



CAP.7 – ENERGIA POTENZIALE E METODO DI RITZ-RAYLEIGH

7.1 Introduzione

Per generare le equazioni di equilibrio nella forma $[K] \cdot \{D\} = \{F\}$, si è fatto ricorso al metodo della rigidezza. In questo capitolo introdurremo la funzione “POTENZIALE TOTALE”: si tratta di una funzione degli spostamenti che quando è minimizzata rispetto agli spostamenti, dà luogo ad un insieme di equazioni di equilibrio. Così, in alternativa al metodo presentato nel secondo capitolo, per definire uno stato di equilibrio statico è possibile ricorrere al metodo del “minimo potenziale”. Nel caso della struttura reticolare usata come esempio nel capitolo precedente, i due metodi conducono allo stesso sistema di equazioni $[K] \cdot \{D\} = \{F\}$. Purtroppo con il metodo della rigidezza è difficile, se non impossibile, formulare adeguatamente elementi più complicati della semplice asta tirante/puntone. Un metodo che si basa sulla minimizzazione del potenziale è più generale ed affidabile. In questo capitolo verrà illustrato il metodo della minimizzazione del potenziale che nei capitoli successivi verrà utilizzato per formulare gli elementi finiti.

Il metodo degli elementi finiti può essere visto come una forma del metodo di Ritz-Rayleigh, tecnica che cerca la configurazione di equilibrio approssimata della struttura in esame. Usualmente per descrivere il campo di spostamento approssimato si utilizza una funzione polinomiale. Per un dato problema sono possibili numerosi polinomi, ma il metodo di soluzione ne sceglie uno in particolare. In parole povere, tra tutti i polinomi possibili, il metodo di soluzione seleziona quello che contemporaneamente minimizza l'energia potenziale e soddisfa, in modo approssimato, le condizioni di equilibrio. Il tipo di approssimazione deve essere studiato con attenzione.

Il metodo degli elementi finiti non deve basarsi necessariamente sul concetto di minimo del potenziale ma, in alternativa, si potrebbe utilizzare il metodo dei residui pesati. Fino ad oggi il concetto di minimo del potenziale è stato il più utile per i problemi di meccanica strutturale ed è per questo che ci limiteremo a discutere questo metodo.

7.2 Energia Potenziale Totale

Definiamo SISTEMA l'insieme costituito da una struttura elastica e dai carichi che su di essa agiscono. Il sistema è conservativo se è nullo il lavoro complessivo necessario per deformarlo a partire da una configurazione qualsiasi per poi riportarlo nella configurazione iniziale, indipendentemente dalla storia di carico. L'ENERGIA POTENZIALE di un sistema è la somma dell'energia elastica in esso contenuta più la capacità che hanno i carichi (che su di essa agiscono) di fornire lavoro quando i punti su cui sono applicati subiscono uno spostamento. Se prendiamo il sistema e lo muoviamo, il lavoro che facciamo, positivo o negativo che sia, si somma algebricamente all'energia potenziale già presente nel sistema conservativo.

Il PRINCIPIO DELLA MINIMA ENERGIA POTENZIALE afferma che:

fra tutte le configurazioni deformate compatibili con la continuità interna del solido e con le condizioni al contorno, quelle che soddisfano anche le equazioni di equilibrio rendono l'energia potenziale stazionaria. Se il valore stazionario è minimo, l'equilibrio è stabile.

I sistemi elastici normalmente hanno una sola posizione di equilibrio stabile. Ma il principio così come enunciato è valido anche per sistemi non lineari, ma conservativi, con uno o più configurazioni di equilibrio. E' importante notare che non possiamo considerare tutte le configurazioni deformate, ma solo quelle che soddisfano le condizioni di congruenza. Queste prendono il nome di CONFIGURAZIONI AMMISSIBILI. Per esempio un solido continuo non può dividersi internamente ed una mensola non può spostarsi né ruotare intorno all'incastro.

Consideriamo per esempio il sistema molla-forza della Fig.7.2.1. Le configurazioni ammissibili sono indicate dallo spostamento d . Quando d è nullo, la molla è a riposo. L'energia potenziale vale:

$$\pi_{pt} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot d^2 - P \cdot d \quad [7.2.1]$$

Il segno negativo che compare nell'eq. (7.2.1) è dovuto al fatto che P perde una parte della sua capacità di produrre lavoro quando il suo punto di applicazione si sposta nello stesso verso del suo segno positivo. Si può anche notare che se definiamo nullo lo “STATO ENERGETICO” che corrisponde a $d = 0$, il lavoro esterno



che dobbiamo fornire per produrre lo spostamento d è pari a $\frac{1}{2} \cdot k \cdot d^2$ per deformare la molla e $-P \cdot d$ per spostare il punto di applicazione della forza.

Questo lavoro è immagazzinato come ENERGIA POTENZIALE. Lo spostamento a cui corrisponde lo stato di equilibrio, rende π_{pt} stazionaria rispetto allo spostamento virtuale δd . Quindi:

$$\delta \pi_{pt} = (k \cdot d - P) \cdot \delta d = 0 \quad [7.2.2]$$

e la posizione di equilibrio (la configurazione deformata) è:

$$d_{eq} = \frac{P}{k} \quad [7.2.3]$$

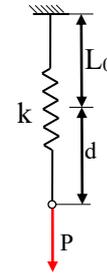


Fig.7.2.1 – Sistema molla - forza

L'equazione (7.2.2) è una forma del PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI: esso afferma che

il lavoro fatto dalle forze interne $k \cdot d$ più il lavoro fatto dalle forze esterne P è nullo quando al sistema si impone uno spostamento infinitesimo δd a partire dalla sua posizione di equilibrio.

Si può anche dire che un osservatore deve fare un lavoro totale nullo per cambiare la configurazione da d_{eq} a $d_{eq} + \delta d$.

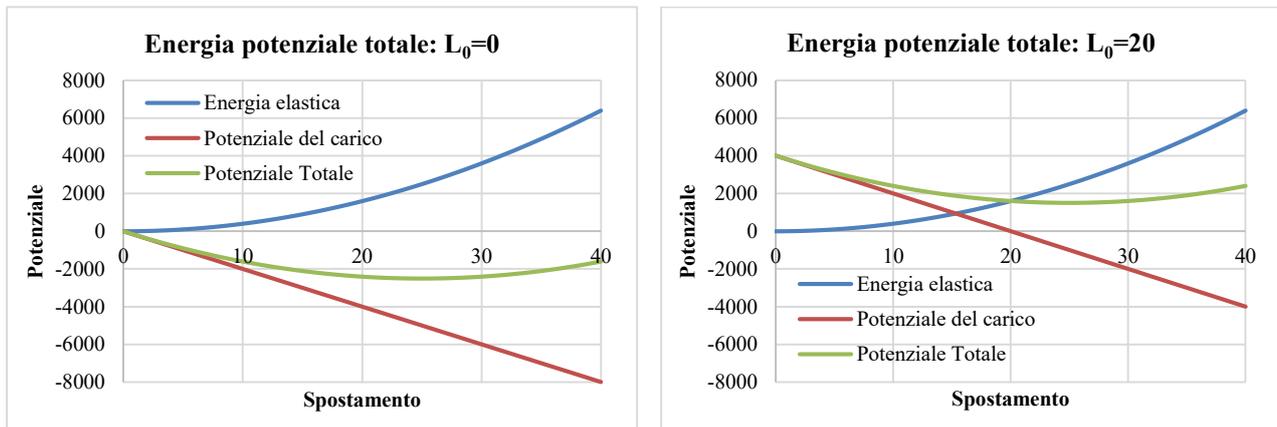


Fig.7.2.2 – Componenti dell'Energia Potenziale Totale in funzione dello spostamento.

Dal grafico vediamo che il punto stazionario è un minimo, quindi l'equilibrio è stabile. Si può anche notare che il valore nullo della parte di potenziale relativa al carico è arbitrario; per esempio avremmo potuto scrivere $-P \cdot (L_0 + d)$ invece di $-P \cdot d$. In questo caso la curva π_{pt} si sposterebbe rigidamente in direzione verticale, verso l'alto o verso il basso in funzione del segno di L_0 , ma lo spostamento corrispondente allo stato di equilibrio rimarrebbe d_{eq} .

La forza ha energia potenziale $-P \cdot d$ invece di $-\frac{1}{2} \cdot P \cdot d$ perché la forza non cresce con lo spostamento, ma durante quest'ultimo rimane costante. Questa parte di potenziale è dovuta al valore della forza ed alla sua capacità di spostarsi: non dipende in alcun modo dalle proprietà lineari della molla. In realtà potremo evitare il Principio del Minimo dell'Energia Potenziale notando che se la forza crescesse lentamente fino al valore P , il lavoro da essa prodotto verrebbe immagazzinato come energia di deformazione. Quindi, poiché $k \cdot d = P$, allora:

$$\frac{1}{2} \cdot P \cdot d = \frac{1}{2} \cdot k \cdot d^2 \quad \text{da cui} \quad d_{eq} = \frac{P}{k} \quad [7.2.4]$$

Comunque questo metodo fornisce solo un'equazione anche quando ci sono numerosi gradi di libertà e quindi non è molto utile.

7.3 Numerosi gradi di libertà

Se per definire la configurazione di un sistema sono necessari n quantità indipendenti, si dice che il sistema possiede n gradi di libertà (GdL). Le n quantità si chiamano "COORDINATE GENERALIZZATE". In



un dato problema non è necessario che i GdL siano tutti dello stesso tipo, per esempio alcuni possono essere spostamenti lineari, altri possono essere rotazioni oppure deformazioni.

