dsup \quad [8.2.10]$$

Alcuni o anche tutti i contributi presenti nell'eq. 8.2.10 possono annullarsi. In particolare, l'integrale di superficie è diverso da zero solo nel caso di elementi che confinano con il mondo esterno e che da questo sono caricati da forze distribuite.

Sia $\{f_c\}^T = \{f_x \quad f_y \quad f_z\}$ un vettore che rappresenti un carico concentrato agente su un elemento, ma non su un punto nodale. Se sull'elemento agiscono diversi carichi di questo tipo, il carico nodale equivalente che producono può essere calcolato pensando l'ultimo integrale dell'eq.(8.2.10) come la sommatoria delle forze $\{\Phi\} \cdot \Delta sup$, in cui grandi forze $\{\Phi\}$ agiscono su delle aree infinitesime Δsup non necessariamente contigue. Così:



$$\{f_c\} = [N] \cdot \{f_c\}_1 + [N] \cdot \{f_c\}_2 + \dots + [N] \cdot \{f_c\}_n \quad [8.2.11]$$

in cui la matrice $[N]$ deve essere calcolata nei punti di applicazione dei carichi concentrati $\{f_c\}_1, \{f_c\}_2$, etc.

Le forze $\{f\}_i$ ed $\{f_c\}$ delle eq.(8.2.10) e (8.2.11) possono essere chiamate “forze nodali generalizzate cinematicamente consistenti”. L’aggettivo “generalizzate” indica che alcuni termini presenti nel vettore $\{f\}_i$ possono essere forze, altri momenti flettenti o anche quantità di ordine superiore se i gradi di libertà nodali comprendono deformazioni o curvatures. Le forze sono “cinematicamente consistenti” perché soddisfano l’equazione dei lavori virtuali. Cioè il lavoro virtuale $f_i \cdot \delta d_i$ è prodotto dalla componente i -esima della forza generalizzata $\{f\}_i$ quando è permesso il corrispondente spostamento generalizzato δd_i e sono impediti tutti gli altri spostamenti. Il lavoro $f_i \cdot \delta d_i$ è uguale al lavoro fornito dalle forze distribuite o dalle forze non nodali quando il loro punto di applicazione si sposta di una quantità che dipende da δd_i e dal campo di spostamento imposto attraverso le funzioni di forma $[N]$. Il lavoro che coinvolge tutte le forze si ottiene premoltiplicando le eq.(8.2.10) e (8.2.11) per $\{\delta d\}^T$. Così, per esempio, nell’eq.(8.2.10) l’ultimo integrale comporta $\{\delta d\}^T \cdot [N]^T \cdot \{\Phi\} \cdot \Delta sup = \{\delta s\}^T \cdot \{\Phi\} \cdot \Delta sup$ che è il lavoro fatto dalle forze $\{\Phi\} \cdot \Delta sup$ durante gli spostamenti $\{\delta s\}$.

Le equazioni che vanno dalla (8.2.9) alla (8.2.11) consentono di generare le matrici elementari che si basano su un campo di spostamento imposto. L’assemblaggio delle matrici elementari indicate nell’eq.(8.2.8) fornisce:

$$\left(\sum_{i=1}^m [k]_i \right) \cdot \{D\} = \left(\sum_{i=1}^m \{f\}_i \right) + \{F_c\}$$

o, in modo sintetico: $[K] \cdot \{D\} = \{F\} \quad [8.2.12]$

E’ lo stesso risultato che abbiamo ottenuto nel 2° capitolo utilizzando argomenti di tipo fisico (vedi eq. (3.2.5)). E’ interessante notare che un’espressione sintetica dell’energia potenziale totale della struttura è:

$$\pi_{pt} = \frac{1}{2} \cdot \{D\}^T \cdot [K] \cdot \{D\} - \{D\}^T \cdot \{F\} \quad [8.2.13]$$

La maggior parte degli elementi considerati in questi appunti sono formulati in funzione degli spostamenti nodali $\{d\}$, usando le matrici $[N]$ e $[B]$ delle equazioni 8.2.1 e 8.2.3. Ma è possibile, e talvolta conveniente, lavorare in funzione dei coefficienti a_i dei polinomi selezionati, come le eq.8.4.1 e 8.4.2. Di conseguenza le relazioni che legano i parametri a_i agli spostamenti ed alle deformazioni sono $\{s\} = [N_a]\{a\}$ e $\{\varepsilon\} = [B_a]\{a\}$. Le formulazioni che usano come “base” i parametri di spostamento nodali $\{d\}$ e quelli che usano i parametri $\{a\}$ sono legate nel modo seguente. L’equazione $\{d\} = [A]\{a\}$ si determina sostituendo le coordinate nodali nel polinomio scelto per descrivere il campo di spostamento, esattamente come è stato fatto nel caso dell’eq.(7.9.5). Così:

$$\begin{aligned} \{s\} &= [N_a] \cdot \{a\} = [N_a] \cdot [A]^{-1} \cdot \{d\} = [N] \cdot \{d\} \\ \{\varepsilon\} &= [B_a] \cdot \{a\} = [B_a] \cdot [A]^{-1} \cdot \{d\} = [B] \cdot \{d\} \end{aligned} \quad [8.2.14]$$

Possiamo quindi sostituire $[N] = [N_a] \cdot [A]^{-1}$ e $[B] = [B_a] \cdot [A]^{-1}$ in tutte le equazioni. Rispetto alle equazioni (8.2.9) e (8.2.10) otteniamo:

$$[k_a] = \int_{vol} [B_a]^T [E] [B_a] \cdot dvol \quad , \quad \{f_a\} = - \int_{vol} [B_a]^T \{\sigma_0\} dvol + \dots \quad [8.2.15]$$

Per concludere, scambiamo i parametri $\{a\}$ con $\{d\}$:

$$[k] = [A]^{-T} \cdot [k_a] \cdot [A]^{-1} \quad , \quad \{f\} = [A]^{-T} \cdot \{f_a\} \quad [8.2.16]$$

La differenza principale nei due approcci è che la sostituzione di $\{a\}$ con $\{d\}$ è rimandata alla fine della formulazione dell’elemento. Bisogna comunque osservare che la matrice $[A]$ per alcuni elementi potrebbe essere singolare. Quando capita, significa che il campo di spostamenti imposti non permette l’indipendenza dei gradi di libertà nodali.



