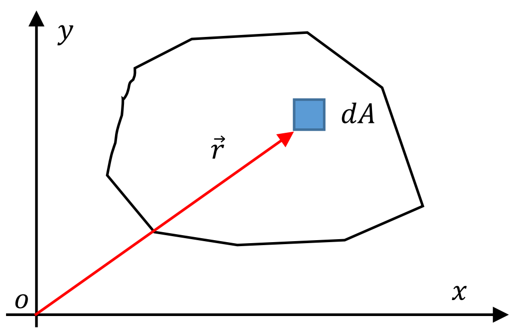
Sull’argomento sono state registrate due lezioni reperibili ai seguenti indirizzi:
https://unica.adobeconnect.com/p87yc3jytdri/
https://unica.adobeconnect.com/pv3a55ffrebj/

GEOMETRIA DELLE AREE

Eseguita l’analisi cinematica che consente di stabilire se la struttura è ipostatica, iperstatica o isostatica (e, in tal caso, di stabilire se i vincoli sono stati disposti correttamente), calcolate le reazioni vincolari, calcolate le azioni interne e disegnati i relativi diagrammi, scelto un particolare materiale con il quale realizzare la struttura, è possibile calcolare gli sforzi e le deformazioni che si manifestano in alcuni punti delle travi. Però, poiché le deformazioni dipendono anche dalla forma delle sezioni trasversali delle travi, prima di proseguire è necessario studiare la così detta “*geometria delle aree*”.

BARICENTRO DI UNA SEZIONE E MOMENTI STATICI

Data un’area piana di forma qualsiasi, si scelga un sistema di riferimento cartesiano $x-y$ rispetto al quale il vettore $\vec{r}$ individua un elemento infinitesimo dA dell’area.



$$\vec{r}=\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

Si definisce “**momento statico**” dell’area rispetto al sistema di riferimento $x-y$ il vettore:

$$\vec{S}=\int_A \vec{r}dA=\begin{Bmatrix} \int_A xdA \\ \int_A ydA \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} S_y \\ S_x \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

Quindi (attenzione agli indici):

$$S_y=\int_A xdA \qquad ; \qquad S_x=\int_A ydA \qquad (2)$$

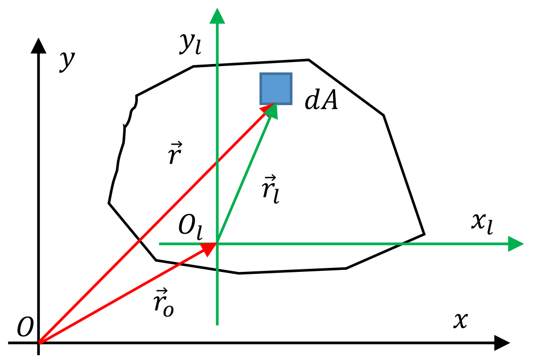
Come visto nella prima lezione (“*Richiami di statica e geometria elementare*”), la posizione del baricentro dell’area si calcola con le seguenti formule:

$$x_G = \frac{\int_A x dA}{A} = \frac{S_y}{A} \quad ; \qquad y_G = \frac{\int_A y dA}{A} = \frac{S_x}{A} \qquad (3)$$

dove $A = \int_A \, dA$ rappresenta l'area della figura. Le due relazioni precedenti si possono così sintetizzare:

$$\vec{r}_G = \frac{\vec{S}}{A} = \begin{Bmatrix} x_G \\ y_G \end{Bmatrix} \qquad (4)$$

Si prenda in considerazione un secondo sistema di riferimento $x_l - y_l$, traslato rispetto al primo della quantità $\vec{r}_o$, ma non ruotato:



Tra i due sistemi esiste la seguente relazione:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{r}_l$$

E' quindi possibile esprimere il momento statico rispetto al nuovo sistema di riferimento:

$$\vec{S} = \int_A \vec{r} dA = \int_A (\vec{r}_o + \vec{r}_l) dA = \int_A \vec{r}_o dA + \int_A \vec{r}_l dA$$

Poiché $\vec{r}_o$ è costante, la precedente relazione assume la forma seguente :

$$\vec{S} = \vec{r}_o \int_A \, dA + \int_A \, \vec{r}_l dA = A\vec{r}_o + \vec{S}_l \qquad (5)$$

Se l'origine O_l del sistema di riferimento $x_l - y_l$ coincide con la posizione $\vec{r}_G = \begin{Bmatrix} x_G \\ y_G \end{Bmatrix}$ del baricentro G misurata rispetto al sistema di riferimento $x - y$, allora:

$$\vec{S} = A\vec{r}_G + \vec{S}_l \qquad (6)$$

Osservando l'eq.(4) se ne deduce che $\vec{S}_l = 0$, cioè il momento statico calcolato rispetto ad un sistema di assi baricentrici è nullo.

MOMENTI D'INERZIA

Si esegua il seguente prodotto:

$$\vec{r}\,\vec{r}^T = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}\{x \quad y\} = \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Si definisce **matrice d'inerzia** dell'area, calcolata rispetto al sistema di riferimento $x-y$, il seguente integrale:

$$[I] = \int_A \vec{r}\,\vec{r}^T\,dA = \begin{bmatrix} \int_A x^2 dA & \int_A xydA \\ \int_A xydA & \int_A y^2 dA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{yy} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{xx} \end{bmatrix} \tag{8}$$

In altri termini (la matrice è simmetrica):

$$I_{yy} = \int_A x^2 dA \quad ; \quad I_{xx} = \int_A y^2 dA \quad ; \quad I_{xy} = \int_A xydA \tag{9}$$

Se si utilizza un secondo sistema di riferimento traslato rispetto al primo, è possibile calcolare la matrice d'inerzia rispetto al nuovo sistema di riferimento:

$$\vec{r}\,\vec{r}^T = (\vec{r}_o + \vec{r}_l)(\vec{r}_o + \vec{r}_l)^T = \vec{r}_o\vec{r}_0^T + \vec{r}_o\vec{r}_l^T + \vec{r}_l\vec{r}_0^T + \vec{r}_l\vec{r}_l^T$$

da cui:

$$[I] = \int\limits_A \vec{r}\,\vec{r}^T dA = \int\limits_A \vec{r}_o\vec{r}_0^T dA + \int\limits_A \vec{r}_o\vec{r}_l^T dA + \int\limits_A \vec{r}_l\vec{r}_0^T\,dA + \int\limits_A \vec{r}_l\vec{r}_l^T dA$$

Come è stato già osservato, il vettore $\vec{r}_o$ è costante quindi può essere portato fuori dall'operazione d'integrazione:

$$[I] = A\vec{r}_o\vec{r}_0^T + \vec{r}_o \int\limits_A \vec{r}_l^T dA + \int\limits_A \vec{r}_l\,dA\;\vec{r}_0^T + \int\limits_A \vec{r}_l\vec{r}_l^T dA$$

Si può notare che $\vec{S}_l = \int_A \vec{r}_l^T dA$ rappresenta il vettore dei momenti statici e $[I]_l = \int_A \vec{r}_l\vec{r}_l^T dA$ la matrice dei momenti d'inerzia calcolati rispetto al sistema di riferimento $x_l - y_l$. Sviluppando i prodotti si ottiene:

$$\begin{bmatrix} I_{yy} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{xx} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x_0^2 & x_0y_0 \\ x_0y_0 & y_0^2 \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Bmatrix}\{S_y \quad S_x\}_l + \begin{Bmatrix} S_y \\ S_x \end{Bmatrix}_l \{x_0 \quad y_0\} + \begin{bmatrix} I_{yy} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{xx} \end{bmatrix}_l$$