Esprimiamo L'ENERGIA POTENZIALE π_{pt} di un sistema in funzione delle coordinate generalizzate d_i :

$$\pi_{pt} = \pi_{pt}(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

Quindi differenziando rispetto agli spostamenti generalizzati abbiamo:

$$\delta\pi_{pt} = \frac{\partial\pi_{pt}}{\partial d_1} \cdot \delta d_1 + \frac{\partial\pi_{pt}}{\partial d_2} \cdot \delta d_2 + \dots + \frac{\partial\pi_{pt}}{\partial d_n} \cdot \delta d_n = \left\{ \frac{\partial\pi_{pt}}{\partial d} \right\}^T \cdot \{\delta d\} \quad [7.3.1]$$

Perché la funzione sia stazionaria la variazione $\delta\pi_{pt}$ deve essere nulla, per qualsiasi insieme di spostamenti infinitesimi $\{\delta d\}$ ammissibili. Ciò può verificarsi solo se il coefficiente che moltiplica ogni variazione δd_i è nullo. Quindi deve risultare:

$$\frac{\partial\pi_{pt}}{\partial d_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{o, in altri termini,} \quad \left\{ \frac{\partial\pi_{pt}}{\partial d} \right\} = \{0\} \quad [7.3.2]$$

In accordo con il PRINCIPIO DEL MINIMO DELL'ENERGIA POTENZIALE, l'equazione (7.3.2) definisce la configurazione di equilibrio del sistema. Le incognite sono le n coordinate generalizzate; abbiamo un numero di equazioni pari al numero di incognite, quindi possiamo pensare di ottenere una soluzione. Per esempio, consideriamo un sistema con 2 GdL (Fig.7.3.1). L'asta orizzontale è rigida e senza peso. Le coordinate generalizzate necessarie per descrivere la configurazione deformata sono la traslazione d e la rotazione θ . Poniamo $d = \theta = 0$ quando le molle non sono tese. Se le rotazioni sono piccole possiamo scrivere ($\tan(\theta) \approx \theta$):

$$\pi_{pt} = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot d^2 + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot (d + \theta \cdot L)^2 - P \cdot (d + \theta \cdot a) \quad [7.3.3]$$

Differenziando rispetto ai gradi di libertà abbiamo:

$$\frac{\partial\pi_{pt}}{\partial d} = k_1 \cdot d + k_2 \cdot (d + \theta \cdot L) - P = 0$$

$$\frac{\partial\pi_{pt}}{\partial \theta} = k_2 \cdot (d + \theta \cdot L) \cdot L - P \cdot a = 0$$

che in forma matriciale si può scrivere nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 \cdot L \\ k_2 \cdot L & k_2 \cdot L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ P \cdot a \end{Bmatrix} \quad [7.3.4]$$

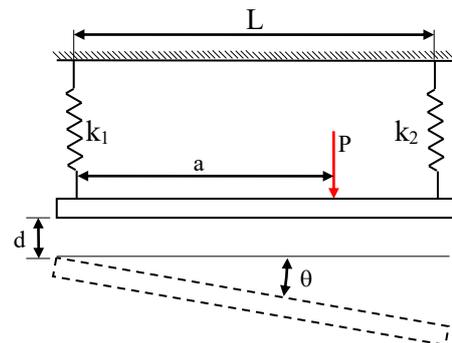


Fig.7.3.1 – Sistema con due gradi di libertà

La matrice quadrata è una matrice di rigidità ed il sistema è del tipo: $[K] \cdot \{D\} = \{F\}$. I termini P e $P \cdot a$ prendono il nome di FORZE GENERALIZZATE.

Da questo esempio possiamo trarre le seguenti conclusioni, di carattere generale:

- 1) La matrice di rigidità di un sistema che lega i carichi lineari agli spostamenti è simmetrica, cioè $k_{ij} = k_{ji}$. Ciò avviene perché ogni coppia di coefficienti disposti fuori dalla diagonale proviene da un unico termine di π_p la cui forma è il prodotto di una costante per gli spostamenti generalizzati $d_i \cdot d_j$;
- 2) Ogni equazione $\frac{\partial\pi_{pt}}{\partial d_i} = 0$ è un'equazione di equilibrio. Nell'esempio preso in considerazione, le equazioni si possono ottenere considerando l'equilibrio delle forze verticali e dei momenti intorno al bordo sinistro:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= k_1 \cdot d + k_2 \cdot (d + \theta \cdot L) - P = 0 \\ \sum M_{sin} &= k_2 \cdot (d + \theta \cdot L) \cdot L - P \cdot a = 0 \end{aligned}$$

- 3) Il prodotto di ogni spostamento generalizzato per la corrispondente forza generalizzata ha come unità di misura il lavoro o l'energia. In effetti, premoltiplicando l'eq.(7.3.4) per il vettore trasposto della soluzione si ottiene un'equazione scalare che esprime il bilancio energetico:



$$\{d \ \theta\} \cdot \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 \cdot L \\ k_2 \cdot L & k_2 \cdot L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d \\ \theta \end{Bmatrix} - \{d \ \theta\} \cdot \begin{Bmatrix} P \\ P \cdot a \end{Bmatrix} = 0$$

Eseguendo i prodotti e dividendo per due otteniamo:

$$\frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot d^2 + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot (d + L \cdot \theta)^2 = \frac{1}{2} \cdot P \cdot (d + a \cdot \theta)$$

Se si aggiunge una terza molla, la struttura diventa iperstatica, ma i due gradi di libertà d e θ sono ancora sufficienti a descrivere la configurazione deformata: dobbiamo ancora risolvere solo due equazioni. Poiché nel metodo del Minimo dell'Energia Potenziale le incognite indipendenti non sono le forze, l'indeterminazione statica non modifica la procedura.

Consideriamo l'asta della Fig.7.3.2 che unisce i nodi i e j ed è inclinata, rispetto all'asse orizzontale, dell'angolo ϑ_{ie} : la sua sezione trasversale sia A_{ie} , la sua lunghezza L_{ie} ed il suo modulo di Young E_{ie} . La rigidezza risulta quindi pari a $k_{ie} = \frac{A_{ie} \cdot E_{ie}}{L_{ie}}$; dati gli spostamenti nodali u_i, v_i, u_j e v_j , la variazione di lunghezza dell'asta vale:

$$d_{ie} = (u_i - u_j) \cdot \cos(\vartheta_{ie}) + (v_i - v_j) \cdot \sin(\vartheta_{ie}) \quad [7.3.5]$$

L'Energia Potenziale Totale dell'asta i -esima vale:

$$\pi_{pt} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot d_{ie}^2 - p_i \cdot u_i - q_i \cdot v_i - p_j \cdot u_j - q_j \cdot v_j$$

Le derivate parziali rispetto agli spostamenti valgono:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \pi_{pt}}{\partial u_i} &= k \cdot d_{ie} \cdot [\cos(\vartheta_{ie})] - p_i = 0 \\ \frac{\partial \pi_{pt}}{\partial v_i} &= k \cdot d_{ie} \cdot [\sin(\vartheta_{ie})] - q_i = 0 \\ \frac{\partial \pi_{pt}}{\partial u_j} &= k \cdot d_{ie} \cdot [-\cos(\vartheta_{ie})] - p_j = 0 \\ \frac{\partial \pi_{pt}}{\partial v_j} &= k \cdot d_{ie} \cdot [-\sin(\vartheta_{ie})] - q_j = 0 \end{aligned} \right\} \quad [7.3.6]$$

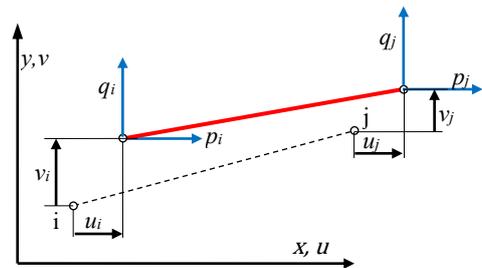


Fig.7.3.2 – Elemento asta nel piano

Sostituendo l'eq. (7.3.5) nelle eq. (7.3.6) e posto per brevità $c = \cos(\vartheta_{ie})$ e $s = \sin(\vartheta_{ie})$ possiamo scrivere la seguente espressione matriciale:

$$k_{ie} \cdot \begin{bmatrix} c^2 & s \cdot c & -c^2 & -s \cdot c \\ s \cdot c & s^2 & -s \cdot c & -s^2 \\ -c^2 & -s \cdot c & c^2 & s \cdot c \\ -s \cdot c & -s^2 & s \cdot c & s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_i \\ q_i \\ p_j \\ q_j \end{Bmatrix}$$

7.4 Sforzi e deformazioni iniziali

Consideriamo un cubo di lato unitario realizzato con un materiale dal comportamento meccanico lineare elastico che alla temperatura $T = 0$ non sia sottoposto ad un campo di deformazioni. Scriviamo l'equazione dell'energia elastica quando si applicano sia un carico mono assiale che una dilatazione termica. Sia α il coefficiente di dilatazione termica lineare.

Quando la temperatura del corpo privo di vincoli viene portata al valore T , si manifesta una dilatazione termica pari ad αT . Gli sforzi applicati aumentano la deformazione di una quantità pari a σ/E . Solo questa deformazione necessita dell'applicazione di lavoro meccanico che si accumula sotto forma di energia elastica. Quindi l'energia elastica per unità di volume vale:

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma \frac{\sigma}{E} = \frac{1}{2} E \left(\frac{\sigma}{E} \right)^2 = \frac{1}{2} E (\epsilon - \alpha T)^2 = \frac{1}{2} E \epsilon^2 - E \epsilon \alpha T + \frac{1}{2} E \alpha^2 T^2 \quad [7.4.1]$$

L'ultimo termine nell'eq. (7.4.1) rappresenta l'energia elastica presente se la dilatazione ϵ fosse impedita. Questo termine può essere scartato poiché quando l'espressione dell'energia è differenziata rispetto agli



spostamenti generalizzati ($\frac{\partial \pi_{pt}}{\partial d_i} = 0$), il suo contributo si annulla. Bisogna notare che se avessimo posto $\pi_{pt} = U_0 - \sigma \varepsilon$ dall'equazione $\frac{\partial \pi_{pt}}{\partial \varepsilon} = 0$ avremmo ottenuto l'equazione $\sigma = E(\varepsilon - \alpha T)$.

Definiamo ε_0 e σ_0 nel modo seguente:

$$\varepsilon_0 = \alpha T \quad ; \quad \sigma_0 = -E\varepsilon_0 = -E\alpha T \quad [7.4.2]$$

Così, dopo averne scartato l'ultimo termine, possiamo riscrivere l'eq.(7.4.1):

$$U_0 = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 - E \varepsilon_0 \varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 + \sigma_0 \varepsilon \quad [7.4.3]$$

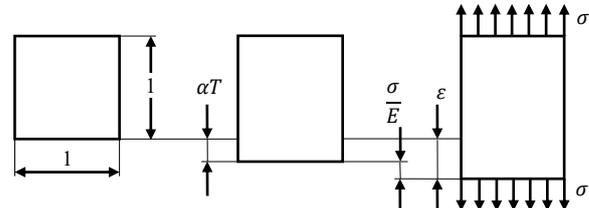


Fig. 7.4.1 – Deformazioni meccaniche e termiche

La deformazione iniziale ε_0 può essere causata da azioni termiche, da problemi di montaggio o da altre cause. Gli sforzi iniziali σ_0 nascono quando si impediscono le deformazioni oppure quando un elemento strutturale è forzato ad assumere una data dimensione, per esempio nel montaggio di un albero con interferenza. Quindi, come evidenziato dall'eq. (7.4.3) potremo avere a che fare con uno stato di sforzi o deformazioni iniziali provocati da varie cause.

7.5 Espressione generale dell'Energia Potenziale

Consideriamo il caso in cui su un materiale elastico lineare agiscano le 6 componenti di sforzo. Sforzi e deformazioni verranno indicati in forma vettoriale:

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\} \quad [7.5.1]$$

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}$$

in cui si utilizza la definizione ingegneristica dello scorrimento:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Gli spostamenti nelle direzioni x , y e z verranno indicati con il vettore:

$$\{s\}^T = \{u \quad v \quad w\} \quad [7.5.2]$$

La relazione sforzi – deformazioni può essere scritta nel modo seguente:

$$\{\sigma\} = [E] \cdot (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) = [E] \cdot \{\varepsilon\} + \{\sigma_0\} \quad [7.5.3]$$

in cui $[E]$ indica la matrice simmetrica delle costanti elastiche che descrivono il comportamento di un materiale isotropo o anisotropo. Gli sforzi iniziali $\{\sigma_0\}$ si manifestano se, per esempio, si impediscono le deformazioni meccaniche $\{\varepsilon_0\}$ che nascono quando si riscalda un solido.