8.3 Commenti di carattere generale circa il campo di spostamento dell'elemento

In quanto segue si farà riferimento al triangolo a deformazione costante (descritto nell'appendice di questo capitolo) e all'elemento rettangolare. Quest'ultimo ha 8 gradi di libertà ed è mostrato in Figura.

Un campo di spostamenti adatto a questo elemento è il seguente:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} \quad [8.3.1]$$

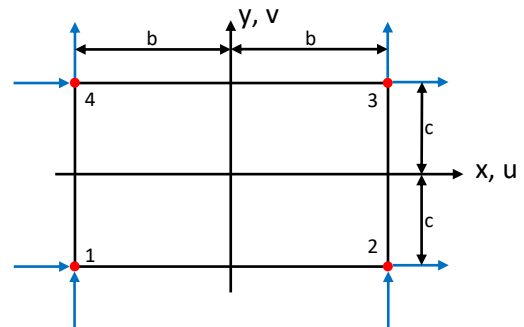


Fig.8.3.1 – Elemento rettangolare.

Come al solito per sostituire le coordinate generalizzate a_i con gli spostamenti nodali u_i e v_i è necessario invertire una matrice 4×4 . Chiaramente questa procedura diventa sempre più complicata e lunga da realizzare man mano che il numero di gradi di libertà aumenta. Un metodo alternativo e normalmente preferibile è suggerito dai risultati che si ottengono per il rettangolo:

$$u = \frac{1}{4bc} [(b-x) \cdot (c-y) \cdot u_1 + (b+x) \cdot (c-y) \cdot u_2 + (b+x) \cdot (c+y) \cdot u_3 + (b-x) \cdot (c+y) \cdot u_4] \quad [8.3.2]$$

Un risultato simile si ottiene anche per lo spostamento verticale v . Quindi il campo di spostamento $\{s\} = [N] \cdot \{d\}$ si può scrivere nel modo seguente:

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = [N]\{d\} \quad [8.3.3]$$

dove le “funzioni di forma” sono le seguenti:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(b-x) \cdot (c-y)}{4bc}; & N_2 &= \frac{(b+x) \cdot (c-y)}{4bc}; \\ N_3 &= \frac{(b+x) \cdot (c+y)}{4bc}; & N_4 &= \frac{(b-x) \cdot (c+y)}{4bc}; \end{aligned} \quad [8.3.4]$$

E' bene osservare che queste ultime equazioni rappresentano un'applicazione delle FORMULE D'INTERPOLAZIONE DI LAGRANGE ad un problema bidimensionale (vedi l'appendice al capitolo). Quindi, in generale, è possibile evitare la procedura descritta precedentemente che consiste nell'invertire la matrice 4×4 conseguente all'uso dell'eq. [8.3.1]: è possibile scrivere direttamente il campo di spostamenti imposto in funzione dei gradi di libertà nodali. I polinomi interpolatori o “*Funzioni di Forma*” $[N]$ necessari, possono essere scelti grazie all'intuito, per tentativi, o dedotti da quelli usati con gli elementi più semplici.

Notiamo che ogni funzione di forma dell'eq. (8.3.4) assume un valore unitario in un nodo e zero in tutti gli altri nodi. Ciò è quanto ci si aspetta da una formula d'interpolazione. Nell'interpolazione lagrangiana la funzione interpolante è vincolata ad assumere certi valori in alcuni punti. In altri tipi d'interpolazione la funzione e una o più delle sue derivate sono vincolate ad avere dati valori in alcuni punti. Il nome “*POLINOMIO DI HERMITE*” è talvolta associato a quest'ultimo tipo d'interpolazione. La freccia v di una trave è di questo tipo: essa deve assumere dati spostamenti v_i e date pendenze $\vartheta_i = (dv/dx)_i$ nei punti di estremità $i = 1, 2$. In questo caso si dice che lo spostamento della trave è composto da polinomi di Hermite del quarto ordine.



Quali condizioni di equilibrio e di compatibilità ci si può attendere in una soluzione agli elementi finiti basati su un campo di spostamenti imposto?

Circa l'equilibrio:

1. Normalmente all'interno degli elementi l'equilibrio non è soddisfatto. Per esempio, le eq.(8.3.1) non soddisfano le equazioni differenziali dell'equilibrio espresse in funzione degli spostamenti:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{cases}$$

Se le forze di massa F_x ed F_y sono nulle, sostituendo il terzo sistema di equazioni (che rappresenta la legge di Hooke) nel primo sistema (che rappresenta le equazioni indefinite dell'equilibrio) abbiamo:

$$\begin{cases} \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}$$

Ricordando che:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \text{abbiamo:} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases}$$

Semplificando e riordinando:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{(1+\nu)}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{(1+\nu)}{2} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] \end{cases}$$

Le derivate degli spostamenti espressi attraverso le funzioni (8.3.1) sono:

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \\ v = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = a_2 + a_4 y \\ \frac{\partial u}{\partial y} = a_3 + a_4 x \\ \frac{\partial v}{\partial x} = a_6 + a_8 y \\ \frac{\partial v}{\partial y} = a_7 + a_8 x \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a_4 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = a_8 \end{cases}$$

Come è evidente, all'interno degli elementi rettangolari l'equilibrio non è soddisfatto, a meno che $a_4 = a_8 = 0$ ma ciò capita solo in un campo di deformazione costante. L'equilibrio è soddisfatto entro il triangolo grazie alla sua estrema semplicità. Da tutto ciò non si può concludere che per un campo di deformazione generale l'elemento rettangolare sia di qualità inferiore a quella dell'elemento triangolare; non ostante il fatto che non soddisfi l'equilibrio, l'elemento rettangolare può fornire risultati più precisi di quelli forniti dall'elemento triangolare.