In altri termini, si possono scrivere le tre seguenti relazioni:

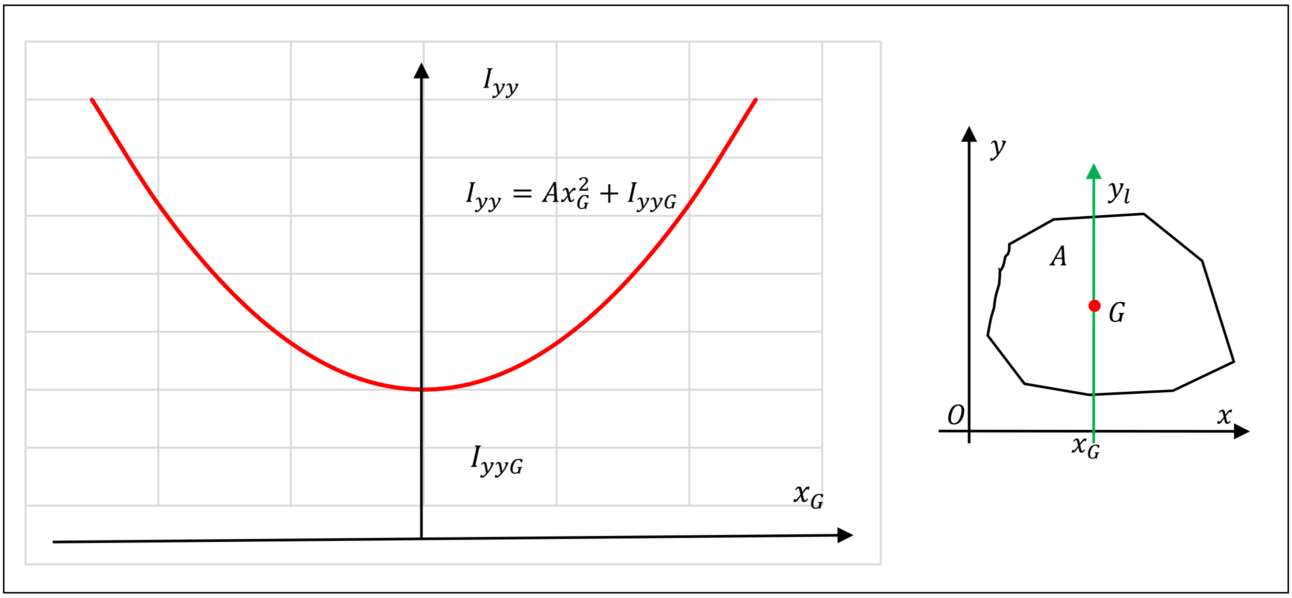
$$\begin{cases} I_{yy} = Ax_0^2 + 2x_0S_{yl} + I_{yyl} \\ I_{xx} = Ay_0^2 + 2y_0S_{xl} + I_{xxl} \\ I_{xy} = Ax_0y_0 + x_0S_{xl} + y_0S_y + I_{xyl} \end{cases} \tag{10}$$

Quando il sistema di riferimento $x_l - y_l$ ha l'origine nel baricentro dell'area, allora i momenti statici S_{xl} ed S_{yl} si annullano e le espressioni precedenti assumono la forma:

$$\begin{cases} I_{yy} = Ax_G^2 + I_{yyG} \\ I_{xx} = Ay_G^2 + I_{xxG} \\ I_{xy} = Ax_Gy_G + I_{xyG} \end{cases} \tag{11}$$

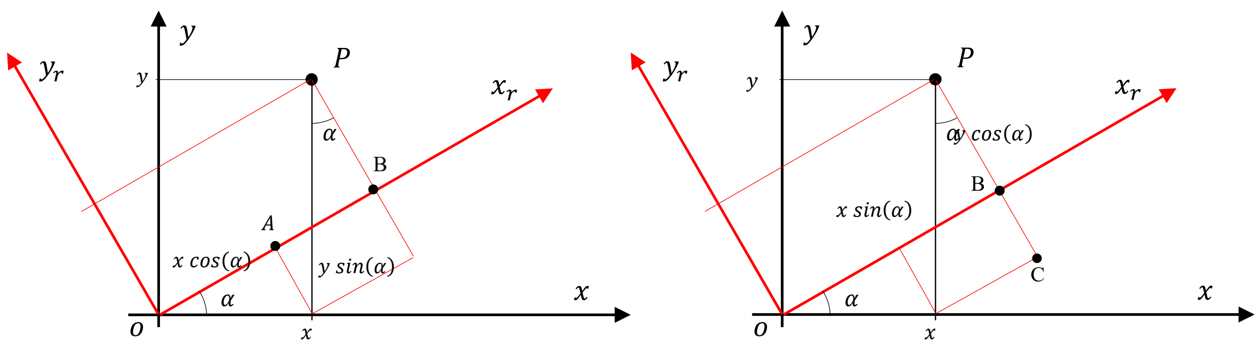
Le relazioni precedenti sono note come "*Leggi di Huygens-Steiner*" e consentono, nota l'area A della sezione e i suoi momenti d'inerzia baricentrici I_{yyG}, I_{xxG}, e I_{xyG} di calcolare i momenti d'inerzia rispetto ad un altro sistema di riferimento traslato rispetto a quello baricentrico di una quantità nota x_G e y_G.

Se sull'asse delle ascisse di un grafico si riporta la distanza x_G dell'asse verticale del sistema di riferimento dal baricentro della sezione, si può disegnare il seguente diagramma:



che mostra come il momento d'inerzia I_{yy} raggiunge il suo minimo quando è calcolato rispetto ad un asse baricentrico e che il suo valore cresce come una parabola in funzione della distanza x_G dell'asse del sistema di riferimento dal baricentro della sezione.

Immaginiamo di ruotare il sistema di riferimento di un angolo α antiorario.



Osserviamo che la distanza OA vale $x\ cos(\alpha)$ e la distanza AB vale $y\ sin(\alpha)$;

Osserviamo che la distanza PC vale $y\ cos(\alpha)$ e la distanza BC vale $x\ sin(\alpha)$.

Per passare da un sistema di riferimento all'altro è necessario applicare le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x_r = x\ cos(\alpha) + y\ sin(\alpha) \\ y_r = y\ cos(\alpha) - x\ sin(\alpha) \end{cases}$$

che in forma matriciale assumono la forma:

$$\begin{Bmatrix} x_r \\ y_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

dove la matrice:

$$[R] = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

si chiama "*matrice di rotazione*".

Calcoliamo la matrice dei momenti d'inerzia rispetto ad un sistema ruotato.

$$[I]_r = \int_A \vec{r}_r \vec{r}_r^T dA = \int_A ([R]\vec{r})([R]\vec{r})^T\ dA = \int_A [R]\vec{r}\ \vec{r}^T [R]^T\ dA$$

Poiché la matrice di rotazione è una costante, si può portare fuori dall'integrale, per cui:

$$[I]_r = \int_A [R]\vec{r}\,\vec{r}^T[R]^T\,dA = [R]\int_A \vec{r}\,\vec{r}^T\,dA\;[R]^T = [R][I][R]^T$$

Sviluppando si ottiene:

$$\begin{bmatrix} I_{yy} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{xx} \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{yy} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{xx} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Da cui:

$$\begin{cases} I_{yyr} = I_{yy}cos^2(\alpha) + 2I_{xy}sin(\alpha)cos(\alpha) + I_{xx}sin^2(\alpha) \\ I_{xxr} = I_{yy}sin^2(\alpha) - 2I_{xy}sin(\alpha)cos(\alpha) + I_{xx}cos^2(\alpha) \\ I_{xyr} = I_{xy}[cos^2(\alpha) - sin^2(\alpha)] + \left(I_{xx} - I_{yy}\right)sin(\alpha)cos(\alpha) \end{cases} \quad (12)$$

Osserviamo che sommando la prima e la seconda equazione del sistema (12) si ottiene:

$$I_{xxr} + I_{yyr} = I_{xx} + I_{yy} \quad (13)$$

Si dice che la somma dei momenti d'inerzia calcolati rispetto agli assi cartesiani è "*invariante*", nel senso che è costante indipendentemente dall'angolo α.