L'incremento dell'energia di deformazione per unità di volume causato dallo spostamento infinitesimo di un volume unitario è:

$$\delta U_0 = \{\sigma\}^T \cdot \{\delta \varepsilon\} = \sigma_x \cdot \delta \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \delta \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \cdot \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \cdot \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \cdot \delta \gamma_{zx} \quad [7.5.4]$$

Non verranno prese in considerazione le variazioni di $\{\sigma\}$ causate dalle variazioni della deformazione $\{\delta \varepsilon\}$ perché producono termini di ordine superiore: per esempio $(\sigma_x + \delta \sigma_x) \cdot \delta \varepsilon_x \cong \sigma_x \cdot \delta \varepsilon_x$. Dall'eq. (7.5.4) concludiamo che:

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x \quad ; \quad \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y} = \sigma_y \quad ; \quad \dots \quad ; \quad \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{zx}} = \tau_{zx} \quad [7.5.5]$$

Esprimendo le eq. (7.5.5) in forma matriciale e usando le eq. (7.5.3) otteniamo 6 equazioni:

$$\left\{ \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon} \right\} = \{\sigma\} = [E] \cdot \{\varepsilon\} + \{\sigma_0\} \quad [7.5.6]$$

L'integrazione rispetto alle deformazioni fornisce:

$$U_0 = \int \{\sigma\}^T d\varepsilon = \int \{\varepsilon\}^T [E]^T d\varepsilon + \int \{\sigma_0\}^T d\varepsilon = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E]^T \{\varepsilon\} + \{\sigma_0\}^T \{\varepsilon\} \quad [7.5.7]$$



La costante d'integrazione è superflua ed è stata scartata. Come detto la matrice $[E]$ è simmetrica per cui: $[E]^T = [E]$.

Nel caso di stato di sforzo piano abbiamo:

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\} ; \{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy}\} ; [E] = [E]^T = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & -\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

da cui, osservando che $\{\sigma_0\}^T \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}^T \cdot \{\sigma_0\}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2} \cdot \{\varepsilon\}^T \cdot [E] \cdot \{\varepsilon\} + \{\varepsilon\}^T \cdot \{\sigma_0\} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy}\} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & -\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy}\} \begin{Bmatrix} \sigma_{x0} \\ \sigma_{y0} \\ 0 \\ \tau_{xy0} \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot E} \cdot [\varepsilon_x^2 - 2 \cdot \nu \cdot \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + 2 \cdot (1 + \nu) \cdot \gamma_{xy}^2] + [\varepsilon_x \cdot \sigma_{x0} + \varepsilon_y \cdot \sigma_{y0} + \gamma_{xy} \cdot \tau_{xy0}] \quad [7.5.8] \end{aligned}$$

Prima di procedere dobbiamo definire le forze di massa per unità di volume: $\{F_v\}^T = \{X \quad Y \quad Z\}$ e le forze superficiali per unità di area che agiscono sulla superficie del solido: $\{\Phi\}^T = \{\Phi_x \quad \Phi_y \quad \Phi_z\}$. Le componenti di $\{F_v\}$ e $\{\Phi\}$ si considerano positive quando agiscono nella direzione positiva degli assi coordinati.

Usando l'eq.(7.5.7) scriviamo l'espressione dell'Energia Potenziale:

$$\pi_{pt} = \int_{vol} \left[\frac{1}{2} \cdot \{\varepsilon\}^T \cdot [E] \cdot \{\varepsilon\} + \{\varepsilon\}^T \cdot \{\sigma_0\} \right] \cdot dv - \int_{vol} [\{s\}^T \cdot \{F_v\}] \cdot dv - \int_{sup} [\{s\}^T \cdot \{\Phi\}] \cdot ds \quad [7.5.7]$$

Il primo integrale rappresenta il lavoro fatto dagli sforzi, immagazzinato in forma di energia di deformazione. Gli ultimi due integrali rappresentano il lavoro fatto (quindi una caduta del potenziale) quando le forze di volume e di superficie si spostano nel verso concorde con il loro segno. Gli spostamenti $\{s\}$ presenti negli integrali sono valutati sulla superficie.

Può essere utile a questo punto richiamare alcune regole necessarie per il calcolo delle derivate di prodotti matriciali. Sia $[A]$ una matrice simmetrica di dimensioni $(n \times n)$ e $[B]$ una matrice rettangolare arbitraria di dimensioni $(n \times m)$; siano $\{X\} = \{x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n\}$ e $\{Y\} = \{y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m\}$ due vettori colonna (rappresentati qui come vettori riga per occupare meno spazio). Definiamo due quantità scalari:

$$\phi = \frac{1}{2} \cdot \{X\}^T \cdot [A] \cdot \{X\} \quad \text{e} \quad \psi = \{X\}^T \cdot [B] \cdot \{Y\}$$

Valgono le seguenti regole:

1. $\{X\}^T \cdot \{X\}$, $[B]^T \cdot [B]$ e $[B]^T \cdot [A] \cdot [B]$ sono matrici simmetriche
2. $\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial X} \right\} = \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right\} = [A] \cdot \{X\}$ è un vettore colonna di n termini
3. $\left\{ \frac{\partial \psi}{\partial X} \right\} = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right\} = [B] \cdot \{Y\}$ è un vettore colonna di n termini
4. Poiché ψ è uno scalare, allora: $\psi^T = \psi$ da cui: $\psi^T = \{Y\}^T \cdot [B]^T \cdot \{X\}$
5. $\left\{ \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right\} = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \psi}{\partial y_m} \right\} = [B]^T \cdot \{X\}$ è un vettore colonna di m termini

7.6 Proprietà dell'Energia Potenziale Stazionaria

Questo capitolo ha due obiettivi: il primo è introdurre il "calcolo variazionale", essenziale per uno studio rigoroso del metodo degli elementi finiti e per la formulazione delle proprietà degli elementi, senza la necessità di utilizzare un campo di spostamenti imposti. Il secondo obiettivo è dimostrare che una soluzione che si basa sull'energia potenziale stazionaria tende a soddisfare le condizioni di equilibrio come conseguenza automatica della procedura, purché siano soddisfatte le condizioni di compatibilità.



Consideriamo una trave sottoposta ad un carico assiale distribuito Q , dove Q è funzione di x ed ha le dimensioni di una forza per unità di lunghezza $[N/m]$. Lo stato di sforzo è mono assiale. Risolviamo il problema in modo tradizionale, facendo ricorso alle equazioni di equilibrio.

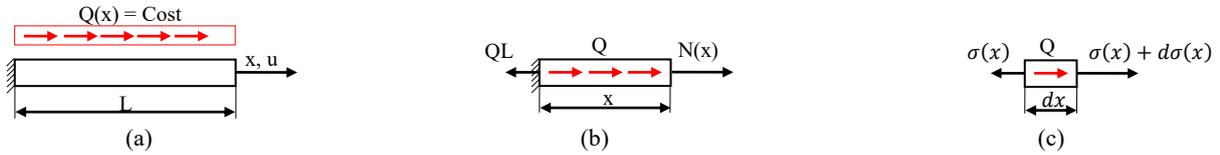


Fig.7.6.1 – (a) Schema della trave sottoposta a carico assiale distribuito; b) Schema statico per il calcolo delle azioni interne; c) Schema per il calcolo delle condizioni di equilibrio di un concio di lunghezza infinitesima.

Ipotizzando per semplicità un carico Q costante, per l'equilibrio delle forze orizzontali dell'intero sistema abbiamo che la reazione a terra deve valere:

$$R = \int_0^L Q(x)dx = QL$$

L'equazione dell'unica azione interna, quella normale, vale (vedi Fig.7.6.1(b)) :

$$N(x) + Qx - QL = 0 \quad \text{da cui:} \quad N(x) = Q(L - x) \quad [7.6.1]$$

Osservando la fig.7.6.1(c), per l'equilibrio di ogni singolo concio elementare, possiamo scrivere:

$$[\sigma(x) + d\sigma(x)] \cdot A + Q \cdot dx - \sigma(x) \cdot A = 0 \quad \text{da cui semplificando abbiamo:} \quad A \frac{d\sigma(x)}{dx} = -Q$$

Ipotizzando che il materiale abbia un comportamento lineare elastico, cioè ipotizzando valida la Legge di Hooke $\sigma = E\varepsilon$, e ricordando che il legame deformazione/spostamento è il seguente: $\varepsilon(x) = \frac{du}{dx}$, abbiamo l'equazione differenziale che governa il comportamento meccanico del sistema:

$$A \frac{d\sigma(x)}{dx} = EA \frac{d\varepsilon(x)}{dx} = EA \frac{d^2u(x)}{dx^2} = -Q$$

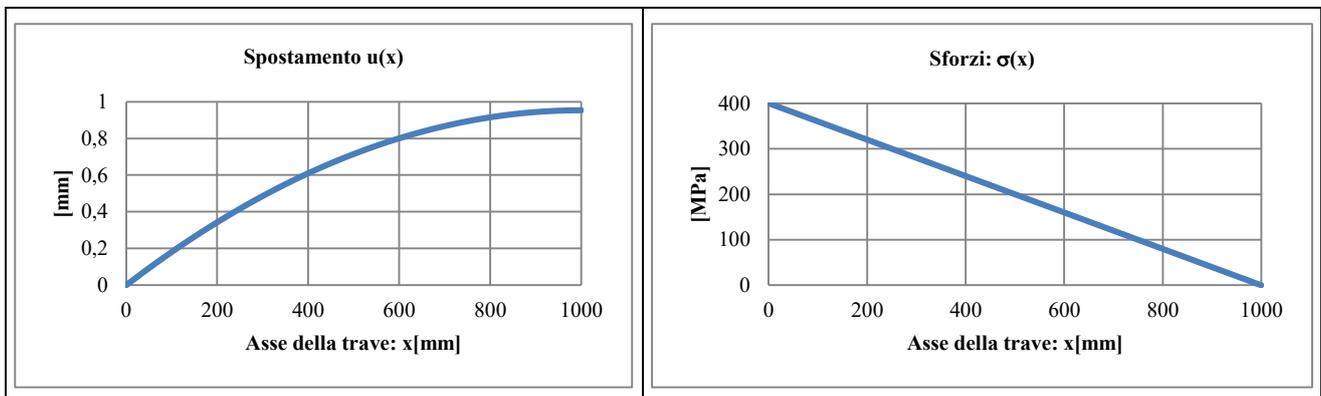
Integrando due volte questa equazione abbiamo:

$$EA \frac{du(x)}{dx} = -Qx + c_1 \quad ; \quad EAu(x) = -\frac{Qx^2}{2} + c_1x + c_2$$

Per trovare il valore delle costanti d'integrazione c_1 e c_2 , utilizziamo le condizioni al contorno:

- a) quando $x = 0$ lo spostamento deve essere nullo per cui $c_2 = 0$;
- b) quando $x = L$ l'azione normale è nulla (vedi eq.7.6.1): di conseguenza è nullo lo sforzo e la deformazione; quindi possiamo scrivere:

$$EA \frac{du(x=L)}{dx} = -QL + c_1 = 0 \quad \text{da cui} \quad c_1 = QL$$



In conclusione, l'equazione dello spostamento e l'equazione dell'azione normale valgono rispettivamente:



$$u(x) = -\frac{Qx^2}{2EA} + \frac{QLx}{EA} \quad ; \quad \sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{Q}{A}(L-x)$$

Lo spostamento massimo si ha alla coordinata $x = L$ e vale $u_{max} = \frac{QL^2}{2EA}$; lo sforzo massimo si ha alla coordinata $x = 0$ e vale $\sigma_{max} = \frac{QL}{A}$. Questi risultati ci saranno utili per controllare la precisione delle tecniche di approssimazione che verranno in seguito illustrate.