2. Normalmente tra gli elementi non è garantito l'equilibrio. Chiaramente ciò è quanto capita con il triangolo, per i quali gli sforzi sono costanti entro l'elemento ma sono diversi da un elemento all'altro.



3. E' garantito l'equilibrio delle forze nodali e dei momenti. In altre parole, il sistema di equazioni:

$$[K] \cdot \{D\} - \{F\} = 0$$

è un sistema di equazioni di equilibrio nodale; perciò il vettore soluzione $\{D\}$ è tale che la risultante delle forze e dei momenti agenti sui nodi sia nulla.

Ciò non implica che gli sforzi che ne derivano:

$$\{\sigma\} = [E] \cdot \{[B]\{d\} - \{\varepsilon_0\}\}$$

soddisfanno l'equilibrio o la continuità tra gli elementi. Comunque, in certi casi la continuità degli sforzi tra gli elementi è soddisfatta. Un esempio classico è quello di una trave uniforme modellata con gli usuali elementi usati per le travi e caricata nei suoi nodi. In questo caso gli sforzi calcolati soddisfanno l'equilibrio dei momenti ai nodi, in quanto il campo di spostamento imposto (cubico) è, per questo particolare problema, esatto.

Per quanto riguarda la compatibilità:

1. Se il campo di spostamenti imposto è continuo, allora la compatibilità all'interno degli elementi è soddisfatta;
2. Tra gli elementi la compatibilità può essere o non può essere soddisfatta. Negli elementi triangolari e rettangolari rappresentati nelle figure Fig.8b.1 e 8.3.1 gli spostamenti u e v sono lineari in x (oppure y) lungo i lati degli elementi. Quindi, per ogni spostamento nodale, i lati rimangono rettilinei e gli elementi adiacenti non si sovrappongono o non si separano.

Per dimostrare questa affermazione, osserviamo che lo spostamento di ogni punto interno al triangolo vale:

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [N]\{d\} \quad [8b.5]$$

dove, come detto, le funzioni di forma valgono:

$$N_1 = \frac{1}{2A} \cdot [x_2y_3 - x_3y_2 + (y_2 - y_3) \cdot x + (x_3 - x_2) \cdot y]$$

$$N_2 = \frac{1}{2A} \cdot [x_3y_1 - x_1y_3 + (y_3 - y_1) \cdot x + (x_1 - x_3) \cdot y]$$

$$N_3 = \frac{1}{2A} \cdot [x_1y_2 - x_2y_1 + (y_1 - y_2) \cdot x + (x_2 - x_1) \cdot y]$$

Il lato che unisce il nodo n.1 al nodo n.2 ha equazione:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione della funzione di forma N_3 abbiamo:

$$N_3 = \frac{1}{2A} \cdot \left\{ x_1y_2 - x_2y_1 + (y_1 - y_2) \cdot x + (x_2 - x_1) \cdot \left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1 \right] \right\}$$

Sviluppando i prodotti e semplificando abbiamo:

$$N_3 = \frac{1}{2A} \cdot \{ x_1y_2 - x_2y_1 + (y_1 - y_2) \cdot x + [(y_2 - y_1)(x - x_1) + y_1 \cdot (x_2 - x_1)] \}$$

$$N_3 = \frac{1}{2A} \cdot \{ x_1y_2 - x_2y_1 + xy_1 - xy_2 + xy_2 - x_1y_2 - xy_1 + x_1y_1 + x_2y_1 - x_1y_1 \} = 0$$



Ciò significa che gli spostamenti dei punti giacenti sul lato che unisce i nodi n.1 ed n.2 non dipendono dagli spostamenti del nodo n.3. Quindi i due elementi che condividono il lato che unisce i nodi n.1 e n.2 non subiranno né compenetrazioni e divisioni.

3. La compatibilità tra gli elementi cessa in altri tipi di elementi che saranno presentati in seguito.
4. La compatibilità è garantita nei nodi dove gli elementi sono collegati.

In un calcolo agli elementi finiti condotto correttamente ogni violazione dell'equilibrio e della compatibilità tende a svanire man mano che per modellare la struttura in esame si utilizzano più elementi.

8.4 Requisiti da rispettare per garantire la convergenza e la compatibilità degli spostamenti

Modellando la struttura con mesh sempre più fitte è possibile ottenere una sequenza di soluzioni del problema in esame. Se il campo di spostamenti imposto soddisfa certi criteri, ci si può attendere che la sequenza di soluzioni converga verso il risultato corretto.

I criteri fondamentali sono i seguenti:

1. Il campo di spostamenti all'interno dell'elemento deve essere continuo.
2. Quando ai gradi di libertà nodali vengono assegnati dei valori corrispondenti ad uno stato di deformazione costante, il campo di spostamento deve fornire uno stato di deformazione costante all'interno dell'elemento. Nel caso degli elementi usati per modellare piastre sottili, invece di parlare di uno stato di deformazione costante si parla di curvatura costante.