Esiste una rappresentazione grafica che, noti i momenti d'inerzia I_{xx}, I_{yy}, I_{xy}, consente di stimare rapidamente i valori dei momenti d'inerzia I_{xxr}, I_{yyr}, I_{xyr} calcolati rispetto ad un sistema di riferimento ruotato di un angolo α. Per eseguire questa rappresentazione grafica nel così detto "*piano di Mohr*", è necessario ricordare le seguenti formule trigonometriche:

$$cos^2(\alpha) = \frac{1+cos(2\alpha)}{2} \;\; ; \;\; sin^2(\alpha) = \frac{1-cos(2\alpha)}{2} \;\; ; \;\; sin(\alpha)cos(\alpha) = \frac{sin(2\alpha)}{2}$$

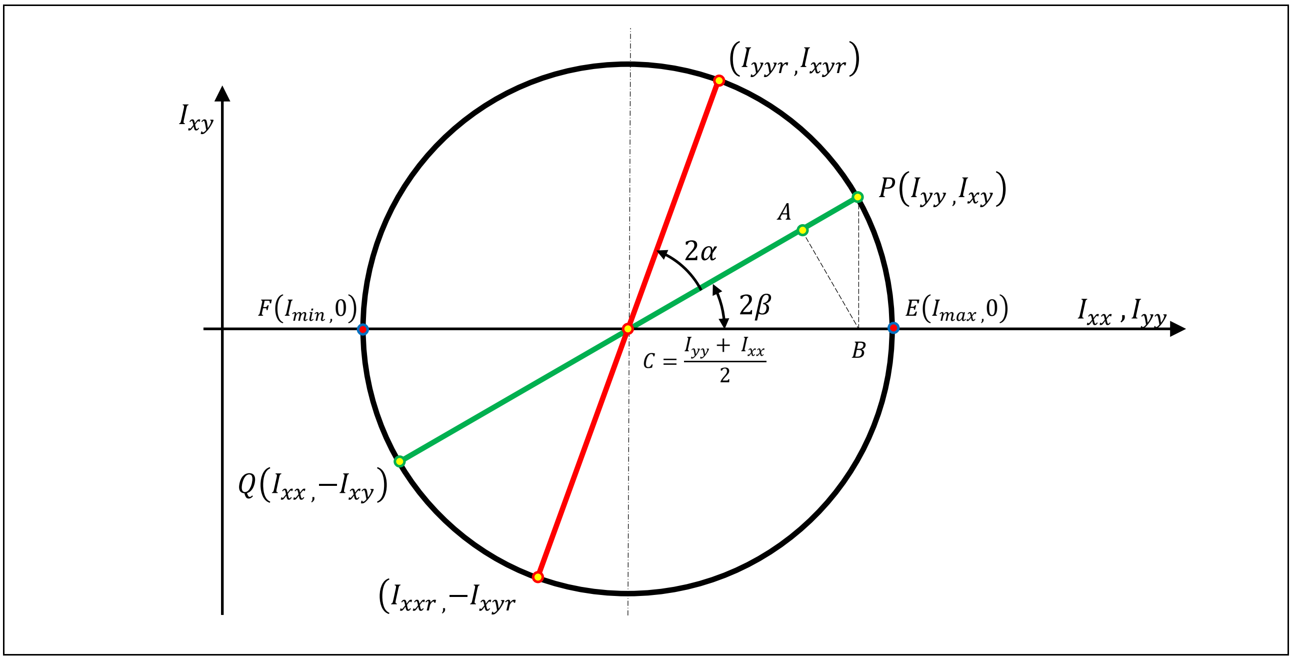
Sostituendo queste espressioni nelle equazioni (12) si ottiene.

$$\begin{cases} I_{yyr} = I_{yy}\dfrac{1+cos(2\alpha)}{2} + I_{xx}\dfrac{1-cos(2\alpha)}{2} + I_{xy}sin(2\alpha) \\ I_{xxr} = I_{yy}\dfrac{1-cos(2\alpha)}{2} + I_{xx}\dfrac{1+cos(2\alpha)}{2} - I_{xy}sin(2\alpha) \\ I_{xyr} = I_{xy}\left[\dfrac{1+cos(2\alpha)}{2} - \dfrac{1-cos(2\alpha)}{2}\right] + \left(I_{xx} - I_{yy}\right)\dfrac{sin(2\alpha)}{2} \end{cases}$$

Riordinando si ottiene:

$$\begin{cases} I_{yyr} = \frac{I_{yy}+I_{xx}}{2} + \frac{I_{yy}-I_{xx}}{2}cos(2\alpha) + I_{xy}sin(2\alpha) \\ I_{xxr} = \frac{I_{yy}+I_{xx}}{2} - \frac{I_{yy}-I_{xx}}{2}cos(2\alpha) - I_{xy}sin(2\alpha) \\ I_{xyr} = I_{xy}cos(2\alpha) - \frac{I_{yy}-I_{xx}}{2}sin(2\alpha) \end{cases} \tag{14}$$

Il sistema (14) non è altro che l'equazione parametrica di una circonferenza (di parametro 2α) il cui centro si trova sull'asse delle ascisse alla coordinata $\frac{I_{yy}+I_{xx}}{2}$.



Osserviamo che "*il cerchio di Mohr dei momenti d'inerzia*" si trova sempre a destra dell'asse delle ordinate perché i momenti d'inerzia non possono assumere valore negativo in quanto si ottengono dal prodotto di un'area per il quadrato di una distanza.

Dall'esame della figura precedente osserviamo che la distanza CB è pari a $\frac{I_{yy}-I_{xx}}{2}$, che la distanza PB vale I_{xy} e che il raggio della circonferenza vale:

$$R = CB \cdot cos(2\beta) + PB \cdot sin(2\beta)$$

Ovvero:

$$R = \frac{I_{yy}-I_{xx}}{2} \cdot cos(2\beta) + I_{xy} \cdot sin(2\beta)$$

I momenti d'inerzia possono assumere i seguenti valori estremi:

$$I_{min,max} = C \pm R$$

che vengono comunemente chiamati "*momenti principali d'inerzia*". Ciò capita nei due punti in cui il momento d'inerzia misto I_{xy} si annulla.