Vediamo di trovare la stessa equazione differenziale utilizzando il Principio di Minimo dell'Energia Potenziale Totale e l'analisi variazionale.

L'espressione dell'Energia Potenziale Totale è la seguente:

$$\pi_{pt} = \pi_E + \pi_F = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} \cdot dvol - \int_0^L Q \cdot u \cdot dx \quad [7.6.2]$$

dove π_E indica l'energia elastica accumulata nella trave e π_F l'energia potenziale persa dalla forza applicata durante il suo movimento; in generale $\{\sigma\}$ indica il tensore degli sforzi e $\{\varepsilon\}$ il tensore delle deformazioni. In questo caso molto semplice, tutti gli sforzi e tutte le deformazioni sono nulle tranne la σ_x e la corrispondente ε_x , per cui l'eq.7.6.2 diventa:

$$\pi_{pt} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x \cdot dvol - \int_0^L Q \cdot u \cdot dx \quad [7.6.3]$$

Ipotizzando valida la Legge di Hooke e considerando la trave a sezione trasversale costante pari ad A abbiamo:

$$\pi_{pt} = \frac{EA}{2} \int_0^L (\varepsilon_x)^2 \cdot dx - \int_0^L Q \cdot u \cdot dx = \frac{EA}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \cdot dx - \int_0^L Q \cdot u \cdot dx \quad [7.6.4]$$

Imponiamo a priori che u sia una funzione continua e tale per cui si possa calcola l'integrale. In particolare $\partial u / \partial x$ non deve mai diventare infinita. Per mezzo del calcolo delle variazioni cerchiamo il valore corretto della funzione $u = u(x)$ che rende stazionario il potenziale π_{pt} . Ciò che otterremo è un'equazione differenziale dello spostamento u e certe condizioni al contorno da imporre alla soluzione.

Una soluzione accettabile deve soddisfare le condizioni al contorno $u = 0$ in $x = 0$: si tratta cioè di una condizione cinematica. Poniamo che la funzione $v = v(x)$ sia una funzione che soddisfi le stesse condizioni al contorno, ma per il resto indipendente dalla funzione u . Nella Fig.7.6.2 abbiamo indicato con linea tratteggiata alcune possibili curve $v = v(x)$. Se " c " è un numero arbitrario, allora $u(x) + c \cdot v(x)$ è una configurazione deformata arbitraria e $c = 0$ indica la forma corretta. Se indichiamo con δc un numero piccolo a piacere, allora $u(x) + \delta c \cdot v(x)$ indica una piccola variazione della configurazione deformata rispetto alla soluzione corretta $u = u(x)$. Che forma deve assumere la deformata $u = u(x)$ per cui la variazione del potenziale π_{pt} diventi infinitesima quando ci si allontana di poco dalla stessa configurazione? Per rispondere alla domanda scriviamo il potenziale nella sua forma perturbata:

$$\pi_{pt} + \delta \pi_{pt} = \int_0^L \frac{E}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta c \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \cdot A \cdot dx - \int_0^L Q \cdot (u + \delta c \cdot v) \cdot dx \quad [7.6.5]$$

Se dall'eq.(7.6.5) sottraiamo l'eq. (7.6.4) e trascuriamo il termine d'ordine superiore $\left(\delta c \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$, troviamo la variazione del potenziale π_{pt} nell'intorno di $c = 0$:

$$\delta \pi_{pt} = \delta c \cdot \int_0^L \frac{E}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot A \cdot dx - \delta c \cdot \int_0^L Q \cdot v \cdot dx \quad [7.6.6]$$



Eseguiamo l'integrazione per parti:

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \cdot E \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot v(x) \right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot v(x) \cdot dx \quad [7.6.7]$$

In seguito all'applicazione delle condizioni al contorno ($v = 0$ quando $x = 0$), l'eq. (7.6.6) e l'eq. (7.6.7) danno luogo alla seguente equazione:

$$\frac{\delta \pi_{pt}}{\delta c} = \int_0^L E \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} A dx - \int_0^L Q v dx = EA \frac{\partial u(L)}{\partial x} \cdot v(L) - \int_0^L \left[EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q \right] \cdot v(x) \cdot dx \quad [7.6.8]$$

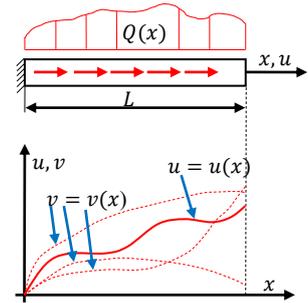


Fig.7.6.2

Poiché per la configurazione deformata corretta $u = u(x)$ il potenziale π_{pt} deve essere stazionario, allora $\frac{\delta \pi_{pt}}{\delta c}$ deve annullarsi, indipendentemente dal fatto che si tratti di un minimo, un massimo o un flesso.

Poiché $v = v(x)$ è una funzione arbitraria sia per $0 < x < L$ che nel punto $x = L$, allora $\frac{\delta \pi_{pt}}{\delta c}$ può annullarsi solo se sono valide entrambe le condizioni:

$$EA \frac{\partial u(L)}{\partial x} = 0 \quad ; \quad EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q = 0 \quad [7.6.9]$$

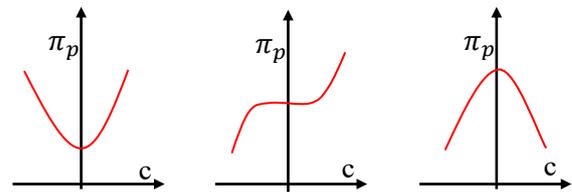


Fig.7.6.3

La seconda è l'equazione differenziale che governa o descrive il problema. Si può notare che si tratta di un'equazione di equilibrio: infatti esaminando un cubetto infinitesimo su cui agisce la forza distribuita di trazione $Q(x)$ e le azioni interne normali, per l'equilibrio delle forze orizzontali possiamo scrivere (vedi fig.7.6.4):

$$\sum F_x = \left[N(x) + \frac{\partial N}{\partial x} \cdot dx \right] \cdot dA + Q(x) \cdot dx \cdot dA - N(x) \cdot dA = 0$$

da cui:
$$Q(x) + \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

Per uno stato di sforzo mono assiale, possiamo scrivere la legge di Hooke:

$\sigma = E \cdot \epsilon = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$; inoltre abbiamo $N = \sigma \cdot A$ da cui

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(\sigma \cdot A)}{\partial x} = \frac{\partial(E \cdot \epsilon \cdot A)}{\partial x} = EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

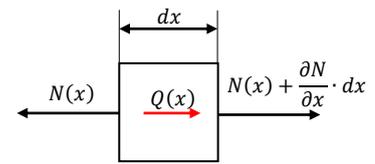


Fig.7.6.4

La prima equazione si chiama "condizione al contorno naturale": essa afferma che nel punto $x = L$ gli sforzi sono nulli; infatti:

$$EA \frac{\partial u(L)}{\partial x} = A \cdot \sigma(L) = 0$$

Abbiamo un'equazione differenziale del secondo ordine e due condizioni al contorno (un vincolo e una condizione "naturale"), quindi è possibile trovare una soluzione per $u = u(x)$.

Che relazione esiste tra il problema qui discusso ed il METODO DEGLI ELEMENTI FINITI ?

Modelliamo la trave con un solo elemento tirante/puntone. Poiché la sua matrice di rigidità nel caso monodimensionale ha la forma:

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

abbiamo a che fare con il seguente sistema di equazioni lineari:



$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} QL/2 \\ QL/2 \end{Bmatrix}$$

Il sistema è singolare, infatti il determinante della matrice è nullo. E' necessario inserire i vincoli, in questo caso imponendo che lo spostamento u_1 sia nullo. Il sistema si trasforma nella seguente forma:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ QL/2 \end{Bmatrix}$$

Risolvendo abbiamo:

$$u_1 = 0 \quad ; \quad u_2 = \frac{QL^2}{2EA}$$

Lo spostamento massimo coincide con la soluzione esatta, ma il suo andamento è lineare e non parabolico. Infatti abbiamo:

$$u(x) = \sum_{i=1}^2 N_i(x)u_i = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_1 + \frac{x}{L}u_2 = \frac{QL}{2EA}x$$

dove le funzioni $N_i(x)$ sono le funzioni di forma dell'elemento tirante/puntone a due nodi:

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{e} \quad N_2(x) = \frac{x}{L}$$

Inoltre la deformazione è costante $[\varepsilon(x) = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{QL}{2EA}]$ e non lineare come dovrebbe essere.

Proviamo ad utilizzare due elementi tirante/puntone. In questo caso, le due matrici di rigidezza elementari e le due forze nodali equivalenti valgono rispettivamente:

$$[k]_1 = [k]_2 = \frac{EA}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \{f\}_1 = \{f\}_2 = \begin{Bmatrix} QL/2 \\ QL/2 \end{Bmatrix}$$

Assemblando il sistema abbiamo:

$$\frac{EA}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} QL/4 \\ QL/2 \\ QL/4 \end{Bmatrix}$$

Inserendo il vincolo, il sistema si trasforma nel modo seguente:

$$\frac{EA}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ QL/2 \\ QL/4 \end{Bmatrix}$$

Risolvendo abbiamo:

$$u_1 = 0 \quad ; \quad u_2 = \frac{3QL^2}{8EA} \quad ; \quad u_3 = \frac{QL^2}{2EA}$$

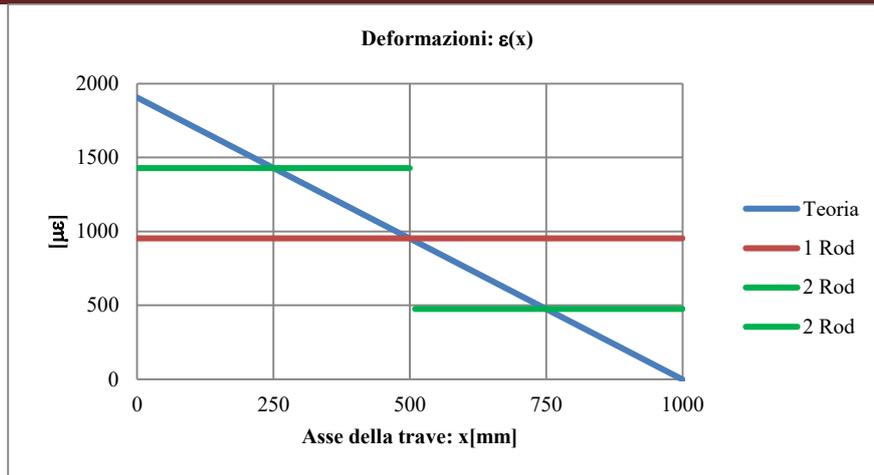
Nel primo tratto, dove $0 \leq x \leq L/2$, la deformazione è costante e vale:

$$\varepsilon(x) = \frac{u_2 - u_1}{L/2} = \frac{3QL}{4EA}$$

Nel secondo tratto, dove $L/2 \leq x \leq L$, abbiamo:

$$\varepsilon(x) = \frac{u_3 - u_2}{L/2} = \frac{QL}{4EA}$$

Nella seguente figura si mettono a confronto i risultati teorici con quelli ottenuti con le due discretizzazioni.