La necessità di soddisfare il secondo criterio può essere spiegata considerando la deformazione assiale ε_x in un tirante sottoposto ad un carico assiale distribuito. Immaginiamo di dividere il tirante in elementi di lunghezza ΔL . Come ΔL tende a zero, ogni variazione di ε_x entro l'elemento diventa insignificante rispetto al valore della deformazione ε_x . Di conseguenza, se in ogni punto x della trave desideriamo calcolare il valore dello spostamento e della deformazione con una precisione sempre maggiore man mano che la mesh diventa sempre più fitta, ogni elemento deve essere capace di rappresentare una deformazione costante quando le condizioni lo richiedono. Se ogni elemento può rappresentare solo

$$\varepsilon_x = \text{Costante} \cdot \left(\frac{x}{\Delta L}\right) \quad \text{dove} \quad 0 \leq x \leq \Delta L$$

non possiamo attenderci la convergenza. Vediamo un esempio.

Ipotizziamo che u vari con x nel modo seguente dove manca il termine lineare:

$$\{s\} = \{u\} = u = a_0 + a_1 \cdot x^2 = \{1 \quad x^2\} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} \quad [8.4.1]$$

Calcoliamo i valori dei parametri a_0 e a_1 inserendo le condizioni al contorno.

Quando $x = 0$ allora $u = u_1$; quando $x = \Delta L$ allora $u = u_2$, da cui:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \Delta L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = [A] \cdot \{a\} \quad [8.4.2]$$

Invertendo la matrice $[A]$ e sostituendo nella 8.4.1 abbiamo:

$$\begin{aligned} \{s\} = \{1 \quad x^2\} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} &= \{1 \quad x^2\} \cdot [A]^{-1} \cdot \{d\} = \{1 \quad x^2\} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\Delta L^2} & \frac{1}{\Delta L^2} \end{bmatrix} \cdot \{d\} = \\ &= \left[1 - \left(\frac{x}{\Delta L}\right)^2 \quad \left(\frac{x}{\Delta L}\right)^2 \right] \cdot \{d\} = [N] \cdot \{d\} \quad [8.4.3] \end{aligned}$$

Le due funzioni di forma sono quindi:

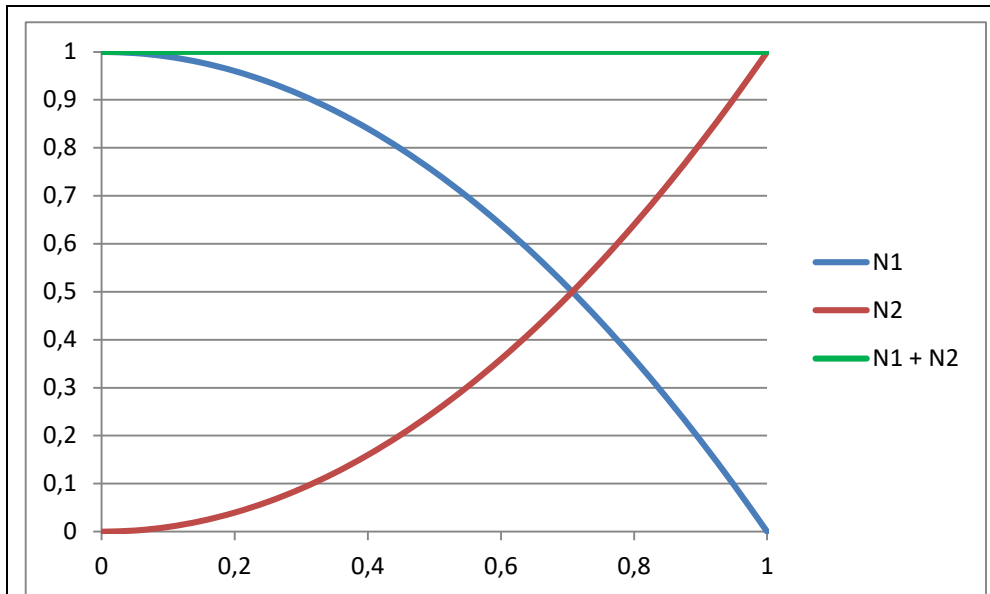
$$N_1 = 1 - \left(\frac{x}{\Delta L}\right)^2 \quad ; \quad N_2 = \left(\frac{x}{\Delta L}\right)^2$$

Come si può osservare:



$$\begin{cases} \text{in } x = 0 & N_1 = 1 \\ \text{in } x = \Delta L & N_1 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \text{in } x = 0 & N_2 = 0 \\ \text{in } x = \Delta L & N_2 = 1 \end{cases}$$

E, inoltre: $N_1 + N_2 = 1$ dovunque



Noti gli spostamenti nodali, le deformazioni valgono:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} = \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} &= \begin{Bmatrix} 0 & 2x \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\Delta L^2} & \frac{1}{\Delta L^2} \end{bmatrix} \cdot \{d\} = \begin{bmatrix} -\frac{2x}{\Delta L^2} & \frac{2x}{\Delta L^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \{d\} = [B] \cdot \{d\} \end{aligned} \quad [8.4.4]$$

Vediamo quindi che la deformazione varia come indicato qui di seguito:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\Delta L} \begin{bmatrix} -2\xi & 2\xi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 2(u_2 - u_1) \frac{\xi}{\Delta L}$$

dove abbiamo posto $\xi = x/\Delta L$ e $0 \leq \xi \leq 1$:

La matrice di rigidezza assume quindi la seguente espressione:

$$[k] = \int_0^{\Delta L} [B]^T \cdot E \cdot [B] \cdot A \cdot dx = \int_0^{\Delta L} \begin{Bmatrix} -\frac{2x}{\Delta L^2} \\ \frac{2x}{\Delta L^2} \end{Bmatrix} \cdot E \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2x}{\Delta L^2} & \frac{2x}{\Delta L^2} \end{bmatrix} \cdot A \cdot dx = \frac{4EA}{\Delta L^4} \cdot \int_0^{\Delta L} \begin{bmatrix} x^2 & -x^2 \\ -x^2 & x^2 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$[k] = \frac{4EA}{3\Delta L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per il calcolo delle forze nodali equivalenti causate dalla forza distribuita orientata secondo le x positive, usiamo l'eq.(8.3.6):

$$\{f\} = \int_0^{\Delta L} \begin{Bmatrix} 1 - \left(\frac{x}{\Delta L}\right)^2 \\ \left(\frac{x}{\Delta L}\right)^2 \end{Bmatrix} \cdot (\gamma) \cdot (A \cdot dx) = \frac{\gamma A \Delta L}{3} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Modellando la trave con un solo elemento ($\Delta L = L$) abbiamo:

$$\frac{4EA}{3L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{\gamma AL}{3} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