Osservando le eq.(14) vediamo che il momento d'inerzia misto I_{xy} si annulla quando:

$$tang(2\beta) = \frac{2I_{xy}}{I_{yy}-I_{xx}} \qquad (15a)$$

ovvero quando

$$\beta = \frac{1}{2} arctang\left(\frac{2I_{xy}}{I_{yy}-I_{xx}}\right) \qquad (15b)$$

D'altra parte se si cerca il punto di stazionarietà della funzione:

$$I_{yyr} = \frac{I_{yy}+I_{xx}}{2} + \frac{I_{yy}-I_{xx}}{2} cos(2\alpha) + I_{xy} sin(2\alpha)$$

si ottiene:

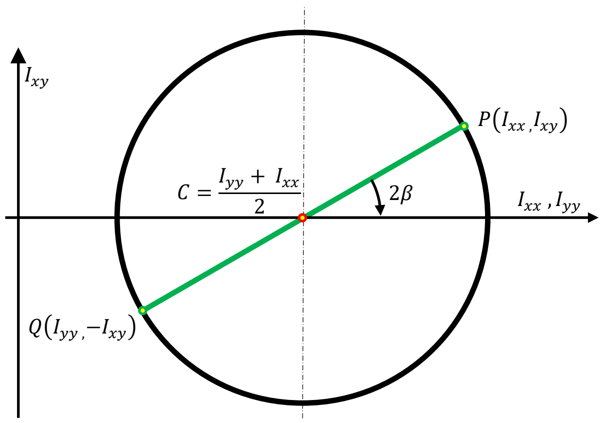
$$\frac{d(I_{yyr})}{d\alpha} = -\frac{I_{yy}-I_{xx}}{2} 2sin(2\alpha) + 2I_{xy} cos(2\alpha) = 0$$

da cui si ricava che i punti di stazionarietà si hanno quando l'angolo assume il valore:

$$tang(2\alpha) = \frac{2I_{xy}}{I_{yy}-I_{xx}} \qquad (15c)$$

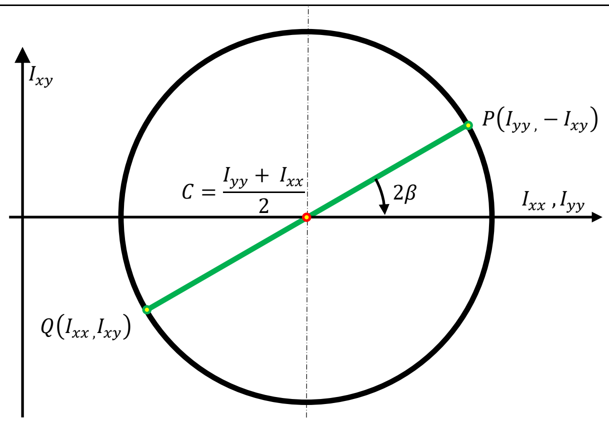
La (15c) coincide con la (15a): le due equazioni affermano che i momenti principali d'inerzia si manifestano in corrispondenza dello stesso angolo che annulla il momento d'inerzia misto.

Data un'area ed un sistema di riferimento $x - y$, dopo avere calcolato i momenti d'inerzia si procede con il disegno del cerchio di Mohr. Per una corretta interpretazione degli angoli (positivi se antiorari), è necessario abbinare al momento d'inerzia I_{xx} il momento d'inerzia misto I_{xy} con il suo segno. I casi che si possono presentare sono i seguenti:



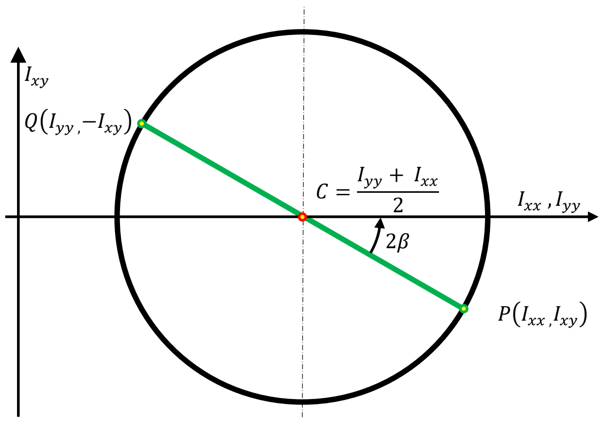
$$I_{yy} < I_{xx} \quad \text{e} \quad I_{xy} > 0:$$

$$tang(2\beta) = \frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} < 0$$



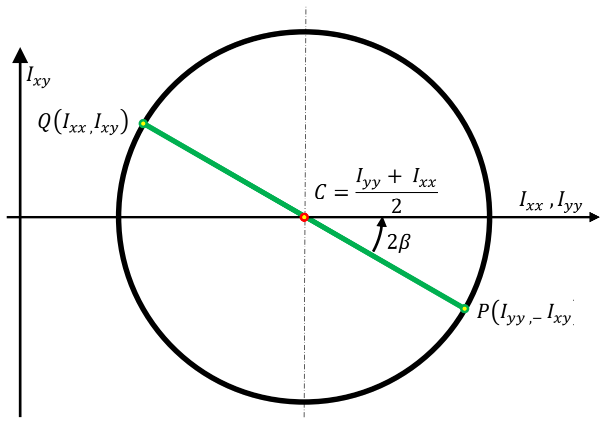
$$I_{yy} > I_{xx} \quad \text{e} \quad I_{xy} < 0:$$

$$tang(2\beta) = \frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} < 0$$



$$I_{yy} < I_{xx} \quad \text{e} \quad I_{xy} < 0:$$

$$tang(2\beta) = \frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} > 0$$



$$I_{yy} > I_{xx} \quad \text{e} \quad I_{xy} > 0:$$

$$tang(2\beta) = \frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} > 0$$

MOMENTO D'INERZIA POLARE

Talvolta è necessario un ulteriore momento d'inerzia calcolato rispetto ad un asse perpendicolare al piano x-y, il così detto "*momento polare*" definito come:

$$I_p = I_{zz} = \int_A r^2 dA \tag{16}$$

dove $r^2 = x^2 + y^2$ indica la distanza dell'area infinitesima dA dal polo. Di conseguenza:

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_{yy} + I_{xx} \tag{17}$$

Il momento d'inerzia polare di una circonferenza vale:

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r \cdot dr = 2\pi \left(\frac{r^4}{4}\right)_0^R = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

RAGGI D'INERZIA

I raggi d'inerzia di una sezione di area A rispetto agli assi coordinati si ricavano dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} I_{xx} = A r_x^2 \\ I_{yy} = A r_y^2 \\ I_p = A r_p^2 \end{cases} \tag{18}$$

da cui si ricava:

$$r_x = \sqrt{\frac{I_{xx}}{A}} \quad ; \quad r_y = \sqrt{\frac{I_{yy}}{A}} \quad ; \quad r_p = \sqrt{\frac{I_p}{A}} \tag{19}$$

Dalla (17) si ricava:

$$r_p^2 = r_x^2 + r_y^2 \tag{20}$$

Talvolta i raggi d'inerzia sono indicati con le lettere ρ oppure i, per esempio ρ_x oppure i_x. Il raggio d'inerzia di una circonferenza vale:

$$r_p = \sqrt{\frac{\frac{\pi R^4}{2}}{\pi R^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

MODULI DI RESISTENZA

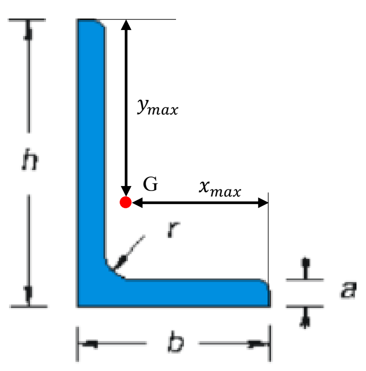
Spesso le tabelle che accompagnano i profilati normalizzati contengono un parametro che prende il nome di "*modulo di resistenza*" definito nel modo seguente:

$$W_x = \frac{I_{xx}}{y_{max}} \quad ; \quad W_y = \frac{I_{yy}}{x_{max}} \qquad (21)$$

dove x_{max} ed y_{max} indicano le distanze massime misurate rispettivamente in direzione x ed y del baricentro della sezione dal bordo più lontano.