Aumentando il numero di elementi, la soluzione converge verso la soluzione esatta, ma all'interno di ogni elemento, la deformazione è costante e si ha un andamento complessivo della deformazione a gradini.

La trave della fig.7.6.1 può quindi essere modellata da una serie di n elementi tirante/puntone, ognuno di lunghezza $a = L/n$, sottoposti ai carichi nodali $Q_i \cdot a$, dove Q_i è il valore di Q nel nodo i -esimo. Con l'estremo sinistro incastrato, gli spostamenti nodali u_i arbitrari indicano una forma "perturbata", analoga alle curve tratteggiate della figura 7.6.2. Dato un valore qualsiasi n , la curva continua e regolare $u = u(x)$ viene approssimata da una serie di segmenti rettilinei, cioè con un'interpolazione polinomiale per tratti. La deformazione $\partial u / \partial x$ cambia bruscamente da un segmento all'altro, ma non tende mai all'infinito. In questo modo quindi, sia nel problema continuo che nel suo analogo discreto, abbiamo soddisfatto le condizioni di compatibilità (la congruenza) e le condizioni al contorno sugli spostamenti considerando solo condizioni ammissibili. Se inoltre sono soddisfatte le equazioni differenziali dell'equilibrio per tutte le x e se sono soddisfatte le condizioni al contorno sugli sforzi (le condizioni al contorno naturali), allora abbiamo trovato la soluzione corretta.

La soluzione del problema continuo soddisfa le equazioni di equilibrio (7.6.9), ma ciò non capita con la soluzione del problema discreto. La soluzione discretizzata è l'insieme degli spostamenti nodali u_i che soddisfano le equazioni dell'equilibrio ai nodi:

$$\frac{\partial \hat{\pi}_{pt}}{\partial u_i} = 0$$

Il simbolo $\hat{\pi}_{pt}$ indica che i due problemi, quello continuo e quello discretizzato, sono diversi ed hanno potenziali diversi. Infatti non è detto che la soluzione discretizzata u_i si sovrapponga perfettamente alla soluzione continua $u = u(x)$. Come il numero di elementi aumenta, la forma $v = v(x)$ diventa regolare, $\hat{\pi}_{pt}$ si avvicina a π_{pt} e gli spostamenti u_i tendono a sovrapporsi a $u = u(x)$. Inoltre le equazioni di equilibrio nodale si trasformano nell'eq. (7.6.9), e la soluzione discretizzata diventa esatta invece che approssimata.

Per concludere, mettiamo in evidenza che se sono permessi solo spostamenti ammissibili, allora il metodo del potenziale stazionario soddisfa implicitamente le condizioni di equilibrio come conseguenza naturale della soluzione. Con una modifica della terminologia, le nostre osservazioni si applicano anche al metodo di Ritz-Rayleigh che verrà descritto nel prossimo paragrafo.

Un'espressione come quella di π_{pt} si chiama funzionale per indicare che π_{pt} non è semplicemente una funzione degli spostamenti e delle sue derivate, ma dipende dal loro effetto integrato. Se π_{pt} è relativo al caso dell'elasticità piana e se si applica il metodo del calcolo variazionale, la condizione $\delta \pi_{pt} = 0$ richiede che:

- a) le equazioni differenziali dell'equilibrio siano soddisfatte all'interno del volume;
- b) siano soddisfatte le condizioni di equilibrio al contorno, nei punti del confine dove non sono imposti gli spostamenti.



7.7 Il metodo di Ritz-Rayleigh

I problemi continui hanno un numero infinito di gradi di libertà perché ad ogni punto sono associati spostamenti indipendenti. Un modo per affrontare il problema consiste nel tentare di generare e risolvere un insieme di equazioni alle derivate parziali. E' possibile evitare le difficoltà di questo metodo e ridurre il problema ad un numero finito di gradi di libertà se è disponibile un funzionale π_{pt} che governa il problema e se ci si accontenta di una soluzione approssimata. Invece di generare equazioni alle derivate parziali, si generano equazioni algebriche, in numero pari a quello delle coordinate generalizzate. In ciò che segue, come funzionale si userà solo π_{pt} , ma il metodo di Ritz-Rayleigh può essere applicato anche ad altri funzionali.

Si consideri un problema di elasticità bidimensionale. Il solido sia soggetto ad un certo numero di carichi e spostamenti al contorno. L'obiettivo consiste nel trovare in ogni punto del solido una soluzione approssimata degli spostamenti. Per fare questo, con il metodo di Ritz-Rayleigh si inizia costruendo una configurazione approssimata degli spostamenti:

$$\begin{cases} u = a_1 \cdot g_1(x, y) + a_2 \cdot g_2(x, y) + \dots + a_m \cdot g_m(x, y) \\ v = b_1 \cdot h_1(x, y) + b_2 \cdot h_2(x, y) + \dots + b_n \cdot h_n(x, y) \end{cases} \quad [7.7.1]$$

Si impone che ogni funzione g_i e h_i abbia derivate continue e che abbia una forma tale da soddisfare tutte le condizioni al contorno del problema, indipendentemente dai valori numerici che possono essere assegnati ai parametri $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$. La congruenza interna è soddisfatta automaticamente perché le deformazioni dipendono dagli spostamenti attraverso le usuali relazioni $\epsilon_x = \partial u / \partial x, \dots, \gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$. Quindi l'energia potenziale π_{pt} può essere espressa in funzione dei coefficienti a_i e b_i : è il loro valore che determina il valore di π_{pt} , come avveniva nell'eq. (7.3.1) con lo spostamento d_i . I coefficienti a_i e b_i sono le *COORDINATE GENERALIZZATE*: di conseguenza, i coefficienti a_i e b_i che rendono stazionario π_{pt} sono determinati risolvendo un sistema di $m + n$ equazioni algebriche del tipo:

$$\frac{\partial \pi_{pt}}{\partial a_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \pi_{pt}}{\partial b_i} = 0 \quad [7.7.2]$$

I coefficienti a_i e b_i calcolati risolvendo il sistema (7.7.2) possono essere sostituiti nell'eq. (7.7.1). Di conseguenza lo spostamento è completamente definito e da esso è possibile calcolare sforzi e deformazioni. Le equazioni differenziali dell'equilibrio dovrebbero essere soddisfatte in ogni punto del continuo. L'equazione (7.7.2) "*fa del suo meglio*" per raggiungere questo risultato, ma in generale non ci riesce, perché il sistema dipende da un numero finito di gradi di libertà. Di conseguenza la soluzione è solo una approssimazione della soluzione esatta, ma può essere migliorata usando un numero maggiore di parametri a_i e b_i . Come sempre, le equazioni (7.7.2) danno luogo ad un sistema di equazioni di rigidità, che può essere scritto nella forma $[K] \cdot \{D\} = \{F\}$, dove il vettore $\{D\}$ contiene i coefficienti a_i e b_i . Non tutti i termini del vettore $\{D\}$ hanno le dimensioni dello spostamento. La forma che assume il vettore $\{F\}$ dipende dal campo di spostamento imposto e dal carico sulla struttura: esso contiene le forze generalizzate e mentre non tutte le F_i hanno come unità di misura la forza, le F_i e le D_i hanno unità di misura tali che il loro prodotto $F_i D_i$ ha come unità di misura il lavoro. Ciò è coerente con il concetto di lavoro virtuale, che afferma che *se un sistema è in equilibrio, allora durante uno spostamento infinitesimo arbitrario dalla posizione di equilibrio, il lavoro virtuale delle forze esterne è uguale al lavoro virtuale delle forze interne*. In simboli, indicando con $\{\delta d\}$ lo spostamento virtuale arbitrario, scriviamo:

$$\{\delta d\}^T \cdot \{F\} = \{\delta d\}^T \cdot [K] \cdot \{D\}$$

equazione che esprime il lavoro virtuale.

Consideriamo ancora una volta la trave della fig.7.6.1 sottoposta ad un carico distribuito di trazione Q costante. Ipotizziamo a priori un campo di spostamento di tipo polinomiale:

$$u(x) = a + bx + cx^2 + \dots$$

Lo spostamento $u(x)$ deve soddisfare le condizioni al contorno di tipo cinematico; in questo caso, quando $x = 0$ lo spostamento deve essere nullo. Di conseguenza il coefficiente a deve essere nullo.

1) Come primo esempio, limitiamo lo sviluppo polinomiale al primo termine; poniamo cioè:

$$u(x) = bx$$



L'energia potenziale totale del sistema vale (vedi l'eq.7.6.4):

$$\pi_{pt} = \frac{EA}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \cdot dx - \int_0^L Q \cdot u \cdot dx$$

Poiché: $\frac{\partial u}{\partial x} = b$ allora:

$$\pi_{pt} = \frac{EALb^2}{2} - \frac{QL^2b}{2}$$

e la sua derivata prima rispetto al parametro di spostamento b vale:

$$\frac{\partial \pi_{pt}}{\partial b} = EALb - \frac{QL^2}{2}$$

L'energia potenziale totale risulta stazionaria quando: $b = \frac{QL}{2EA}$. Poiché la derivata seconda dell'energia potenziale totale:

$$\frac{\partial^2 \pi_{pt}}{\partial b^2} = EAL$$

è una quantità positiva, risulta che l'equilibrio è stabile: in $b = \frac{QL}{2EA}$ l'energia potenziale raggiunge il valore stazionario minimo:

$$\pi_{pt} = \frac{EALb^2}{2} - \frac{QL^2b}{2} = -\frac{Q^2L^3}{8EA}$$

La funzione di spostamento risulta quindi:

$$u(x) = bx = \frac{QL}{2EA}x$$

e la deformazione risulta costante:

$$\varepsilon(x) = \frac{\partial u}{\partial x} = b = \frac{QL}{2EA}$$

2) Proviamo ad utilizzare due parametri di spostamento:

$$u(x) = bx + cx^2$$

La deformazione risulta: $\frac{\partial u}{\partial x} = b + 2cx$ da cui l'energia potenziale totale risulta:

$$\pi_{pt} = \frac{EA}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \cdot dx - \int_0^L Q \cdot u \cdot dx = \frac{EA}{2} \int_0^L (b + 2cx)^2 \cdot dx - \int_0^L Q \cdot (bx + cx^2) \cdot dx$$