Dopo avere inserito le condizioni al contorno ($u = 0$ in $x = 0$) e posto: $q = \gamma A$ abbiamo:

$$\frac{4EA}{3L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{qL}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

da cui: $u_2 = \frac{qL^2}{4EA}$ $u = \left[1 - \left(\frac{x}{\Delta L}\right)^2 \quad \left(\frac{x}{\Delta L}\right)^2 \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{qx^2}{4EA}$ $\varepsilon_x = \left[-\frac{2x}{\Delta L^2} \quad \frac{2x}{\Delta L^2} \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{qx}{2EA}$

Modellando la trave con due elementi ($\Delta L = L/2$) abbiamo:

$$\frac{4EA}{3\Delta L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{q\Delta L}{3} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Dopo avere inserito le condizioni al contorno abbiamo:

$$\frac{4EA}{3\Delta L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{q\Delta L}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

da cui: $u_3 = \frac{5q(\Delta L)^2}{4EA}$ $u_2 = \frac{q(\Delta L)^2}{EA}$

In questo caso lo spostamento nei due tratti della trave vale rispettivamente:

$$u = \left[1 - \xi^2 \quad \xi^2 \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{q(\Delta L)^2}{EA} \xi^2$$

$$u = \left[1 - \xi^2 \quad \xi^2 \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{q(\Delta L)^2}{EA} \left(1 + \frac{\xi^2}{4} \right)$$

In questo caso la deformazione nei due tratti della trave vale rispettivamente:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\Delta L} \begin{bmatrix} -2\xi & 2\xi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{2q\Delta L}{EA} \xi$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\Delta L} \begin{bmatrix} -2\xi & 2\xi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{q\Delta L}{2EA} \xi$$

Modellando la trave con tre elementi ($\Delta L = L/3$) abbiamo:

$$\frac{4EA}{3\Delta L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{q\Delta L}{3} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Dopo avere inserito le condizioni al contorno abbiamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{q(\Delta L)^2}{4EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Con la fattorizzazione di Gauss si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{q(\Delta L)^2}{4EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \\ 12 \end{Bmatrix}$$

da cui: $u_4 = \frac{3q(\Delta L)^2}{EA}$ $u_3 = \frac{23q(\Delta L)^2}{12EA}$ $u_2 = \frac{4q(\Delta L)^2}{3EA}$

In questo caso lo spostamento nei tre tratti della trave vale rispettivamente:

$$u = \left[1 - \xi^2 \quad \xi^2 \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{4q(\Delta L)^2}{3EA} \xi^2$$

$$u = \left[1 - \xi^2 \quad \xi^2 \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{4q(\Delta L)^2}{3EA} + \frac{7q(\Delta L)^2}{12EA} \xi^2 = \frac{q(\Delta L)^2}{12EA} (16 + 7\xi^2)$$

$$u = \left[1 - \xi^2 \quad \xi^2 \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{23q(\Delta L)^2}{12EA} + \frac{13q(\Delta L)^2}{12EA} \xi^2 = \frac{q(\Delta L)^2}{12EA} (23 + 13\xi^2)$$



mentre la deformazione nei tre tratti della trave vale rispettivamente:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\Delta L} [-2\xi \quad 2\xi] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{8q\Delta L}{3EA} \xi$$

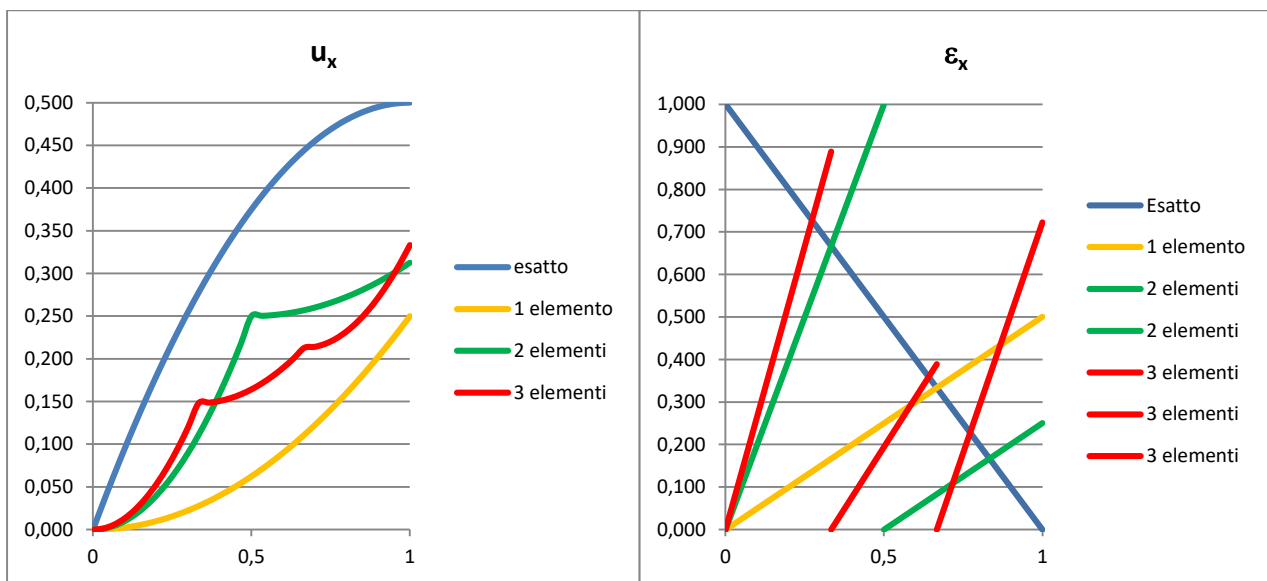
$$\varepsilon_x = \frac{1}{\Delta L} [-2\xi \quad 2\xi] \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{7q\Delta L}{6EA} \xi$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\Delta L} [-2\xi \quad 2\xi] \cdot \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{13q\Delta L}{6EA} \xi$$

Come si può osservare dai due grafici che seguono, al crescere del numero di elementi, le soluzioni non convergono verso la soluzione esatta. (Per diagrammare le due funzioni abbiamo posto $A = E = L = q = 1$).