Per esempio, nel caso dei profilati metallici normalizzati secondo le norme UNI 5784-66 che riguardano le travi angolari a lati disuguali a spigoli tondi, la tabella ha questo aspetto:

Profilo	b	h	a	r	Peso	Sezione	Momenti di inerzia		Moduli di resistenza		Raggi di inerzia	
							Jx	Jy	Wx	Wy	ix	iy
mm	mm	mm	mm	mm	kg/m	cm^2	cm^4	cm^4	cm^3	cm^3	cm	cm
20x30x4	20	30	4	3,5	1,45	1,85	1,59	0,553	0,807	0,379	0,926	0,547
20x30x5	20	30	5	3,5	1,78	2,27	1,90	0,656	0,904	0,461	0,916	0,539
20x35x4	20	35	4	3,5	1,62	2,06	2,46	0,576	1,09	0,386	1,10	0,530
20x35x5	20	35	5	3,5	1,98	2,52	2,95	0,685	1,33	0,471	1,08	0,523
20x40x4	20	40	4	3,5	1,77	2,25	3,59	0,596	1,42	0,392	1,26	0,515



Se si sceglie il profilato L 20X40X4 risulta che:

$I_{xx} = J_x = 3{,}59\ [cm^4]$, $I_{yy} = J_y = 0{,}596\ [cm^4]$,

$W_x = 1{,}42\ [cm^3]$, $W_y = 0{,}392\ [cm^3]$

da cui si può ricavare la posizione del baricentro:

$$\begin{cases} x_{max} = \dfrac{I_{yy}}{W_y} = \dfrac{0{,}596}{0{,}392} = 15{,}2\ [mm] \\ y_{max} = \dfrac{I_{xx}}{W_x} = \dfrac{3{,}59}{1{,}42} = 25{,}28\ [mm] \end{cases}$$

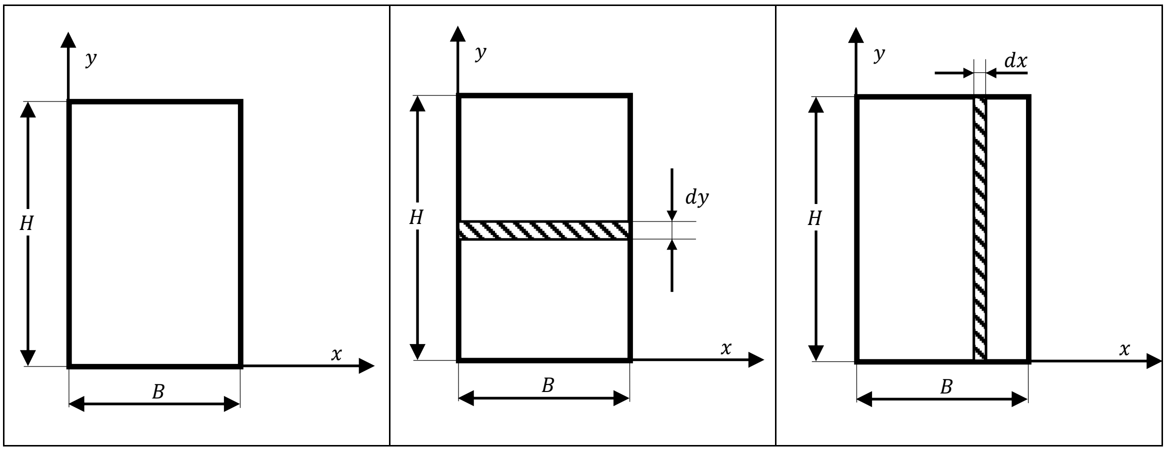
Poiché il profilo è alto $h = 40\ [mm]$ ed è largo $b = 20\ [mm]$, ciò significa che la posizione del baricentro rispetto allo spigolo in basso a sinistra del profilato si trova alle coordinate:

$$\vec{r}_G = \begin{Bmatrix} b - x_{max} \\ h - y_{max} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 - 15{,}2 \\ 40 - 25{,}28 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4{,}8 \\ 14{,}72 \end{Bmatrix}$$

ESEMPI

1) Area rettangolare

Fissato il sistema di riferimento cartesiano, calcoliamo la posizione del baricentro e i momenti d'inerzia.



$$x_G = \frac{\int_A x\, dA}{A} \qquad \text{Poiché: } \; dA = H\, dx \; \text{ da cui: } \; x_G = \frac{H\int_0^B x\, dx}{BH} = \frac{x^2|_0^B}{2B} = \frac{B}{2}$$

$$y_G = \frac{\int_A y\, dA}{A} \qquad \text{Poiché: } \; dA = B\, dy \; \text{ da cui: } \; y_G = \frac{B\int_A y\, dy}{BH} = \frac{y^2|_0^H}{2H} = \frac{H}{2}$$

I momenti d'inerzia valgono:

$$I_{xx} = \int_A y^2 dA = \int_0^H B y^2 dy = \frac{B y^3|_0^H}{3} = \frac{BH^3}{3}$$

$$I_{yy} = \int_A x^2 dA = \int_0^B H x^2 dx = \frac{H x^3|_0^B}{3} = \frac{HB^3}{3}$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA = \int_0^B \int_0^H xy dx dy = \int_0^B \left(x \int_0^H y dy \right) dx = \int_0^B x \frac{H^2}{2} dx = \frac{B^2 H^2}{4}$$

I momenti centrali d'inerzia valgono:

$$I_{xxG} = \int_A y^2 dA = \int_{-H/2}^{H/2} B y^2 dy = \frac{B y^3|_{-H/2}^{H/2}}{3} = \frac{B}{3}\left(\frac{H^3}{8} + \frac{H^3}{8}\right) = \frac{BH^3}{12}$$

$$I_{yyG} = \int_A x^2 dA = \int_{-B/2}^{B/2} Hx^2 dx = \frac{Hx^3|_{-B/2}^{B/2}}{3} = \frac{H}{3}\left(\frac{B^3}{8} + \frac{B^3}{8}\right) = \frac{HB^3}{12}$$

$$I_{xyG} = \int_A xydA = \int_{-B/2}^{B/2}\int_{-H/2}^{H/2} xydxdy = \int_{-B/2}^{B/2}\left(x\int_{-H/2}^{H/2} ydy\right)dx$$

Poiché: $\int_{-H/2}^{H/2} ydy = \frac{1}{2}y^2|_{-H/2}^{H/2} = 0$ allora:

$$I_{xyG} = 0$$

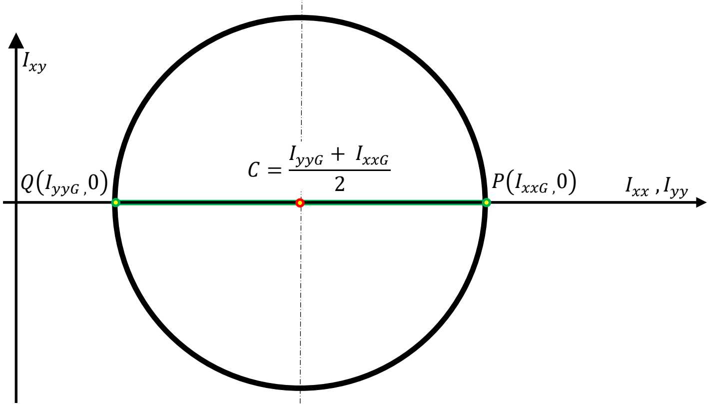
Quando una sezione ha almeno un asse di simmetria baricentrico allora il momento centrale d'inerzia misto è nullo.