Sviluppando gli integrali abbiamo:

$$\pi_{pt} = \frac{EA}{2} \left[Lb^2 + 2bcL^2 + \frac{4}{3}c^2L^3 \right] - \frac{QL^2}{2}b - \frac{QL^3}{3}c$$

Derivando l'energia potenziale totale rispetto ai parametri di spostamento abbiamo:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_{pt}}{\partial b} = \frac{EA}{2} [2Lb + 2L^2c] - \frac{QL^2}{2} = 0 \\ \frac{\partial \pi_{pt}}{\partial c} = \frac{EA}{2} \left[2L^2b + \frac{8}{3}L^3c \right] - \frac{QL^3}{3} = 0 \end{cases}$$

In forma matriciale abbiamo:

$$\frac{EA}{2} \begin{bmatrix} 2L & 2L^2 \\ 2L^2 & \frac{8}{3}L^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} QL^2/2 \\ QL^3/3 \end{Bmatrix}$$

Risolvendo abbiamo:



$$b = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} \frac{QL^2}{2} & EAL^2 \\ \frac{QL^3}{3} & \frac{4}{3}EAL^3 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} EA & 2L & 2L^2 \\ 2L^2 & \frac{8}{3}L^3 \end{bmatrix}\right)} = \frac{QL}{EA} ; \quad c = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} EAL & \frac{QL^2}{2} \\ EAL^2 & \frac{QL^3}{3} \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} EA & 2L & 2L^2 \\ 2L^2 & \frac{8}{3}L^3 \end{bmatrix}\right)} = \frac{-Q}{2EA}$$

da cui il campo di spostamento risulta: $u(x) = bx + cx^2 = \frac{QL}{EA}x - \frac{Q}{2EA}x^2 = \frac{Qx}{2EA}(2L - x)$ ed il campo della deformazione: $\varepsilon(x) = b + 2cx = \frac{QL}{EA} - \frac{Q}{EA}x = \frac{Q}{EA}(L - x)$. I due risultati coincidono con quelli teorici.

Consideriamo la mensola della figura 7.7.1, e trascuriamo i carichi termici, i carichi distribuiti e la deformazione causata dal taglio. Ricordando l'equazione della linea elastica:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d\vartheta}{dx} = \frac{M(x)}{E \cdot I} \quad \text{da cui} \quad d\vartheta = \frac{M(x)}{E \cdot I} \cdot dx$$

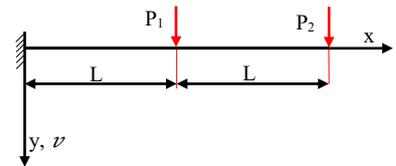


Fig. 7.7.1

L'energia potenziale totale vale:

$$\pi_{pt} = \int \frac{1}{2} \cdot M \cdot d\vartheta - \sum P_i \cdot v_i = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{E \cdot I} \cdot dx - \sum P_i \cdot v_i = \int \frac{E \cdot I}{2} \cdot \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 \cdot dx - \sum P_i \cdot v_i \quad [7.7.3]$$

Imponiamo a priori un campo di spostamento di tipo polinomiale:

$$v(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots + a_n \cdot x^n \quad [7.7.4]$$

Poiché nel punto di coordinata $x = 0$ la mensola è incastrata, il campo di spostamento ammissibile deve essere tale per cui, in $x = 0$ deve valere: $v = dv/dx = 0$, di conseguenza i coefficienti a_0 e a_1 devono essere nulli. La derivata prima e seconda del campo di spostamento valgono rispettivamente:

$$\frac{dv(x)}{dx} = 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + \dots + n \cdot a_n \cdot x^{(n-1)} \quad [7.7.5]$$

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot x + \dots + n \cdot (n - 1) \cdot a_n \cdot x^{(n-2)} \quad [7.7.6]$$

Nel punto di coordinata $x = L$, dove è applicata la prima forza, lo spostamento vale:

$$v(x = L) = a_2 \cdot L^2 + a_3 \cdot L^3 + \dots + a_n \cdot L^n$$

Nel punto di coordinata $x = 2L$, dove è applicata la seconda forza, lo spostamento vale:

$$v(x = 2L) = a_2 \cdot (2L)^2 + a_3 \cdot (2L)^3 + \dots + a_n \cdot (2L)^n$$

Sostituendo nella eq.7.7.3 abbiamo:

$$\pi_{pt} = \frac{E \cdot I}{2} \cdot \int_0^{2L} (2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot x + \dots + n \cdot (n - 1) \cdot a_n \cdot x^{(n-2)})^2 \cdot dx - P_1 \cdot [a_2 \cdot L^2 + a_3 \cdot L^3 + \dots + a_n \cdot L^n] - P_2 \cdot [a_2 \cdot (2L)^2 + a_3 \cdot (2L)^3 + \dots + a_n \cdot (2L)^n] \quad [7.7.7]$$

Se ci limitiamo ad esaminare il primo termine (cioè poniamo $a_3 = a_4 = \dots = a_n = 0$) abbiamo:

$$\pi_{pt} = \frac{E \cdot I}{2} \cdot \int_0^{2L} 4 \cdot a_2^2 \cdot dx - P_1 \cdot [a_2 \cdot L^2] - P_2 \cdot [a_2 \cdot (2L)^2] = 4a_2^2 \cdot EIL - a_2P_1L^2 - 4P_2L^2a_2$$

da cui:

$$\frac{\partial \pi_{pt}}{\partial a_2} = 8a_2 \cdot EIL - P_1L^2 - 4P_2L^2 = 0$$

da cui:

$$a_2 = \frac{(P_1 + 4P_2) \cdot L}{8EI}$$

Quindi il campo di spostamento risulta:

$$v(x) = \frac{(P_1 + 4P_2) \cdot L}{8EI} \cdot x^2$$

Ricordando che il momento flettente vale: $M(x) = EI \frac{d^2v(x)}{dx^2}$, possiamo scrivere:



$$M(x) = 2 \cdot a_2 \cdot E \cdot I = \frac{(P_1 + 4P_2)L}{4}$$

Il momento flettente risulta costante, indipendente dalla coordinata x .

Usando i primi due termini, cioè a_2 e a_3 abbiamo:

$$\pi_{pt} = \frac{EI}{2} \int_0^{2L} [2a_2 + 6a_3x]^2 dx - P_1(a_2L^2 + a_3L^3) - P_2[a_2(2L)^2 + a_3(2L)^3]$$

da cui:
$$\pi_{pt} = \frac{EI}{2} \int_0^{2L} [4a_2^2 + 24a_2a_3x + 36a_3^2x^2] dx - a_2L^2(P_1 + 4P_2) - a_3L^3(P_1 + 8P_2)$$

ed integrando:
$$\pi_{pt} = EI[4La_2^2 + 24L^2a_2a_3 + 48L^3a_3^2] - a_2L^2(P_1 + 4P_2) - a_3L^3(P_1 + 8P_2)$$

I coefficienti a_2 e a_3 che rendono stazionario π_{pt} sono determinati risolvendo il seguente sistema di due equazioni algebriche:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_{pt}}{\partial a_2} = EI(8La_2 + 24L^2a_3) - L^2(P_1 + 4P_2) = 0 \\ \frac{\partial \pi_{pt}}{\partial a_3} = EI(24L^2a_2 + 96L^3a_3) - L^3(P_1 + 8P_2) = 0 \end{cases}$$

che in forma matriciale diventa:

$$EI \begin{bmatrix} 8L & 24L^2 \\ 24L^2 & 96L^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L^2(P_1 + 4P_2) \\ L^3(P_1 + 8P_2) \end{Bmatrix}$$

da cui:
$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} L^2(P_1+4P_2) & 24L^2 \\ L^3(P_1+8P_2) & 96L^3 \end{vmatrix}}{EI \begin{vmatrix} 8L & 24L^2 \\ 24L^2 & 96L^3 \end{vmatrix}} = \frac{96L^5(P_1+4P_2) - 24L^5(P_1+8P_2)}{EI(768L^4 - 576L^4)} = \frac{(3P_1+8P_2)L}{8EI}$$

$$a_3 = \frac{\begin{vmatrix} 8L & L^2(P_1+4P_2) \\ 24L^2 & L^3(P_1+8P_2) \end{vmatrix}}{EI \begin{vmatrix} 8L & 24L^2 \\ 24L^2 & 96L^3 \end{vmatrix}} = \frac{8L^4(P_1+8P_2) - 24L^4(P_1+4P_2)}{192EI L^4} = -\frac{P_1+2P_2}{12EI}$$

La freccia, l'inclinazione della mensola ed il momento flettente valgono rispettivamente:

$$v(x) = \frac{x^2}{4EI} \left[\frac{(3P_1+8P_2)L}{2} - \frac{P_1+2P_2}{3} x \right]$$

$$\vartheta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = \frac{x}{4EI} \left[(3P_1 + 8P_2)L - \frac{P_1+2P_2}{9} x \right]$$

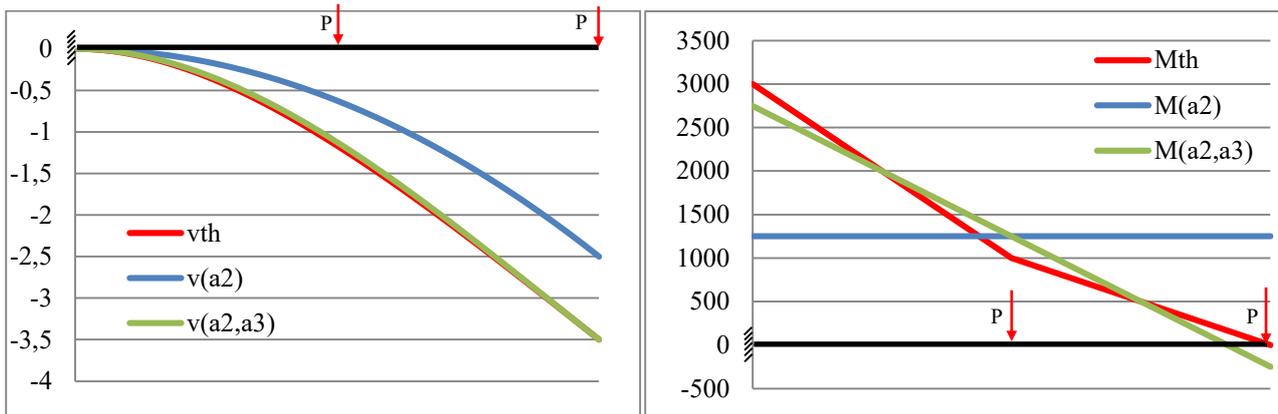
$$M(x) = EI \frac{d^2v(x)}{dx^2} = EI(2a_2 + 6a_3x) = \left(\frac{(3P_1+8P_2)L}{4} - \frac{P_1+2P_2}{2} x \right)$$

Nel caso in cui le forze esterne fossero identiche, cioè $P_1 = P_2 = P$, la freccia teorica varrebbe:

a) Per $0 \leq x \leq L$
$$v_{teorico}(x) = \frac{Px^2}{EI} \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{2}L \right)$$

b) Per $L \leq x \leq 2L$
$$v_{teorico}(x) = \frac{P}{EI} \left(\frac{x^3}{6} - Lx^2 - \frac{L^2}{2}x + \frac{L^3}{6} \right)$$

Nei seguenti grafici e tabelle riportiamo il confronto tra i valori teorici e quelli calcolati utilizzando solo un parametro (a_2) oppure due parametri (a_2, a_3).



x	$v_{teorico}$	$v_{calc}(a_2)$	$Err(a_2)$	$v_{calc}(a_2, a_3)$	$Err(a_2, a_3)$
L	$\frac{7PL^3}{6EI}$	$\frac{5PL^3}{8EI}$	46.4 %	$\frac{9PL^3}{8EI}$	-3.57 %
$2L$	$\frac{7PL^3}{2EI}$	$\frac{5PL^3}{2EI}$	-28.57 %	$\frac{7PL^3}{2EI}$	0.0 %

Tab.7.7.1 – Confronto tra valori teorici e calcolati della freccia, usando uno o due parametri.

x	$M_{teorico}$	$M_{calc}(a_2)$	$Err(a_2)$	$M_{calc}(a_2, a_3)$	$Err(a_2, a_3)$
0	$3PL$	$\frac{5PL}{4}$	-58.3 %	$\frac{11PL}{4}$	-8.3 %
L	PL	$\frac{5PL}{4}$	25 %	$\frac{5PL}{4}$	25 %
$2L$	0	$\frac{5PL}{4}$	-	$-\frac{PL}{4}$	-

Tab.7.7.2 – Confronto tra valori teorici e calcolati del momento flettente, usando uno o due parametri.