La necessità che l'elemento sia in grado di rappresentare uno stato di deformazione costante è stata espressa senza alcun riferimento alla dimensione dell'elemento, in quanto è molto utile che elementi molto grandi abbiano la stessa capacità; così in aree in cui agiscono bassi gradienti di deformazione è sufficiente un solo grande elemento piuttosto che tanti piccoli elementi.

Esiste una forma alternativa del criterio n.2 nota come "*patch test*". Si prenda un insieme di elementi, per esempio 10, disposti in modo tale che almeno un nodo sia completamente circondato dagli elementi. Questi nodi interni possono essere disposti in modo che gli elementi assumano una forma arbitraria. Ai nodi disposti sul bordo esterno si applichino degli spostamenti o delle forze consistenti con uno stato di deformazione costante. I nodi interni non devono essere né caricati né vincolati. Quindi una volta calcolati, gli spostamenti, le deformazioni e gli sforzi all'interno degli elementi dovrebbero essere consistenti con uno stato di deformazione costante. Se ciò non capita, il tipo di elemento non è valido o per lo meno, sospetto (può capitare che un elemento sia valido solo se assume certe forme, per esempio rettangolare).



Sono stati pubblicati numerosi articoli scientifici che hanno dimostrato le difficoltà conseguenti all'uso di elementi che non soddisfino il secondo criterio. Per esempio, nella flessione delle piastre la deformata è definita attraverso lo spostamento laterale w : un campo di spostamento imposto w di tipo polinomiale che contiene i termini in x^2 e y^2 ma non contiene il termine xy consente le curvature costanti $\partial^2 w / \partial x^2$ e $\partial^2 w / \partial y^2$ ma impedisce la torsione costante $\partial^2 w / \partial x \partial y$. Anche se ai nodi si impongono i gradi di libertà corrispondenti ad una torsione costante questo elemento non è in grado di rappresentare al suo interno uno stato di torsione costante. Normalmente utilizzare mesh sempre più fitte conduce a risultati che convergono a valori scorretti.

E' bene che gli elementi soddisfino altri due requisiti. Man mano che la mesh diventa più fitta (ma non necessariamente negli elementi più grandi):



3. Devono essere rappresentati i modi di spostamento rigido. In altre parole, quando ai nodi si assegnano valori di spostamento corrispondenti ad uno stato di spostamento rigido, l'elemento deve mostrare uno stato di deformazione nulla e perciò forze nodali nulle.
4. Tra gli elementi deve esistere compatibilità: gli elementi non devono compenetrarsi o separarsi. Nel caso delle travi, delle piastre e dei gusci è anche necessario che non ci sia una variazione improvvisa di pendenza attraverso i confini dell'elemento.

Se il terzo requisito non è soddisfatto, appaiono delle forze nodali estranee e quindi le equazioni d'equilibrio ai nodi sono alterate. Alcuni elementi di tipo Shell (gusci) che hanno suscitato un certo interesse, soddisfano questo criterio solo quando l'elemento diventa molto piccolo. Si tratta di elementi molto utilizzati perché gli errori si mantengono bassi per le usuali dimensioni degli elementi. D'altra parte, a parità delle altre condizioni, si ottengono risultati migliori quando si includono i modi di spostamento rigido.

Il quarto criterio è violato da molti elementi utilizzati abitualmente, che però soddisfano la compatibilità tra gli elementi quando si infittisce la mesh ed ogni elemento converge verso uno stato di deformazione costante.

Gli elementi incompatibili spesso lavorano meglio di quelli compatibili a loro simili. La ragione dipende dalla natura della soluzione approssimata. L'uso di un campo di spostamento imposto produce una struttura approssimata più rigida di quella reale. Ma la struttura approssimata è resa più deformabile permettendole la separazione e/o la compenetrazione tra elementi. I due effetti tendono a cancellarsi uno con l'altro, spesso con ottimi risultati.

Esistono degli elementi incompatibili capaci di rappresentare uno stato di deformazione costante quando sono disposti in un certo modo, ma non in un altro; nella disposizione peggiore gli errori sono comunque piccoli e possono essere trascurati nella pratica.

Gli elementi incompatibili apparentemente soddisfano l'eq.8.2.6 (Principio di Minimo dell'Energia Potenziale Totale) in cui l'integrazione si esegue solo su ogni elemento. Quanto capita tra un elemento e l'altro non è preso in considerazione. Comunque, poiché per l'uso dell'espressione π_{pt} la compatibilità è necessaria, una soluzione che si basa sull'uso di elementi incompatibili non è una soluzione che si fonda sul Principio di Minimo dell'Energia Potenziale Totale. Perciò non possiamo affermare che la struttura approssimata sia troppo rigida; la convergenza dei risultati può non essere monotona e può procedere da valori di spostamento più grandi o più piccoli di quelli corretti.