Questi risultati avremmo potuto ottenerli utilizzando le "*Leggi di Huygens*":

$$\begin{cases} I_{yyG} = I_{yy} - Ax_G^2 = \dfrac{HB^3}{3} - BH\left(\dfrac{B}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right)HB^3 = \dfrac{HB^3}{12} \\ I_{xxG} = I_{xx} - Ay_G^2 = \dfrac{BH^3}{3} - BH\left(\dfrac{H}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right)BH^3 = \dfrac{BH^3}{12} \\ I_{xyG} = I_{xy} - Ax_G y_G = \dfrac{B^2H^2}{4} - BH\left(\dfrac{B}{2}\right)\left(\dfrac{H}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

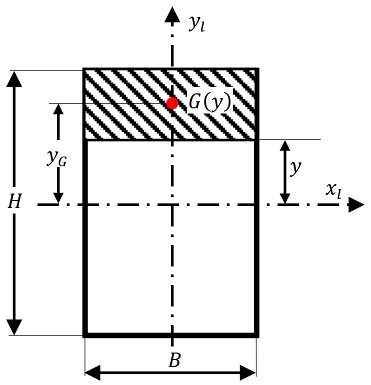
Per disegnare il cerchio di Mohr dei momenti d'inerzia sono necessari due punti disposti sul diametro del cerchio: $P(I_{xxG}, I_{xyG})$ e $Q(I_{yyG}, -I_{xyG})$.

Ipotizzando che $H > B$ allora $I_{xxG} > I_{yyG}$; poiché in questo caso $I_{xyG} = 0$, i momenti d'inerzia I_{xxG} e I_{yyG} sono "*momenti principali d'inerzia*".



Se $H = B$ (se cioè l'area è un quadrato) allora $I_{xxG} = I_{yyG}$. In questo caso il cerchio "*collassa*" in un punto: ciò significa che tutti gli assi baricentrici sono assi principali d'inerzia e il valore del momento d'inerzia diventa indipendente dall'angolo.

Calcoliamo adesso il momento statico di una parte della sezione rettangolare rispetto all'asse baricentrico:



$$S_x(y) = \int_A y\, dA = B \int_y^{H/2} y\, dy = \frac{B}{2} y^2 \Big|_y^{H/2}$$

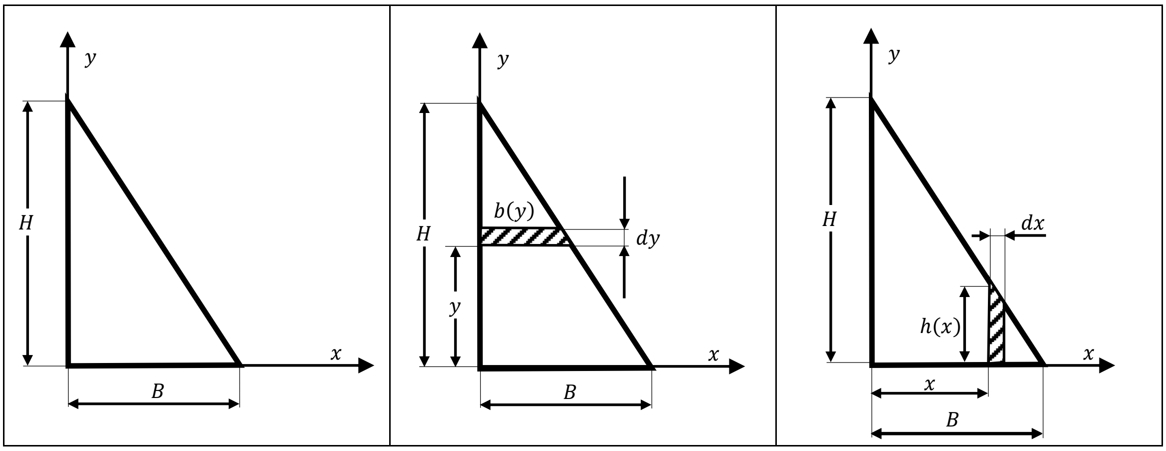
da cui:

$$S_x(y) = \frac{B}{2}\left(\frac{H^2}{4} - y^2\right) = \begin{cases} 0 & quando \;\; y = \dfrac{H}{2} \\ \dfrac{BH^2}{8} & quando \;\; y = 0 \\ 0 & quando \;\; y = -\dfrac{H}{2} \end{cases}$$

Il momento statico ha andamento parabolico: raggiunge il valore massimo in $y = 0$ e si annulla agli estremi, in $h = \pm H/2$.

2) Area triangolare

Fissato il sistema di riferimento cartesiano, calcoliamo la posizione del baricentro e i momenti d'inerzia.



Dalla 2° figura osserviamo che: $b(y) = \left(B - \frac{B}{H}y\right)$ da cui:

$$dA = b(y)\,dy = \left(B - \frac{B}{H}y\right)dy \qquad \text{da cui:}$$

$$y_G = \frac{\int_A y\,dA}{A} = \frac{\int_0^H y\left(B - \frac{B}{H}y\right)dy}{BH/2} = \frac{2}{BH}\left[B\frac{y^2}{2} - \frac{B}{H}\frac{y^3}{3}\right]_0^H = \frac{2}{BH}\left[\frac{BH^2}{2} - \frac{BH^2}{3}\right] = \frac{H}{3}$$

Dalla 3° figura osserviamo che: $h(x) = \left(H - \frac{H}{B}x\right)$ da cui:

$$dA = h(x)\,dx = \left(H - \frac{H}{B}x\right)dx \qquad \text{da cui:}$$

$$x_G = \frac{\int_A x\,dA}{A} = \frac{\int_0^B x\left(H - \frac{H}{B}x\right)dx}{BH/2} = \frac{2}{BH}\left[H\frac{x^2}{2} - \frac{H}{B}\frac{x^3}{3}\right]_0^B = \frac{2}{BH}\left[\frac{HB^2}{2} - \frac{HB^2}{3}\right] = \frac{B}{3}$$

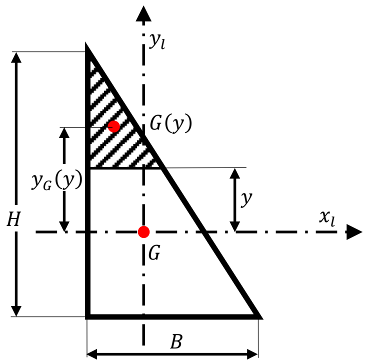
I momenti d'inerzia valgono:

$$I_{xx} = \int_A y^2 dA = \int_0^H y^2\left(B - \frac{B}{H}y\right)dy = \left[B\frac{y^3}{3} - \frac{B}{H}\frac{y^4}{4}\right]_0^H = \frac{BH^3}{12}$$

$$I_{yy} = \int_A x^2 dA = \int_0^B x^2\left(H - \frac{H}{B}x\right)dx = \left[H\frac{x^3}{3} - \frac{H}{B}\frac{x^4}{4}\right]_0^B = \frac{HB^3}{12}$$

$$I_{xy} = \int_A xy\,dA = \int_0^B\left(x\int_0^{h(x)} y\,dy\right)dx = \int_0^B x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{h(x)} dx = \int_0^B \frac{x\left(H - \frac{H}{B}x\right)^2}{2}dx$$