Come si può osservare, passando da un solo parametro a due, i risultati migliorano in modo significativo, specie nei valori della freccia elastica che con due parametri risulta quasi identica a quella teorica; viceversa i valori del momento flettente calcolato risultano ancora affetti da un errore non trascurabile.

7.8 Ulteriori commenti sul metodo di Ritz-Rayleigh

A questo punto si possono avanzare due domande molto importanti.

- Come scegliere le funzioni di spostamento (negli esempi precedenti di tipo polinomiale)?
- Quanto sarà corretta la soluzione?

Come indicato precedentemente, le funzioni di prova devono essere continue e devono soddisfare le condizioni al contorno di tipo cinematico. A parte questo, sembra che non ci sia una regola semplice e precisa che ci indichi quale tipo di funzione scegliere e a che punto terminare la serie.

Immaginiamo di ripetere diverse volte il processo di Ritz-Rayleigh, aggiungendo ogni volta un termine alla serie delle funzioni di tentativo. In questo modo generiamo una sequenza di approssimazioni che converge verso il valore esatto dell'energia potenziale π_{pt} . Se il limite di questa sequenza è il valore esatto di π_{pt} , è ragionevole aspettarsi che il limite della corrispondente successione delle funzioni di spostamento sia la funzione di spostamento esatta. Per assicurarsi la convergenza verso il valore esatto di π_{pt} è necessario che le funzioni di prova siano "relativamente complete". Ciò si ottiene se man mano che si aggiungono dei termini alle funzioni di prova, queste approssimano sempre meglio la funzione esatta e le sue derivate che compaiono nel π_{pt} . Ne segue che una serie infinita capace di rappresentare entro un dato dominio un qualsiasi campo di spostamento continuo sarà adeguata perché contiene, come caso speciale, le funzioni esatte.



Possiamo affermare che le funzioni di forma dovrebbero essere troncate eliminando i termini di ordine più elevato invece che quelli di ordine più basso. Un argomento a conferma di questa affermazione è il seguente. Supponiamo che la mensola sia caricata da un momento applicato nel suo punto estremo. Lo spostamento esatto ha la forma $v(x) = a_2 \cdot x^2$. Infatti se usiamo come funzione di prova la seguente:

$$v(x) = a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots + a_n \cdot x^n \quad [7.8.1]$$

otteniamo l'esatto valore per a_2 oltre che $a_3 = \dots = a_n = 0$. Se invece avessimo usato la funzione di prova: $v(x) = a_3 \cdot x^3 + \dots + a_n \cdot x^n$, avremmo approssimato molto bene la funzione esatta $v(x) = a_2 \cdot x^2$, ma solo usando molti coefficienti. Ma come n tende all'infinito, non possiamo garantire la convergenza della serie al valore esatto π_{pt} , perché avere omesso il termine $a_2 \cdot x^2$, impedisce che la serie sia relativamente completa. In questo caso ci si deve aspettare la convergenza verso un valore non corretto di π_{pt} .

Circa il tipo di approssimazione fornita dal metodo di Ritz-Rayleigh, possiamo affermare che la soluzione approssimata è più rigida di quella esatta. La struttura può spostarsi solo nelle forme che si possono ottenere dalla sovrapposizione dei vari termini presenti nella funzione spostamento. La forma esatta dello spostamento è perciò esclusa, tranne in alcuni casi molto semplici ed eccezionali. In pratica abbiamo aggiunto dei vincoli che irrigidiscono la struttura. Questo argomento suggerisce l'osservazione che abbiamo ottenuto la soluzione esatta di un problema diverso; una struttura diversa nelle sue proprietà elastiche o di carico rispetto alla struttura reale ed in realtà creata dal metodo di soluzione.

E' utile riferirci ad un esempio concreto. L'energia potenziale della configurazione di equilibrio, in funzione del carico P e del corrispondente spostamento vale:

$$\pi_{pt} = \frac{1}{2}Pd - Pd = -\frac{1}{2}Pd \quad \text{da cui} \quad d = -\frac{2\pi_{pt}}{P} \quad [7.8.2]$$

Questa relazione è applicabile sia alla struttura reale che a quella creata dalla soluzione approssimata. Se definiamo la rigidezza come $k = P/d$, possiamo scrivere:

$$\text{Rigidezza} = k = \frac{P}{d} = -\frac{P^2}{2\pi_{pt}} \quad [7.8.3]$$

$$\text{Energia di deformazione: } \frac{1}{2}Pd = \frac{1}{2} \frac{P^2}{k} = -\pi_{pt}$$

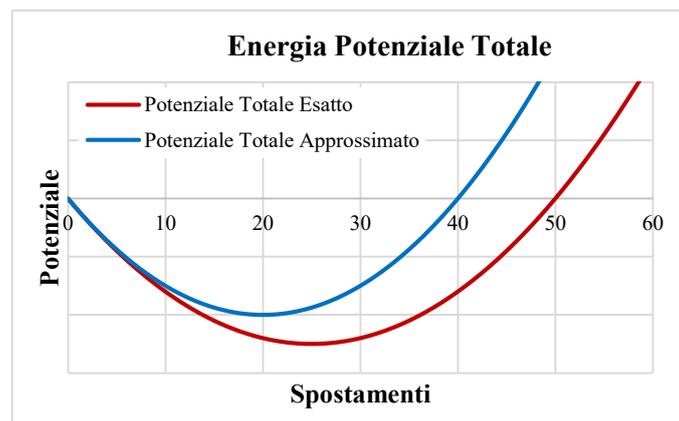


Fig.7.8.1 – Confronto tra l'Energia Potenziale Totale esatta e quella approssimata calcolata con il metodo di Ritz-Rayleigh.

Se la forza P è un dato e lo spostamento che ne risulta è stato calcolato con il metodo di Ritz-Rayleigh, le equazioni (7.8.3) e la figura (7.8.1) indicano che:

- 1) Poiché $d_{calcolato} \neq d_{esatto}$ e $(\pi_{pt})_{esatto}$ è un minimo, allora $(\pi_{pt})_{calcolato} > (\pi_{pt})_{esatto}$. In altre parole, abbiamo ottenuto un limite superiore di π_{pt} . Il valore assoluto di $(\pi_{pt})_{calcolato}$ è troppo piccolo.
- 2) La rigidezza calcolata k è troppo grande, cioè è più grande di quella corretta.



3) L'energia di deformazione calcolata è troppo piccola, cioè è più piccola di quella corretta.

Quando è applicato un solo carico, poiché l'energia di deformazione è sottostimata, possiamo affermare che $(d)_{calcolato} < (d)_{esatto}$. Ma se agiscono numerosi carichi, possiamo solo affermare che è sottostimato il prodotto $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}^T \cdot \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$.

7.9 Forma agli Elementi Finiti del metodo di Ritz-Rayleigh

Consideriamo ancora una volta il problema illustrato nella figura 7.7.1, ma consideriamo il seguente campo di spostamento:

$$\begin{aligned} v(x) &= a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 \quad \text{per } 0 \leq x \leq L \\ v(x) &= a_4 + a_5 \cdot x + a_6 \cdot x^2 + a_7 \cdot x^3 \quad \text{per } L \leq x \leq 2L \end{aligned} \quad [7.9.1]$$

L'applicazione del metodo di Ritz-Rayleigh richiede che le funzioni di spostamento (7.9.1) soddisfino a priori le condizioni al contorno e la compatibilità degli spostamenti. Quindi la prima delle due equazioni deve essere modificata in modo da considerare la presenza dell'incastro: $v(x) = \vartheta(x) = 0$ quando $x = 0$. Inoltre nel punto di coordinata $x = L$, i due polinomi devono garantire la continuità dello spostamento e della rotazione. E' quindi possibile imporre quattro condizioni al contorno che riducono il numero di parametri indipendenti a_0, \dots, a_7 da otto a quattro. Quindi l'equazione 7.7.3:

$$\pi_{pt} = \int \frac{E \cdot J}{2} \cdot \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 \cdot dx - \sum P_i \cdot v_i \quad [7.7.3]$$

esprime l'energia potenziale totale in funzione di soli quattro parametri, come somma di due integrali, uno valido tra l'incastro ed il punto di applicazione della prima forza ($x = L$) e l'altro valido tra L e $2L$. In seguito le quattro equazioni $\partial \pi_{pt} / \partial a_i = 0$ forniscono gli altrettanti valori dei coefficienti a_i . A questo punto, noti i coefficienti delle equazioni (7.9.1) è possibile calcolare completamente il campo degli spostamenti e degli sforzi.

La procedura descritta è una soluzione di Ritz-Rayleigh, ma è anche una soluzione agli elementi finiti in quanto abbiamo usato un'interpolazione locale (per tratti) per rappresentare il campo degli spostamenti. In altre parole, il metodo classico di Ritz-Rayleigh utilizza una singola funzione, talvolta molto complessa, per rappresentare lo spostamento dell'intera struttura; la forma agli elementi finiti dello stesso metodo usa diverse funzioni, normalmente molto semplici, ognuna definita su una piccola porzione della struttura: È QUESTA L'ESSENZA DEL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI.

Una soluzione che si basa sull'eq.(7.9.1) non è completamente soddisfacente. I coefficienti a_1, \dots, a_n non hanno un chiaro significato fisico. Inoltre perché i due polinomi assumano lo stesso valore in $x = L$ è necessario un certo lavoro algebrico. Perciò facciamo ciò che si fa normalmente con gli elementi finiti: scambiamo i coefficienti a_1, \dots, a_n con gli spostamenti nodali. E' questo scambio che rende relativamente semplice automatizzare il metodo e ci consente di scrivere un programma di calcolo automatico applicabile in generale.