In un articolo pubblicato nel 1963 Melosh ha dedotto che ogni mesh ricavata da una precedente mesh più grossolana, è in grado di rappresentare tutti gli stati di deformazione possibili nella mesh di partenza. Per esempio, ogni elemento in una mesh costituita da rettangoli piani può essere diviso in quattro elementi più piccoli dello stesso tipo. Se la suddivisione della mesh si ottiene in questo modo e sono soddisfatti i quattro criteri prima enunciati, ci si può aspettare la convergenza monotona dei risultati. Notiamo la similitudine di questo schema di suddivisione con il processo di addizione di termini nelle funzioni di prova (funzioni di miscelamento o funzioni di forma) nel classico metodo di Rayleigh-Ritz: si conservano i termini di ordine inferiore di modo che il vecchio campo di spostamento sia contenuto nel nuovo.

Un altro criterio che un elemento dovrebbe soddisfare è:

5. L'elemento non dovrebbe avere delle direzioni preferenziali. Cioè, sotto un qualsiasi sistema di carico avente un orientamento fisso rispetto all'elemento, la risposta dell'elemento dovrebbe essere indipendente dal modo in cui esso ed i suoi carichi sono orientati nel sistema di coordinate globali xy . Qui il termine "risposta" va inteso come energia di deformazione dell'elemento o deformazioni dell'elemento in un sistema di coordinate legato all'elemento. Gli elementi che soddisfano questo criterio si chiamano *invarianti*. Alcuni ricercatori ritengono che per garantire la convergenza dei risultati verso la soluzione corretta l'invarianza sia indispensabile. In ogni caso è un attributo molto desiderabile e non ci sono motivi perché non sia utilizzato.



Se per rappresentare il campo di spostamento dell'elemento si usa un polinomio completo allora l'invarianza è soddisfatta: in questo contesto, "completo" significa che il polinomio contiene tutti i termini lineari, oppure tutti i termini lineari e quadratici, etc. Per esempio, il polinomio cubico:

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9y^3$$

è incompleto perché manca il termine xy^2 . L'uso di questo polinomio nella soluzione di problemi delle piastre porta alla convergenza verso risultati scorretti.

L'uso di polinomi completi garantisce che lo spostamento di ogni punto appartenente ad una linea interna all'elemento sarà un polinomio completo nella coordinata lineare, indipendentemente da come è orientata la linea rispetto agli assi globali.

Comunque, gli elementi possono essere invarianti anche quando si basano su polinomi incompleti: in effetti molti elementi usati con successo nei software commerciali sono di questo tipo. Si ottiene l'invarianza se l'elemento è formulato rispetto ad un sistema di coordinate locali legato all'elemento in modo che il sistema di coordinate abbia lo stesso orientamento rispetto all'elemento, indipendentemente da come esso è orientato nel sistema di coordinate globale. Il campo di spostamento dell'elemento deve essere espresso in funzione delle coordinate locali e se il polinomio è incompleto deve avere una rappresentazione "bilanciata" dei coefficienti. Inoltre, quando si usa l'integrazione numerica, questa deve essere "uniforme", cioè bisogna usare lo stesso insieme di punti di campionamento per l'integrazione di tutte le componenti di deformazione.

L'invarianza sarà ulteriormente discussa nei prossimi capitoli. Per il momento, come esempio, usiamo l'elemento rettangolare della fig.8.3.1. Sia dato un sistema di coordinate locali $\xi\eta$ legato all'elemento. Se gli spostamenti dell'elemento u e v hanno la forma:

$$a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta$$

allora si otterrà l'invarianza. Il termine quadratico $a_4\xi\eta$ non favorisce né ξ né η e perciò il polinomio è "bilanciato". In modo analogo, un polinomio che contiene tutti i termini lineari e quadratici ma solo i termini cubici $a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2$ può essere considerato "bilanciato". Un polinomio di questo tipo può essere utilizzato per un elemento piano a 8 nodi di cui 4 d'angolo e uno sulla mezzeria di ognuno dei quattro lati.

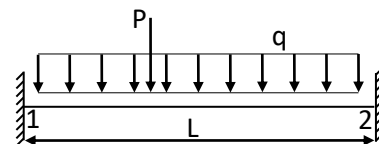
8.5 Calcolo degli sforzi

Una volta noti i valori dei gradi di libertà nodali $\{d\}$, è possibile calcolare lo stato di sforzo in ogni elemento:

$$\{\sigma\} = [E](\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) = [E]([B]\{d\} - \{\epsilon_0\}) \quad [8.5.1]$$

Se oltre alla deformazione iniziale $\{\epsilon_0\}$, è presente anche lo sforzo iniziale $\{\sigma_0\}$, questo deve essere aggiunto nell'equazione precedente. La matrice $[B]$ è valutata nel punto nel quale si desidera calcolare gli sforzi. Da un punto di vista computazionale, l'operazione $[E] \cdot ([B]\{d\})$ è più efficiente che $([E][B]) \cdot \{d\}$: se la matrice $[E]$ ha dimensione 6×6 ed il vettore $\{d\}$ contiene N coefficienti, la prima operazione richiede $36 + 6N$ prodotti, mentre la seconda ne richiede $36N + 6N$.

Il calcolo degli sforzi causati dalle forze interne richiede qualche commento. Se, per esempio, modelliamo la trave della figura a lato con un solo elemento che collega i nodi 1 e 2, gli spostamenti nodali sono nulli e l'equazione [8.5.1] usata per il calcolo degli sforzi fornisce uno stato di sforzo nullo.



Questo risultato scorretto suggerisce che gli sforzi calcolati dovrebbero includere anche quelli causati dalle forze interne agenti su un elemento completamente vincolato. In pratica questi sforzi sono usualmente ignorati. Essi sono spesso complicati da calcolare o approssimare e tendono ad annullarsi man mano che la dimensione degli elementi si riduce. Gli elementi che hanno dei gradi di libertà interni prendono in considerazione automaticamente gli effetti dei carichi interni in modo approssimato.



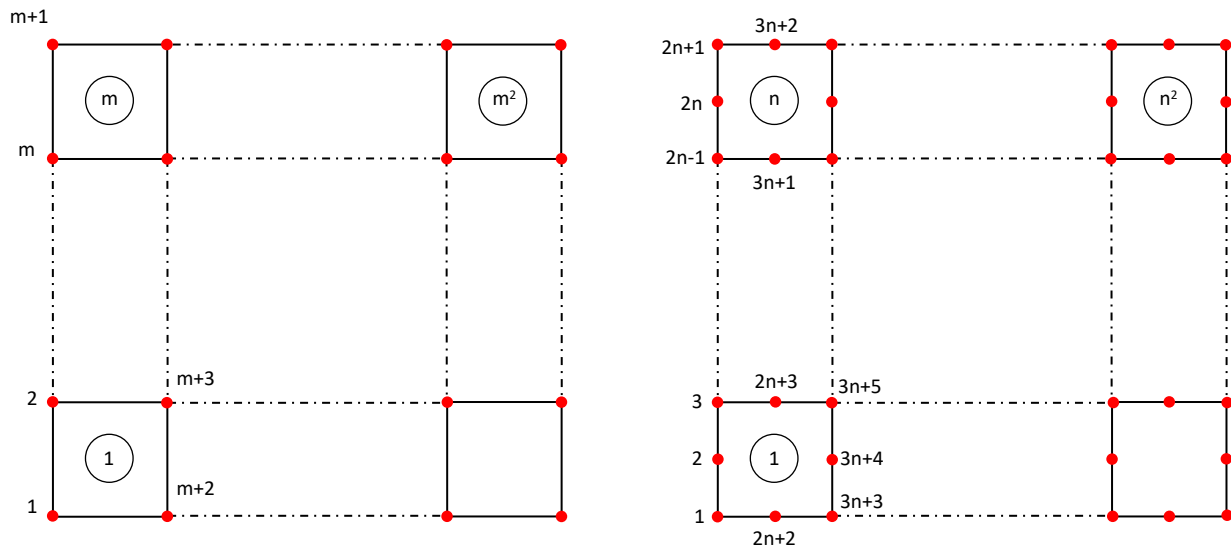
Il calcolo delle deformazioni e quindi degli sforzi si basa sulla differenza degli spostamenti nodali in un elemento: i moti rigidi non entrano in gioco. Per esempio nel caso dell'elemento tirante/puntone abbiamo:

$$\varepsilon_x = \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

Di conseguenza, per il calcolo preciso degli sforzi, i gradi di libertà nodali $\{d\}$ devono essere calcolati con sufficiente precisione in modo che i moti rigidi non mascherino le differenze essenziali. In caso contrario, le differenze contengono poche cifre corrette. Se gli spostamenti sono stati calcolati usando l'aritmetica in doppia precisione (8 byte = 64 bits), il calcolo degli sforzi in un elemento può essere preceduto dalla rimozione dei moti rigidi, per esempio sottraendo gli spostamenti del primo nodo dagli spostamenti degli altri. Per quanto riguarda i solidi di rivoluzione, la deformazione circonferenziale $\varepsilon_\theta = u/r$ dipende dallo spostamento radiale u totale e non da una variazione di spostamento.

8.6 Nodi sui vertici e nodi sui lati degli elementi

Gli elementi finiti possono avere solo nodi d'angolo oppure anche nodi sui lati. Poiché in seguito incontreremo entrambe i tipi di elementi, eseguiamo adesso un breve confronto sulla base del costo di calcolo. Le due figure mostrano due mesh. Una ha m elementi su ogni lato e l'altra ne ha n .



Nella figura sono indicati i numeri degli elementi e dei nodi. Ai fini del ragionamento poniamo che in ogni nodo ci siano k gradi di libertà. L'uso della prima mesh dà luogo a $k(m+1)^2 = k(m^2 + 2m + 1)$ equazioni, mentre l'uso della seconda porta a $k[(2n+1)^2 - n^2] = k[4n^2 + 4n + 1 - n^2] = k[3n^2 + 4n + 1]$ equazioni. Inoltre nei due casi la larghezza della semi banda è pari a $B_1 = k(m+3)$ e $B_2 = k(3n+5)$ rispettivamente. Nel caso in cui m ed n siano numeri abbastanza grandi, le espressioni precedenti si possono semplificare: nel caso della prima mesh abbiamo $N_1 \cong km^2$ equazioni ed una semi banda pari a $B_1 \cong km$, mentre nel caso della seconda $N_2 \cong 3kn^2$ equazioni ed una larghezza della semi banda pari a $B_2 \cong 3kn$.

Perciò, il tempo di calcolo per i due sistemi di equazioni sarà proporzionale a $T_1 \propto B_1^2 N_1 = k^3 m^4$ e $T_2 \propto B_2^2 N_2 = 27k^3 n^4$ rispettivamente. Se il tempo di calcolo deve essere lo stesso, dobbiamo avere $m \cong \sqrt[4]{27}n = 2.3n$. Così se due mesh hanno lo stesso numero di gradi di libertà per nodo, per avere lo stesso tempo di calcolo possiamo usare una mesh formata da elementi i cui nodi sono solo sui vertici più di due volte più fitta di una mesh i cui elementi hanno i nodi anche sui lati.

Questo ragionamento si estende anche agli elementi che hanno due nodi per lato ed agli elementi di volume che hanno i nodi sui vertici, sui nodi e sulle facce. La conclusione generale è che gli elementi che contengono solo nodi sui vertici sono da preferirsi in termini di efficienza computazionale. Può naturalmente capitare che in un data classe di problemi ci siano degli elementi aventi dei nodi sui lati che abbiano un



comportamento molto migliore degli elementi aventi solo nodi sui vertici e che quindi possano essere usati in una mesh grossolana senza un eccessivo costo di calcolo.