Calcoliamo adesso il momento statico di una parte della sezione triangolare rispetto all'asse baricentrico:



$$S_x(y) = A(y)y_G(y)$$

Osserviamo che:

$$B{:}H = b(y){:}\left(\tfrac{2}{3}H - y\right)$$

Da cui:

$$\frac{B}{H}\left(\frac{2}{3}H - y\right) = b$$

da cui:

$$A(y) = \tfrac{1}{2}\tfrac{B}{H}\left(\tfrac{2}{3}H - y\right)^2 \quad \text{e} \quad y_G(y) = y + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{3}H - y\right) = \tfrac{2}{9}H + \tfrac{2}{3}y \quad \text{da cui:}$$

$$S_x(y) = \frac{1}{3}\frac{B}{H}\left(\frac{2}{3}H - y\right)^2\left(\frac{H}{3} + y\right) = \frac{1}{3}\frac{B}{H}\left(\frac{4}{9}H^2 - \frac{4}{3}Hy + y^2\right)\left(\frac{H}{3} + y\right)$$

$$S_x(y) = \frac{1}{81}\frac{B}{H}(4H^3 - 27Hy^2 + 27y^3)$$

$$S_x(y) = \frac{1}{81}\frac{B}{H}(4H^3 - 27Hy^2 + 27y^3) = \begin{cases} 0 & quando \;\; y = \dfrac{2H}{3} \\ \dfrac{4BH^2}{81} & quando \;\; y = 0 \\ 0 & quando \;\; y = -\dfrac{H}{3} \end{cases}$$

Il momento statico ha andamento cubico: i suoi punti di stazionarietà si trovano annullando la derivata:

$$\frac{dS_x(y)}{dy} = \frac{1}{81}\frac{B}{H}y(-54H + 81y)$$

Quindi per $y = 0$ e per $y = \frac{54}{81}H = \frac{2}{3}H$. In $y = 0$ si ha il massimo.

Sviluppando e semplificando:

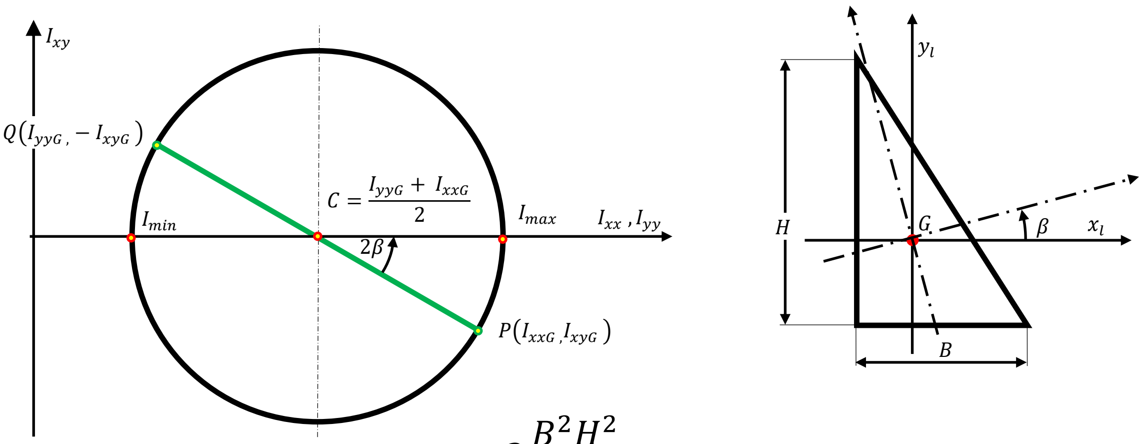
$$I_{xy} = \int_0^B \frac{H^2(B^2x - 2Bx^2 + x^3)}{2B^2} dx = \frac{H^2\left(\frac{B^4}{2} - \frac{2B^4}{3} + \frac{B^4}{4}\right)}{2B^2} = \frac{B^2H^2}{24}$$

Per il calcolo dei momenti centrali d'inerzia si possono utilizzare le Leggi di Huygens:

$$\begin{cases} I_{yyG} = I_{yy} - Ax_G^2 = \frac{HB^3}{12} - \frac{BH}{2}\left(\frac{B}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{18}\right)HB^3 = \frac{HB^3}{36} \\ I_{xxG} = I_{xx} - Ay_G^2 = \frac{BH^3}{12} - \frac{BH}{2}\left(\frac{H}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{18}\right)BH^3 = \frac{BH^3}{36} \\ I_{xyG} = I_{xy} - Ax_Gy_G = \frac{B^2H^2}{24} - \frac{BH}{2}\left(\frac{B}{3}\right)\left(\frac{H}{3}\right) = \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{18}\right)B^2H^2 = -\frac{B^2H^2}{72} \end{cases}$$

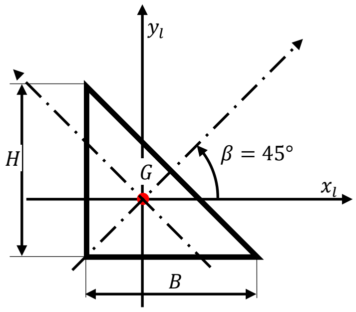
Per disegnare il cerchio di Mohr dei momenti d'inerzia sono necessari due punti disposti sul diametro del cerchio: $P(I_{xxG}, I_{xyG})$ e $Q(I_{yyG}, -I_{xyG})$.

Ipotizzando che $H > B$ allora $I_{xxG} > I_{yyG}$; in questo caso $I_{xyG} < 0$, quindi il cerchio risulta:



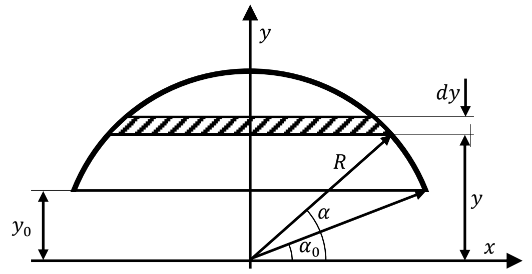
$$tang(2\beta) = \frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} = \frac{-2\frac{B^2H^2}{72}}{\frac{HB^3}{36} - \frac{BH^3}{36}} = \frac{B^2H^2}{BH(H^2 - B^2)} = \frac{BH}{H^2 - B^2} > 0$$

Se $H = B$ allora $tang(2\beta) = \infty$ ovvero $2\beta = 90°$ e quindi $\beta = 45°$.



3) Settore circolare

Fissato il sistema di riferimento cartesiano, calcoliamo la posizione del baricentro e i momenti d'inerzia.



La sezione è simmetrica rispetto all'asse y, quindi $x_G = 0$.
Per studiare la geometria delle aree utilizziamo il parametro α indicato nello schema a lato, che varia tra α_0 e $180° - \alpha_0$.