Consideriamo una trave rettilinea a sezione costante di rigidezza flessionale pari a EI . I quattro gradi di libertà nodali sono gli spostamenti v_1, v_2 e le rotazioni ϑ_1, ϑ_2 , dove $\vartheta = \partial v / \partial x$. E' ragionevole imporre un campo di spostamento cubico, perché una cubica è definita da quattro parametri:

$$v(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 \quad [7.9.2]$$

Perciò partiamo con l'eq. (7.9.2) e la scriviamo nella forma seguente:

$$v(x) = \{1 \quad x \quad x^2 \quad x^3\} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \{x\}^T \cdot \{a\} \quad [7.9.3]$$

Differenziando abbiamo:

$$\vartheta(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x} = \{0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2\} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad [7.9.4]$$



Quindi usando le seguenti quattro condizioni al contorno:

a) per $x = 0$ $v = v_1$ e $\vartheta = \vartheta_1$

b) per $x = L$ $v = v_2$ e $\vartheta = \vartheta_2$

abbiamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vartheta_1 \\ v_2 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} \quad \text{oppure} \quad [A] \cdot \{a\} = \{d\} \quad [7.9.5]$$

Quindi $v(x)$ può essere espresso non più in funzione dei coefficienti a_0, a_1, a_2, a_3 , ma in funzione dei gradi di libertà nodali $\{d\}$:

$$\{a\} = [A]^{-1} \cdot \{d\} \quad \text{da cui} \quad v(x) = \{x\}^T \cdot \{a\} = \{x\}^T \cdot [A]^{-1} \cdot \{d\} = \{N\} \cdot \{d\} \quad [7.9.6]$$

dove:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix}$$

da cui:

$$\{N\} = \left\{ 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}; \quad x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}; \quad \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}; \quad -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right\} \quad [7.9.7]$$

è un vettore "riga", di dimensione 1×4 .

Le funzioni che compaiono all'interno del vettore $\{N\}$ si chiamano FUNZIONI DI FORMA.

Per il momento abbiamo solo iniziato la procedura di soluzione, in quanto l'equazione (7.9.6) semplicemente definisce il campo di spostamento imposto $v = v(x)$ in funzione dei parametri $\{d\}$. Ma i passi successivi sono semplici e verranno illustrati con un esempio.

Vediamo come possiamo risolvere con una procedura agli elementi finiti l'esempio già illustrato e risolto con il metodo di Ritz-Rayleigh.

Il problema precedente è illustrato a lato con i gradi di libertà adeguati per una soluzione agli elementi finiti. Le condizioni al contorno in $x = 0$ sono soddisfatte ponendo $v_1 = \vartheta_1 = 0$ e ciò può essere fatto dopo avere assemblato le equazioni algebriche che governano il problema. La continuità degli spostamenti nel nodo n.2 è imposta dall'uso di v_2 e ϑ_2 come gradi di libertà dei due elementi che si uniscono nel nodo n.2.

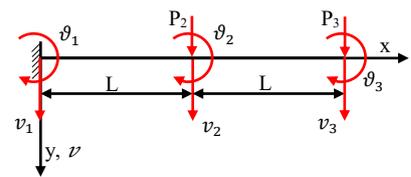


Fig.7.9.1

Rimangono quattro gdl da calcolare imponendo la condizione $\delta\pi_{pt} = 0$, come è già stato fatto con la soluzione che si basava sull'eq.(7.8.1); in realtà le curve $v = v(x)$ definite con le due soluzioni sono esattamente le stesse. Poiché:

$$v(x) = \{N\} \cdot \{d\} = \left\{ 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}; \quad x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}; \quad \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}; \quad -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right\} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vartheta_1 \\ v_2 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix}$$

e

$$\vartheta(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x} = \left\{ -\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3}; \quad 1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2}; \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3}; \quad -\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \right\} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vartheta_1 \\ v_2 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix}$$

la curvatura dell'elemento vale:



$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = \left\{ \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right\} \cdot \{d\} = \left\{ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}; \quad -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}; \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}; \quad -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} = [B] \cdot \{d\}$$

dove
$$[B] = \left[-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}; \quad -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}; \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}; \quad -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right]$$

è una matrice di dimensione 1×4 .

L'energia potenziale del sistema vale:

$$\pi_{pt} = \frac{1}{2} \cdot \{d\}_1^T \cdot \left[\int_0^L [B]^T \cdot E \cdot I \cdot [B] \cdot dx \right] \cdot \{d\}_1 + \frac{1}{2} \cdot \{d\}_2^T \cdot \left[\int_0^L [B]^T \cdot E \cdot I \cdot [B] \cdot dx \right] \cdot \{d\}_2 - P_2 \cdot v_2 - P_3 \cdot v_3$$

in cui:

$$\{d\}_1^T = \{v_1 \quad \vartheta_1 \quad v_2 \quad \vartheta_2\} \quad \text{e} \quad \{d\}_2^T = \{v_2 \quad \vartheta_2 \quad v_3 \quad \vartheta_3\}$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\int_0^L [B]^T \cdot EI \cdot [B] \cdot dx$$

che rappresenta la matrice di rigidezza $[k_e]$ dell'elemento. Ponendo $EI = cost$ fuori dall'integrale abbiamo:

$$[k_e] = E \cdot I \int_0^L \begin{Bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{Bmatrix} \left\{ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}; \quad -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}; \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}; \quad -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right\} dx$$

da cui è possibile ricavare i coefficienti della matrice di rigidezza elementare:

$$k_{11} = EI \int_0^L \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right)^2 dx = EI \int_0^L \left(\frac{36}{L^4} - \frac{144x}{L^5} + \frac{144x^2}{L^6} \right) dx = \frac{12EI}{L^3}$$

$$k_{12} = EI \int_0^L \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) dx = EI \int_0^L \left(\frac{24}{L^3} - \frac{36x}{L^4} - \frac{48x}{L^4} + \frac{72x^2}{L^5} \right) dx = \frac{6EI}{L^2}$$

$$k_{13} = EI \int_0^L \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) dx = -EI \int_0^L \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right)^2 dx = -k_{11}$$

$$k_{14} = EI \int_0^L \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) dx = EI \int_0^L \left(\frac{12}{L^3} - \frac{60x}{L^4} + \frac{72x^2}{L^5} \right) dx = \frac{6EI}{L^2}$$

$$k_{22} = EI \int_0^L \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right)^2 dx = EI \int_0^L \left(\frac{16}{L^2} - \frac{48x}{L^3} + \frac{36x^2}{L^4} \right) dx = \frac{4EI}{L}$$

$$k_{23} = EI \int_0^L \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) dx = -k_{12}$$

$$k_{24} = EI \int_0^L \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) dx = EI \int_0^L \left(\frac{8}{L^2} - \frac{36x}{L^3} + \frac{36x^2}{L^4} \right) dx = \frac{2EI}{L}$$



$$k_{33} = EI \int_0^L \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right)^2 dx = k_{11}$$

$$k_{34} = EI \int_0^L \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) dx = -k_{14}$$

$$k_{44} = EI \int_0^L \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right)^2 dx = EI \int_0^L \left(\frac{4}{L^2} - \frac{24x}{L^3} + \frac{36x^2}{L^4} \right) dx = \frac{4EI}{L}$$

In sintesi:

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & 4EI & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

In questo esempio ogni elemento $[k_e]$ è una matrice 4×4 e poiché i due elementi sono uguali abbiamo $[k_e] = [k]_1 = [k]_2$. L'assemblaggio delle due matrici dà origine alla seguente matrice globale:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} + k_{11} & k_{34} + k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} + k_{21} & k_{44} + k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ 0 & 0 & k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ 0 & 0 & k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

Così, dato lo spostamento dei nodi della struttura : $\{D\}^T = \{v_1 \ \vartheta_1 \ v_2 \ \vartheta_2 \ v_3 \ \vartheta_3\}$, possiamo scrivere:

$$\pi_{pt} = \frac{1}{2} \{D\}^T \cdot \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} + k_{11} & k_{34} + k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} + k_{21} & k_{44} + k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ 0 & 0 & k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ 0 & 0 & k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \cdot \{D\} - \{D\}^T \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_2 \\ 0 \\ P_3 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \{D\}^T \cdot [K] \cdot \{D\} - \{D\}^T \cdot \{F\}$$

Il sistema di sei equazioni: $\left\{ \frac{\partial \pi_{pt}}{\partial d} \right\} = \{0\}$

consente di calcolare il vettore $\{D\}$ che rende π_{pt} stazionario:

$$\frac{\partial \pi_{pt}}{\partial D} = [K] \cdot \{D\} - \{F\} = \{0\}$$

Prima di risolvere il sistema è necessario inserire i vincoli: in caso contrario la matrice risulterebbe singolare. Poiché il nodo n.1 è incastrato abbiamo che $v_1 = \vartheta_1 = 0$, quindi:

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} + k_{11} & k_{34} + k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ 0 & 0 & k_{43} + k_{21} & k_{44} + k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ 0 & 0 & k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ 0 & 0 & k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$



Sostituendo i valori calcolati ed eliminando le prime due righe e le prime due colonne abbiamo:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \vartheta_2 \\ v_3 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_2 \\ 0 \\ P_3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Risolto il sistema e noti gli spostamenti nodali, ricordando che:

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = \left\{ \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right\} \cdot \{d\} = \left\{ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}; \quad -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}; \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}; \quad -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vartheta_1 \\ v_2 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix}$$

possiamo calcolare il momento flettente in ogni punto della trave e ricavare quindi il campo degli sforzi.

La procedura necessaria al calcolo della matrice di rigidezza dell'elemento "trave" può essere automatizzata sfruttando le capacità del calcolo simbolico di MATLAB. Qui di seguito vengono riportati i comandi necessari:

```

% *****
% *** CALCOLO DELLE FUNZIONI DI FORMA SIMBOLICHE E DELLA MATRICE DI ***
% *** RIGIDEZZA SIMBOLICA DELL'ELEMENTO BEAM PIANO A DUE NODI E DUE ***
% *** GRADI DI LIBERTA' PER NODO (secondo la teoria di Eulero-Bernoulli) ***
% *****
syms L x A Ainv EI
syms N Theta v B K
syms s v1 thetal v2 theta2

s = [v1; thetal; v2; theta2]; % Vettore degli spostamenti nodali
A = [1 0 0 0;
     0 1 0 0;
     1 L L^2 L^3;
     0 1 2*L 3*L^2];
Ainv = inv(A);

X = [1 x x^2 x^3];

N = X*Ainv; % Funzioni di forma
dN = [0 1 2*x 3*x^2]*Ainv; % Derivata prima delle Funzioni di Forma
B = [0 0 2 6*x]*Ainv; % Derivata seconda delle Funzioni di Forma

v = N*s; % Spostamento del punto alla coordinata x
Theta = dN*s; % Rotazione del punto alla coordinata x
eps = B*s; % Deformata alla coordinata x

K = EI*int(B'*B,x,0,L); % Matrice di rigidezza elementare

```