L'area infinitesima tratteggiata in figura vale:

$$dA = 2R\,cos(\alpha)dy.$$

La coordinata y si può esprimere in funzione del parametro α:

$$y = R\,sin(\alpha)$$

da cui: $\frac{dy}{d\alpha} = R\,cos(\alpha)$, $dy = R\,cos(\alpha)d\alpha$

Quindi: $dA = 2R\,cos(\alpha)\,R\,cos(\alpha)d\alpha = 2R^2\,cos^2(\alpha)\,d\alpha$

Quindi la posizione verticale del baricentro vale:

$$y_G = \frac{\int_A y\,dA}{\int_{\alpha_0}^{\pi/2} dA} = \frac{\int_{\alpha_0}^{\pi/2} R\,sin(\alpha)\cdot 2R^2\,cos^2(\alpha)\,d\alpha}{\int_{\alpha_0}^{\pi/2} 2R\,cos(\alpha)\cdot R\,cos(\alpha)d\alpha} = \frac{2R^3\int_{\alpha_0}^{\pi/2} sin(\alpha)\,cos^2(\alpha)\,d\alpha}{2R^2\int_{\alpha_0}^{\pi/2} cos^2(\alpha)d\alpha}$$

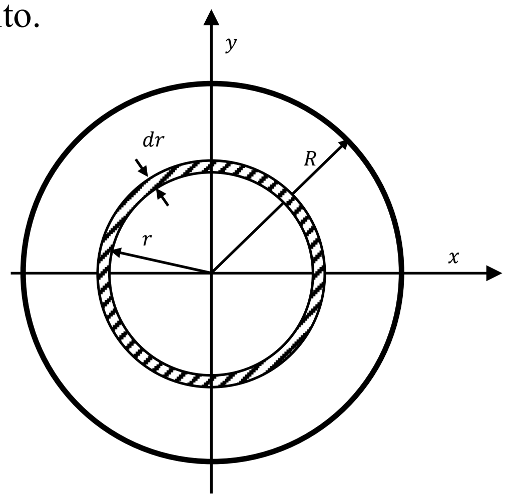
Poiché:

$$\int_{\alpha_0}^{\pi/2} sin(\alpha)\,cos^2(\alpha)\,d\alpha = -\frac{1}{3}[cos^3(\alpha)]_{\alpha_0}^{\pi/2} = -\frac{1}{3}[0 - cos^3(\alpha_0)] = \frac{cos^3(\alpha_0)}{3}$$

$$\int_{\alpha_0}^{\pi/2} cos^2(\alpha)d\alpha = \frac{1}{2}[\alpha + sin(\alpha)cos(\alpha)]_{\alpha_0}^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \alpha_0 - sin(\alpha_0)cos(\alpha_0)\right]$$

$$\text{Se } \alpha_0 = 0 \qquad \text{allora:} \quad y_G = R\,\frac{\frac{1}{3}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4R}{3\pi}$$

Posto $\alpha_0 = 0$ per il calcolo dei momenti d'inerzia di metà circonferenza, si segue una procedura diversa dal solito.



Iniziamo con il calcolo del momento polare rispetto all'origine degli assi:

$$I_p = \int_A r^2 dA$$

L'area infinitesima posta a distanza r dal centro e di spessore dr vale:

$$dA = 2\pi r\, dr$$

da cui:

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_0^R r^2 2\pi r\, dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

Poiché è valida la relazione: $I_p = I_{xx} + I_{yy} = 2I_{xx} = 2I_{yy}$ si ottiene:

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

Se ci si limita a metà circonferenza, l'area infinitesima diventa:

$$dA = \pi r\, dr$$

e di conseguenza:

$$I_p = \frac{\pi R^4}{4} \qquad \text{e} \qquad I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi R^4}{8}$$

Ricordando che la posizione del baricentro di metà circonferenza si trova alle coordinate:

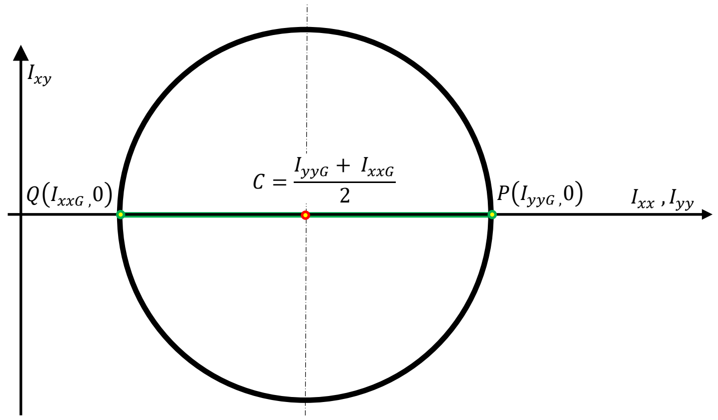
$$(x_G, y_G) = \left(0, \frac{4R}{3\pi}\right)$$

calcoliamo i momenti d'inerzia baricentrici utilizzando le Leggi di Huygens:

$$\begin{cases} I_{yyG} = I_{yy} - Ax_G^2 = \dfrac{\pi R^4}{8} - \dfrac{\pi R^2}{2}(0)^2 = \dfrac{\pi R^4}{8} \\ I_{xxG} = I_{xx} - Ay_G^2 = \dfrac{\pi R^4}{8} - \dfrac{\pi R^2}{2}\left(\dfrac{4R}{3\pi}\right)^2 = \dfrac{\pi R^4}{8} - \dfrac{8R^4}{9\pi} = \dfrac{9\pi^2 - 64}{72\pi}R^4 \cong \dfrac{\pi R^4}{28.623} \\ I_{xyG} = I_{xy} - Ax_G y_G = 0 - \dfrac{\pi R^2}{2}(0)\left(\dfrac{4R}{3\pi}\right) = 0 \end{cases}$$

Per disegnare il cerchio di Mohr dei momenti d'inerzia sono necessari due punti disposti sul diametro del cerchio: $P(I_{xxG}, I_{xyG})$ e $Q(I_{yyG}, -I_{xyG})$.

Poiché $I_{xyG} = 0$, i momenti d'inerzia I_{xxG} e I_{yyG} sono "*momenti principali*".



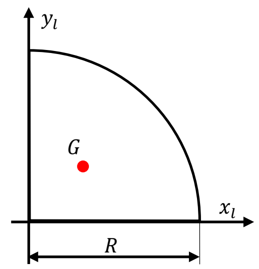
Se si esamina solo un quarto della circonferenza si ottiene:

$$dA = R\,cos(\alpha)\,R\,cos(\alpha)d\alpha = R^2\,cos^2(\alpha)\,d\alpha$$

da cui la posizione del baricentro vale:

$$y_G = \frac{\int_A y\,dA}{A} = \frac{\int_0^{\pi/2} R\,sin(\alpha)\,R^2\,cos^2(\alpha)\,d\alpha}{\pi R^2/4} =$$

$$= \frac{4R}{\pi}\int_0^{\pi/2} sin(\alpha)\,cos^2(\alpha)\,d\alpha = \frac{4R}{3\pi}$$



e $$x_G = y_G$$

I momenti d'inerzia valgono la metà di quelli relativi a metà circonferenza:

$$I_p = \frac{\pi R^4}{8} \qquad \text{e} \qquad I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi R^4}{16}$$

e i momenti principali d'inerzia valgono:

$$\begin{cases} I_{yyG} = I_{yy} - Ax_G^2 = \dfrac{\pi R^4}{16} - \dfrac{\pi R^2}{4}\left(\dfrac{4R}{3\pi}\right)^2 = \dfrac{\pi R^4}{16} - \dfrac{4R^4}{9\pi} = \dfrac{9\pi^2 - 64}{144\pi}R^4 \cong \dfrac{\pi R^4}{57.246} \\ I_{xxG} = I_{xx} - Ay_G^2 = \dfrac{\pi R^4}{16} - \dfrac{\pi R^2}{4}\left(\dfrac{4R}{3\pi}\right)^2 = I_{yyG} \\ I_{xyG} = I_{xy} - Ax_G y_G = 0 - \dfrac{\pi R^2}{4}\left(\dfrac{4R}{3\pi}\right)\left(\dfrac{4R}{3\pi}\right) = -\dfrac{4R^4}{9\pi} \cong -\dfrac{\pi R^4}{22.207} \end{cases}$$

Per disegnare il cerchio di Mohr dei momenti d'inerzia sono necessari due punti disposti sul diametro del cerchio: $P(I_{xxG}, I_{xyG})$ e $Q(I_{yyG}, -I_{xyG})$.

Poiché $I_{xxG} = I_{yyG}$ e $I_{xyG} < 0$, il cerchio risulta: